

MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta



Bakalářská práce

STUDIUM BAREVNÝCH INDEXŮ
EXTRAGALAKTICKÝCH
OBJEKTŮ

TEREZA JEŘÁBKOVÁ

BRNO 2009

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně, s pomocí
vedoucího mé práce a uvedených zdrojů.

Brno, dne

Tereza Jeřábková

Chtěla bych opravdu vřele poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, Filipu Hrochovi, že byl trpělivý a vždy ochotný pomoci a poradit, Jardovi za veškerou technickou podporu a pomoc a mým nejbližším, kteří se mnou byli po celou dobu psaní této epochální práce.

Mé díky také patří následujícím institucím, bez jejichž dat by tato práce nemohla vzniknout.

Funding for the SDSS and SDSS-II has been provided by the Alfred P. Sloan Foundation, the Participating Institutions, the National Science Foundation, the U.S. Department of Energy, the National Aeronautics and Space Administration, the Japanese Monbukagakusho, the Max Planck Society, and the Higher Education Funding Council for England. The SDSS Web Site is <http://www.sdss.org/>.

The SDSS is managed by the Astrophysical Research Consortium for the Participating Institutions. The Participating Institutions are the American Museum of Natural History, Astrophysical Institute Potsdam, University of Basel, University of Cambridge, Case Western Reserve University, University of Chicago, Drexel University, Fermilab, the Institute for Advanced Study, the Japan Participation Group, Johns Hopkins University, the Joint Institute for Nuclear Astrophysics, the Kavli Institute for Particle Astrophysics and Cosmology, the Korean Scientist Group, the Chinese Academy of Sciences (LAMOST), Los Alamos National Laboratory, the Max-Planck-Institute for Astronomy (MPIA), the Max-Planck-Institute for Astrophysics (MPA), New Mexico State University, Ohio State University, University of Pittsburgh, University of Portsmouth, Princeton University, the United States Naval Observatory, and the University of Washington.

This research has made use of the SIMBAD database, operated at CDS, Strasbourg, France.

Abstrakt

Cílem této práce je základní pochopení stavby aktivních galaxií a fyzikálních dějů v nich probíhajících. Jsou zde popsány jejich objevy i rozdělení podle vlastností. Krátce se také věnuje vzájemnému vzdalování extragalaktických objektů a základům fotometrie. Hlavní část je zaměřena na studium barevných indexů objektů BL Lac a jejich barevné (colour-colour, colour-magnitude) diagramy.

Klíčová slova: aktivní galaxie, AGN, barevný diagram, barevný index, BL Lac objekt, černá díra, Hubbleův zákon, netermální emise, SDSS, spektrální index

The purpose of this study was the basic understanding of structure and physical processes in active galaxies. First discoveries are included as well as classification of AGN. Work briefly refers to mutual recession of extragalactic objects and basics of photometry. The main part is focused on studying colour index of BL Lac objects and their colour (colour-colour, colour-magnitude) diagrams.

Keywords: active galaxy, AGN, black hole, BL Lac object, color index, colour-colour diagram, colour-magnitude diagram, Hubble's law, non-thermal emission, SDSS, spectral index

Obsah

1	ÚVOD	6
2	EXTRAGALAKTICKÉ OBJEKTY	7
2.1	První objevy galaxií.....	7
2.2	Aktivní galaxie	7
2.2.1	Seyfertovy galaxie.....	8
2.2.2	Markarianovy galaxie.....	9
2.2.3	Rádiové galaxie	9
2.2.4	Quasary.....	9
2.2.5	Blazary.....	9
2.3	Vzdalování extragalaktických objektů	9
2.4	Černé díry	11
3	VYSOKOENERGETICKÉ PROCESY	12
3.1	Synchrotronové záření.....	12
3.2	Comptonův jev	14
3.3	Inverzní Comptonův jev	16
4	FOTOMETRIE AGN	17
4.1	Fotometrické systémy.....	17
4.2	Hvězdné velikosti	18
4.3	Barevný diagram	19
5	PRAKTICKÁ ČÁST.....	20
5.1	Získání spekter	20
5.2	Zpracování dat.....	22
5.3	Grafy.....	25
6	ZÁVĚR.....	27
	Použitá literatura.....	28

1 ÚVOD

Vesmír byl odpradáвна mystickým místem plným tajemství a záhad. Každá kultura a každá národnost si to, co viděla v noci nad hlavou, interpretovala jinak. Pro někoho byly hvězdy ztotožněním bohů, jiní je považovali za stálice. Neměnné objekty, které na nebi vždy byly, jsou a vždy budou. Naše planeta byla středem všeho bytí a ty, které v raných dobách napadla myšlenka, že naše Země je jen součástí něčeho většího, stihl krutý trest. Až postupem času a nelehkými kroky se lidstvo dopracovalo k dnešnímu věděni o celém vesmíru. Dnes už lidé v noci nehledí na sféry nad hlavou, tedy jakési slupky, na kterých jsou postupně umístěny naše Slunce, planety a hvězdy. Dnes již všichni hledí do dálav a hlubin tajuplného světa. Víme, že planety obíhají okolo hvězd, umíme říct, jak se která hvězda bude dál vyvíjet, dovedeme to i matematicky popsat. Víme toho hodně. Ale většina nám i dnes, v tak technologicky rozvinuté době, zůstává o vesmíru skryta.

Jedním z takto záhadných objektů jsou aktivní galaxie, jejichž jasnost je větší než u normálních galaxií, které svítí světlem svých hvězd. Laicky řečeno, svítí víc, než by měly. V současné době už máme jakousi představu, jak je to možné, není však vyloučeno, že mocný a nekonečný vesmír pro nás připravil sousto větší, než které dovedeme spolknout. A tak následující kapitoly budou věnovány těmto vesmírným tvorům, jejich první objevům, klasifikaci, popisu dějů v nich probíhajících a studiu jejich barev.

2 EXTRAGALAKTICKÉ OBJEKTY

Do dálav a hlubin vesmíru hleděli tvorové chodící po této zemi odjakživa. Ať to byli pravěcí lidé, vyspělí Řekové, záhadami obestřeni Májové, nebo obyčejní smrtelníci 19. století. Kolik z nich si však dovedlo představit, jak je vesmír ve skutečnosti veliký? Kolik z nich napadlo, že za námi viditelnými hvězdami se rozprostírají nekonečné prostory obsahující daleko víc hvězd, než kolik jich my vidíme v noci?

2.1 První objevy galaxií

Charles Messier byl francouzský astronom hledající v 18. století nové komety. Při pátrání, kdy pečlivě prohlížel oblohu kousek po kousku, však často narážel na mlhavé obláčky, které nebyly kometami, jeho pátrání mu však značně komplikovaly a mátlly ho. Vytvořil tedy katalog, kde všechny tyto objekty vyznačil. Jeho katalog se používá dodnes a objekty jsou označovány písmenem M, za nímž následuje číslo (např. M 31 je známá galaxie v Andromedě). Přestože tento seznam obsahoval plynné mlhoviny, kulové i otevřené hvězdokupy a dokonce cizí galaxie, sám Messier neměl ponětí, že hledí mimo tu naši. [1]

Až do 20. let 20. století totiž většina astronomů pochybovala, že by se něco mohlo nacházet za hranicí Galaxie a byla přesvědčena, že všechny mlhoviny viditelné na nebi jsou oblaka prachu. I přes to se objevilo několik odvážlivců, kteří razili názor, že existuje spousta dalších objektů podobných naší Galaxii. Tuto domněnku podporoval i William Herschel, který ale změnil názor poté, co jednu z mlhovin identifikoval jako planetární, našel v ní pouze jednu jedinou hvězdu. Až do minulého století byla tedy za celý vesmír pokládána naše Galaxie.

Bod zlomu nastal v roce 1924, kdy Edwin Hubble díky novému teleskopu na Mount Wilson rozlišil okraje některých blízkých galaxií a identifikoval v nich cefeidy. Bylo rozhodnuto. Naše Galaxie není jediná svého druhu a brzy se ukázalo, že takovýchto objektů leží ve vesmíru miliony a vesmír se najednou rozrostl do obřích rozměrů. [2]

2.2 Aktivní galaxie

V roce 1943 zkoumal Carl Seyfert velké množství nejrůznějších galaxií a zjistil, že spousta jich vykazuje mimořádnou jasnost a má bodové jádro. Normální galaxie svítí světlem miliard hvězd v nich obsažených, jasnost těchto zvláštních objektů však převyšovala celkovou jasnost hvězd řádově.

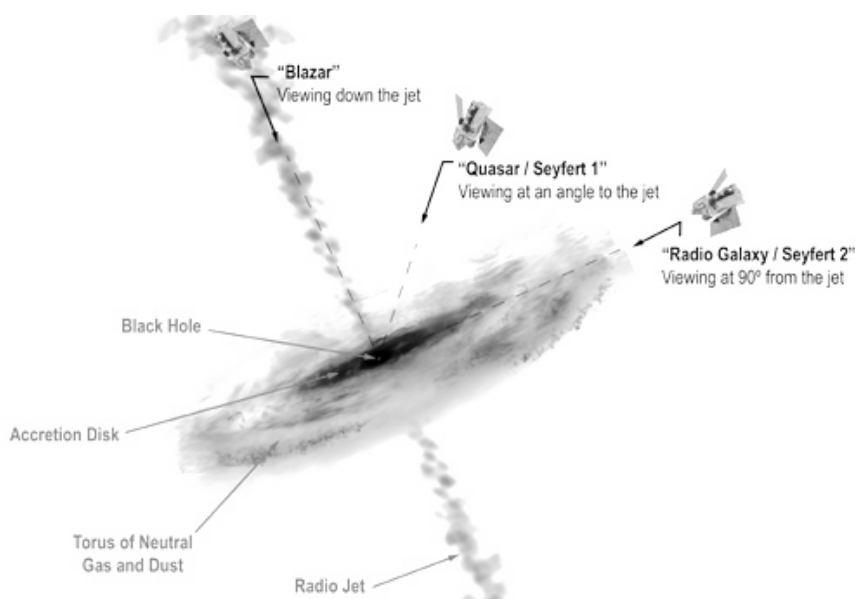
Také spektroskopické výsledky byly velice nečekané. Ve spektrech se totiž nacházely silné a široké emisní čáry, do té doby u galaxií nepozorované. Stejně jako u jasnosti, i spektra galaxií jsou ovlivněny svými hvězdami a absorpční čáry

odpovídají čarám hvězd. Kde se ale v těchto galaxiích emisní čáry objevily, bylo záhadou. Byly však dobrým nástrojem k určení vzdálenosti objektů (kapitola 2.3). Díky svým vlastnostem byly tyto objekty nazvány aktivní galaxie nebo zkráceně AGN (active galactic nuclei = aktivní galaktická jádra).

Dobrym vysvětlením dějů uvnitř AGN je model založený na existenci supermasivní černé díry v jádru. Materiál obsažený v galaxii se akumuluje na černou díru, koncentruje se do jedné roviny a vytváří tím tzv. akreční disk. Prach a plyn se přibližuje k černé díře, padá do ní a tím se uvolňuje obrovské množství gravitační energie, což se projevuje prudkými turbulencemi a výtrysky energie (takzvanými jety).

Aktivní galaxie se od těch normálních odlišují v několika vlastnostech: obrovská jasnost a rychlá proměnnost, emisní čáry ve spektrech, netermální emise (viz kapitola 3), jety.

Právě asymetrie tvaru AGN je důvodem, proč ve vesmíru nacházíme různé druhy AGN. Je totiž důležité, jak jsou k nám galaxie natočeny. Pozorované vlastnosti jsou odlišné, hledíme-li přímo do akrečního disku, jet míří v přímém směru k nám, či pozorujeme černou díru pod nějakým úhlem.



Obrázek 2.1 Struktura AGN [8]

2.2.1 Seyfertovy galaxie

Seyfertova skupina byla vůbec první skupinou AGN. Obsahuje běžné spirální galaxie, jejichž spektra však obsahují emisní čáry. Pokud jsou ve spektrech normální a zakázané emisní čáry různě široké, pak se řadí mezi *Seyfert 1*, pokud jsou čáry stejně široké, jedná se o *Seyfert 2*. Existují však i objekty, které tyto vlastnosti kombinují, bylo proto nutné zavést další podskupiny: *1.9* (široké emisní čáry jsou detekovatelné pouze pro čáru H α), *1.8* (široké čáry slabě detekovatelné i pro H- β) a *1.5* (intenzita širokých i úzkých čar je srovnatelná pouze u H β). [9] Téměř všechny Seyfertovy galaxie jsou spirální.

2.2.2 Markarianovy galaxie

Katalog aktivních galaxií vytvořený arménským astronomem B. E. Markarianem. Obsahuje objekty neobvykle jasné v ultrafialové oblasti spektra, dříve považované za samostatnou skupinu aktivních galaxií. Dnes je to spíše směs AGN různých druhů (asi 5% jsou Seyfertovy galaxie).

2.2.3 Rádiové galaxie

Jako rádiové jsou označovány galaxie extrémně jasné v rádiových vlnových délkách. V analogii s galaxiemi ze Seyfertovy skupiny je můžeme rozdělit na *BLRG* (*broad-line radio galaxy*), které jsou obdobou Seyfert 1 a *NLRG* (*narrow-line radio galaxy*), které jsou obdobou Seyfert 2. Na rozdíl od Seyfertů, žádná galaxie ze silných rádiových zdrojů není spirální.

2.2.4 Quasary

S narůstajícím počtem rádiových zdrojů objevených v 50. letech bylo záhodno tyto objekty opticky identifikovat. Emisní čáry však neodpovídaly ani žádnému prvku ani molekule, jejich identifikaci komplikoval fakt, že čáry byly několikrát posunuty. Zdroje byly proto označeny jako quasi-stelární, tedy hvězdám podobné. Slovní spojení *quasi-stellar radio sources* (*QSRs*) dalo za vznik názvu quasary. Z rudých posuvů dnes víme, že jsou to objekty ve vesmíru nám nejvzdálenější, tedy objekty raného vesmíru. Ne všechny ale mají stejné vlastnosti. Některé vyzařují v rádiové oblasti hodně, pak patří mezi *radio-loud quasary* (*QSR*), jiné zde vyzařují méně a tato skupina se označuje jako *radio-quiet quasary* = *quasi-stellar objects* (*QSO*).

2.2.5 Blazary

Blazary jsou objekty s prudkými změnami jasnosti (vůbec nejsilnější proměnnost mezi AGN) a vysokým stupněm lineární polarizace ve viditelném spektru. Prvním objektem této skupiny byla aktivní galaxie ze souhvězdí Lacerta (Ještěrka). Z počátku byla mylně kvůli své vysoké proměnnosti považována za nepravidelnou proměnnou hvězdu a dostala tedy označení pro proměnné hvězdy typické, BL Lac. Pozdější studování jejího spektra však odhalilo vysoký rudý posuv a z hvězdy se stala galaxie. Je podle ní pojmenována podskupina blazarů, *BL Lac objekty*, v jejichž spektrech téměř nejsou viditelné emisní čáry. Druhou podskupinou jsou *optically violently variable quasars* (*OVV quasary*), které jsou jasnější než BL Lac objekty a emisní čáry jsou jasné.

Nápomocnou literaturou k rozdělení aktivních galaxií mi byla [1] a [3].

2.3 Vzdalování extragalaktických objektů

Budeme-li zkoumat spektra jednotlivých galaxií, zjistíme v nich slabé absorpční čáry. Budou odpovídat příslušným prvkům, jejich vlnové délky však budou oproti vlnovým délkám absorpčních čar získaných v pozemských laboratořích posunuty. Tuto zajímavost začal intenzivně studovat Edwin Hubble a jeho spolupracovník Milton Humanson jen několik let po té, co Hubble potvrdil existenci

extragalaktických objektů. Navázali tak na měření a zkoumání dalších astronomů, Jamese E. Keelera, Vesto M. Sliphera a Williama W. Campbella.

Posun vlnové délky interpretovali správně jako důsledek Dopplerova jevu, při němž se mění frekvence, respektive vlnová délka pohybujícího se objektu. Pokud je směr pohybu objektu směrem k pozorovateli, zkracuje se jeho vlnová délka a posouvá se k modrému okraji viditelné části elektromagnetického spektra (viz kapitola 4.1). Tento efekt se nazývá modrý posuv (anglicky blueshift). Pokud je směr pohybu opačný, směrem od pozorovatele, vlnová délka se prodlužuje, posouvá se k červenému okraji spektra a nastává tzv. rudý posuv z (redshift). Zkoumáním bylo zjištěno, že drtivá většina galaxií vykazuje rudý posuv, tedy se od té naší vzdaluje. Výjimku tvoří nám nejbližší galaxie, např. již zmiňovaná M31 v souhvězdí Andromedy. Označíme-li λ vlnovou délkou absorpční čáry daného prvku pořízenou ze spektra galaxie a λ_0 laboratorní vlnovou délkou stejného prvku, platí mezi nimi a rychlostí vzdalování následující vztah:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} = z. \quad (2.1)$$

Tento vztah je přiblížením pro malé rychlosti a je platný pro hodnoty z menší než 0,3. Při větších rychlostech je potřeba užít vztah

$$(1 + z)^2 = \frac{(c+v)}{(c-v)}, \quad (2.2)$$

v opačném případě může vyjít z větší než 1, což by znamenalo pohyb rychlejší než rychlost světla. Nicméně ve velkém počtu případů se počítá se základním vztahem, například jety tedy vykazují takzvaný nadsvětelný pohyb (z je mnohonásobně větší než 1).

Hubble byl přesvědčen o správnosti svých výpočtů vzdáleností galaxií a rozhodl se zjistit vzájemnou závislost s jejich rychlostí. Vynesl tedy své hodnoty pozorování do grafu a byl mile překvapen. Rychlost a vzdálenost galaxií měla lineární závislost a tento vztah je dnes znám jako Hubbleův zákon vzdalování galaxií

$$v = H_0 r. \quad (2.3)$$

Konstanta H_0 se nazývá Hubbleova konstanta a nejnovější pozorování určují její hodnotu na $H_0 = (70,8 \pm 1,6) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. [10] Sám Hubble její velikost přecnil, určil ji na $550 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Tato chyba byla způsobena tím, že jeho vzdálenosti galaxií byly příliš malé. Postupem času se zlepšováním techniky a rozvojem vědy se hodnota zmenšovala až na dnešní hodnotu.

Konstanta určuje vztahem

$$\tau = \frac{1}{H} \quad (2.4)$$

přibližné stáří vesmíru a nebyla stejná ve všech etapách vývoje vesmíru, protože rychlost jeho rozpínání není stabilní. Je to tedy konstanta s časem proměnná a případným dolním indexem se uvádí, k jakému období se udávaná hodnota vztahuje.

2.4 Černé díry

Ať dříve nebo později, každá hvězda jednoho dne ukončí svůj aktivní život. Z některých se stanou neutronové hvězdy, z jiných bílí trpaslíci. Nejzajímavější závěrečné stadium hvězdného vývoje však představují černé díry, které jsou pro aktivní galaxie nejdůležitější. Pokud ve hvězdě proběhly již všechny jaderné procesy, začne její jádro houstnout, až v něm převládne pouze železo. V železném jádře již nemohou probíhat žádné jaderné reakce. Převládne jediná interagující síla a tou je gravitace. Vnější látka hvězdy je vyvržena do prostoru formou výbuchu supernovy, v hmotnějších případech formou hypernovy. Pokud je poloměr jádra menší než Schwarzschildův (limitní gravitační) poloměr

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.5)$$

začne se jádro hroutit samo do sebe, až se zhroutí do singularity, do jediného bodu s nulovým objemem, nekonečnou hustotou, v němž je obsažena celková hmotnost jádra. Zakřiví prostoročas a změní jeho vlastnosti, což se projeví zpomalováním času. Čím blíže k černé díře bychom se nacházeli, tím pomaleji by nám čas plynul.

Sama černá díra od této chvíle nijak nevyzařuje, dá se detekovat pouze díky svému silnému gravitačnímu působení na okolní látku. Ta rotuje okolo a padá do ní, a protože si zachovává svůj rotační moment, vytváří okolo ní takzvaný akreční disk. Veškerá látka, částice i záření, které překročí tzv. obzor událostí (v nerotujících černých dírách je to vzdálenost totožná se Schwarzschildovým poloměrem, u rotujících je poněkud menší), už se nikdy nedostane ven. [2][3]

V centru většiny galaxií se takováto černá díra nachází. V případě aktivních galaktických jader je však situace trochu jiná. Černá díra tu přesahuje hmotnosti 10^5 hmotností Slunce a otázka jejich vzniku je stále záhadou. Jednou z variant je vznik při srážkách dvou galaxií, jinou možností je vznik více hvězd v hustém hvězdném prostředí, které se potom spojí a vytvoří supermasivní hvězdu, jejíž jádro následně podlehně kolapsu.

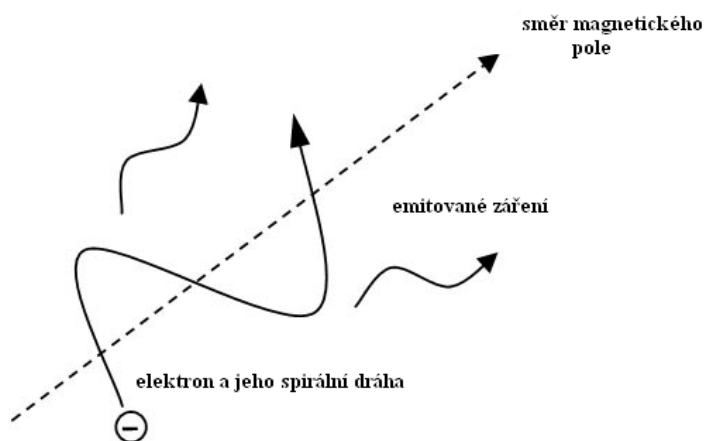
Tím, že černá díra nijak nevyzařuje, se pro nás stává neviditelnou. Nevidíme ji, a proto nemůžeme prohlásit se stoprocentní jistotou, že v centrech aktivních galaxií opravdu existují takovéto objekty. Jsou to pouze modely, které však s neuvěřitelnou přesností popisují, co se v aktivních galaxiích skutečně děje.

3 VYSOKOENERGETICKÉ PROCESY

Abychom mohli z pozorování vesmíru tvořit závěry, je potřeba dobře porozumět, jaké procesy v jednotlivých objektech probíhají. U hvězd má největší podíl na vyzařování termální emise a můžeme je v prvním přiblížení popsat zářením absolutně černého tělesa. U extragalaktických objektů, jako jsou aktivní galaxie, je situace složitější. Světlo, které k nám doputuje, má svůj původ v různých druzích netermální emise, které jsou popsány v následujících podkapitolách.

3.1 Synchrotronové záření

Synchrotronové záření je jedním z typů netermální emise a je způsobeno interakcí magnetického pole s relativistickým elektronem pohybujícím se po spirále okolo siločáry magnetického pole.



Obrázek 3.1 Synchrotronové záření [11]

Na každou elektricky nabitou částici pohybující se v magnetickém poli působí Lorentzova síla, která je úměrná magnetické indukci pole, velikosti náboje částice a její rychlosti.

$$\mathbf{F}_B = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Součin mezi rychlostí a magnetickou indukcí je vektorový, což znamená, že výsledná Lorentzova síla je kolmá na oba tyto vektory. Urychluje (pouze mění směr nikoli velikost!) tedy nabitou částici (v našem případě elektron) mimo směr

její rychlosti, zakřivuje tím jeho dráhu. Velikost Lorentzovy síly musí být proto rovna velikosti dostředivé síly

$$evB = \frac{mv^2}{r}. \quad (3.2)$$

Odtud již lehce vyjádříme poloměr zakřivení, díky kterému určíme frekvenci záření, které daný foton vyzařuje prostřednictvím fotonů

$$v = \frac{v}{2\pi r} = \frac{eB}{2\pi m}. \quad (3.3)$$

Vše výše popsané platí pro cyklotronové záření, které se od synchrotronového liší tím, že ho vytváří klasické elektrony, jejichž rychlost je mnohonásobně menší než rychlost světla. Aby vše platilo i pro synchrotronové záření, musíme do výsledného vzorce započíst relativistický faktor, tzv. Lorentzův gamma faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3.4)$$

Výsledná frekvence synchrotronového záření je potom

$$\nu_s = \gamma^2 v. \quad (3.5)$$

V aktivních galaxiích jsou za zdroj synchrotronového záření považovány jety ze supermasivních černých děr.

Synchrotronní spektrum je kombinací záření jednotlivých relativistických elektronů kroužících okolo magnetických siločar. Výsledné spektrum má charakter tzv. power-law spektra, v závislosti dekadického logaritmu intenzity na dekadickém logaritmu frekvence tedy můžeme vidět klesající přímku (obr. 3.2)

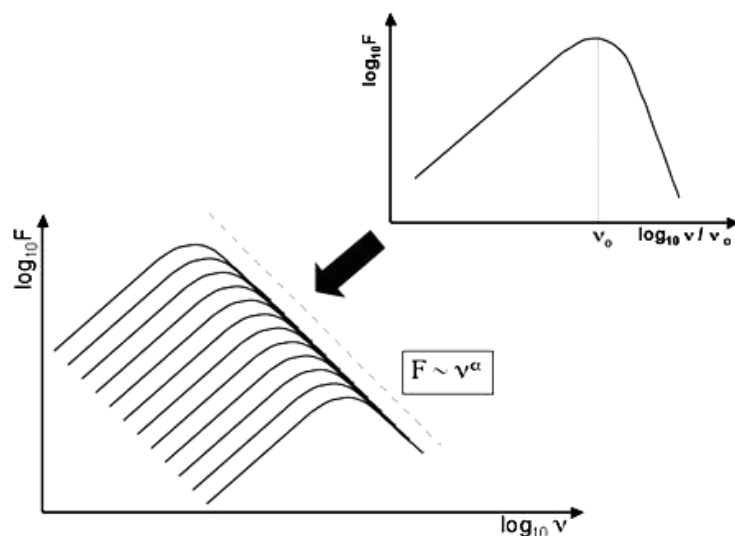
Intenzita takového zdroje se dá vyjádřit jako

$$I = I_0 \lambda^{-\alpha}. \quad (3.6)$$

Koeficient α se nazývá spektrální index a udává, jak moc klesá intenzita s narůstající frekvencí. Pro různé druhy objektů nabývá charakteristických hodnot a podle vzhledu takového spektra můžeme určit, do jaké kategorie zdroj patří a jaké má vlastnosti. Následující tabulka ukazuje hodnoty spektrálních indexů pro různé typy AGN.

Typ objektu	α
rádiová galaxie	-0,7
pulsar	(-3;-2)
AGN	(-1;1)

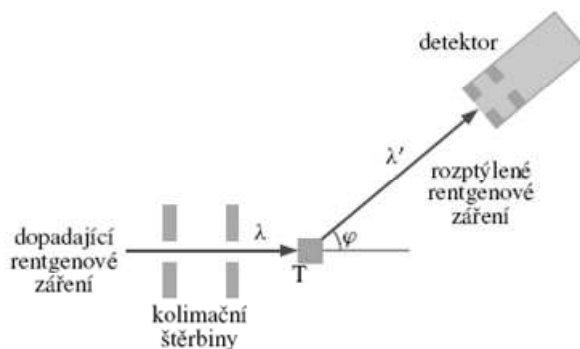
Tabulka 3.1 Hodnoty spektrálních indexů pro různé druhy objektů



Obrázek 3.2 power-law spektrum [12]

3.2 Comptonův jev

Roku 1923 provedl Artur Compton pokus. Monochromatické rentgenové záření o vlnové délce 71,1 pm nechal dopadat na uhlíkový terč a detektorem měřil intenzitu a vlnovou délku záření rozptýleného v různých úhlech, jak je zobrazeno na obr. (3.3).



Obrázek 3.3 Comptonovo zařízení [4]

Překvapující bylo, že pro různé úhly dostával na detektoru různé výsledky. Záření, které prošlo v přímém směru šíření (tzn. nulový úhel φ), bylo beze změny. Ovšem pro zvětšující se úhel φ byly detekovány i další vlnové délky a spektrum dopadajícího záření vykazovalo dva jasné píky (jeden vždy o $\lambda = 71,1$ pm). Čím větší byl úhel, tím byly tyto dva píky dál od sebe.

Jak je to možné? Musíme hledět na dopadající rentgenové záření jako na elektromagnetickou vlnu, avšak musíme mít na paměti, že je to zároveň i proud částic, fotonů. Každý z těchto fotonů o dané vlnové délce λ , má svoji hybnost

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (3.7)$$

a energii

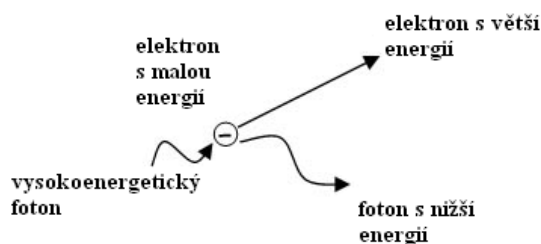
$$E = h\nu = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.8)$$

Foton narazí na elektron v uhlíkatém terči, který není pevně navázán na jádro a předá mu část své energie. Takto rozptýlený foton musí mít tedy menší energii, tzn. menší frekvenci, respektive větší vlnovou délku. Rozdíl původní a rozptýlené vlnové délky se nazývá Comptonův posuv a závisí na úhlu φ vztahem

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi). \quad (3.9)$$

Veličina $h/m_e c$ je po dosazení hmotnosti elektronu konstantní veličinou a nazývá Comptonova vlnová délka elektronu.

Záleží tedy na tom, jestli se foton srazí s elektronem ne příliš jaderně vázaným, který zapříčiní, že se vlnová délka fotonu prodlouží nebo s elektronem navázaným pevně na jádro molekuly uhlíku. V tomto případě totiž musíme do rovnice (3.9) dosadit hmotnost celé molekuly uhlíku, která je mnohonásobně větší než hmotnost samostatného elektronu. Rozdíl vlnových délek je tedy tak malý, že ho našimi přístroji nejsme schopni zaznamenat.

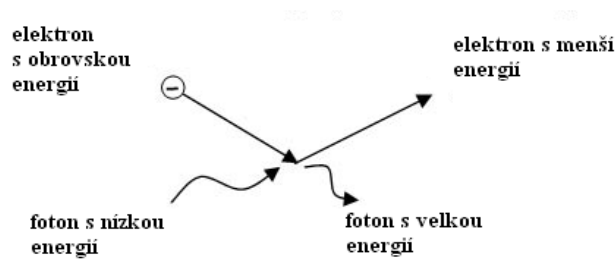


Obrázek 3.4 Comptonův jev – foton ztrácí energii [13]

Obecně při Comptonově jevu dochází k situaci, kdy se foton s obrovskou energií srazí s elektronem s malou energií a předá mu část energie. Sám energii ztratí a elektron se urychlí, v některých případech získá rychlost blízkou rychlosti světla. Comptonův jev je důležitý v oblastech, kde jsou elektrony ponořeny v poli vysokoenergetických fotonů (např. v blízkosti akrečních disků černých děr), kde postupné urychlování elektronů slouží jako „chladící“ proces pro fotony. [1]

3.3 Inverzní Comptonův jev

V astrofyzikálních podmínkách je inverzní Comptonův jev, tedy jev opačný, díky přítomnosti elektronů s vysokými energiemi stejně pravděpodobný. Vysokoenergetický elektron interaguje s fotonem a energie fotonu vzroste právě na úkor energie elektronu. Tento proces je tedy zdrojem energie pro fotony a zároveň „chladícím“ prostředkem pro elektrony.



Obrázek 3.5 Inverzní Comptonův jev - foton získává energii [13]

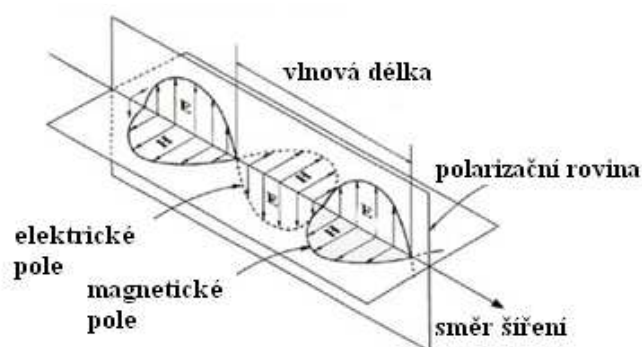
Oba Comptonova jevy a synchrotronové záření k sobě mají velice blízko. Synchrotronové fotony zapřičiňují růst energie elektronů, které okamžitě reagují s magnetickým polem a produkují tak další a další synchrotronové elektrony. Toto nemůže pokračovat do nekonečna. S nárůstem počtu elektronů s tak obrovskými energiemi se samozřejmě zvýší četnost inverzního Comptonova jevu, který tento růst zastaví.

4 FOTOMETRIE AGN

S rozrůstající se skupinou astronomů profesionálů i amatérů bylo důležité dobře porozumět, co je ve skutečnosti světlo dopadající k nám z vesmíru. Je jednoduché o zářícím a naopak téměř neviděném objektu říct, který z nich je jasnější. Vyjádřit ale „o kolik svítí víc“ už tak snadné není. Každý máme jinak citlivý zrak, a proto bylo potřeba zavést určité standardy, podle kterých bychom se mohli orientovat nejen na nebi, ale i v našich výsledcích z pozorování.

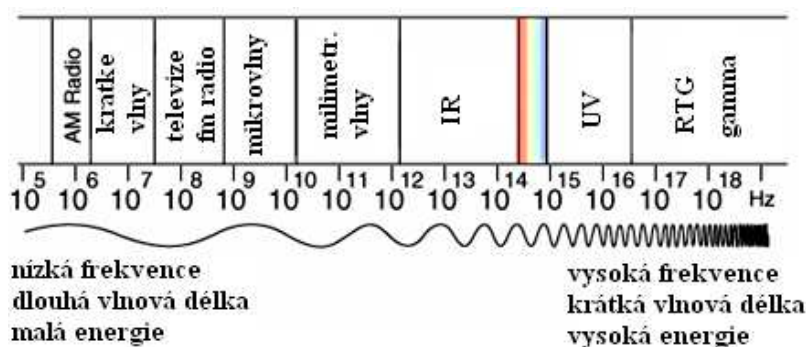
4.1 Fotometrické systémy

Elektromagnetické spektrum je elektromagnetické záření o všech vlnových délkách. Záření je příčným vlněním, jehož složky, vektor magnetické indukce a elektrické intenzity jsou kolmé nejen na sebe navzájem, ale i na směr šíření.



Obrázek 4.1 Šíření elektromagnetického záření [14]

Podle vlnové délky λ , respektive frekvence f , dělíme elektromagnetické záření na několik tzv. oborů tak, jak to ukazuje obrázek 4.2.

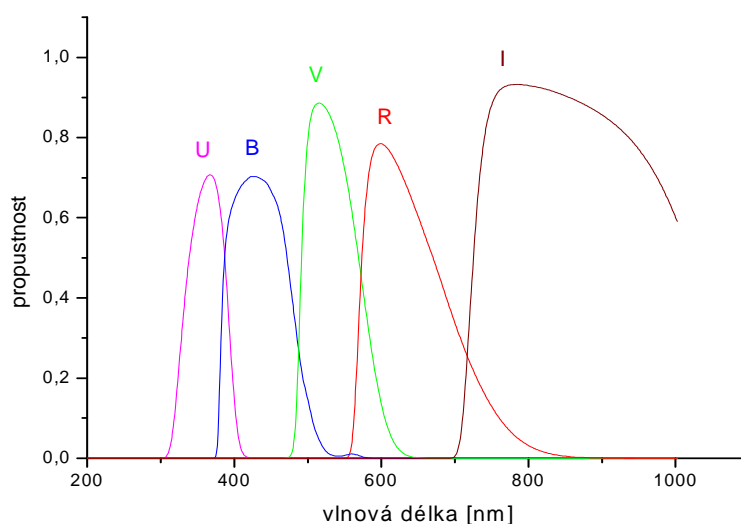


Obrázek 4.2 Elektromagnetické spektrum

Nejkratší vlnovou délku má γ -záření, následuje rentgenové záření (X-rays), ultrafialové záření (UV), viditelné světlo, infračervené záření (IR), mikrovlny, a nejdelší vlnovou délku mají rádiové vlny.

Pokud používáme k měření celý rozsah spektra, pak jde o tzv. bolometrická měření. Zemská atmosféra ovšem stejně jako mezihvězdná látka absorbuje částečně nebo úplně různé spektrální obory a proto je praktické používat filtry, které propouštějí pouze určitou část spektra. Pokud se pozorování provádí ve více filtrech, získáváme tedy výsledky pro různé části spektra, pak hovoříme o takzvaných fotometrických systémech. Existují standardizované systémy, do kterých je potřeba převést měření z vlastních fotometrických systémů, pokud chceme porovnávat své výsledky. Jedním z nejstarších a nejrozšířenějších fotometrických systémů používaných astronomy je Johnson-Morganův systém UBVR, později doplněný na UBVRI. Tento systém je zvolen tak, aby hvězda Vega měla ve všech uvedených filtrech nulovou hvězdnou velikost.

Jiným systémem, který používám ve své práci, je Landoltův fotometrický systém UBVRI. Průběh jednotlivých jeho filtrů je vykreslen v následujícím grafu.



Obrázek 4.3 Landoltovy filtry

4.2 Hvězdné velikosti

Pohlédneme-li na hvězdnou oblohu, zjistíme, že některé hvězdy svítí více než jiné, tzn. jsou jasnější. V astronomii vyjadřujeme jasnost zdroje pomocí fotometrické veličiny zvané hvězdná velikost, jejíž jednotkou jsou magnitudy. Vztah mezi hvězdnou velikostí m a intenzitou I ve vhodném filtru je dán vztahem

$$m - m_0 = -2,5 \log \frac{I}{I_0}. \quad (4.1)$$

Rovnice je známá pod názvem Pogsonova rovnice. Anglický astronom Norman Robert Pogson ji formuloval v roce 1857. Velikost referenční hodnoty intenzity zdroje I_0 závisí na filtru, který používáme; s tím je pak spojen i název hvězdné

velikosti (vizuální, bolometrická,...).

U světelného zdroje můžeme vypočítat tzv. barevný index (color index), což je rozdíl hvězdných velikostí ve dvou rozdílných vlnových délkách, pro které platí $\lambda_1 < \lambda_2$. Pro barevný index pak platí

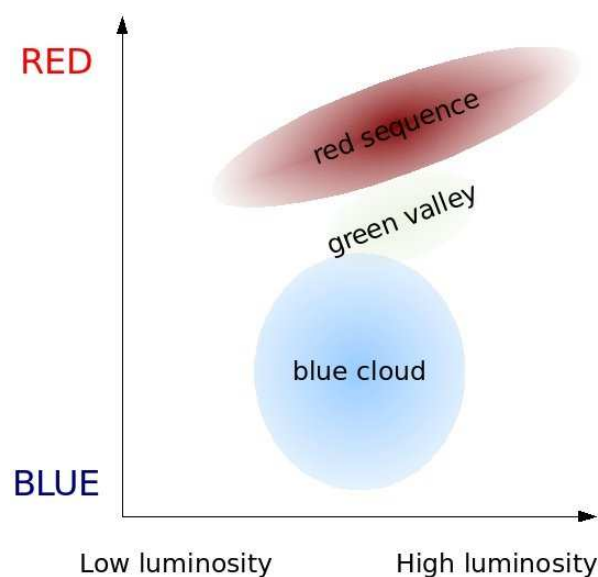
$$CI = m_{\lambda_2} - m_{\lambda_1} = -2,5 \log \frac{I_{\lambda_2}}{I_{\lambda_1}}. \quad (4.2)$$

Hodnota barevného indexu tedy závisí na rozložení energie ve spektru zdroje. Vezmeme-li jako příklad výše uvedenou Vegu měřenou v UB_V, budou její barevné indexy (U-B) = (B-V) = 0.

4.3 Barevný diagram

Pomocí barevných indexů a hvězdných velikostí můžeme zjistit, jak je která hvězda hmotná, jak je daleko i v jakém stadiu vývoje se nachází. K tomu slouží, stejně známý HR diagram, takzvaný barevný diagram, tedy závislost barevného indexu na hvězdné velikosti (pak se označuje jako colour-magnitude diagram – C-M diagram). Můžeme se setkat i s diagramem, na jehož obou osách jsou vyneseny dva různé barevné indexy (pak se jedná o takzvaný colour-colour diagram, česky označen jako diagram barva-barva).

V případě hvězd pak její poloha v takovém diagramu udává její teplotu, hmotnost, vzdálenost a další informace, které bychom jinak zjišťovali poměrně těžko. Pokud vytvoříme diagram pro hvězdokupu, pomocí teoretických modelů můžeme zjistit její stáří či složení. Bohužel v případě galaxií nejsou jejich vlastnosti nutně určeny polohou v barevném diagramu, můžeme pouze s určitou pravděpodobností určit, zda se jedná o eliptickou (leží v tzv. červené sekvenci) či spirální (nacházející se v modrém oblaku) galaxii. [5] U AGN dosud nebyla prokázána žádná souvislost mezi klasifikací a polohou v diagramu.



Obrázek 4.4 Barevný diagram galaxií [15]

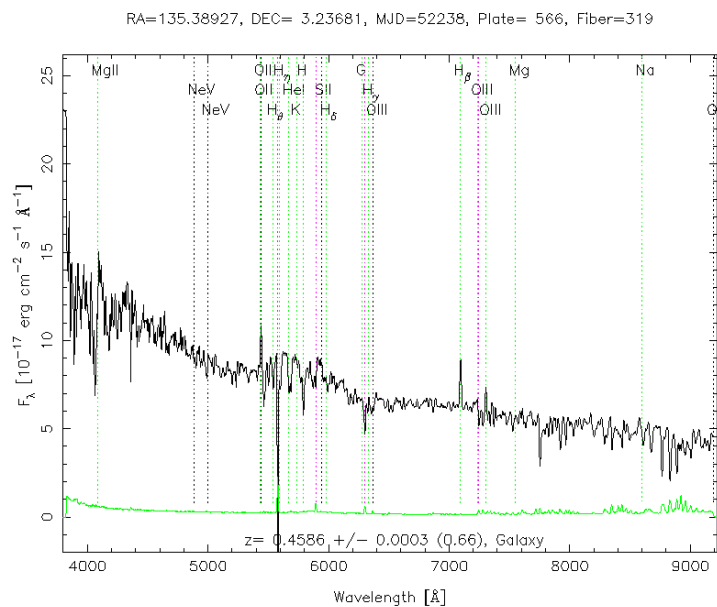
5 PRAKTICKÁ ČÁST

5.1 Získání spekter

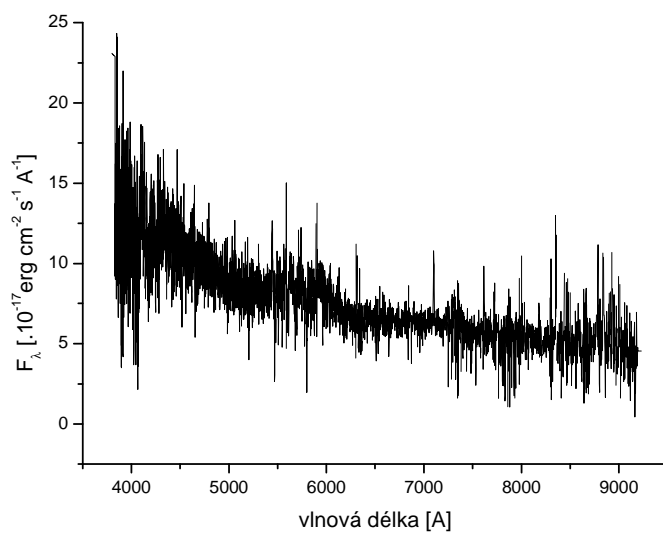
Prvním důležitým krokem k získání vhodných spekter bylo najít soubor objektů, které jsou klasifikované jako objekty typu BL Lac. K tomu posloužil internetový katalog VERONCAT – Veron Catalog of Quasars & AGN, 12th Edition [16], který obsahuje 1122 BL Lac objektů, z nich pouze 662 je potvrzených.

Nyní bylo potřeba ztotožnit tyto objekty s objekty ze Sloan Digital Sky Survey [17], jenž umožňuje stáhnout průběh spektra pro vybrané hvězdy i galaxie. Navíc obsahuje sekci MyDB v CAS SDSS, kde po zaregistrování dostanete volný prostor ke svým výzkumům. Sem byly tedy importovány údaje o rektascenzích a deklinacích jednotlivých AGN z VERONCAT katalogu. V SDSS byl zadán příkaz najít nejbližší objekt pomocí odpovídající rektascenze a deklinace v okruhu jedné úhlové vteřiny. Tímto způsobem se podařilo identifikovat konečných 318 objektů.

Další příkaz vrátil seznam URL adres obsahujících průběhy spektra ve FITS formátu, ze kterých byly nakonec získány ASCII tabulky v obyčejných textových souborech obsahujících dva sloupce hodnot. Vlnovou délku a tok záření. Názvem každého takového souboru bylo číslo charakterizující objekt v SDSS katalogu, takzvané jeho Object ID. Zadáním takového čísla do vyhledávače v SDSS se zobrazí veškeré dostupné informace o tomto objektu, včetně grafu spektra. Jako ilustraci jsou zde uvedeny obrázky 5.1 a 5.2, kde je pro porovnání zobrazen průběh spektra stažený z SDSS po vyhledání a mnou vytvořený graf ze stažených tabulek. Podrobnější popis získání dat i s vloženými příkazy a programy lze najít v [6].



Obrázek 5.1 Spektrum objektu 588010359066722508 z SDSS [18]



Obrázek 5.2 Spektrum objektu 588010359066722508 ze stažených dat

5.2 Zpracování dat

Abychom mohli získat barevný diagram blazarů a jejich hvězdné velikosti v jednotlivých filtrech Landoltova fotometrického systému, potřebujeme zkombinovat získané spektrum zdroje a průběh filtru (viz kapitola 4.1). Tuto práci udělal program uvedený v příloze (viz příloha 1). [7] Každé spektrum bylo zkombinováno s každým filtrem, vzniklo tedy 318 závislostí pro každý filtr. Problémem by se mohl stát fakt, že propustnost filtrů máme v relativních jednotkách. Protože jsou však u výsledných signálů potřebné jejich podíly, není nutné se tím nijak zatěžovat.

Vykreslíme-li hustotu toku záření I do grafu, plocha pod křivkou bude odpovídat celkovému toku energie přicházejícího ze studovaného zdroje v daném filtru. Následující vzorec udává celkový tok ve filtru B:

$$F_B = \int_0^{\infty} I(\lambda)B(\lambda) d\lambda, \quad (5.1)$$

analogicky ve filtru V a R. Dosazením hodnot toků do rovnic pro barevné indexy získáme vztahy

$$(B - V) = -2,5 \log \frac{\int_0^{\infty} I(\lambda)B(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} I(\lambda)V(\lambda) d\lambda} = -2,5 \log \frac{F_B}{F_V},$$
$$(V - R) = -2,5 \log \frac{\int_0^{\infty} I(\lambda)V(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} I(\lambda)R(\lambda) d\lambda} = -2,5 \log \frac{F_V}{F_R}, \quad (5.2)$$

kteřé vyneseme pro každý objekt do společného barevného diagramu. Jako kontrolu můžeme provést výpočet barevných indexů i jinak. Nejprve spočteme příslušné hvězdné velikosti a ty pak od sebe jenom odečteme:

$$m_B = m_{B_0} - 2,5 \log F_B,$$
$$m_V = m_{V_0} - 2,5 \log F_V,$$
$$m_R = m_{R_0} - 2,5 \log F_R. \quad (5.3)$$

Za konstanty m_{B_0} , m_{V_0} , m_{R_0} zvolíme ve všech případech číslo 25, které je obvykle určeno tak, aby jednotlivé instrumentální hvězdné velikosti odpovídali zhruba viditelným.

V následujících krocích je popsáno, jak by měli vypadat výsledné závislosti. Víme, že spektra aktivních galaxií vykazují vlastnosti power-law spektra podle (3.6). Průběh intenzity tedy můžeme vyjádřit pomocí spektrálního indexu jako

$$I = I_0 \lambda^{-\alpha}. \quad (5.4)$$

Aproximujeme-li navíc průběh filtru delta funkcí, pro hvězdnou velikost pak dostaneme

$$\begin{aligned} m_B &= -2,5 \log \int_0^\infty (I_0 \lambda^{-\alpha}) \delta(\lambda - \lambda_B) d\lambda = -2,5 \log I_0 \lambda_B^{-\alpha} = \\ &= \underbrace{-2,5 \log I_0}_{m_{B_0}} + 2,5\alpha \log \lambda_B. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Analogicky vzorec (5.5) platí i pro hvězdné velikosti ve filtrech V a R. A protože pro jeden objekt je spektrální index α stále stejný, můžeme ho z rovnice pro jednu hvězdnou velikost vyjádřit a dosadit do druhé. Dostaneme tak přímou závislost mezi dvěma hvězdnými velikostmi:

$$\alpha = \frac{(m_B - m_{B_0})}{2,5 \log \lambda_B} = \frac{(m_V - m_{V_0})}{2,5 \log \lambda_V} = \frac{(m_R - m_{R_0})}{2,5 \log \lambda_R}, \quad (5.6)$$

$$m_V = m_{V_0} + (m_B - m_{B_0}) \frac{\log \lambda_V}{\log \lambda_B}. \quad (5.7)$$

V rovnici (5.7) jsou krom proměnné m_B všechno ostatní konstanty. Je tedy vidět, že jednotlivé hvězdné velikosti jsou svázány lineární závislostí, která je dobře patrná i z mých výsledků v grafu (5.1).

Podobný postup můžeme provést i pro kontrolu barevného diagramu. Barevné indexy v závislosti na spektrálním indexu vypadají následovně:

$$\begin{aligned} (B - V) &= m_B - m_V = 2,5\alpha(\log \lambda_B - \log \lambda_V) = 2,5\alpha \log \frac{\lambda_B}{\lambda_V}, \\ (V - R) &= m_V - m_R = 2,5\alpha(\log \lambda_V - \log \lambda_R) = 2,5\alpha \log \frac{\lambda_V}{\lambda_R}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Po vyjádření koeficientu α z jedné a dosazení do druhé rovnice vypadá vztah mezi barevnými indexy následovně:

$$(B - V) = (V - R) \frac{\log \frac{\lambda_B}{\lambda_V}}{\log \frac{\lambda_V}{\lambda_R}}, \quad (5.9)$$

Podle rovnice (5.9) by barevné indexy měly být mezi sebou lineárně závislé. Jak je vidět z grafu (5.2), jistá lineární závislost by se zde konstatovat dala nebyť objektů, jejichž barevné indexy překračují hodnoty 0,5. Toto tvrzení je diskutované dále.

Poslední částí jsou barevné C-M diagramy (grafy 5.3 a 5.4), kde však na první pohled není patrná žádná závislost. Tomu není divu, protože vyjádříme-li hvězdnou velikost pomocí barevného indexu, vyjde vztah

$$m_V = m_{V_0} + (B - V) \frac{\log \lambda_V}{\log \frac{\lambda_B}{\lambda_V}}. \quad (5.10)$$

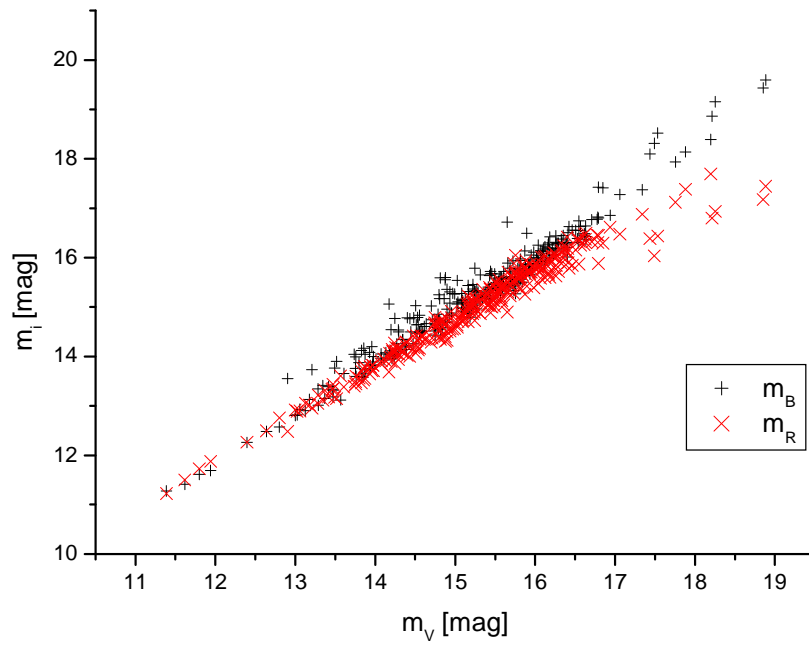
Ze vzorce by se mohlo zdát, že by opět měla vyjít lineární závislost, je však třeba mít na paměti, že sám barevný index závisí na příslušné hvězdné velikosti. Lineární závislost tedy můžeme vyloučit.

Při konfrontaci teoretických výpočtů a praktických výsledků jsem objevila několik podezřelých objektů, jejichž barevné indexy nevyšly dle očekávání. Na závěr tedy uvádím tabulku, kde je označena i jejich klasifikace.

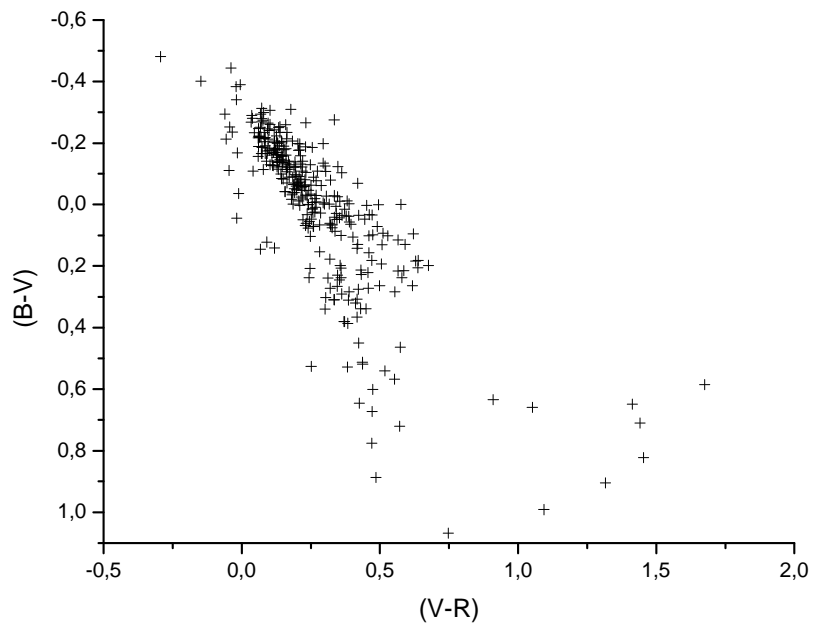
ObjID	(B-V)	(V-R)	SDSS klasifikace	SIMBAD klasifikace
587725471206146261	0,82	1,45	QSO	quasar
587725503408964013	0,58	1,68	unknown	quasar
587726014013047185	0,90	1,32	galaxy	BL Lac
587726877809115317	0,52	0,44	galaxy	BL Lac
587727227305132284	0,65	1,41	QSO	quasar
587728879261384981	0,66	1,05	unknown	BL Lac
587728917914190065	0,99	1,09	QSO	quasar
587729231978823862	0,45	0,42	galaxy	BL Lac /x ray
587730773336851137	0,63	0,91	galaxy	BL Lac /x ray
587731185659216030	0,54	0,52	galaxy	BL Lac /radio source
587735666392105305	0,67	0,47	galaxy	BL Lac
588007005231972507	0,57	0,55	galaxy	BL Lac /radio source
588009365863006784	0,71	1,44	galaxy	BL Lac /x ray
588009372302770288	0,60	0,47	QSO	quasar
588017948813361239	0,78	0,47	galaxy	BL Lac
588017977289932945	1,07	0,75	galaxy	BL Lac

Tabulka 5.1 Podezřelé objekty

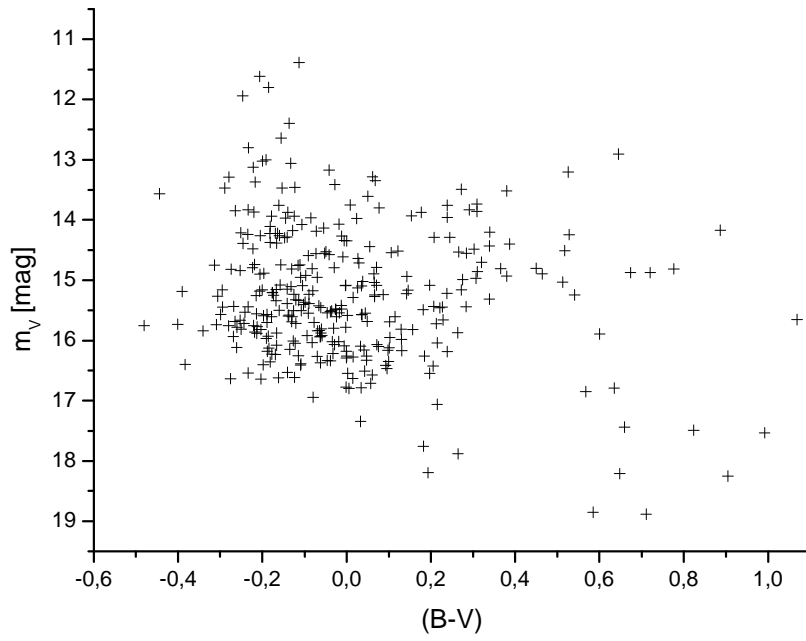
5.3 Grafy



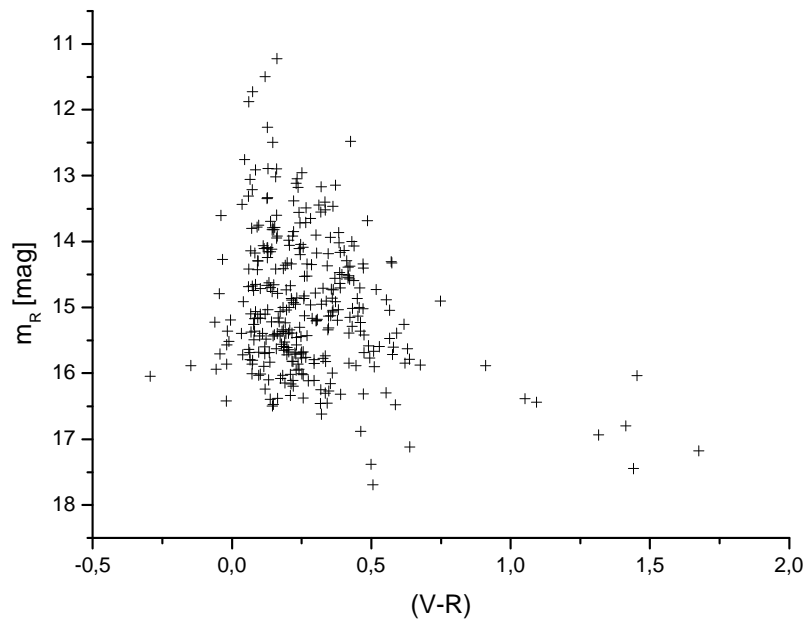
Graf 5.1 Závislost jednotlivých hvězdných velikostí



Graf 5.2 Barevný diagram pro barvy (B-V) a (V-R)



Graf 5.1 C-M diagram pro (B-V)



Graf 5.4 C-M diagram pro (V-R)

6 ZÁVĚR

V práci jsem se zabývala studiem barevných indexů BL Lac objektů, jednoho z druhů aktivních galaxií. Nejprve bylo třeba získat data ke zpracování, postup je uveden v praktické části práce, v kapitole Získání spekter. Následuje popis výpočtu C-M diagramů v kapitole Zpracování dat, jejíž druhá část se věnuje teoretickým závěrům a interpretacím. V závěrečné kapitole Grafy jsou pak zveřejněny samotné C-M diagramy. Praktické části předchází část teoretická, kde se věnuji vlastnostem a rozdělení AGN a dějů v nich probíhajících.

Po prozkoumání barevných diagramů je zřejmé, že některé hodnoty barevných indexů vycházejí větší, než jsem původně předpokládala. Blazary jsou totiž objekty, jejichž barva bývá typicky modrá, (B-V) index je tedy záporné nebo velmi malé kladné číslo. Proto se mi objekty, jejichž barevné indexy pro barvu (B-V) a zároveň (V-R) převyšovaly hodnoty 0,5, zdály podezřelé. V barevném diagramu (barva-barva) navíc naprosto nepodporují můj teoretický výsledek lineární závislosti (viz graf 5.2 a vzorec 5.9).

Proto jsem z mých tabulek hodnot zjistila, o které objekty se jedná a v SDSS jsem vyhledala jejich spektra. Jejich seznam je uveden v tabulce (5.1). Spektra všech těchto objektů byla navzdory očekávání rostoucí, s rostoucí vlnovou délkou tedy rostla i intenzita a celkový tok záření. Barva a hvězdná velikost pak zřejmě nezávisí na spektrálním indexu tak, jak mi vyšlo při teoretických výpočtech. Klasifikace těchto objektů v SDSS byla různá – neznámý objekt, galaxie nebo radio-quiet quasar (QSO).

Podle údajů o rektascenzi a deklinaci v SDSS jsem tyto objekty vyhledala v databázi SIMBAD. [19] Některé i zde byli určeny jako BL Lac objekty, některé jako quasary. Ne jednou se však stalo, že v těsné blízkosti zadaných poloh se nacházeli i jiné objekty, označené jako rádiové zdroje, či zdroje rentgenového záření.

Graf (5.1) je podle mého mínění dobrým důkazem lineární závislosti mezi jednotlivými hvězdnými velikostmi a tedy i důkazem správnosti mých výpočtů. Co se týče ostatních grafů, tam už shodu s rovnicemi konstatovat nemohu. Důvodem jsou pravděpodobně výše diskutované objekty s rostoucím spektrem a fakt, že jsem při odvozování rovnic aproximovala průběh filtrů delta funkcemi, což samozřejmě neodpovídá reálnému případu.

Aktivní galaxie jsou objekty velice poutavé, stejně jako studování jejich vlastností a barev. Pokud by se postup, který jsem použila ve své práci pro získání barevných diagramů, aplikoval i na jiné druhy aktivních galaxií, mohlo by se dojít k velice zajímavým výsledkům.

Použitá literatura

- [1] Robson, Ian: *Active Galactic Nuclei* (Book); John Wiley & Sons, United Kingdom, 1996
- [2] Mikulášek, Zdeněk; Krtička, Jiří: *Úvod do fyziky hvězd hvězdných soustav*, Brno, 2000
- [3] Bradley, W. Carroll; Dále, A. Ostlie: *An Introduction to Modern Astrophysics, 2nd edition*, Pearson International Edition, USA 2007
- [4] Halliday, David; Resnick, Robert, Walker, Jearl: *Fundamentals of Physics, Extended (5th edition)*, John Wiley & Sons, United Kingdom, 1997
- [5] Strateva, Iskra, et al.: *Color Separation of Galaxy Types in the Sloan Digital Sky Survey Imaging Data*, The Astronomical Journal 122.1861-1874, 2001
- [6] Vážný, Jaroslav: *Dobývání znalostí z astronomických dat*, Bakalářská práce, Brno, 2009
- [7] Hroch, Filip: Soukromé sdělení, 2009
- [8] http://www.nasa.gov/centers/goddard/images/content/182566main2_1_agn_LO.jpg
- [9] <http://seds.org/~spider/spider/ScholarX/seferts.html>
- [10] http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_expansion.html
- [11] <http://www.jeffstanger.net/Astronomy/emissionprocesses.html> - figure 3
- [12] <http://astronomy.swinburne.edu.au/cosmos/S/Synchrotron+Emission>
- [13] <http://www.jeffstanger.net/Astronomy/emissionprocesses.html> - figure 6
- [14] http://www.mike-willis.com/Tutorial/PF_files/Picture12.jpg
- [15] http://en.wikipedia.org/wiki/Galaxy_color-magnitude_diagram
- [16] <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/W3Browse/galaxy-catalog/veroncat.html>
- [17] <http://www.sdss.org/>
- [18] <http://cas.sdss.org/astrodr7/en/tools/explore/obj.asp?id=588010359066722508>
- [19] <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>

Přílohy

Příloha 1

```
! two filters

program fl

  implicit none

  integer, parameter :: ndim = 10000

  real, dimension(ndim) :: l1,l2,l3,t1,t2,t3,f

  integer :: i,n1,n2,n3

  character(len=666) :: std, our, cam

  real :: x,s

  call getarg(1,our)

  call getarg(2,std)

  call getarg(3,cam)

  call getdata(our,n1,l1,t1)

  call getdata(std,n2,l2,t2)

  if( cam /= ' ' ) call getdata(cam,n3,l3,t3)

  do i = 1, ndim

    x = i

    if( cam == ' ' ) then

      f(i) = interpol(n1,l1,t1,x)*interpol(n2,l2,t2,x)

    else

      f(i) = interpol(n1,l1,t1,x)*interpol(n2,l2,t2,x)*interpol(n3,l3,t3,x)

    end if

!    write(*,*) x,f(i),interpol(n1,l1,t1,x),interpol(n2,l2,t2,x)

  end do

  s = 0

  do i = 1, ndim - 1

    s = s + (f(i)+f(i+1))

  end do

  write(*,*) 0.5*s

contains

  subroutine getdata(name,n,l,t)

    integer :: n
```

```

real,dimension(:) :: l,t
character(len=*) :: name
open(1,file=name,status="old")
read(1,*)
n = 1
do
    read(1,*,end=99) l(n), t(n)
    if( t(n) < 1e-4 ) t(n) = 0.0
    n = n + 1
end do
99 close(1)
end subroutine getdata
function interpol(n,l,t,x)
integer :: n,j,i
real :: x,interpol
real, dimension(:) :: l,t
j = 0
do i = 1, n-1
    if( l(i) < x .and. x <= l(i+1) ) then
        j = i
        exit
    end if
end do
if( j == 0 ) then
    interpol = 0.0
else
    interpol = (t(j+1)-t(j))*(x-l(j))/(l(j+1)-l(j)) + t(j)
end if
end function interpol
end program fl

```