

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Diplomová práce

BRNO 2015

JAN BENÁČEK



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY



Hydrodynamické studium disku okolo rychle rotujících hvězd

Diplomová práce

Jan Benáček

Vedoucí práce: Mgr. Viktor Votruba, Ph.D. Brno 2015

Bibliografický záznam

Autor: Bc. Jan Benáček
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Název práce: Hydrodynamické studium disku okolo rychle rotujících hvězd

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika a astrofyzika

Vedoucí práce: Mgr. Viktor Votruba, Ph.D.

Akademický rok: 2014/2015

Počet stran: IX + 55

Klíčová slova: Hydrodynamické simulace, SPH, Částicový kód, Bondiho akrece, Hvězdný disk

Bibliographic Entry

Author: Bc. Jan Benáček
Faculty of Science, Masaryk University
Department of theoretical physics and astrophysics

Title of Thesis: Hydrodynamical study of disk around rapidly rotating stars

Degree Programme: Physics

Field of Study: Theoretical physics and astrophysics

Supervisor: Mgr. Viktor Votruba, Ph.D.

Academic Year: 2014/2015

Number of Pages: IX + 55

Keywords: Hydrodynamic simulation, SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics, Particle code, Bondi accretion, Star disk

Abstrakt

V této diplomové práci se věnujeme studiu hydrodynamickému chování látek okolo rychle rotujících hvězd. Pro simulaci využíváme částivou hydrodynamiku SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) v podobě numerického kódu PySPH naprogramovaného v jazyce Python. PySPH knihovnu jsme otestovali na Sodově problému šíření rázové vlny v jedno-rozměrné trubici. Vlastní simulace byly provedeny pro sféricky symetrickou 3D Bondiho akreci, kde se výsledky shodují s analytickým řešením problému, a dále jsme na řadě simulací ukázali chování přitékající látky na disk Be hvězdy.

Abstract

In this thesis we study hydrodynamic behavior of the matter around the rapidly rotating stars. We use the SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method in the simulations. The numeric code PySPH is written in the language Python. The library we tested on the Sod's problem of shock wave propagation in the tube. The simulations we conducted for spherically symmetric 3D Bondi's accretion, the results agree with the analytical solution of the problem. Then we demonstrated in series of simulations the behavior of matter inflowing to Be star disk.

Místo tohoto listu vložte kopii oficiálního (podepsaného) zadání práce.

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat mému vedoucímu za všechny připomínky a korektury, které mi poskytl, stejně tak jako mojí rodině za neutuchající podporu po celou dobu studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 11. května 2015

.....
Jan Benáček

Obsah

Úvod	1
Kapitola 1. Základy hydrodynamiky a termodynamiky	2
1.1 Matematický popis tekutiny	2
1.1.1 Rovnice kontinuity	2
1.1.2 Navierova-Stokesova rovnice	3
1.2 Poissonova rovnice pro newtonovskou gravitaci	4
1.3 Kinetická a termální rovnice	5
1.4 Termodynamika	6
1.5 Ideální plyn	8
1.6 Viriálový teorém	8
Kapitola 2. Jednoduché modely tekutin v astrofyzice	11
2.1 Tekutina v hydrostatické rovnováze s dominující gravitací	11
2.1.1 Sféricky symetrický případ	12
2.2 Metoda linearizace rovnic	13
2.3 Zvukové vlny	14
2.4 Bondiho akrece	15
Kapitola 3. SPH metoda	19
3.1 Popis veličiny	19
3.2 SPH hydrodynamický popis	20
3.2.1 Momentová rovnice	21
3.3 Zákony zachování	22
3.4 Tepelná energie a viskozita	23
3.4.1 Viskozita	23
3.5 PySPH	24
3.6 Instalace PySPH a poznámky k vydání	24
3.7 Testování PySPH	26
Kapitola 4. Be hvězdy	29
4.1 Definice Be hvězd	29
4.2 Podobné objekty	30

4.3	Disky Be hvězd	31
4.3.1	Hustota disku	32
4.3.2	Poziční úhel	32
4.4	Kinematika disku	32
4.4.1	Stabilní viskózní disky	33
4.4.2	Dynamické viskózní disky	36
4.5	Hvězdy v interagujících dvojhvězdách	36
	Kapitola 5. Hydrodynamické modely okolí hvězd	37
5.1	Bondiho akrece	37
5.2	Přítok hmoty na disk Be hvězdy.	40
	Závěr	45
	Příloha	46
5.3	Příklad spouštěcího souboru pro Bondiho akreci – bondi.py	46
5.4	SPH rovnice pro plyn a externí gravitace	48
5.5	Vnější a vnitřní okrajové podmínky, přidávání částic	51
	Seznam použité literatury	53

Úvod

Přestože je fenomén Be hvězd známý už více jak 100 let, stále představuje jeden z problémů, který se současná astrofyzika snaží popsat a vysvětlit. Jde o jev, kde rychle rotující hvězda hlavní posloupnosti vytváří kolem sebe navenek difuzní a bezprašný keplerovský disk.

Ve své práci se věnuji dynamickým procesům těchto disků okolo horkých hvězd se zaměřením na Be hvězdy. Těžiště práce spočívá v použití částicového hydrodynamického kódu SPH (Smoothed Particle hydrodynamics) v knihovně PySPH na simulaci dějů v okolí hvězdy. Jako základní simulace jsme se rozhodli zaměřit na dvě situace. První hlavně zdůvodu symetrie představuje Bondiho sféricky symetrická akrece látky na povrch hvězdy, kde se daly vyzkoušet a potvrdit správné okrajové a počáteční podmínky. Druhou řadou simulací je přítok látky do disku Be hvězdy, kde jsme dosažené znalosti následně uplatnily.

V první kapitole práce uvádím základy hydrodynamiky a termodynamiky kontinua, které představují základní stavební kameny pro vybudování celé teorie. V další kapitole uvádím jednoduché analytické modely hydrodynamického chování látek se zaměřením na okolí hmotného bodu, který dominuje svojí gravitací. Ve třetí kapitole se věnuji popisují metody SPH, použitými hydrodynamickými rovnicemi v této metodě. Dále pak vhodným způsobu použití pomocí jazyka Python v knihovně PySPH, kterou jsem musel pro potřeby těchto simulací upravit, a jejímu testování na Sodově problému. V kapitole čtyři popisují základní znalosti o Be hvězdách, jaké jsou možnosti a úskalí jejich pozorování, projevy dynamického chování disků včetně jejich analytického popisu. V poslední kapitole popisují a interpretují dosažené výsledky použitím kódem SPH. Bondiho problém porovnávám s analytickým řešením. U přítoku látky do disku uvádím tři obecné případy.

Kapitola 1

Základy hydrodynamiky a termodynamiky

Dynamika tekutin ve své obecnosti popisuje chování kontinua. *Tekutinou* označujeme látky nacházející se v tekutém, resp. kapalném skupenství. Vedle tekutin rozlišujeme ještě pevné látky. Tekutiny i pevné látky se působením tlakových sil deformují. Pevné látky se ale na rozdíl od tekutin vrátí do původního tvaru.

Za kontinuum můžeme považovat i částicové systémy, pokud systém obsahuje dostatečné množství částic. Příslušným kritériem je pak srovnání střední volné dráhy částic l a makroskopické velikosti studovaného problému L . Musí být splněna podmínka $l \ll L$. V tom případě můžeme přejít z diskrétního popisu systému k popisu kontinuálnímu. Tyto podmínky splňují tekutiny, které považujeme za kontinuum. Jejich popis je velice dobře aplikovatelný na astrofyzikální úlohy a hraje klíčovou roli při studiu astrofyzikálních problémů [1].

1.1 Matematický popis tekutiny

1.1.1 Rovnice kontinuity

Nejprve zavedeme pojem *element objemu* dV . Jde o část systému, která je mnohem menší, než je typická velikost systému L , ale zároveň natolik velká, aby v sobě obsahovala dostatečný počet částic a chovala se jako kontinuum. V teoretických úvahách předpokládáme, že všechny částice v tomto elementu o poloze \mathbf{r} a v čase t mají stejnou rychlost $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Kromě střední rychlosti \mathbf{u} mají také částice určité rozdělení rychlostí.

Elementu objemu můžeme přiřadit libovolnou veličinu $f(\mathbf{r}, t)$, která je pro daný element, podobně jako rychlost, určena na základě její polohy \mathbf{r} a času t .

Vývoj systému popisujeme v závislosti na čase. Uvažujme časovou derivaci veličiny $\partial/\partial t$, která označuje, jak se změní veličina na dané pozici \mathbf{r} . A dále úplnou derivaci D/Dt , která označuje velikost změny veličiny pro daný pohybující se element. Potom můžeme psát, že změna veličiny v pohybujícím se elementu je

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{r} + \mathbf{u}\delta t, t + \delta t)}{\delta t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla f. \quad (1.1)$$

Uvažujme systém, který má objem V , je ohraničen povrchem S s normálovým vektorem \mathbf{n} směřujícím ven z objemu V . Předpokládáme, že hustota v dané oblasti je popsána veličinou $\rho(\mathbf{r}, t)$ obecně závislou na poloze \mathbf{r} a čase t . Celková hmotnost systému je dána integrálem $\int_V \rho dV$. Časová změna hmotnosti systému je rovna právě té hmotnosti tekutiny, která projde přes povrch

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.2)$$

Jestliže je objem V (a samozřejmě také povrch S) neměnný v čase, můžeme derivaci na levé straně přesunout dovnitř integrálu. Právý integrál přes povrch můžeme přepsat pomocí Stokesova teoremu

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dV, \quad (1.3)$$

kde $\nabla = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$ je diferenciální operátor. Protože musí být tato rovnice splněna pro libovolný objem V v tekutině, dostáváme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.4)$$

Pokud dáme dohromady rovnice 1.2 a 1.4, dostaneme pro změnu hustoty pohybujícího se elementu

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0. \quad (1.5)$$

1.1.2 Navierova-Stokesova rovnice

Rovnici pro změnu hybnosti pro tekutinu uvnitř objemu V můžeme odvodit velice podobným způsobem jako pro změnu hmotnosti v předchozí kapitole. Předpokládejme objem V , který se pohybuje spolu s tekutinou, přičemž tekutina vytéká nebo vtéká. Hybnost tekutiny uvnitř objemu je $\int_V \rho \mathbf{u} dV$. Změna hybnosti je poté dána působícími silami. Ty jsou dvojího druhu – síly objemové a síly plošné.

Objemové síly, jako například gravitace, působí uvnitř objemu V na každý element objemu dV . Jejich efekt lze vyjádřit

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (1.6)$$

kde \mathbf{f} jsou objemové síly na jednotku hmotnosti (s jednotkou stejnou jako zrychlení).

Druhým druhem jsou síly, které působí jen na povrch S objemu V . V neviskózních tekutinách je směr síly vždy shodný se směrem normály k povrchu. Jejich efekt je

$$\int_S -p \mathbf{n} dS, \quad (1.7)$$

kde p je tlak a \mathbf{n} je normálový vektor. Není zde žádný tok hybnosti přes povrch S .

Porovnáním předchozích rovnic dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_S -p \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (1.8)$$

Za předpokladu, že je časová derivace jen uvnitř objemu V , můžeme levou stranu rovnice 1.8 přepsat

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV. \quad (1.9)$$

Přepsáním rovnice 1.8 a použitím Stokesova teorému dostáváme

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_V (-\nabla p + \rho \mathbf{f}) dV. \quad (1.10)$$

Protože se jedná o libovolný objem V , je rovnice 1.10 splněna v každém bodě

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = (-\nabla p + \rho \mathbf{f}). \quad (1.11)$$

Toto je rovnice pro hybnost u neviskózních tekutin.

Obecně ale viskózní síly zahrnout musíme. Předpokládáme, že síly na povrchu objemu V nemají jen normálovou složku $\int_S -p \mathbf{n} dS$, ale předpokládáme tenzor napětí σ_{ij} . Potom je integrál přes povrch roven

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS. \quad (1.12)$$

Při značení používám sumační konvenci, kdy uvedením sčítacího symbolu dvakrát, automaticky předpokládáme sčítání přes tento index.

Pro plyny a základní kapaliny je tenzor napětí roven

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right), \quad (1.13)$$

kde μ je takzvaná dynamická viskozita a δ_{ij} je Kroneckerovo delta.

Použitím Stokesovy věty na rovnici 1.12 dostáváme

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV. \quad (1.14)$$

Pokud je μ konstantní pro daný tok, dostáváme z rovnice 1.11 Navierovu-Stokesovu rovnici

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right). \quad (1.15)$$

Pro neviskózní případ 1.11 jde o rovnici Eulerovu.

1.2 Poissonova rovnice pro newtonovskou gravitaci

Předpokládejme hmotný bod m se souřadnicí \mathbf{r} a jiný hmotný bod m' se souřadnicí \mathbf{r}' . Oba body se přitahují gravitační silou

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv -\frac{Gmm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{Gmm'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.16)$$

Víme, že

$$-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \quad (1.17)$$

a také

$$\mathbf{g} = -\nabla\varphi. \quad (1.18)$$

Gravitační (potenciální) pole můžeme poté napsat jako integrál přes všechny potenciály

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{V'} -\frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (1.19)$$

kde integrujeme přes celý objem tekutiny.

Při použití výsledku

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (1.20)$$

dostáváme pro gravitační zrychlení $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$ Poissonovu rovnici

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho. \quad (1.21)$$

1.3 Kinetická a termální rovnice

Změna kinetické energie částice je rovna práci vykonané silou \mathbf{F} vynásobené rychlostí \mathbf{u} . Vynásobením Eulerovy rovnice 1.11 rychlostí \mathbf{u} dostáváme

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \right) = -\frac{1}{\rho}\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}. \quad (1.22)$$

Rovnice nám říká, že změna kinetické energie na jednotku hmotnosti je rovna práci vykonané gradientem tlaku a objemovými silami.

Rovnice pro celkovou energii může být odvozena velice podobně jako hybnostní rovnice. Předpokládejme vnitřní energii na jednotku hmotnosti tekutiny U . Potom změna kinetické a vnitřní energie je rovna právě vykonané povrchovými a objemovými silami a teple dodanému do systému. Teplo může být dodáno dvěma způsoby. Buď je zde tok tepla \mathbf{F} přes povrch S nebo je vytvářeno uvnitř objemu látkou ve formě energie ε na jednotku hmotnosti.

Ze změny celkové energie dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + U \right) \rho dV = \int_S \mathbf{u} \cdot (-p\mathbf{n}) dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}\rho dV + \int_V \varepsilon\rho dV - \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.23)$$

Plošné integrály se pomocí Stokesova teorému přepíšou na integrály objemové. Výsledná rovnice poté platí pro libovolný objem a dostáváme diferenciální rovnici

$$\rho \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \right) + \frac{DU}{Dt} \right] = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \rho\varepsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1.24)$$

Rovnici pro změnu vnitřní energie můžeme odvodit podělením předchozí rovnice hustotou ρ a odečtením rovnice 1.22

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \varepsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (1.25)$$

kde

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (1.26)$$

plyne z rovnice kontinuity 1.5. V předchozí rovnici můžeme rozpoznat první zákon termodynamiky

$$dU = (-p)dV + \delta Q, \quad (1.27)$$

kde vezmeme objem nepřímo úměrný hustotě ze stavové rovnice $V \sim 1/\rho$. Člen $(-p)dV$ vyjadřuje práci vykonanou na tekutině a δQ dodané teplo. U tepla samotného neznáme jeho množství, ale jen změnu, kterou vyjadřujeme neúplným diferenciálem δ .

Rovnice 1.22 a 1.24 jsou bez viskózního napětí. V rovnici 1.22 přepíšeme první člen na pravé straně

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (1.28)$$

a stejně tak v rovnici 1.24

$$\rho \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \frac{DU}{Dt} \right] = -u_i \sigma_{ij} n_j + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \rho \varepsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1.29)$$

Následkem přidání viskozity do rovnic je konverze kinetické energie na vnitřní energii. Je to další ohřivací člen vedle ε . Předchozí rovnice můžeme použít pro odvození časové změny celkové energie pro celou tekutinu obsaženou ve fixním objemu V [2]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + U + \frac{1}{2} \varphi \right) \rho dV + \int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + U + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) \rho \mathbf{u} dV = \\ = \int_V (\rho \varepsilon - \nabla \cdot \mathbf{F}) dV. \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.4 Termodynamika

Druhý zákon termodynamicky nám říká

$$\delta Q = T dS, \quad (1.31)$$

kde S je stavová proměnná entropie na jednotku hmotnosti. Společně s prvním zákonem termodynamiky dostáváme

$$DU = T dS - p dV. \quad (1.32)$$

Můžeme odvodit několik vztahů

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S. \quad (1.33)$$

Z vlastnosti parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (1.34)$$

plyne

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V. \quad (1.35)$$

Z dalšího vztahu pro parciální derivace dostáváme

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y} = - \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_f. \quad (1.36)$$

Definujme adiabatické exponenty γ_1 , γ_2 , γ_3 :

$$\gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S, \quad \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_S, \quad \gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S. \quad (1.37)$$

Všechny tyto vztahy jsou pro konstantní entropii, nemění se tedy dodané teplo $\delta Q = dS = 0$, druhý člen je často označován jako ∇_{ad} .

Následující rovnice nám dávají vztah pro dvojice termodynamických proměnných

$$\delta Q = \frac{1}{\rho(\gamma_3 - 1)} \left(dp - \frac{\gamma_1 p}{\rho} \right) d\rho, \quad (1.38)$$

$$\delta Q = c_p \left(dT - \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \right) dp, \quad (1.39)$$

$$\delta Q = c_V \left(dT - (\gamma_3 - 1) \frac{T}{\rho} \right) d\rho, \quad (1.40)$$

kde c_p je specifické teplo při konstantním tlaku, tedy teplo nutné ke zvýšení o jednotku objemu při konstantním tlaku. Veličina c_V je specifické teplo při konstantním objemu. Víme, že

$$c_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p. \quad (1.41)$$

První rovnice 1.38 byla upravena

$$\delta Q \equiv T dS = T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V dp + T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p dV = T \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V^{-1} \left[dp + T \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p}{\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V} dV \right], \quad (1.42)$$

další rovnice jsou odvozeny podobně.

1.5 Ideální plyn

Definujme stavovou rovnici pro ideální plyn

$$pV = RT, \quad (1.43)$$

kde R je Rydbergova konstanta. Vnitřní energie U závisí na teplotě T

$$U = U(T). \quad (1.44)$$

Z rovnice 1.43 dostáváme

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}. \quad (1.45)$$

Pro adiabatickou změnu ideálního plynu

$$0 = dS = \frac{1}{T} (dU + p dV) = \frac{dU}{dT} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (1.46)$$

a pro koeficient γ_3

$$\gamma_3 = 1 + \frac{R}{\frac{dU}{dT}}. \quad (1.47)$$

Po dalších úpravách zjistíme, že pro ideální plyn jsou si všechny adiabatické koeficienty γ_i rovny a dále je tak také budeme značit.

Pro ideální plyn předpokládáme, že molekuly jsou jen hmotné body a $\gamma = 5/3$. Vnitřní energie je potom dána jen pohybovou energií všech částic. Za předpokladu, že všechny molekuly jsou stejné, je prostředí izotropní, dostáváme pro vnitřní energii plynu v objemu V vztah

$$U = \frac{1}{2} Nm(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2) = \frac{3}{2} m\bar{v}_x^2, \quad (1.48)$$

kde m je hmotnost molekuly, N je počet molekul v objemu V a \bar{v}_x^2 je střední kvadratická rychlost ve směru x .

Předpokládejme, že objem V je tvaru kvádrů o hraně délky l ve směru osy x a průřezu A . Tlaková síla na konci kvádrů je pA . Vezměme jednu částici, která má rychlost v_x ve směru x . Ta narazí na konec kvádrů každý čas Δt daný $\Delta t \equiv 2l/v_x$. Během nárazu předá stěně hybnost velikosti $2mv_x$, za předpokladu pružné srážky. Pro sílu působící na stěnu poté máme

$$pA = \sum \frac{2mv_x}{\Delta t} = \sum \frac{m}{l} v_x^2 = \frac{Nm}{l} v_x^2. \quad (1.49)$$

Poté pro vnitřní energii dostáváme

$$U = \frac{3}{2} RT. \quad (1.50)$$

1.6 Viriálový teorém

Pro základní představu o jevech a vývoji okolohvězdné látky si uvedeme následující teorém popisující uzavřený systém v gravitačním poli. Rychlost látky \mathbf{u} je dána změnou polohy v čase toku látky

$$\mathbf{u} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt}. \quad (1.51)$$

Eulerova rovnice 1.11 může být přepsána při nahrazení \mathbf{f} za gravitační zrychlení

$$\rho \frac{D^2 \mathbf{r}}{Dt^2} = -\nabla p - \rho \nabla \psi. \quad (1.52)$$

Vynásobením \mathbf{r} a integrací přes celý objem dostáváme

$$\int_V \mathbf{r} \frac{D^2 \mathbf{r}}{Dt^2} \rho \, dV = - \int_V \nabla p \, dV - \int_V \mathbf{r} \nabla \psi \rho \, dV. \quad (1.53)$$

Levou stranu můžeme přepsat

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \rho \, dV - \int_V \left(\frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right)^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_V |\mathbf{r}|^2 \rho \, dV - 2\mathcal{J}, \quad (1.54)$$

kde $\mathcal{J} \equiv \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u}^2 \, dV$ je celková kinetická energie tekutiny. Použitím divergence polohového vektoru $\nabla \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \equiv \partial x_i / \partial x_i = 3$ můžeme přepsat výraz

$$- \int_V \mathbf{r} \nabla p \, dV = - \int_S p \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS + 3 \int_V p \, dV. \quad (1.55)$$

Předpokládejme, že tlak na hranicích objemu je nulový. Potom je integrál přes povrch roven nule a dostáváme

$$\begin{aligned} - \int_V \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rho \, dV &= G \int_V \int_{V'} \mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}) \, dV \, dV' \\ &= -G \int_V \int_{V'} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}) \, dV \, \rho(\mathbf{r}') \, dV' \\ &= -\frac{1}{2} G \int_V \int_{V'} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \rho(\mathbf{r}) \, dV \, \rho(\mathbf{r}') \, dV' \\ &= -\frac{1}{2} G \int_V \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) \, dV \, \rho(\mathbf{r}') \, dV = \Psi, \end{aligned} \quad (1.56)$$

kde

$$\Psi \equiv \frac{1}{2} \int_V \psi \rho(\mathbf{r}) \, dV \quad (1.57)$$

je gravitační energie. Shrnutím všeho dohromady dostáváme

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{J}}{dt^2} = 2\mathcal{J} + 3 \int_V p \, dV + \Psi, \quad (1.58)$$

kde

$$\mathcal{J} = \int_V \rho \mathbf{r}^2 \, dV. \quad (1.59)$$

Rovnice 1.58 je Viriálův teorém.

Můžeme odvodit tenzor Viriálova teorému, pokud vezmeme i -tou komponentu rovnice 1.58 a vynásobíme ji j -tou komponentou \mathbf{r}

$$\rho x_j \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = -x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - \rho x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad (1.60)$$

Potom můžeme dokázat, že platí

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2T_{ij} + \delta_{ij} \int_V p dV + \Psi_{ij}, \quad (1.61)$$

kde

$$I_{ij} = \int_V \rho x_i x_j dV \quad (1.62)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_V \rho u_i u_j dV \quad (1.63)$$

$$\Psi_{ij} = -\frac{1}{2} G \int_V \int_{V'} \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}) dV \rho(\mathbf{r}') dV. \quad (1.64)$$

Tato rovnice popisuje vývoj uzavřeného systému a její důsledky nacházejí uplatnění u akrečních a dekrečních procesů.

Kapitola 2

Jednoduché modely tekutin v astrofyzice

V předchozí kapitole jsme odvodili základní hydrodynamické rovnice [1] – Eulerovu rovnici 1.11, rovnici kontinuity 1.5, Poissonovu rovnici 1.21 a energiovou rovnici 1.25

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = (-\nabla p + \rho \mathbf{f}), \quad (2.1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (2.3)$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \varepsilon - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Tato soustava obsahuje sedm nezávislých proměnných – ρ , \mathbf{u} , p , ψ a U . Předchozí sada obsahuje šest rovnic a je uzavřena stavovou rovnicí. V principu můžeme tuto soustavu rovnic řešit zadáním počátečních podmínek. Obecné případy nejsme schopni řešit analyticky, rovnice řešíme numericky. Pro ilustraci uvedu několik analytických příkladů řešení této soustavy. Jde o idealizované případy, které by nás měly poučit, jak má numerické řešení vypadat a možnost ověřit si jej.

2.1 Tekutina v hydrostatické rovnováze s dominující gravitací

Uvažujme tekutinu objemu V , hustoty ρ , tlaku p s rychlostí $\mathbf{u} = 0$ pro všechna \mathbf{r} . Žádná veličina nezávisí na čase. Potom z rovnice 2.1 dostáváme

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} = -\rho \nabla \psi. \quad (2.5)$$

Rovnice kontinuity je triviální a Poissonova rovnice se nemění. Tekutina splňující předchozí rovnici je v hydrostatické rovnováze.

Vezměme $\mathbf{u} = 0$ a $\partial/\partial t = 0$ v rovnici 2.4. Dostáváme, že zdroje tepla musí být vyváženy tepelným tokem $\rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}$. Jestliže je toto splněno, potom je tekutina v tepelné rovnováze. Zatím bez předpokladu, co jsou zdroje tepla.

2.1.1 Sférický symetrický případ

Ve sférických souřadnicích (r, θ, ϕ) pro ψ platí

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}. \quad (2.6)$$

Hledejme řešení nezávislé na θ a ϕ . Potom z předchozí rovnice dostáváme

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r). \quad (2.7)$$

Integrací podle r dostáváme

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = Gm(r), \quad (2.8)$$

kde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}. \quad (2.9)$$

Jestliže $\nabla \psi = (d\psi/dr) \mathbf{e}_r$ je funkcí jen r , \mathbf{e}_r je jednotkový vektor v radiálním směru, z rovnice 2.8 potom dostáváme

$$\mathbf{g} \equiv -\nabla \psi = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.10)$$

Předchozí rovnice nám říká, že ve sféricky symetrickém případě závisí gravitační zrychlení \mathbf{g} jen na hmotě uvnitř a je nezávislé na hmotě vnější

$$\nabla p = -\frac{Gm\rho}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.11)$$

Vektor ∇p směřuje k počátku souřadnic, takže tlak klesá s rostoucí vzdáleností.

Dále předpokládejme vztah pro stavovou rovnici plynu

$$p = \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu} \equiv a^2 \rho, \quad (2.12)$$

kde a je izotermální rychlost zvuku. Předpokládejme, že teplota T a střední molekulová hmotnost μ jsou konstanty v celém objemu tekutiny, takže rychlost zvuku a je také konstanta. Potom dostáváme

$$a^2 \frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}, \quad (2.13)$$

z čehož

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 a^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho. \quad (2.14)$$

Hledáním řešení ve tvaru $\rho = Ar^n$, kde A a n jsou konstanty, máme

$$\rho = \frac{a^2}{2\pi G r^2}, \quad p = \frac{a^4}{2\pi G r^2}. \quad (2.15)$$

Toto je řešení pro těleso ovlivěné jen vlastní gravitací. Není fyzikálně realistické pro $r = 0$, kde p a ρ jsou singulární. Je to ale užitečné modelové analytické řešení. V reálném případě samozřejmě vnitřek hvězdy není izotermální a střední molekulová hmotnost není konstantní.

2.2 Metoda linearizace rovnic

V mnoha zajímavých případech můžeme předpokládat pohyby tekutiny jen jako malé vychylky oproti rovnovážnému stavu. Předpokládejme, že v rovnovážném stavu jsou veličiny nezávislé na čase a jsou dány $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $\psi = \psi_0$. Potom splňují

$$\nabla p_0 = -\rho_0 \nabla \psi_0, \quad \nabla^2 \psi_0 = 4\pi G \rho_0. \quad (2.16)$$

Předpokládejme, že se v systému vyskytují malé pohyby okolo rovnovážného stavu

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \psi = \psi_0 + \psi'. \quad (2.17)$$

Vložení těchto rovnic do základních hydrodynamických rovnic 2.1 – 2.3 dostaneme

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla(p_0 + p') - (\rho_0 + \rho') \nabla(\psi_0 + \psi'), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') = -\nabla \cdot ((\rho_0 + \rho') \mathbf{u}), \quad (2.19)$$

$$\nabla^2(\psi_0 + \psi') = 4\pi G(\rho_0 + \rho'). \quad (2.20)$$

Předpokládáme, že vychylky jsou malé a rovnice linearizujeme zanedbáním členů vyšších řádů. Tím se zjednoduší na tvar

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(p_0 + p') - (\rho_0 + \rho') \nabla \psi_0 - \rho_0 \nabla \psi', \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}), \quad (2.22)$$

$$\nabla^2(\psi_0 + \psi') = 4\pi G(\rho_0 + \rho'). \quad (2.23)$$

Odečtením 2.16 a linearizací máme

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p' - \rho' \nabla \psi_0 - \rho_0 \nabla \psi', \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}), \quad (2.25)$$

$$\nabla^2(\psi_0 + \psi') = 4\pi G(\rho_0 + \rho'). \quad (2.26)$$

Předchozí rovnice představují sadu pěti rovnic o šesti neznámých. Potřebujeme ještě jednu rovnici na uzavření problému, kterou sestavíme na základě předpokladů izotermálního nebo adiabatického cyklu. Je to mnohem jednodušší, než používat celou rovnici 2.4.

2.3 Zvukové vlny

Mějme Poissonovu rovnici s řešením daným

$$\psi'(\mathbf{r}) = \int -\frac{G\rho'(\tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}|} d\tilde{V}, \quad (2.27)$$

kde integrujeme přes celý objem tekutiny. Na pravé straně rovnice jsou v integrálu kladné a záporné fluktuační vyrušení, můžeme tedy aproximovat $\psi' \approx 0$.

Mějme látku v rovnováze, každá veličina je nezávislá na poloze ($\nabla p_0 = \nabla \phi = 0$). Potom můžeme první a druhou rovnici z 2.26 přepsat

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.28)$$

Vezměme divergenci těchto rovnic a upravme na

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \nabla^2 p'. \quad (2.29)$$

Pro adiabatické perturbace máme

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (2.30)$$

kde $c_0^2 \equiv \gamma p_0 / \rho_0$ je konstanta. Integrací vzhledem k času dostaneme $p' = c_0^2 \rho'$, kterou vložíme do rovnice 2.29

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \rho'. \quad (2.31)$$

Toto je vlnová rovnice a popisuje postup vlny prostředím s rychlostí c_0 – adiabatická rychlost zvuku.

Můžeme najít řešení rovinné vlny

$$\rho' = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.32)$$

kde A je amplituda vlny, ω je frekvence a k je vlnové číslo a všechny jsou konstanty. Substitucí předchozích dvou rovnic dojdeme k disperzní relaci

$$\omega^2 = c_0^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (2.33)$$

Specifikuje nám vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem pro danou vlnovou rovnici. S vhodnou volbou fáze vyvodíme

$$\rho' = \alpha \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.34)$$

$$p' = \alpha c_0^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.35)$$

$$\delta \mathbf{r} = -\alpha \frac{c_0^2}{\rho_0 \omega^2} \mathbf{k} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.36)$$

pro určitou konstantní amplitudu α . Zatímco tlak a hustotní výchylky nastávají během fáze, k výchylce \mathbf{r} od rovnovážné polohy nastává mimo fázi. Zvukové vlny jsou nazývány podélnými, protože výchylky jsou rovnoběžné s vektorem vlnového čísla \mathbf{k} .

2.4 Bondiho akrece

V této kapitole budu uvažovat o akreci na povrch hvězdy. Akrece představuje jeden ze základních principů tvorby hvězdného disku a zároveň patří mezi základní mechanismy, které ovlivňují hvězdný vývoj (opačným jevem může být odtok látky ve formě hvězdného větru). Myšlenku sféricky symetrické akrece látky na kouli (hvězdu) rozpracoval už v roce 1952 Bondi ve svém článku [3] a [4].

Předpokládejme sféricky symetrickou ustálenou ($\partial/\partial t = 0$) akreci plynu na povrch hvězdy. Rychlost plynu je v nekonečnu rovna nule. Předpokládáme, že ve stavové rovnici je tlak plynu roven mocnině hustoty.

Hmota akreovaná na hvězdu za jednotku času dM/dt je

$$\frac{dM}{dt} = \frac{2\pi\alpha(GM)^2\rho_\infty}{v^3}, \quad (2.37)$$

kde M je hmotnost hvězdy, ρ_∞ je hustota látky daleko od hvězdy, α je hodnota blízká 1,25 a v je rychlost akreované látky. Přírůstek hmoty z akrece je zanedbatelný vůči hmotnosti hvězdy.

Dále předpokládáme, že látka je v nekonečnu homogenní a má hustotu ρ_∞ a tlak p_∞ . Pohyb plynu je poté při pádu na hvězdu sféricky symetrický a ustálený. Potom tlak p a hustota ρ poblíž hvězdy jsou ve vztahu

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma, \quad (2.38)$$

kde γ splňuje podmínku $1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$. Vhodnou volbou γ můžeme zajistit, že žádná energie není při změně stavu vyzářena. Odvodíme pohybové rovnice popisující pohyb v radiální vzdálenosti r a rychlosti pohybu v směřující do středu. Rovnice kontinuity nám dává

$$4\pi r^2 \rho v = \text{konst.} = A, \quad (2.39)$$

kde A je rychlost akrece.

Bernoulliho rovnice nám dává

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{konst.} = 0. \quad (2.40)$$

Kombinací 2.38 a 2.40 máme

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{GM}{r}. \quad (2.41)$$

Rovnice 2.39 a 2.41 jsou dvě rovnice o dvou neznámých v a ρ v závislosti na vzdálenosti od centra hvězdy.

Rovnice převedeme na bezrozměrné, pokud jako referenční použijeme rychlost zvuku c

$$c^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}. \quad (2.42)$$

Zavedme si bezrozměrné veličiny x, y, z

$$r = x \frac{MG}{c^2}, \quad (2.43)$$

$$v = yc, \quad (2.44)$$

$$\rho = z\rho_\infty. \quad (2.45)$$

Potom 2.39 a 2.41 mají bezrozměrný tvar

$$x^2 y z = \lambda, \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{(z^{\gamma-1} - 1)}{\gamma - 1} = \frac{1}{x}, \quad (2.47)$$

kde λ je souvisí s rychlostí akrece

$$A = \frac{4\pi\lambda(GM)^2\rho_\infty}{c^3}. \quad (2.48)$$

Bezrozměrný parametr λ určuje rychlost akrece. Jeho význam je podobný, jako parametr akrece α .

Explicitní řešení rovnice 2.46 a 2.47 není možné pro obecné γ v proměnných y a z . Zavedeme tedy proměnnou u

$$u = yz^{-\frac{(\gamma-1)}{2}}. \quad (2.49)$$

Substitucí předchozí rovnice do 2.46 za y a z máme

$$y = u^{\frac{2}{\gamma-1}} \left(\frac{\lambda}{x^2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \quad (2.50)$$

$$z = \left(\frac{\lambda}{x^2 u} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (2.51)$$

V případě že řešíme rovnice pro kritickou hodnotu λ_c dostaneme

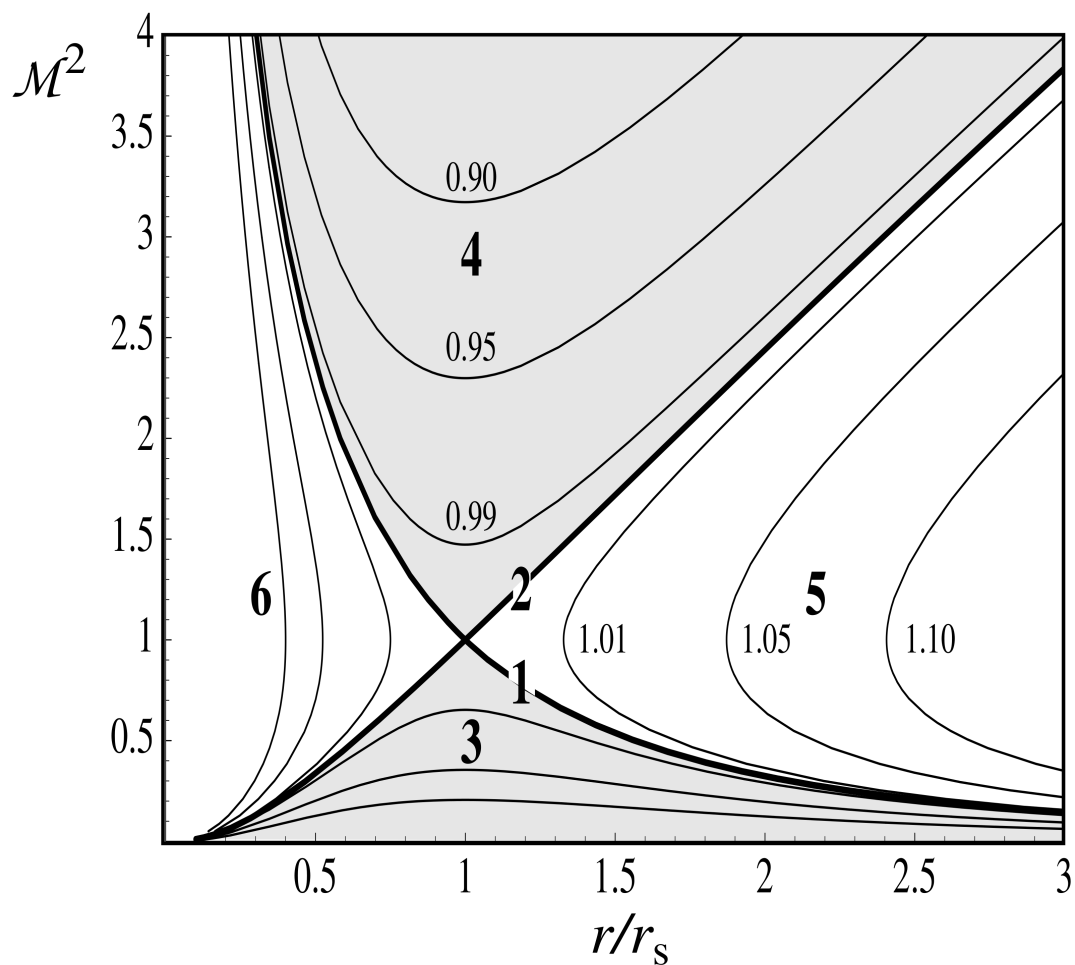
$$\lambda_c = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \left(\frac{5-3\gamma}{4} \right)^{-\frac{(5-3\gamma)}{2(\gamma-1)}}. \quad (2.52)$$

Ve výsledku je tedy rychlost akrece

$$A = \frac{4\pi\lambda_c(GM)^2\rho_\infty}{c^3}. \quad (2.53)$$

Hodnoty λ_c pro různá γ shrnuje následující tabulka

γ	1	$\frac{7}{5} = 1.4$	$\frac{5}{3}$
λ_c	$\doteq 1.12$	$\doteq 0.625$	$\doteq 0.250$



Obrázek 2.1: Dvě transonické řešení 1, 2 naznačené plnou čarou dělí řešení na oblasti 3 – 6, které jsou popsány v textu. Příklad pro $\gamma = 4/3$ [5].

Obecně máme dva možné typy chování pro $\lambda = \lambda_c$. Typ 1 existuje pro $\lambda \leq \lambda_c$. Pohyb je všude podzvukový. Hustota je vždy monotónická funkce poloměru, u a v mají různá chování pro různá γ . Pro typ 2 nastává právě pro $\lambda = \lambda_c$, všechny veličiny u , v a ρ jsou monotónickými funkcemi poloměru.

Obrázek 2.1 ilustruje řešení pro Machovo číslo $\mathcal{M} = y$ na vzdálenosti $x = r/r_s$. Plné čáry 1 a 2 představují dvě transonická řešení. Ty tvoří rozhraní mezi podzvukovou a nadzvukovou oblastí. Oblastí 3 a 4 tvoří zcela podzvukovou a nadzvukovou oblast. Plochy 5 a 6 mají dvě možná řešení rychlost v^2 . Oblasti grafu lze popsat takto:

1. $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$, $v \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$,
2. $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$, $v \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow 0$,
3. $v^2(r) < c_s^2(r)$, pro $\forall r$, $\frac{d}{dr}(v^2) = 0$ v r_s ,
4. $v^2(r) > c_s^2(r)$, pro $\forall r$, $\frac{d}{dr}(v^2) = 0$ v r_s ,
5. $\frac{d}{dr}(v^2) = \infty$ v $v^2 = c_s^2(r_s)$; $r > r_s$,
6. $\frac{d}{dr}(v^2) = \infty$ v $v^2 = c_s^2(r_s)$; $r < r_s$,

kde

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)}. \quad (2.54)$$

Kapitola 3

SPH metoda

Metoda SPH (Smoothed particle hydrodynamics) byla vyvinuta [6] a [7], aby simulovala nesymetrické jevy v astrofyzice. SPH splňuje požadavky na jednoduché používání a dostatečnou přesnost.

SPH je metoda založená čistě na částicovém přiblížení a na rozdíl od metody PIC (Particle In Cell) nepotřebuje síť pro určení prostorových derivací fyzikálních veličin. Eulerovy rovnice a rovnice pro energii jsou potom vyjádřeny soustavou obyčejných diferenciálních rovnic a jsou jednoduché na pochopení v mechanických i termodynamických souvislostech. S tím je spojena i dostatečná intuice astrofyziků pro detailní analýzu problému. Jedná se o přesnou metodu, která je schopna v 3D komplexního fyzikálního popisu.

3.1 Popis veličiny

Hlavní složkou SPH metody [8] je schopnost vyjádřit jakoukoliv funkci (můžeme chápat i jako veličinu) pomocí množiny částic.

Interpolační integrál pro funkci $A(\mathbf{u})$ pro spojité médium je definován

$$A_1(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^3} A(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}', \quad (3.1)$$

kde integrujeme přes celý prostor \mathbb{R}^3 , W je interpolační kernel, který splňuje vlastnost

$$\int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1, \quad (3.2)$$

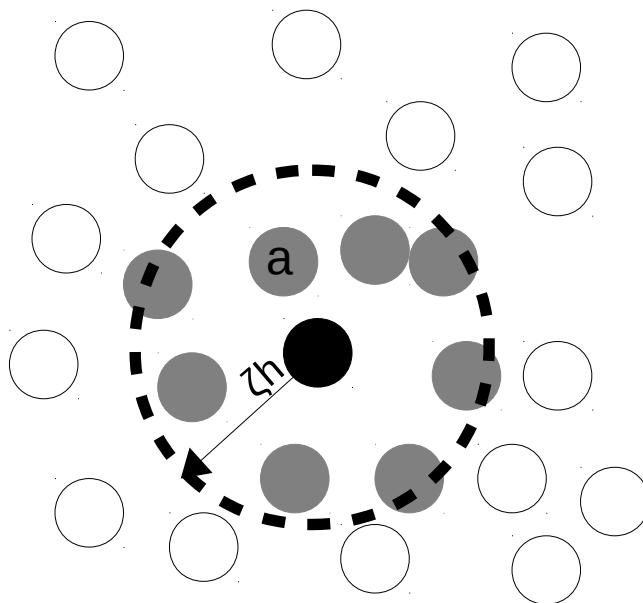
$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.3)$$

kde limita je chápána jako limita odpovídajících integrálních interpolátorů.

Pro numerickou (diskrétní) práci s integrální interpolací aproximujeme 3.1 pomocí sumy

$$A_S(\mathbf{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h), \quad (3.4)$$

kde sumační index b označuje jednotlivé částice a sčítáme přes všechny částice. Částice b má hmotnost m_b , pozici \mathbf{r}_b , hustotu ρ_b a vektor rychlosti \mathbf{v}_b . Hodnotu veličiny částice b značíme A_b .



Obrázek 3.1: Pro popis veličiny v daném bodě (černý střed) slouží jen částice do vzdálenosti ζh a sčítáme přes všechny částice a .

Hlavní myšlenkou celé metody je možnost vytvořit diferencovatelný interpolant veličiny, jejíž hodnoty používáme v diferencovatelné funkci kernelu W . Diferenciál interpolandu je získán z obyčejné diferenciální rovnice. Není potřeba používat konečné diference nebo mřížku. Pro veličinu ∇A dostáváme

$$\nabla A = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h), \quad (3.5)$$

nebo pro lepší přesnost jej získáme

$$\rho \nabla A = \nabla(\rho A) - A \nabla \rho. \quad (3.6)$$

Původní kalkulace [7] používaly jako kernel Gaussovu funkci. Napodobuje vlastnost delta funkce pro $h \rightarrow 0$. Můžeme například použít kernel založený na splinech nebo jiné podobně se chovající funkce. Pro fyzikální interpretaci je nejjednodušší předpokládat funkci Gaussovu.

Chyba výpočtů závisí nejhůře kvadraticky na vzdálenosti mezi částicemi $O(h^2)$. Přestože jsou sumace ve vztazích přes všechny částice, přispívá efektivně jen malé množství částic v kouli o poloměru ζh , kde ζ závisí na použitém kernelu, jak je schematicky naznačeno na obrázku 3.1. S tím souvisí rychlý pokles k nule pro $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \geq \zeta h$. Dále nebudu uvažovat rozdíl mezi interpolandem dané funkce v bodě a a vlastní funkcí.

3.2 SPH hydrodynamický popis

Odvození SPH hydrodynamických rovnic udělat na základě předchozích kapitol, přesto však jednodušší na základě Eulerových-Lagrangerových rovnic.

3.2.1 Momentová rovnice

Lagrangian pro stlačitelný nedisipativní tok je dán

$$L = \int \rho \left(\frac{1}{2} v^2 - u(\rho, s) \right) d\mathbf{r}, \quad (3.7)$$

kde $u(\rho, s)$ je tepelná energie na jednotku hmotnosti, která je funkcí hustoty ρ a entropie s . Do rovnice můžeme zahrnout vlastní gravitaci

$$L = \sum_b m_b \left(\frac{1}{2} v_b^2 - u(\rho_b, s_b) + \frac{G}{2} \sum_k \frac{m_k m_b}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k|} \right). \quad (3.8)$$

Z SPH formulace dostáváme pro hustotu částice a vztah

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}(h_a), \quad (3.9)$$

kde h_a je vyhlazovací délka pro ρ_a .

Rovnice pohybu vycházejí z principu, že entropie zůstává konstantní. Z Eulerovy-Lagrangerovy rovnice dostáváme pro částici a vztah

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0, \quad (3.10)$$

a poté

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} - \sum_b m_b = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{r}_a} - G \sum_b \frac{m_b (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3}. \quad (3.11)$$

Z rovnice 3.9 dostáváme

$$\Omega_b \frac{\partial \rho_b}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_b m_b \nabla_a W_{ab}(h_a) \delta_{ab} - m_a \nabla_b W_{ab}(h_b), \quad (3.12)$$

kde ∇_a značí gradient funkce W_{ab} a

$$\Omega_b = 1 - H'_b \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_b)}{\partial h_b}, \quad (3.13)$$

kde H' značí $\partial h_b / \partial \rho_b$.

Z prvního zákona termodynamiky dostáváme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s = \frac{P}{\rho^2}. \quad (3.14)$$

Potom pro zrychlení máme

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\Omega_a \rho_a} \nabla_a W_{ab}(h_a) - G \sum_b \frac{m_b (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^3} \right) \quad (3.15)$$

Okrajové podmínky můžeme reprezentovat jako periodické, či s pevným okrajem.

3.3 Zákony zachování

Symetrie Eulerových-Lagrangerových rovnic okamžitě vedou na zákony zachování. Například hustota (a také tlak P , když entropie s je konstantní) a gravitační potenciál nejsou závislé na posunech a rotacích systému souřadnic. Jestliže se v systému vyskytují viskózní síly, lze je zkonstruovat tak, že se hybnost a moment hybnosti zachovává.

Pro konstantní entropii je případ zachování energie vidět z rovnice

$$\frac{d}{dt} = \left(\sum_a \mathbf{v}_a \cdot \frac{dL}{d\mathbf{v}_a} - L \right) = 0. \quad (3.16)$$

Jestliže entropie zůstává konstantní během pohybu částic systému, systém je invariantní vzhledem k transformacím. Ve zbytku kapitoly dokážeme, že i v metodě SPH dochází k zachování.

Předpokládejme změnu lagrangiánu

$$\delta L = \sum_j \left(\frac{dL}{d\mathbf{r}_j} \cdot \delta \mathbf{r}_j + \frac{dL}{d\mathbf{v}_j} \cdot \mathbf{v}_j \right), \quad (3.17)$$

kde j je částice v cyklu. Systém je invariantní vzhledem k transformacím. Změny polohy a rychlosti jsou

$$\delta \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j, \quad (3.18)$$

$$\delta \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j. \quad (3.19)$$

Použitím Eulerových-Lagrangovy rovnice můžeme 3.17 přepsat

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_j} \cdot (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) \right) = 0. \quad (3.20)$$

Za předpokladu, že všechny částice mají stejnou hmotnost

$$\frac{d}{dt} \sum_j \mathbf{v}_j \cdot (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) = 0, \quad (3.21)$$

dostaneme

$$\sum_j \mathbf{v}_j \cdot (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) = \text{konst.}, \quad (3.22)$$

což platí v této aproximaci pro každý cyklus.

To stejné můžeme předpokládat pro posun částic v cyklu v opačném směru. Pro časovou derivaci dostáváme

$$\frac{d}{dt} \sum_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{(\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j)}{2} = 0. \quad (3.23)$$

Odchyly v numerické aproximaci dokážeme vysvětlit především ve vyšších řádech lagrangiánu.

Jestliže je rychlost konstantní, máme pro rotaci úhlovou rychlostí Ω

$$\frac{1}{2} \Omega \cdot \sum_j \mathbf{v}_j \times (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) = \text{konst.} \quad (3.24)$$

Normála k plošce A je dána vektorovým součinem $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_{j+1})$ a po úpravě máme

$$2\Omega \cdot \mathbf{n}A = \text{konst.} \quad (3.25)$$

Vorticita 2Ω dává stejný výsledek, jako kdybychom aplikovali Stokesův teorém na kruhový integrál.

3.4 Tepelná energie a viskozita

Jestliže je entropie s konstantní, můžeme získat rychlost změny tepelné energie ze změny hustoty

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{1}{\Omega_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a), \quad (3.26)$$

kde $\mathbf{v}_{ab} = (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)$ a dostaneme pro konstantní entropii

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d\rho_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2 \Omega_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a). \quad (3.27)$$

Tepelná rovnice pro energii je

$$\frac{dE_k}{dt} = - \sum_a \sum_b m_b m_a \mathbf{v}_a \cdot \left(\frac{P_a}{\rho_a^2 \Omega_a} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\rho_b^2 \Omega_b} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right) - \frac{dE_G}{dt}, \quad (3.28)$$

kde E_k je kinetická energie a E_G je gravitační energie. Pro celkovou energii $E_{\text{th}} = E_k + E_G$ poté máme

$$\frac{dE_{\text{th}}}{dt} = \sum_a m_a \frac{du_a}{dt} = \sum_a m_a \frac{P_a}{\rho_a^2 \Omega_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a). \quad (3.29)$$

3.4.1 Viskozita

Viskozitu pro SPH zavedeme tenzorem napětí

$$\Pi_{ab} = - \frac{\sigma_{ab} \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{|\mathbf{r}_{ab}|}, \quad (3.30)$$

kde veličina σ_{ab} je pozitivně definitní veličina, která má vztah k parametru umělé viskozity závislém na rychlosti zvuku.

Přidáme člen

$$- \frac{1}{2} \sum_b m_b \Pi_{ab} \overline{\nabla_a W_{ab}} \quad (3.31)$$

na pravou stranu rovnice 3.15, kde

$$\overline{\nabla_a W_{ab}} = \frac{1}{2(\nabla_a W_{ab}(h_a) + \nabla_a W_{ab}(h_b))}. \quad (3.32)$$

Hybnost a moment hybnosti se stále zachovávají, protože viskózní síly jsou stále podél linie propojující středy daných částic. Potom pro změnu vnitřní energie platí

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2 \Omega_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) - \frac{1}{2} \sum_b m_b \Pi_{ab} \mathbf{v}_{ab} \overline{\nabla_a W_{ab}(h_a)}. \quad (3.33)$$

Člen $\overline{\nabla_a W_{ab}}$ můžeme napsat ve formě $\mathbf{r}_{ab} F_{ab}$, kde $F_{ab} \leq 0$. Z toho plyne, že příspěvek viskozity ke změně vnitřní energie je kladný. A entropie roste.

Existuje další efekt disipace, který je velice podobný případu pro simulace kapalin při normálních teplotách a tlacích. V těchto případech může být změna entropie zanedbána a předpokládáme, že disipace probíhá na úkor kinetické energie částic, která klesá k nule. Pro změnu energie potom dostáváme

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{d}{dt}(E_k + E_G + E_{th}) = -\frac{1}{2} \sum_b m_b \Pi_{ab} \mathbf{v}_{ab} \overline{\nabla_a W_{ab}}, \quad (3.34)$$

kde ve změně tlaku zahrnujeme jen změny způsobené tlakem.

3.5 PySPH

PySPH¹ [9] je paralelní open source kód v Pythonu sloužící pro počítání Smoothed Particle Hydrodynamics modelů. Je distribuován pod BSD licenci. Jeho kritické části jsou implementovány v Cythonu a paralelní algoritmus běží nad knihovnou MPI (mpi4py). Je navržen, aby byl relativně jednoduše rozšiřitelný, čemuž napomáhá i programovací jazyk Python.

Jádro PySPH obsahuje *particle kernel* a *solver*. *Solver* je schopen řešit viskózní, nestlačitelné Navierovy-Stokesovy rovnice v následujících případech, které jsou implementovány:

- Slabě stlačitelné SPH,
- Elastická dynamika,
- Stlačitelné SPH.

3.6 Instalace PySPH a poznámky k vydání

Pro nainstalování balíčku je potřeba splnit hned několik závislostí (balíčků) pro Python

- NumPy – Numerická knihovna se základními matematickými operacemi,
- Cython – Podpora překladač pythonovského kódu do C/C++,
- Mako – Podpora kompilace modulů,
- nose – Spouštění numerických testů,
- mpi4py – Podpora paralelního spouštění a komunikace mezi podprocesy.
- Zoltan, PyZoltan – Podpora správného přerozdělování částic (NNPS – Nearest Neighbour Particle Search) pro jednotlivé paralelní podprocesy, pokud dochází k výměně částic.

¹<https://bitbucket.org/pysph/pysph>

Kromě těchto balíčků doporučuji instalovat i knihovnu Mayavi, kterou následně umí využít integrovaný vizualizační nástroj PySPH_Viewer. Ten umožňuje přehledově zobrazit výsledná data.

Vlastní instalace představuje jeden z nejzávažnějších problémů používání. Toto platí zejména pro použití pro paralelní verzi s podporou MPI a knihovny Zoltan. Pro své použití jsem použil PySPH ve verzi 1.0 Alpha z prosince 2014. Návod na oficiálních stránkách není kompletní a pokud nepoužijeme virtuální prostředí pro Python Virtual Environment, je v podstatě nepoužitelný. Uvádím proto jeho modifikaci.

Nejdříve stáhneme potřebné balíčky pro Python.

```
$ pip install cython mako nose mpi4py numpy
```

Knihovnu stáhneme pomocí git².

```
$ git clone https://bitbucket.org/pysph/pysph.git
```

Git je verzovací nástroj pro práci s komplexními projekty. Slouží nejen pro správu textových souborů, ale obecně jakýchkoliv projektů, tedy i zdrojových kódů, souborů v LaTeXu, skriptů na vykreslování grafů ...

Dále je potřeba nainstalovat knihovnu Zoltan, která je spolu s balíčkem dodávána. K jejímu stažení slouží skript build_zoltan.sh a jako parametr je složka, kam bude stažena.

```
$ ./build_zoltan /home/jbenacek/zoltan
```

Skript je ale funkční jen částečně a je třeba dodělat poslední část. Přesuneme se do složky zoltan/Zoltan3.8/, vytvoříme složku build a vstoupíme do ní.

```
$ cd zoltan/Zoltan3.8/
```

```
$ mkdir build
```

```
$ cd build
```

Zde provedeme příkaz configure s podporou MPI a instalaci.

```
$ ../configure --with-cflags=-fPIC \
               --enable-mpi --prefix=/home/jbenacek/zoltan
```

```
$ make install
```

Dalším podstatným krokem je stažení pyzoltan a jeho zkompileování a instalace.

```
$ git clone https://bitbucket.org/pysph/pyzoltan.git
```

```
$ cd pyzoltan
```

```
$ python setup.py build --force
```

```
$ python setup.py install
```

Pro instalaci vlastního PySPH musíme zadat odkazy, kde se nachází Zoltan.

```
$ export ZOLTAN_INCLUDE="/data/Skola/diplomka/\
```

```
$_pysph/zoltan/include"
```

```
$ export ZOLTAN_LIBRARY="/data/Skola/diplomka/\
```

```
$_pysph/zoltan/lib"
```

V případě novější verze 1.0Alpha0 (4/2015) je tato možnost uvozena.

²<http://git-scm.com/>

```
$ export ZOLTAN="/data/Skola/diplomka/pysph/zoltan/"
```

Přejdeme do adresáře pysph a provedeme instalaci. Pokud instalace nenajde knihovnu pyzoltan v požadované proměnné ZOLTAN, dá to na počátku instalace najevo.

Podpora MPI a paralelního počítání lze jednoduše zjistit spuštěním instance Python.

```
$ python
> import pysph
> pysph.Has_MPI
True
> pysph.Has_Zoltan
True
```

V opačném případě dostaneme False.

Ještě uvedu krátký komentář k nově vydávané verzi knihovny PySPH 1.0Alpha0. Obecně je důležité vybrat správnou verzi. Porovnávat budu starší verzi z 19.11 2014 a v této chvíli nejnovější z 12.4 2015. Vlastní knihovna v novější verzi obsahuje chybu a pro počítání hydrodynamiky plynů je nevhodná. Program padá a hlásí "Segmentation Fault". Naopak vlastní instalační skript se zjednodušil a stačí instalovat podle výše uvedeného postupu. Ve výsledku tedy doporučuji vzít novější knihovnu a do ní zkopírovat starší vydání složky "pysph". Kompilace proběhne bez problémů a běh také nevykazuje známky nestability pro použití hydrodynamiky plynů.

3.7 Testování PySPH

Knihovna je dodávána spolu s několika příklady pro použití každé z možných metod řešení (Solvers). Jde o počítání typických modelů pro danou situaci se známým výsledkem. Na toto je navázáno testování dané metody, zda pracuje správně. Otestování po zkompilování provedeme spuštěním testů.

```
$ python -m nose.core pysph
```

Kromě obecného otestování funkčnosti jednotlivých modulů a tříd kódu se mimo jiné jedná o tyto testy:

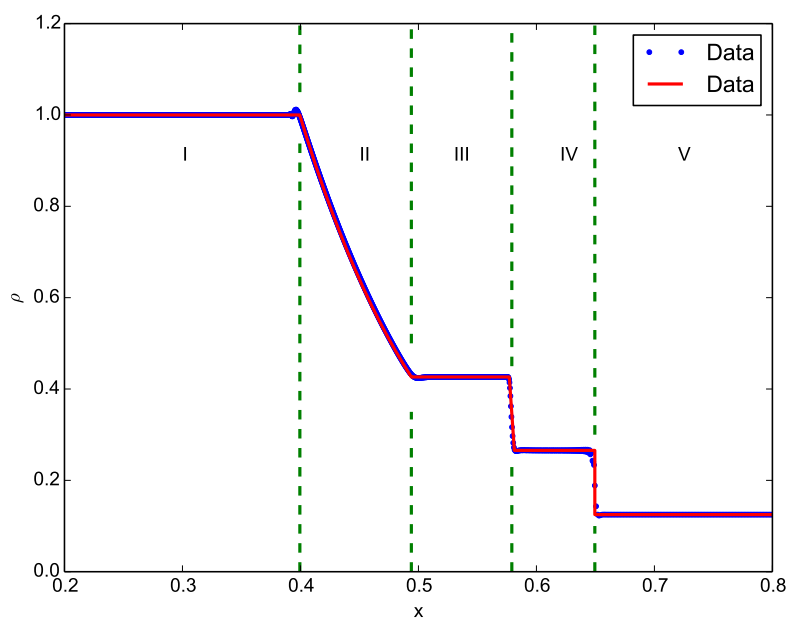
- Mohův válcový test impoze,
- Sodův bodový problém exploze,
- 1D a 2D Sodův test šíření vlny rázové v trubici.

Vlastní testování proběhne bez problémů – nasimulované výsledky se shodují s analytickými. Jediné nutné úpravy jsou mezi kódovou kompatibilitou PySPH knihovny a naprogramovaných příkladů, které jsou zastaralé, a to správným voláním funkcí.

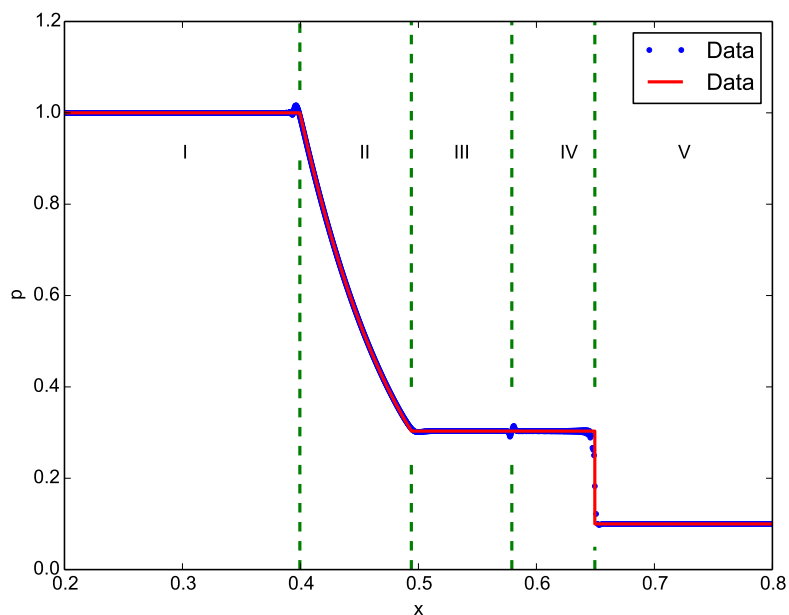
Obrázky 3.2 ukazují porovnání vypočítaných hodnot hustoty a tlaku s analytickým řešením pro řešení časového vývoje rozpínání plynu v trubici – Sodův problém^{3,4} pro jednorozměrné řešení. Počáteční podmínky byly dány zvlášť pro levou ($x < 0.5$) a pravou

³http://en.wikipedia.org/wiki/Sod_shock_tube

⁴http://training.altairuniversity.com/wp-content/uploads/2012/08/Example_13.pdf



(a) Závislost hustoty na poloze.



(b) Závislost tlaku na poloze.

Obrázek 3.2: Porovnání modelu a analytického řešení hustoty a tlaku pro Sodovu šokovou trubici v čase $t = 8.5 \cdot 10^{-2}$

($x > 0.5$) polovinu trubice. V levé části byla hustota ρ_I i tlak p_I v čase $t = 0$ rovny 1, v pravé polovině byla hustota ρ_V pro stejný čas rovna 0.125 a tlak p_V 0.1. Adiabatický koeficient je $\gamma = \frac{7}{5}$.

Od času $t = 0$ dochází k časovému vývoji a řešení je dáno, jak naznačují obrázky 3.2, v pěti různých oblastech. Oblasti I a V stále splňují počáteční podmínky ρ_I, ρ_V, p_I, p_V . Označme si

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \beta = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad a_I^2 = \gamma \frac{p_I}{\rho_I}. \quad (3.35)$$

Hustota ρ_{IV} je dána

$$\rho_{IV} = \rho_V \frac{p_{IV} + \Gamma p_V}{p_V + \Gamma p_{IV}}, \quad (3.36)$$

tlak $p_{IV} = p_{III}$, který se spočítá numerickým řešením rovnic

$$u_{IV} = (p_{III} - p_V) \sqrt{\frac{1 - \Gamma}{\rho_V (p_{III} + \Gamma p_V)}}, \quad (3.37)$$

$$u_{II} = (p_I^\beta - p_{III}^\beta) \sqrt{\frac{(1 - \Gamma^2) p_I^{1/\gamma}}{\Gamma^2 \rho_I}}, \quad (3.38)$$

$$u_{II} = u_{IV}, \quad (3.39)$$

kde u_{II} a u_{IV} jsou rychlosti částic.

Potom je hustota ρ_{III} dána

$$\rho_{III} = \rho_I \left(\frac{p_{III}}{p_I} \right)^{1/\gamma}. \quad (3.40)$$

Řešení v oblasti II je dáno

$$\rho_{II} = \rho_I \left(\frac{p_I}{p_{II}} \right)^{-\gamma}, \quad (3.41)$$

$$p_{II} = p_I (1 - \gamma \beta (u_{II}/a_I))^{1/\beta}, \quad (3.42)$$

$$u_{II} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(a_I + \frac{X}{T} \right), \quad (3.43)$$

kde X je poloha měřená od středu trubice $x = 0.5 + X$.

Kapitola 4

Be hvězdy

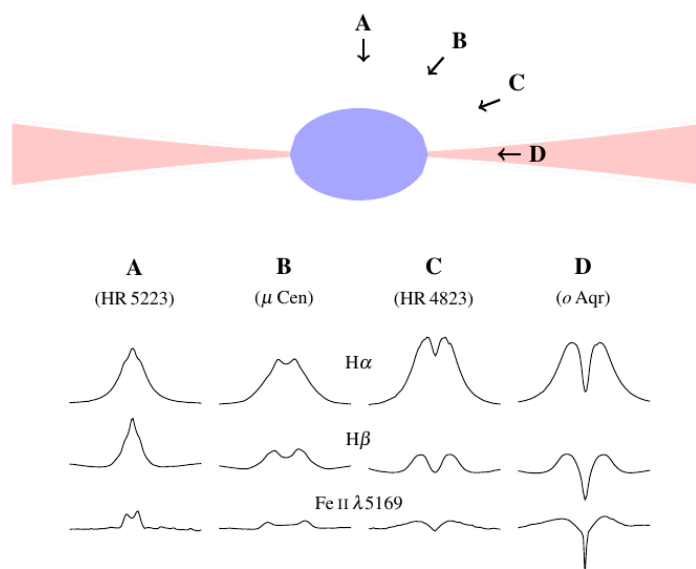
Be hvězdy [10] jsou vpravdě velice záhadné objekty, jak nám ukazuje dlouhá historie jejich výzkumu. Byly objeveny v roce 1866 Secchim a jsou zastoupeny mezi nejjasnějšími objekty na obloze, což napomáhá jejich výzkumu. V posledních desetiletích jsou pokroky ve výzkumu Be hvězd podpořeny rozvojem pozorovatelské techniky i možnostmi numerického modelování. A přesto stále nejsou dostatečně přesně interpretovatelná data, která dostáváme z fotometrických, spektroskopických, i polarimetrických a interferometrických měření, jejichž množství s nástupem přehlídek nadále narůstá.

Přestože modelů popisujících stavbu a dynamický vývoj se v historii vyskytla celá řada, ve výsledku jsou Be hvězdy horké hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu B (vyjímečně O), které rotují vysokými úhlovými rychlostmi blízcími se rychlosti kritické. Jak ukazují poslední pozorování, pravděpodobně neradiálně pulzují a ve svém okolí vytvářejí dekreční disk, který je v prvním přiblížení difúzní plynný disk rotující keplerovskou rychlostí ($v \sim 1/\sqrt{r}$). Disk je plněn z centrální hvězdy a jeho vývoj je ovlivněn jeho viskozitou. Naše znalosti o Be hvězdách však stále nejsou kompletní. Jde zejména o určování dynamiky soustavy, ale i vývoj ve vícenásobném hvězdném systému, nebo ovlivnění magnetickým polem. Be hvězdy jsou výborné laboratoře ve vesmíru, které nám pomáhají porozumět nejrůznějším fyzikálním procesům samostatně i v jejich kombinaci, zvláště o hvězdách horní poloviny hlavní posloupnosti na HR diagramu.

4.1 Definice Be hvězd

Už v roce 1866 si kněz A. Secchi zapsal pozorování γ Cas (B0.5IV), která na pozici spektrální čáry H_β ukazovala "une particularité curieuse ... une ligne lumineuse tres belle et bien plus brillante que tout le reste du spectre". Obecně se poté Be hvězdy zformovaly jako taxonomická skupina, které vedle spektrálního typu B vykazovala i emisi v Balmerových čarách. V prvopočátku byly Be hvězdy ve skupině společně s hvězdami typu P Cygni, až Struve v roce 1931 vyčlenil tyto hvězdy jako zvláštní skupinu. Ve skupině naopak zůstaly hvězdy, které uprostřed emisní části Balmerových čar měly i úzkou absorpci. Vysvětlení Struve podával jako geometrickou závislost úhlu pohledu na systém hvězda-disk, jak znázorňuje 4.1 .

Skutečný původ tvaru spektrálních čar zůstával ale dlouho záhadou. Zejména v průběhu 70. a 80. let došlo k velkému nárůstu počtu modelů popisujících tento systém. Konečné



Obrázek 4.1: Schématický pohled na hvězdu a disk. Spodní část ukazuje příklady pozorovaných spekter od pohledu na pól po hvězdu cloněnou diskem [10].

rozuzlení dal Quirrenbach a kol. [11]. Konečnou definici zavedl Jashek a kol. [13], kterou později popularizoval Collins [14].

Definice Be hvězd: *B hvězda, která není obr a jejíž spektrum má, nebo někdy mělo jednu nebo více Balmerových čar v emisi.*

Definice nám tedy neříká nic o okolohvězdném disku, pouze by se měl projevit v pozorovaném spektru. To je splněno pro jakoukoli Be hvězdu, jejíž disk má hustotu nad $10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$. Definice neurčuje, ani jestli je daná hvězda hvězdou typu Be, pokud v danou dobu emise v Balmerových čarách nemá.

4.2 Podobné objekty

Pro B hvězdy je zcela běžné mít okolohvězdnou emisi. Vzhledem k definici uvedené výše by všechny luminozitní třídy III–V mohly být klasifikovány jako Be hvězdy. Přesto je však nutné odlišit Be hvězdy od ostatních typů s nimiž mohou být zaměněny [10]:

- **Veleobři:** Pro mladé B hvězdy s vysokou rychlostí $v \sin i$ je časté klasifikovat obry jako hvězdy hlavní posloupnosti. Jejich emise nepochází z disku, dokonce ani v případě, že se nachází na obou stranách spektrální čáry. Pochází z hvězdného větru ve kterém se zachovává moment hybnosti.
- **Herbigovy hvězdy:** Mezi B hvězdami s emisními čarami vypovídajícími, že hvězda se nachází blízko hlavní posloupnosti, jsou Herbigovy Ae/Be jednoduše zaměnitelné s Be hvězdami hlavní posloupnosti. Jsou to mladé hvězdné objekty v závěrečné fázi jejich vzniku, obsahují fosilní plynný disk. Tyto hvězdy jsou zřetelné ve způsobu emise a proměnnosti, často ukazují P Cygni a inverzní P Cygni profil spektrálních čar.

Méně klidné objekty mohou a jsou zaměňovány s Be hvězdami a k jejich rozlišení dojde jen po pozorování ve vzdáleném infračerveném nebo mikrovlném záření.

- Dvojhvězdy vyměňující si látku: Je známo několik typů soustav, ve kterých představují B hvězdy primární složku. Jde například o typ Algol nebo W UMa, zákrytové proměnné v polodotykové resp. dotykové soustavě, ve které sekundární složka vyplňuje Rocheův lalok. Emisní čáry vznikají při akreci látky na primární složku. Žádný z nich nebyl pokládán jako klasická Be hvězda ve smyslu definice, později ale [15] ukázali, že může být za vznik Be hvězdy zodpovědný.
- B[e] hvězdy: Jde o nehomogenní skupinu B hvězd, které ukazují Balmerovu emisi a některé zakázané čáry. Jde o veleobry, mladé hvězdné objekty, dvojhvězdy, kompaktní planetární mlhoviny a další neklasifikovatelná skupina, kterou od Be hvězd odlišují zakázané čáry a prachová emise v infračervené oblasti.
- Hvězdy s emisí v magnetosféře: Magnetické B hvězdy typicky nemají čarovou emisi, ale v závislosti na intenzitě magnetického pole, hvězdném větru, rotaci, atd. mohou mít emisi v Balmerových čarách vytvářenou v magnetosféře. Dlouhou dobu měla tato skupina pouze jednoho člena, v poslední době počet členů vzrostl a to zejména díky studiu rychle rotujících hvězd.

Oe a A–F (slupkové) hvězdy: Další otázkou zůstává, zda Be fenomén se opravdu vyskytuje jen u hvězd spektrálního typu B, nebo zasahuje do širšího okruhu hvězd. U Oe hvězd jde o stejnou klasifikaci, protože mají stejné spektrum. Velká část z nich jsou pozdní O typy, tedy blízko B typu. Situace je podobná s typy A a F. Některé z nich ukazují slabou emisi v $H\alpha$, ta ale rychle vymizí, jak hvězda stárne.

Z toho plyne, že přestože objekty typu Be existují mimo spektrální typ B, zaměření na studium výhradně B hvězd nebude mít vliv na studium případných podobných objektů.

4.3 Disky Be hvězd

Disky tvoří neodlučitelnou část Be hvězd. Jak ukazují pozorování [11], okolohvězdná látka díky rotaci vytvoří plochý disk. Ten je charakterizován úhlem otevření, který udává úhel, pod kterým disk zvětšuje svoji výšku s rostoucí vzdáleností od středu. Quirrenbach [12] ukázal, že horní limit pro tento úhel je 20° , zatímco běžná pozorování ukazují tento úhel menší. To vyplývá i ze statistiky hvězd zakrytých diskem [16]. Disk je ve vertikálním směru v hydrostatické rovnováze a profil jeho hustoty má Gaussovský profil, jestliže předpokládáme izotermální plyn. Škálová výška disku $H(r)$ [17], která určuje typickou výšku disku, je závislá na gravitaci hvězdy a tedy i oběžných rychlostech v_{orb} plynu

$$H(r) = \frac{c_s}{v_{\text{orb}}} \frac{r^{3/2}}{R_*^{1/2}}, \quad (4.1)$$

kde c_s je izotermální rychlost zvuku, r je vzdálenost od centra hvězdy a R_* je poloměr hvězdy. Tedy s rostoucí hmotností hvězdy se zvětšuje oběžná rychlost a škálová výška se zmenšuje. Protože je škálová výška úměrná poměru rychlosti zvuku a orbitální rychlosti, disk se s rostoucí vzdáleností od hvězdy vertikálně rozšiřuje. Pro disk chladnější,

než je fotosféra hvězdy, je úhel otevření těsně u hvězdy kolem 2° a roste do 10° pro vzdálenost $20 R_*$. Pokud by byl disk opticky i geometricky tlustý, polarimetrická pozorování by ukazovala polarizaci rovnoběžnou s diskem.

Určení fyzické velikosti disku z porování je velice problematické. Důležité je ale rozlišovat mezi fyzickou velikostí a velikostí vyzařující oblasti v kontinuu nebo čarách. Faktorem zůstává, že fyzická velikost disku dosud nebyla určena [10].

4.3.1 Hustota disku

Historicky byla hlavní zdroj informací o hustotě disku pozorování kontinua, jak se mění tok s fyzikálními vlastnostmi disku. První předpoklady používaly tento popis a tím svým způsobem bránily porovnání s modely jiných předpokladů. Složitost vysvětlení infračerveného přebytku Be hvězd byla vysvětlena přijmutím viskózního modelu.

Další analýzy ukázaly, že disk je podporován tlakem ve vertikálním směru a hustota klesá radiálně

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R_*} \right)^{-n}, \quad (4.2)$$

kde n je parametr. Použitím tohoto jednoduchého modelu můžeme reprodukovat statické vlastnosti pozorovaných barevných přebytků disků. Určením hustotního koeficientu n z pozorovaných čar byla určena jeho hodnota $1,5 - 4$ se středem pro $n = 3,5$. Z pozorování lze určit i hodnotu ρ_0 , která mění svoji hodnotu o několik řádů, typicky ale $10^{-10} - 10^{-12} \text{ g cm}^{-3}$.

4.3.2 Poziční úhel

První náznaky, že polarizační úhel je kolmý na disk, jak predikovaly rozptylové modely, byl dán prací [12]. Přestože k polarizaci dochází spíše ve vnitřní části disku, ale pozorování byla prováděna spíše na vnější, ukazuje se, že mezi nimi není rozpor. Jediný protipříklad, kde polarizační úhel není kolmý na disk je 48 Per. Jde ale o hvězdu, na kterou se díváme z pólu a určení polarizace není snadné.

Nepříliš velké změny pozice polarizačního úhlu byly nalezeny a jsou pravděpodobně spojeny s V/R změnami v disku. Be hvězdy ve fázi Be mají hvězdné větry silnější, než odpovídá běžným B hvězdám.

4.4 Kinematika disku

Už od prvních pozorování bylo jasné, že vysvětlení dvojtého píku je nejjednodušší pomocí ploché rotující struktury. K tomu bylo potřeba vyvinout kinematický popis.

Byly vyvinuty tři popisy disku:

- Disk je urychlovaný čarami záření rotující hvězdy, hlavní síla na materiál je radiálního směru a nejsou zde žádné momenty síly. Moment hybnosti se zachovává a oběžná rychlost v_ϕ klesá nepřímo úměrně vzdálenosti od hvězdy.

- Keplerovský disk, ve kterém je $v_\phi \sim r^{-1/2}$, moment hybnosti roste s poloměrem $r^{1/2}$. Tato změna momentu hybnosti vyžaduje moment síly – ten je ve formě viskozity látky.
- Plazma zachycená do silného magnetického pole a unášená spolu s rotací hvězdy $v_\phi \sim r$.

Teoretický důkaz, že disk musí být Keplerovský, pochází z V/R změn. Z faktu, že precesní změny jsou o dva řády delší, než je oběžná perioda, dostáváme, že pohyby musí být relativně malé a v radiálním směru. Pozorovatelský důkaz není jednoduchý, ale ukazuje se, že disky musí rotovat blízko keplerovské rychlosti.

Orbitální perioda roste jako $r^{3/2}$, takže blízko hvězdy je typická perioda 1 den, zatímco ve vzdálenosti $100 R_*$ je 1 000 d. Z toho můžeme předpokládat, že rychlé změny jsou spojeny s ději na povrchu nebo poblíž hvězdy, naopak dlouhodobé změny s ději disku jako celku.

Je známa spousta Be hvězd s dlouhodobě stabilním diskem. Naopak existuje mnoho případů, ve kterých je pozorovatelná disipace ve formě vymizení emisních čar, polarizace a viditelného a infračerveného nadbytku záření. Zde se nabízí spojení s hvězdnými větry. Stejně tak jsou známy případy, kde disk, poté co vymizel, znovu nevznikl. Musí tedy existovat nějaký mechanismus, který určuje, co se s diskem děje.

Mezi těmito limitními případy velká část hvězd ukazuje nepravidelné změny. K tomu probíhají změny period spolu s tím, jak disk roste nebo se disipuje. Mnohem méně častá je kvaziperiodičnost, například u ω CMa (B2V). K těmto dlouhodobým periodám vykazují některé objekty i krátkodobé změny ve formě "blikající aktivity" charakterizované malými změnami ve fotometrii, polarizaci a emisních čarách v řádu dnů až týdnů. Tato proměnnost je typická nárůstem jasnosti v jednotkách dnů a poté poklesem po několik týdnů.

V disipační fázi bylo spektroskopicky pozorováno několik hvězd. Disipace představuje přesun hmoty pryč z blízkosti hvězdy. Během toho zmizí "rychlá" složka čar helia a kovů, což může být doplněno výtryskem.

4.4.1 Stabilní viskózní disky

Nejdřív uvedu základní vlastnosti okolohvězdných disků, rovnice jejich popisu. Teprve poté se budu zabývat statickým případem – stabilním diskem.

Ze základních hydrodynamických rovnic dostáváme pro polární souřadnice

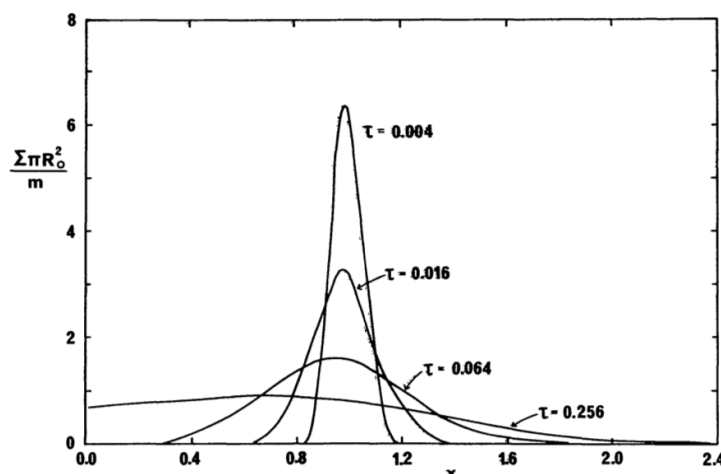
$$R \frac{\partial}{\partial t} \Sigma + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0, \quad (4.3)$$

kde $\Sigma(R, t)$ je plošná hustota disku

$$\Sigma(R, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z, t) dz, \quad (4.4)$$

přičemž $v_R(R, t)$ je radiální rychlost. Podobně pro zachování momentu hybnosti dostáváme

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R \cdot R^2 \Omega) = \mathcal{J}, \quad (4.5)$$



Obrázek 4.2: Vývoj bezrozměrné plošné hustoty $\Sigma\pi R_0^2/m$ v závislosti na bezrozměrném poloměru x a bezrozměrném čase τ .

kde \mathcal{J} je efekt viskózního momentu sil okolí a $\Omega(R, t)$ je úhlová rychlost disku. Jestliže moment síly vnější části působí na vnitřní část o poloměru R je $G(R, t)$ poté

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (4.6)$$

Viskózní síla na jednotku délky podél obvodu je $v\Sigma A$, kde v je kinematická viskozita a dostáváme

$$G(R, t) = 2\pi R \cdot v\Sigma A \cdot R. \quad (4.7)$$

Pro časovou změnu po několika úpravách dostáme rovnici pro časový vývoj plošné hustoty

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{(R^2 \Omega)'} \frac{\partial}{\partial R} (v\Sigma R^3 (-\Omega)') \right), \quad (4.8)$$

kde (\prime) značí parciální derivaci podle R . Jde o nelineární parciální diferenciální difúzní rovnici.

Řešení pro konstantní v , potenciál hmotného bodu o hmotnosti M a počáteční podmínku hustoty delta funkce ve vzdálenosti R_0 dostáváme řešení [18] pro bezrozměrný poloměr $x = R/R_0$ a čas $\tau = 12vtR_0^{-2}$

$$\Sigma(x, \tau) = \frac{m}{\pi R_0^2} \tau^{-1} x^{-1/4} \exp - \frac{1+x^2}{\tau} I_{1/4} \left(\frac{2x}{\tau} \right), \quad (4.9)$$

kde m je hmotnost prstence o počátečním poloměru R_0 a $I_{1/4}$ je modifikovaná Besselova funkce. Plošná hustota je na obrázku 4.2.

Pro stabilní disk dostáváme pro hybnost v radiálním směru

$$v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_\phi^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{GM}{R} = 0. \quad (4.10)$$

Zatímco radiální rychlost v_R je podzvuková, pro okolí hvězdy je oběžná rychlost nadzvuková a pro Machovo číslo \mathcal{M} máme

$$\mathcal{M} = \frac{v_\phi}{c_s} \quad (4.11)$$

a z rovnice 4.10

$$v_\phi = \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2} [1 + \mathcal{O}(\mathcal{M}^{-2})]. \quad (4.12)$$

Kolmo na disk je splněna rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right). \quad (4.13)$$

Za předpokladu, že disk je konstantně plněn, je izotermální a gradient tlaku je malý v porovnání s gravitačními silami a látka obíhá s keplerovskými rychlostmi, dostaneme [19] pro plošnou hustotu

$$\Sigma = \frac{\dot{M} v_\phi R_*^{1/2}}{3\pi\alpha c_s^2 R^{3/2}} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (4.14)$$

kde α je vztažena k dynamické viskozitě $\nu = \alpha c_s H$, přičemž H je typická výška disku. V obecném řešení dostáváme pro disk dvě situace

- Podzvuková vnitřní část, pro kterou je radiální rychlost $v_R \ll c_s$. Plošná hustota má téměř mocninovou závislost, v_ϕ je téměř keplerovská a radiální rychlost roste lineárně se vzdáleností.
- Nadzvuková vnější část, pro kterou $v_R \gtrsim c_s$. Orbitální rychlost není Keplerovská, ale zachovává moment hybnosti.

Kritický bod R_c , který tyto dva typy odlišuje nastává pro vzdálenost c_s . Ve vnitřní části dominuje viskozita, ale ve vnější části převládá nad gravitační silou gradient tlaku. Pro izotermální disk je kritický bod dán vztahem

$$R_c = R_* \frac{3}{10} \left(\frac{v_\phi}{c_s} \right)^2. \quad (4.15)$$

Typické hodnoty R_c jsou stovky R_* .

Objemovou hustotu plynu v disku spočítáme z plošné hustoty $\Sigma(r)$ jako

$$\rho(r, z) = \frac{\Sigma(r)}{\sqrt{2\pi}H(r)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{H(r)} \right)^2 \right], \quad (4.16)$$

kde $H(r)$ je škálová výška daná podle

$$H(r) = \frac{c_s}{v_{\text{orb}}} \frac{r^{3/2}}{R_*^{1/2}}. \quad (4.17)$$

4.4.2 Dynamické viskózní disky

Protože jsou změny pozorovaných veličin mnohem častější u Be hvězd než pozorování stability, předchozí stabilní modely jsou aplikovatelné jen na malou část systémů. Problém časově závislé difuze disků byl studován několika autory. Okazaki [20] ukázal, že dekreční disky nikdy nevytvoří stabilitu, vždy dochází buď k odtoku nebo přítoku látky. Přesto je však možné pro čas vývoje systému jdoucí do nekonečna s konstantním přítokem hmoty předpokládat dynamické ustálení.

Pozorované vlastnosti disku lze popsat na dvou časových škálách: τ_{in} časová škála pro naplnění disku srovnatelná s vypuzením látky z hvězdy; a τ_d časová škála pro distribuci dodané látky v disku. Ta je krátká pro vnitřní část disku a dlouhá pro vnější. Průběh vývoje je dán vztahem těchto dvou veličin.

- $\tau_{in} \ll \tau_d$ – pro vnitřní disk, žádné významné efekty by neměly být pozorovány,
- $\tau_{in} \gg \tau_d$ – dva možné případy: vytváření nového disku s konstantním přítokem, nebo disipace dříve existujícího disku,
- $\tau_{in} \sim \tau_d$ – komplexní interakce mezi těmito efekty.

Haubois a kol. [21] studoval dynamické scénáře chování disků pro poslední dva případy. V následujících bodech jsou shrnuty základní výsledky:

- Růst disku: Při plnění disku konstantní rychlostí roste hustota disku s časem, ale rychlost změny není ve všech částech stejná. Ve vnitřní části je dosažena stabilní hodnota mnohem rychleji než ve vnějších
- Disipace disku: Ve chvíli kdy disk není plněn hmotou a není mu dodáván moment hybnosti z hvězdy, vnitřní část disku se přesouvá zpět na hvězdu a bod stagnace¹ se posouvá dál od hvězdy.
- Role α : Pro limitní případy působí viskózní člen α zjednodušeně jako časové přeskálování. Například s větším α je růst disku rychlejší.
- Periodičnost dějů: Pro třetí případ, kdy $\tau_{in} \sim \tau_d$, může být plošná hustota disku komplikovaná funkce polohy a času. V tomto případě velmi záleží na hodnotě α .

4.5 Hvězdy v interagujících dvojhvězdách

Většina hmotných hvězd ($M_* > 8M_\odot$) jsou vícenásobné hvězdné systémy (okolo 75 %). V definici Be hvězd není situace dvojhvězdy vyměňující si hmotu zahrnuta. V těchto případech je do disku dodávána hmota ze sekundární složky a jde o disk akreční. Další možností je společník ve formě kompaktního hvězdného objektu – například bílý trpaslík.

Vzhledem ke slapovým silám není možné, aby byl disk vzniklý z vlastního materiálu ve větší vzdálenosti příliš hustý. Přesto jedna třetina galaktických Be hvězd tvoří vícenásobný hvězdný systém.

¹Bod stagnace je místo v disku, kde je radiální složka rychlosti nulová.

Kapitola 5

Hydrodynamické modely okolí hvězd

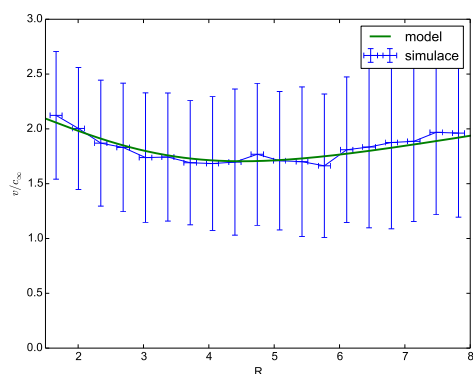
K simulování základních hydrodynamických jevů (Bondiho akrece i hvězdný disk) jsem ve své práci použil PySPH [9] hydrodynamický kód. Výběr tohoto kódu spočíval především v "jednoduchosti" jeho použití vzhledem ke knihovnám psaným v jazyce Python, podpoře paralelního počítání simulace stlačitelných tekutin pomocí MPI a zároveň relativní rychlosti díky jádru v C/C++. Přestože jsou modely analyticky popsány ve sférických resp. polárních souřadnicích, modely jsou počítány v kartézských souřadnicích. Důvod jejich použití je jednoduchý – nastavení počátečních a okrajových podmínek pro sférickou symetrii v kartézských souřadnicích je méně náročné, než počítání modelu v souřadnicích sférických, kde pouze přibudou další členy do hydrodynamických rovnic, které způsobí další zpomalení běhu programu.

5.1 Bondiho akrece

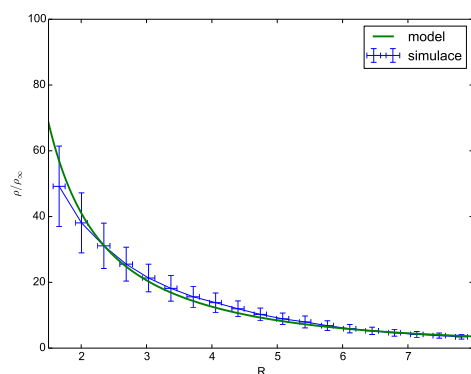
První ze základních hydrodynamických simulací (testování nepočítám), kterou jsme se rozhodli udělat, byla Bondiho akrece [4] ve sférickém případě v 3D. Jako soustavu veličin jsem zvolil $R_{\odot} = 1$, $M = 1$ a $G = 1$.

Pro potřeby tohoto modelu bylo třeba do knihovny PySPH implementovat několik fyzikálních podmínek. Šlo o vnější sílu ve formě gravitace hmotného bodu, kterou na hmotu působí hvězda, která je v centru souřadné soustavy. Tu jsem zavedl ve funkci, kde se počítají základní hydrodynamické rovnice. Každá interakce dvou částic je zavedena v následujícím postupu:

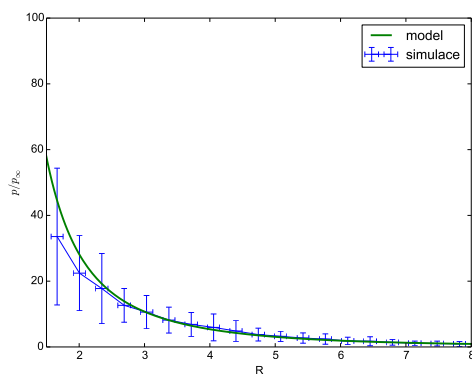
- Inicializace funkce – volá se při startu programu,
- Preprocessing - volá se jednou pro každou částici v každém časovém kroku před výpočtem interakcí,
- Vlastní sada interakcí s ostatními částicemi v okolí – volá se pro všechny částice v okolí v každém časovém kroku, pro výpočet velikostí změn veličin. Zejména výpočet zrychlení, tepelného toku, . . .
- Postprocessing - volá se jednou pro každou částici v každém časovém kroku po výpočtu interakcí.



(a) Závislost v/c_∞ na poloměru.



(b) Závislost hustoty na poloměru.



(c) Závislost tlaku na poloměru.

Obrázek 5.1: Porovnání numerického a analytického řešení Bondiho akrece na hmotný objekt.

Přidání vektorového gravitačního zrychlení je ve funkci preprocessing.

Další nutná úprava jsou počáteční podmínky. Na počátku pro Bondiho akreci jsem zvolil náhodné umístění částic v kouli s konstantní hustotou počtu částic, ale různou hustotou a tlakem (vlastnost každé částice). Počáteční rychlost je nízká, pro všechny částice stejná se směrem do středu koule.

Jak říká intuice a potvrdily to i simulace, náhodné rozložení počtu částic má za následek nekonstantní rozložení hustoty (a tím i tlaku a velikosti částice h) obecně v kouli už v prvním časovém kroku. Nepřímým důsledkem je i moment síly (vůči středu gravitace), který má za následek v dalším časovém vývoji udělení momentu hybnosti, zisk neradiální složky rychlosti a rozptylu rychlostí v radiálním směru.

Nejdůležitější úpravou, které představuje kritický bod v celém průběhu simulace získání příslušného modelu, se staly okrajové podmínky. Vlastní knihovna PySPH podporuje pouze periodičnost v kartézských souřadnicích, která je pro náš problém nepoužitelná a přidávání "stěn" z nehybných částic, které působí jako překážky pro částice. Pro fyzikální podstatu problému bylo nutné zahrnout změny počtu částic na okrajových podmínkách. V popisu knihovny [9] se uvádí, že to možné je. Bohužel s tím málo kdo asi při vytváření knihovny počítal, změny počtu částic mají značný vliv na stabilitu běhu programu jako takového a jsou nutné další úpravy.

K přidávání a odebrání částic dochází na vnější a vnitřní okrajové podmínce. Na vnější okrajové podmínce, daleko od hvězdy, by měla být konstantní hustota ρ_∞ a tlak p_∞ . Ty jsou zabezpečeny konstantní rychlostí přidávání částic, přičemž se po nějaké době vývoje vytvoří rovnováha mezi počtem přidávaných částic a částic dopadajících na hvězdu. Toto jsme původně chtěli implementovat jako udržování konstantní hustoty, ale brzy se ukázalo, že není lehké dospět do rovnovážného toku látky na povrch hvězdy. Vnitřní okrajová podmínka je jednoduché odebrání částic, které jsou středu blíže než určitý poloměr.

Ještě jeden fakt je třeba zohlednit a to přechodové jevy na vnitřní a vnější okrajové podmínce (a to je hlavní příčina nevhodnosti udržování konstantní hustoty na vnější okrajové podmínce). Musíme si uvědomit, jak se daná veličina pro danou částici počítána. K počítání dochází v závislosti na všech okolních částicích. Pokud ale vezmu částici, která je těsně u vnitřní okrajové podmínky, tak se počítají jen interakce s částicemi na okrajovou podmínkou a hvězda jako kdyby tam nebyla. Vliv se projeví hlavně poklesem hustoty a tlaku blízko okraje, kde už chybí "partnerské" částice, které se tam vyskytovaly, než spadly na objekt. Řešení je jednoduché – zajištění, aby takováto přechodová vrstva byla uvnitř hvězdy – ponechání částic na počítání, které však nazasahují do modelu.

Pokud vezmeme v úvahu, že částice mají nenulový moment hybnosti, může se lehce stát, že částice místo, aby padala přímo na hvězdu, ji obletí a vylétá z modelu ven. Tomu lze zabránit – zavedení viskozity a/nebo přidání částic. Viskozita eliminuje smyk částic vůči sobě. Dále přidávání částic je nutné zvolit tak, aby velikost částic byla menší než region, ve kterém se odebrají. Pokud by částice byly větší, napomáhá to jejich minutí středu.

Vlastní simulace zaberou několik dní výpočetního času na čtyřjádrovém procesoru. Výsledky simulací pro $\alpha = 0.1$ jsou na obrázku 5.1. Numerické řešení Bondiho akrece v podstatě kopíruje řešení analytické. Výraznější rozptyl je vidět nad povrchem hvězdy, kde se pravděpodobně ještě částečně projevují přechodové efekty na vnitřní okrajové podmínce.

Ve výpočtu modelu dostáváme rychlost akrece, normovanou pro hustotu ρ_∞ , rovnu $\dot{M}/\rho_\infty = 232 \pm 21$. Teoretická hodnota je \dot{M}/ρ_∞ je 192.

5.2 Přítok hmoty na disk Be hvězdy.

Posledním úkolem bylo nasimulování jednoduchého přítoku hmoty na disk [22], [23] a [24]. Přítok může být realizován například přetokem hmoty z hvězdného souputníka, který již vyplnil Rocheův lalok. Studium probíhalo z důvodu dlouhého výpočetního času na řádově stovkách oběhů částic kolem hvězdy.

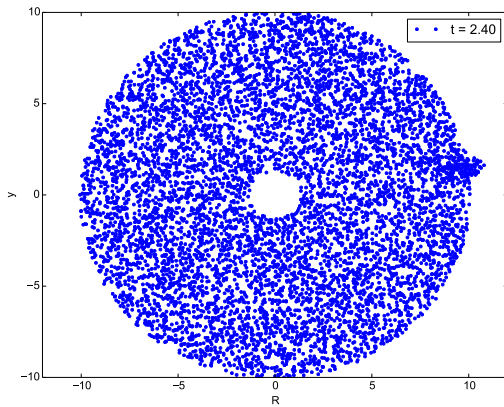
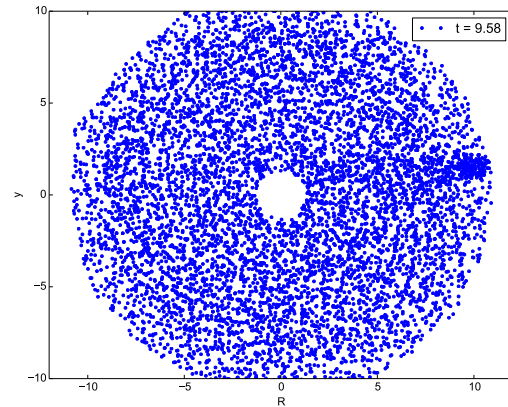
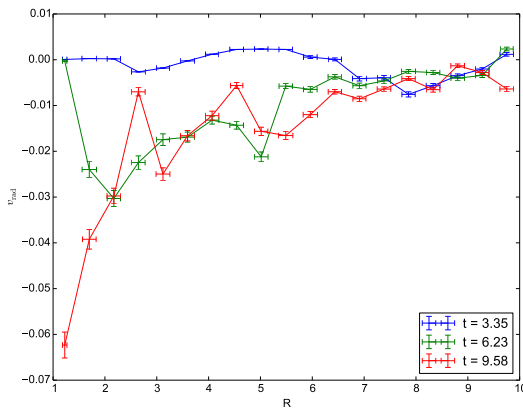
Počátečními podmínkami je tedy Keplerovský disk pro 2D případ v rovině xy o počáteční hustotě $\rho_0 = 10^{-10} \text{ g}\cdot\text{cm}^3$ s radiálním rozložením hustoty podle 4.2 a počáteční teplotou $T_0 = 20\,000 \text{ K}$. Velikost studovaného disku byla $10 R_*$. Hustota počtu částic je konstantní, polohy x a y jsou náhodné. Vnitřní okrajová podmínka je dopad částic na hvězdu (odebírání částic). Vnější okrajovou podmínkou je přítok hmoty, který má určitý rozptyl rychlostí, přichází ze směru osy x a je charakterizována určitou záměrnou vzdáleností (impaktní parametr) b .

Následující vývoj disku silně závisí na vlastnostech přitékající hmoty. Vývoj bych rozdělil na tři možnosti v závislosti na hustotě přitékající látky ρ_{inflow} za předpokladu, že typická hmotnost částic m_p je srovnatelná s typickou hmotností částic m_{inflow} přitékající látky $m_p \sim m_{\text{inflow}}$:

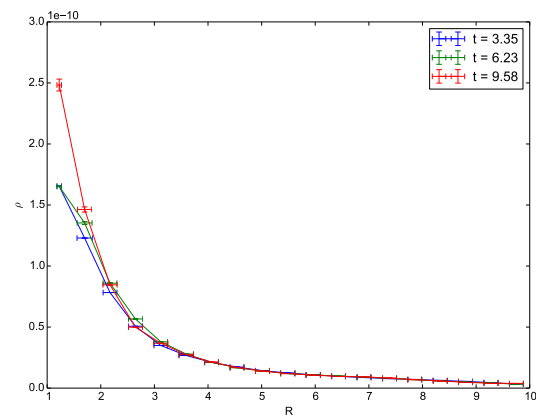
- $\rho_{\text{inflow}} \ll \rho_{\text{disk}}$ – přitékající látka významným způsobem disk na zadané časové škále neovlivní. Částečně disk penetruje a částečně zůstává za hranicí původního disku, kde vytváří relativně velký útvar, avšak s mnohem menší hustotou, než je původní hustota přitékající látky, jak ukazují grafy 5.2.

Pokud je hybnost částic větší, než hybnost částic v disku, dochází v něm k urychlování částic a okraj disku se zvětšuje. Naopak pokud je hybnost částic přitékající látky menší než částic disku, disk se zmenšuje. V důsledku vzniku gradientu tlaku v disku dochází k jeho pomalé akreci na hvězdu.

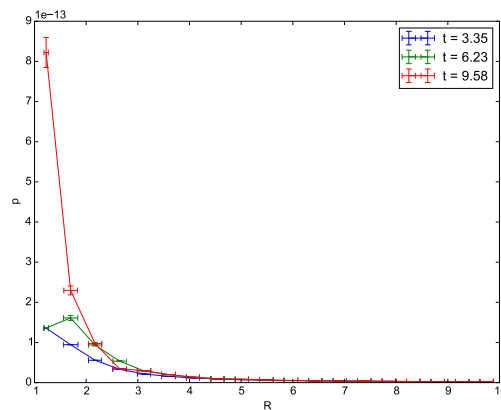
- $\rho_{\text{inflow}} \gg \rho_{\text{disk}}$ – částice přitékající látky jsou v porovnání s částicemi disku natolik hmotné, že dochází k chování, jako kdyby disk v první aproximaci neexistoval, a jejich chování je závislé na počátečních podmínkách přítoku – vytváří akreční disk, nebo rovnou (pro $L_{\text{inflow}} \rightarrow 0$) dopadají na hvězdu. U disku dochází k jeho naprostému zničení – částice disku narážejí na částice přítoku. Ve vnitřní části disku je jejich orbitální rychlosti v_ϕ snížena dochází k jejich akreci, ve vnější části disku (zvláště pro malá b) působí výslednice sil směrem ven. Orbitální rychlost částic je snížena, avšak v důsledku gradientu tlaku na vnější hraně disku se jejich vzdálenost zvětší. Hybnost disku je tímto mechanismem předávána přítoku. Přítok hmoty s vysokou hustotou tečně k disku je grafech 5.4 a 5.5 pro viskózní a neviskózní případ.
- $\rho_{\text{inflow}} \simeq \rho_{\text{disk}}$ – vývoj soustavy silně závisí na momentu hybnosti přitékající látky. Pro orbitální rychlost přitékajících částic větší, než je rychlost oběhu disku, dojde ke zvětšování disku. Částice získávají neradiální rychlosti a disk přestává být osově symetrický. Pro orbitální rychlost přitékajících částic menší, než je orbitální rychlost disku, dojde k postupné akreci disku na hvězdu. Pro specifické případy může zůstat osově nesymetrická část disku ve formě neustále z jedné strany doplňovaného a z druhé strany dopadajícího objektu. Možný případ vývoje ukazují grafy 5.3.


 (a) Rozložení částic disku v rovině xy .

 (b) Rozložení částic disku v rovině xy .


(c) Závislost radiální rychlosti na vzdálenosti od středu.

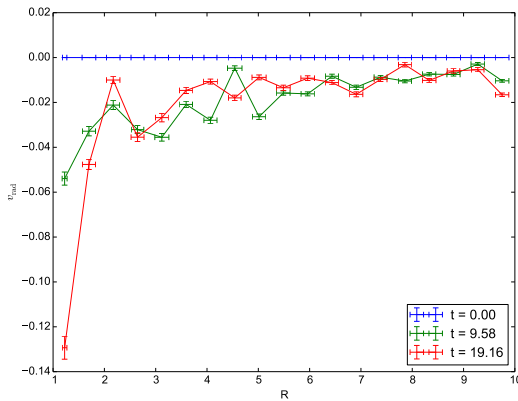


(d) Závislost hustoty na vzdálenosti od středu.

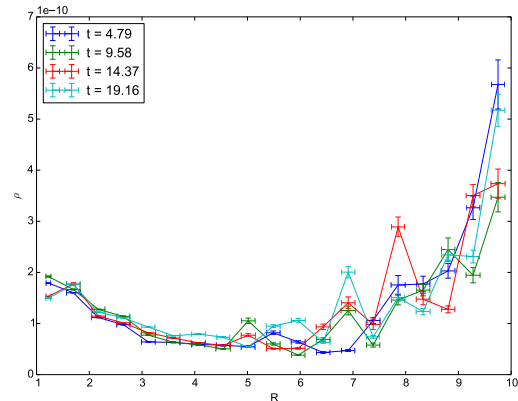


(e) Závislost tlaku na vzdálenosti od středu.

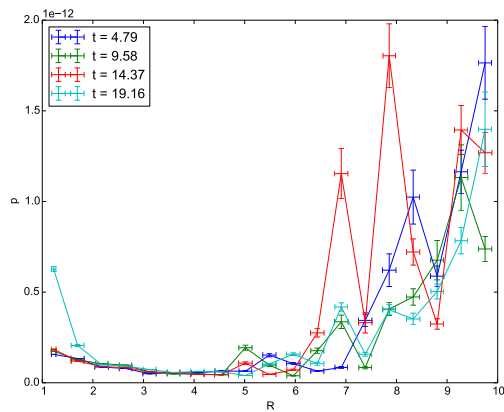
Obrázek 5.2: Simulace přítoku látky na disk. Hustota disku $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ g} \cdot \text{cm}^3$, $\rho_{\text{inflow}} = 10^{-13} \text{ g} \cdot \text{cm}^3$, $b = 0.1$, $v_{\text{inflow}} = \frac{1}{4} v_{\text{orb}}$, $\alpha = 1.0$. Dochází k rozptýlení vnější části a akreci vnitřní části disku. Grafy ukazují různé stavy vývoje. Během vývoje téměř nedochází ke změnám vlastností disku.



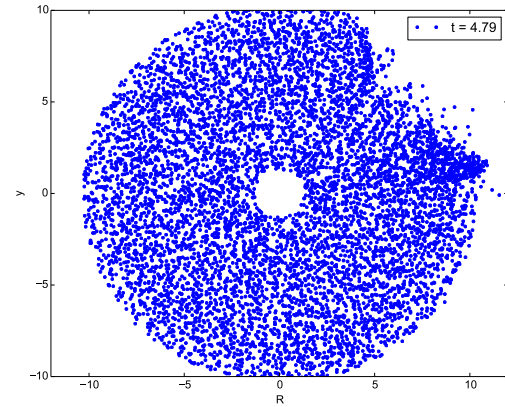
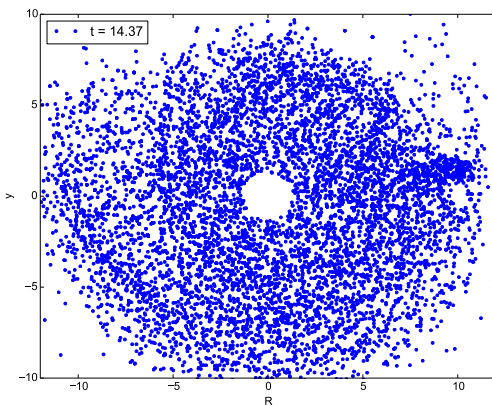
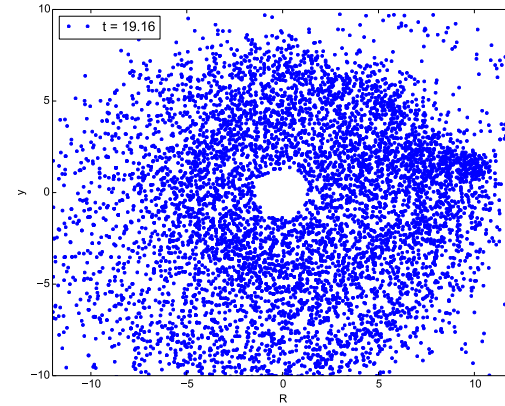
(a) Závislost radiální rychlosti na vzdálenosti od středu.



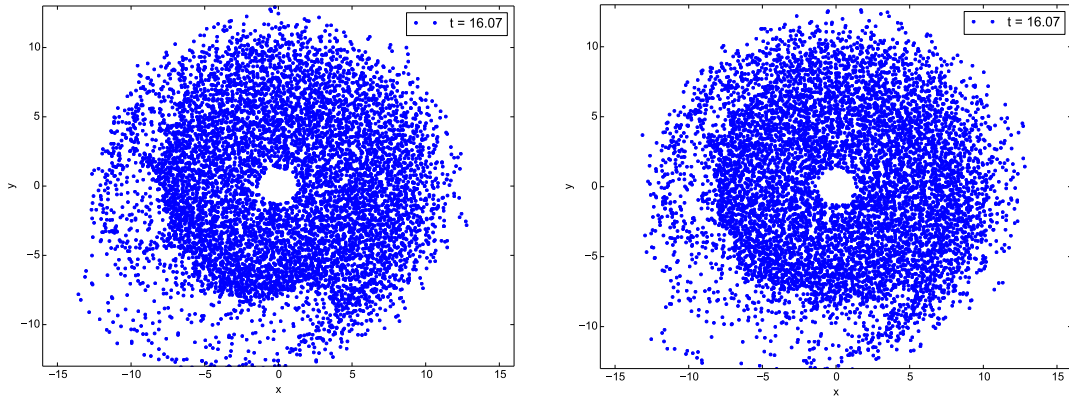
(b) Závislost hustoty na vzdálenosti od středu.



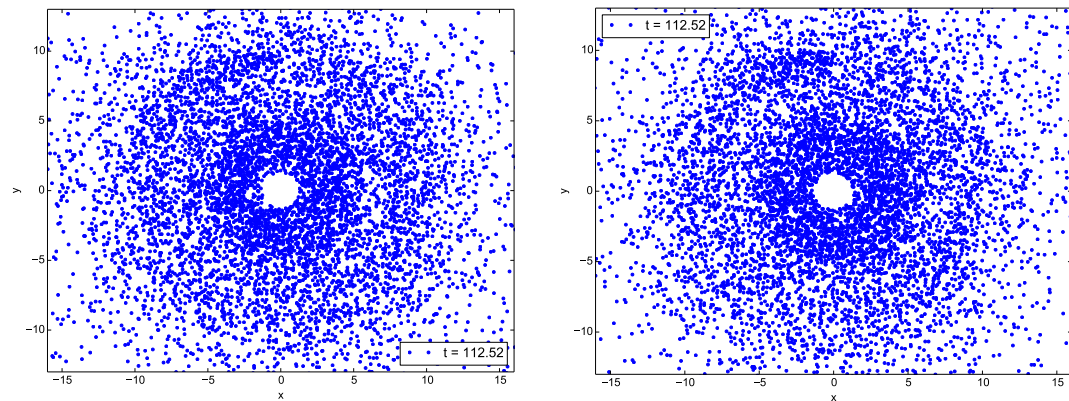
(c) Závislost tlaku na vzdálenosti od středu.


 (d) Rozložení částic disku v rovině xy .

 (e) Rozložení částic disku v rovině xy .

 (f) Rozložení částic disku v rovině xy .

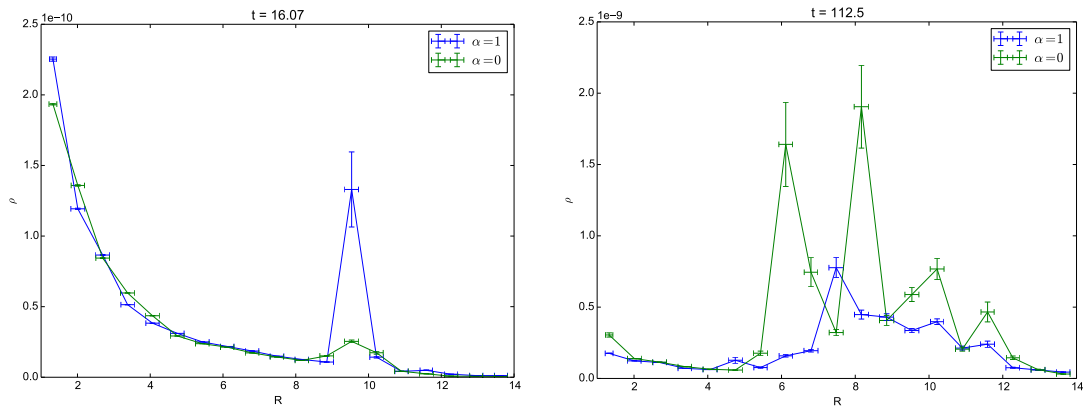
Obrázek 5.3: Simulace přítoku látky na disk. Hustota disku $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ g}\cdot\text{cm}^3$, $\rho_{\text{inflow}} = 10^{-11} \text{ g}\cdot\text{cm}^3$, $b = 0.1$, $v_{\text{inflow}} = \frac{1}{4}v_{\text{orb}}$, $\alpha = 1.0$. Dochází k rozptýlení vnější části a akreci vnitřní části disku. Grafy ukazují různé stavy vývoje. Přítok významným způsobem ovlivňuje vývoj disku. Zatímco vnitřní částí disku, kde je hustota větší než hustota přítoku, zůstávají na této časové škále relativně stabilní, vnější částí, které jsou řidší, než přítok jsou rozmetány.



(a) Rozložení částic disku v rovině xy pro $\alpha = 1$. (b) Rozložení částic disku v rovině xy pro $\alpha = 0$.

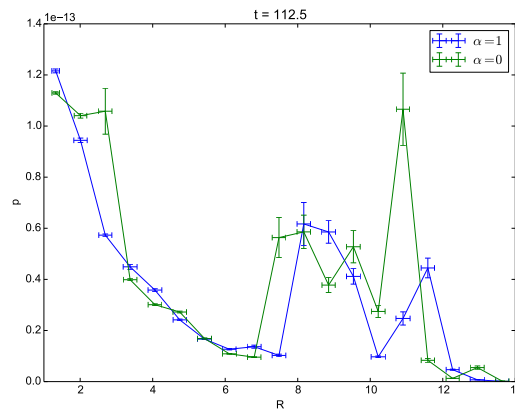


(c) Rozložení částic disku v rovině xy pro $\alpha = 1$. (d) Rozložení částic disku v rovině xy pro $\alpha = 0$.



(e) Závislost hustoty na vzdálenosti od středu v čase $t = 16,07$ (f) Závislost hustoty na vzdálenosti od středu v čase $t = 112,5$.

Obrázek 5.4: Simulace přítoku látky na disk pro dva případy – viskózní ($\alpha = 1$) a neviskózní. Hustota disku je $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ g}\cdot\text{cm}^3$, $\rho_{\text{inflow}} = 10^{-10} \text{ g}\cdot\text{cm}^3$, $b = 1.0$, $v_{\text{inflow}} = v_{\text{orb}}$. Dochází ke zvyšování hustoty disku v místě přítoku $x_0 = 0, y_0 = 10$. Grafy ukazují různé stavy vývoje. Přítok významným způsobem na této časové škále ovlivňuje vývoj vnější části disku. Zatímco vnitřní části disku zůstávají relativně stabilní, u vnějších částí, které jsou řidší než přítok, dochází k dramatickému zvýšení hustoty.



(a) Závislost tlaku na vzdálenosti od středu v čase $t = 112,5$.

Obrázek 5.5: Pokračování obrázků 5.4. Simulace přítoku látky na disk pro dva případy – viskózní ($\alpha = 1$) a neviskózní. Hustota disku je $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ g} \cdot \text{cm}^3$, $\rho_{\text{inflow}} = 10^{-10} \text{ g cm}^3$, $b = 1.0$, $v_{\text{inflow}} = v_{\text{orb}}$. Dochází ke zvyšování hustoty disku v místě přítoku $x_0 = 0, y_0 = 10$. Grafy ukazují různé stavy vývoje. Přítok významným způsobem na této časové škále ovlivňuje vývoj vnější části disku. Zatímco vnitřní částí disku zůstávají relativně stabilní, u vnějších částí, které jsou řidší než přítok, dochází k dramatickému zvýšení hustoty.

Z předchozího plyne, že ani pro případ $\rho_{\text{inflow}} \ll \rho_{\text{disk}}$ ani pro případ $\rho_{\text{inflow}} \gg \rho_{\text{disk}}$ se pro různé hodnoty b a α se vývoj na těchto časových škálách příliš neliší. Největší rozdíl potom představuje případ $\rho_{\text{inflow}} \simeq \rho_{\text{disk}}$, jak naznačují uvedené grafy.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem se věnoval částicovému hydrodynamickému modelování pomocí SPH. Na vlastní simulace jsem použil numerickou knihovnu PySPH naprogramovanou v Pythonu. Knihovnu jsem dodatečně upravil, aby byla spustitelná. Další úpravy byly pro astrofyzikální účely: Přidal jsem vnější a vnitřní okrajové podmínky, vnější gravitační sílu a přítok částic na zadané podmínce. Knihovnu jsem otestoval a porovnal s analytickým modelem Sodova problému – šíření rázové vlny v trubici. Zhodnocení je na grafech 3.2. Hydrodynamické modelování proběhlo na dvou astrofyzikálních situacích.

První simulací byl Bodniho problém – sféricky symetrická akrece na centrální objekt ve formě hvězdy nebo kompaktního hvězdného objektu. Do modelu byla nastavena vnitřní okrajová podmínka ve formě dopadu částic na hvězdu a vnější okrajová podmínka, kdy se částice, které mířily pryč od středu, odrážely od kulové slupky a poloměru velikosti problému, v mém případě $10 R_*$. Počet částic byl 40 000. Simulace byly úspěšné a výsledky simulace ukazují velice dobrou shodu s analytickým řešením v případě rychlostí. Shodují se [4] i v případě průběhu hustoty a tlaku, jen přesnost na povrchu hvězdy je nižší, jak ukazují grafy 5.1. V předchozí kapitole vysvětluji i jejich příčiny.

Druhou sadou simulací byly jevy probíhající v disku Be hvězd [22], [23] a [24]. V práci uvádím mezní případy způsobu ovlivnění v závislosti na intenzitě přitékající látky. Pro přítok s nízkou hodnotou dM/dt nedochází k ovlivnění stavu disku a průběhů fyzikálních veličin. V případě vysokého přítoku látky je disk kompletně ovlivněn a naopak vlastnosti disku mají malý vliv na akreci přitékající látky. Když je hmota přitékající látky za jednotku času srovnatelná s typickou hmotností ovlivněné části disku, dochází k těžce předvídatelným jevům. Zde platí i největší závislost časového vývoje na viskozitě disku. Pro každý případ 5.2 – 5.5 uvádím průběhy nasimulovaných veličin.

V průběhu práce jsem se seznámil komplexně seznámil problémem hydrodynamického modelování částicovou SPH metodou a všechny dosažené výsledky odpovídají astrofyzikální představě chování plynů v okolí hvězd či kompaktních hvězdných objektů.

Příloha

Uvádím výběr změn v PySPH knihovně nutné ke správnému nastavení počátečních a okrajových podmínek a spuštění simulace.

5.3 Příklad spouštěcího souboru pro Bondiho akreci – bondi.py

```
# NumPy and standard library imports
import numpy
from numpy import sin, cos, pi, arctan2, arctan, sqrt, exp, newaxis

import scipy
import sys, os

# PySPH base and carray imports
from pysph.base.nnps import DomainManager
from pysph.base.utils import get_particle_array_gasd as gpa
from pysph.base.kernels import CubicSpline, Gaussian, WendlandQuintic

# PySPH solver and integrator
from pysph.solver.application import Application
from pysph.solver.solver import Solver
from pysph.sph.integrator import PECIntegrator
from pysph.sph.integrator_step import GasDFluidStep #GasDFluidStepBondi

# PySPH sph imports
from pysph.sph.equation import Group
from pysph.sph.gas.dynamics.basic import ScaleSmoothingLength, UpdateSmoothingLengthFromVolume, \
SummationDensity, IdealGasEOS, MPMAccelerationsStar

# PySPH tools
from pysph.tools import uniform_distribution as ud

Mstar = 1.0
Rstar = 0.5
R00 = 10.1           # Radius of outer part of disk in t=0
temp0 = 2000        # Temperature in K
rho0 = 1.7e-10
v0 = 0.01

# Numerical constants
dim = 3
gamma = 1.4
gammal = gamma - 1.0

# Solution parameters
dt = 3.0e-4
tf = 600.01

# Domain size
xmin = -R00; xmax = R00
ymin = -R00; ymax = R00
zmin = -R00; zmax = R00
dx = 0.1

# Scheme constants
alpha1 = 0.1
alpha2 = 0.1
beta = 2.0
kernel_factor = 1.3
h0 = kernel_factor*dx

# The SPH kernel
kernel = Gaussian(dim=dim)

def create_particles(**kwargs):
```

```

pocet = 40000

x = (xmax - xmin)*scipy.random.random(pocet) + xmin
y = (ymax - ymin)*scipy.random.random(pocet) + ymin
z = (zmax - zmin)*scipy.random.random(pocet) + zmin
dx = dy = dz = ((xmax-xmin)*(ymax-ymin)*(zmax-zmin) / pocet)**(1./3.)
print "Mean_particle_dx_is:", dx

# Remove particles inside the star
indices = []
R = sqrt(x**2 + y**2 + z**2)
for i in range(len(x)):
    if R[i] <= Rstar:
        indices.append(i)
    if R[i] > R00:
        indices.append(i)

# volume estimate
volume = dx*dy*dz

# density is uniform
rho = numpy.ones_like(x) * rho0

# Incoming particles (in radial) velocity of disk
u = -numpy.ones_like(x) * x / R * v0 #sqrt(2.*Mstar/R)
v = -numpy.ones_like(x) * y / R * v0 #sqrt(2.*Mstar/R)
w = -numpy.ones_like(x) * z / R * v0 #sqrt(2.*Mstar/R)

# const h and mass
h = numpy.ones_like(x) * h0
m = numpy.ones_like(x) * volume * rho

p = rho/(1.695e-1) * 1000. * 1.38e-23 * temp0 / 1.66e-27 * 1.4e-15
# thermal energy from the ideal gas EOS
e = p/(gammal*rho)

fluid = gpa(name='fluid', x=x, y=y, z=z, rho=rho, p=p, e=e, u=u,
            v=v, w=w, h=h, m=m, h0=h.copy())

fluid.remove_particles(indices)
print "Fluid_with_%d_particles"%(fluid.get_number_of_particles())

fluid.set_output_arrays(['x', 'y', 'z', 'u', 'v', 'w', 'au', 'av',
                        'aw', 'rho', 'm', 'h', 'p', 'tag', 'pid', 'gid', 'es'])

return [fluid, ]

# Create the application.
domain = DomainManager(
    xmin=xmin, xmax=xmax, ymin=ymin, ymax=ymax, zmin=zmin, zmax=zmax,
    periodic_in_x=False, periodic_in_y=False, periodic_in_z=False)

app = Application(domain=domain)

# Create the Integrator.
integrator = PECEIntegrator(fluid=GasDFluidStep()) #fluid=GasDFluidStepBondi()

# Create the solver
solver = Solver(kernel=kernel, dim=3, integrator=integrator,
               dt=dt, tf=tf, adaptive_timestep=False, pfreq=200)

# SPH equations using the GSPH form of adaptive smoothing lengths,
# using a pilot density
equations_pilot_density_adaptive_h_Bondi = [

    ##### BEGIN ADAPTIVE DENSITY-H #####
    Group(
        equations=[
            ScaleSmoothingLength(dest='fluid', sources=None, factor=2.0), ],
        update_nnps=True ),

    #Given the new smoothing lengths and (possibly) new neighbors, we
    #compute the pilot density.

    Group(
        equations=[
            SummationDensity(dest='fluid', sources=['fluid']), ],
        update_nnps=False ),

    Group(
        equations=[
            UpdateSmoothingLengthFromVolume(
                dest='fluid', sources=None, k=kernel_factor, dim=dim), ],
        update_nnps=True ),

    Group(
        equations=[
            SummationDensity(dest='fluid', sources=['fluid']), ],
        update_nnps=False ),

    ##### END ADAPTIVE DENSITY-H #####

```



```

# The equation of state is also done now to update the particle
# pressure and sound speeds.
Group(
    equations=[
        IdealGasEOS(dest='fluid', sources=None, gamma=gamma),
    ], update_nnps=False
),

Group(
    equations=[
        MPMAccelerationsStar(dest='fluid', sources=['fluid', ],
                             alpha1_min=alpha1, alpha2_min=alpha2, beta=beta,
                             Mstar=Mstar, Rstar=Rstar)
    ], update_nnps=False
),
]

app.setup(solver=solver, equations=equations.pilot.density.adaptive.h_Bondi,
          particle_factory=create_particles)

# run the solver
app.run()

```

5.4 SPH rovnice pro plyn a externí gravitace

```

from pysph.sph.equation import Equation
from math import sqrt, pow

class ScaleSmoothingLength(Equation):
    def __init__(self, dest, sources=None, factor=2.0):
        super(ScaleSmoothingLength, self).__init__(dest, sources)
        self.factor = factor

    def loop(self, d_idx, d_h):
        d_h[d_idx] = d_h[d_idx] * self.factor

class UpdateSmoothingLengthFromVolume(Equation):
    def __init__(self, dest, sources=None, k=1.2, dim=1.0):
        super(UpdateSmoothingLengthFromVolume, self).__init__(dest, sources)
        self.k = k
        self.dim1 = 1./dim

    def loop(self, d_idx, d_m, d_rho, d_h):
        d_h[d_idx] = self.k * pow(d_m[d_idx]/d_rho[d_idx], self.dim1)

class SummationDensity(Equation):
    def __init__(self, dest, sources=None, dim=2,
                 density_iterations=False, iterate_only_once=False, k=1.2, htol=1e-6):
        self.density_iterations = density_iterations
        self.iterate_only_once = iterate_only_once
        self.dim = dim
        self.k = k
        self.htol = htol

        self.equation_has_converged = 1

    def __init__(self, dest, sources):
        super(SummationDensity, self).__init__(dest, sources)

    def initialize(
        self, d_idx, d_rho, d_div, d_grhox, d_grhoy, d_arho, d_dwdh):
        d_rho[d_idx] = 0.0
        d_div[d_idx] = 0.0

        d_grhox[d_idx] = 0.0
        d_grhoy[d_idx] = 0.0
        d_arho[d_idx] = 0.0

        d_dwdh[d_idx] = 0.0

        self.equation_has_converged = 1

    def loop(self, d_idx, s_idx, d_rho, d_grhox, d_grhoy, d_arho,
             d_dwdh, s_m, d_converged, VIJ, WI, DWI, GHI):
        mj = s_m[s_idx]
        vijdotdwi = VIJ[0]*DWI[0] + VIJ[1]*DWI[1] + VIJ[2]*DWI[2]

        # density
        d_rho[d_idx] += mj * WI

        # density accelerations
        d_arho[d_idx] += mj * vijdotdwi

        # gradient of density
        d_grhox[d_idx] += mj * DWI[0]
        d_grhoy[d_idx] += mj * DWI[1]

```

```

# gradient of kernel w.r.t h
d_dwdh[d_idx] += mj * GHI

def post_loop(self, d_idx, d_arho, d_rho, d_div, d_omega, d_dwdh,
              d_h0, d_h, d_m, d_ah, d_converged):

# iteratively find smoothing length consistent with the
if self.density_iterations: # & (d_act[d_idx] == 1.0)
    if not ( d_converged[d_idx] == 1 ):

        rhoi = mi/(hi/self.k)**self.dim

        dhdrhoi = -hi/( self.dim*d_rho[d_idx] )
        dwdhi = d_dwdh[d_idx]
        omegai = 1.0 - dhdrhoi*dwdhi

# correct omegai
if omegai < 0:
    omegai = 1.0

gradhi = 1.0/omegai
d_omega[d_idx] = gradhi

# the non-linear function and it's derivative
func = rhoi - d_rho[d_idx]
dfdhi = omegai/dhdrhoi

# Newton Raphson estimate for the new h
hnew = hi - func/dfdhi

# Nanny control for h
if ( hnew > 1.2 * hi ):
    hnew = 1.2 * hi
elif ( hnew < 0.8 * hi ):
    hnew = 0.8 * hi

# overwrite if gone awry
if ( (hnew <= 1e-6) or (gradhi < 1e-6) ):
    hnew = self.k * (mi/d_rho[d_idx])** (1./self.dim)

# check for convergence
diff = abs( hnew-hi )/hi0

if not ( (diff < self.htol) and (omegai > 0) or self.iterate_only_once):
    self.equation_has_converged = -1

    d_h[d_idx] = hnew
    d_converged[d_idx] = 0
else:
    d_arho[d_idx] *= d_omega[d_idx]
    d_ah[d_idx] = d_arho[d_idx] * dhdrhoi
    d_converged[d_idx] = 1

# compute the divergence of velocity
d_div[d_idx] = -d_arho[d_idx]/d_rho[d_idx]

def converged(self):
    return self.equation_has_converged

class IdealGasEOS(Equation):
def __init__(self, dest, sources=None, gamma=1.4):
    self.gamma = gamma
    self.gammal = gamma - 1.0
    super(IdealGasEOS, self).__init__(dest, sources)

def loop(self, d_idx, d_p, d_rho, d_e, d_cs):
    d_p[d_idx] = self.gammal * d_rho[d_idx] * d_e[d_idx]
    d_cs[d_idx] = sqrt( self.gamma * d_p[d_idx]/d_rho[d_idx] )

class MPMAccelerationsStar(Equation):
def __init__(
    self, dest, sources, beta=2.0,
    update_alapha1=False, update_alapha2=False,
    alapha1_min=0.1, alapha2_min=0.1, sigma=0.1, Mstar=1.0, Rstar=1.0):

    self.beta = beta
    self.sigma = sigma

    self.update_alapha1 = update_alapha1
    self.update_alapha2 = update_alapha2

    self.alapha1_min = alapha1_min
    self.alapha2_min = alapha2_min

    self.Mstar = Mstar
    self.Rstar = Rstar

    self.Rstar3 = Rstar*Rstar*Rstar
    self.R3 = 0.0

    self.dest = dest

```

```

self.sources = sources

super(MPMAccelerationsStar, self).__init__(dest, sources)

def initialize(self, d_idx, d_x, d_y, d_z, d_u, d_v, d_w, d_au, d_av, d_aw, d_ae, d_am,
              d_aalpha1, d_aalpha2, d_del2e):
    d_au[d_idx] = 0.0
    d_av[d_idx] = 0.0
    d_aw[d_idx] = 0.0
    d_ae[d_idx] = 0.0

    d_aalpha1[d_idx] = 0.0
    d_aalpha2[d_idx] = 0.0

    d_del2e[d_idx] = 0.0

    # Gravitation acceleration
    self.R3 = (d_x[d_idx]*d_x[d_idx] + d_y[d_idx]*d_y[d_idx] + d_z[d_idx]*d_z[d_idx])**1.5
    self.Rstar3 = self.Rstar*self.Rstar*self.Rstar

    d_au[d_idx] -= self.Mstar * d_x[d_idx] / self.R3
    d_av[d_idx] -= self.Mstar * d_y[d_idx] / self.R3
    d_aw[d_idx] -= self.Mstar * d_z[d_idx] / self.R3

def loop(self, d_idx, s_idx, d_x, d_y, d_z, s_x, s_y, s_z, d_m, s_m, d_p, s_p, d_cs, s_cs,
         d_e, s_e, d_rho, s_rho, d_au, d_av, d_aw, d_ae,
         d_omega, s_omega, XIJ, VIJ, DWI, DWJ, DWIJ, HIJ,
         d_del2e, d_alpha1, s_alpha1, d_alpha2, s_alpha2,
         EPS, RIJ, R2IJ, RHOIJ, DTADAPT):

    R2s = s_x[d_idx]*s_x[d_idx] + s_y[d_idx]*s_y[d_idx] + s_z[d_idx]*d_z[d_idx]

    # particle pressure
    pi = d_p[d_idx]
    pj = s_p[s_idx]

    # pi/rhoi**2
    rhoi2 = d_rho[d_idx]*d_rho[d_idx]
    piBrhoi2 = pi/rhoi2

    # pj/rhoj**2
    rhoj2 = s_rho[s_idx]*s_rho[s_idx]
    pjBrhoj2 = pj/rhoj2

    # averaged sound speed
    cij = 0.5 * (d_cs[d_idx] + s_cs[s_idx])

    # averaged mass
    mi = d_m[d_idx]
    mj = s_m[s_idx]
    mij = 0.5 * (mi + mj)

    # averaged sound speed
    ci = d_cs[d_idx]
    cj = s_cs[s_idx]
    cij = 0.5 * (ci + cj)

    # normalized interaction vector
    if RIJ < 1e-8:
        XIJ[0] = 0.0
        XIJ[1] = 0.0
        XIJ[2] = 0.0
    else:
        XIJ[0] /= RIJ
        XIJ[1] /= RIJ
        XIJ[2] /= RIJ

    # v_{ij} \cdot r_{ij} or vijdotxij
    dot = VIJ[0]*XIJ[0] + VIJ[1]*XIJ[1] + VIJ[2]*XIJ[2]

    # scalar part of the kernel gradient DWIJ
    Fij = XIJ[0]*DWIJ[0] + XIJ[1]*DWIJ[1] + XIJ[2]*DWIJ[2]

    # signal velocities
    pdiff = abs(pi-pj)
    vsig1 = 0.5 * max(cij - self.beta*dot, 0.0)
    vsig2 = sqrt( pdiff/RHOIJ )

    # compute the Courant-limited time step factor.
    DTADAPT[0] = max( DTADAPT[0], (cij + self.beta * dot) )

    # Artificial viscosity
    if dot <= 0.0:
        # viscosity
        alpha1 = 0.5 * (d_alpha1[d_idx] + s_alpha1[s_idx])
        tmpv = mj/RHOIJ * alpha1 * vsig1 * dot
        d_au[d_idx] += tmpv * DWIJ[0]
        d_av[d_idx] += tmpv * DWIJ[1]
        d_aw[d_idx] += tmpv * DWIJ[2]

        # viscous contribution to the thermal energy
        d_ae[d_idx] += -0.5*mj/RHOIJ*alpha1*vsig1*dot*dot*Fij

```

```

omegai = d.omega[d_idx]; omegaj = s.omega[s_idx]

# gradient terms
d_au[d_idx] += -mj*(pibrhoi2*omegai*DWI[0] + pjbrhoj2*omegaj*DWJ[0])
d_av[d_idx] += -mj*(pibrhoi2*omegai*DWI[1] + pjbrhoj2*omegaj*DWJ[1])
d_aw[d_idx] += -mj*(pibrhoi2*omegai*DWI[2] + pjbrhoj2*omegaj*DWJ[2])

# accelerations for the thermal energy
vijdotdwi = VIJ[0]*DWI[0] + VIJ[1]*DWI[1] + VIJ[2]*DWI[2]
d_ae[d_idx] += mj * pibrhoi2 * omegai * vijdotdwi

# thermal conduction
alpha2 = 0.5 * (d_alpha2[d_idx] + s_alpha2[s_idx])
eij = d_e[d_idx] - s_e[s_idx]
d_ae[d_idx] += mj/RHOIJ * alpha2 * vsig2 * eij * Fij

# Laplacian of thermal energy
d_del2e[d_idx] += mj/s_rho[s_idx] * eij/(RIJ + EPS) * Fij

def post_loop(self, d_idx, d_h, d_cs, d_alpha1, d_alpha2, d_div,
              d_del2e, d_e, d_alpha2, d_alpha2):
    hi = d_h[d_idx]
    tau = hi/(self.sigma*d_cs[d_idx])

    if self.update_alpha1:
        S1 = max(-d_div[d_idx], 0.0)
        d_alpha1[d_idx] = (self.alpha1.min - d_alpha1[d_idx])/tau + S1

    if self.update_alpha2:
        #S2 = d_h[d_idx] * abs(d_del2e[d_idx])/sqrt(d_e[d_idx])
        S2 = 0.01 * d_h[d_idx] * d_del2e[d_idx]
        d_alpha2[d_idx] = (self.alpha2.min - d_alpha2[d_idx])/tau + S2

```

5.5 Vnější a vnitřní okrajové podmínky, přidávání částic

Funkce pro třídu solver, které se počítají v každém časovém kroku. Uvádím jen vybrané kroky.

```

def check_particles_bondi(self):
    # 1.) Remove particles inside the star and which are too behind the given radius,
    # which want outflow.

    part = self.particles[0]

    R2 = part.x*part.x + part.y*part.y + part.z*part.z
    selected = []
    Rstar2 = Rstar**2
    Rout = (R00*outer_coef)**2

    for i in range(len(R2)):
        if (R2[i] < Rstar2) | (R2[i] > Rout):
            selected.append(i)
    self.particles[0].remove_particles(selected)
    part = self.particles[0]
    remove = len(selected)

    # If particle is outside R00 and the velocity is outside
    # Change the velocity inside
    R002 = R00**2
    for i in range(part.get_number_of_particles(real=True)):
        if (R2[i] > R002):
            vu = part.u[i]/part.x[i]
            vv = part.v[i]/part.y[i]
            vw = part.w[i]/part.z[i]

            if vu > 0.0:
                part.u[i] = -part.u[i]
            if vv > 0.0:
                part.v[i] = -part.v[i]
            if vw > 0.0:
                part.w[i] = -part.w[i]

    # 2.) Always add N particles
    N = 1.0
    add = v0 * 4 * 3.14 * R00**2 * self.dt * 4 / self.comm.Get_size() * N
    if add > 0:
        a = scipy.random.random()
        if (a < add):
            self.add_my_particles_bondi(part, 1, rho0, -v0, T, dx, gamma, R00, 1)

def add_my_particles_bondi(self, part, add, rho0, v0, T, dx, gamma, R00, remove):
    gammal = gamma - 1.0

    phi = scipy.random.random(add)*2.*numpy.pi
    u = scipy.random.random(add)*2.0 - 1.0

```

```

x = R00 * numpy.sqrt(1.0 - u**2) * numpy.cos(phi)
y = R00 * numpy.sqrt(1.0 - u**2) * numpy.sin(phi)
z = R00 * u

R = numpy.sqrt(x**2 + y**2 + z**2)

rho = numpy.ones_like(x)*rho0
p = rho/(1.695e-1) * 1000. * 1.38e-23 * T / 1.66e-27 * 1.4e-15
u = numpy.ones_like(x)*v0 * x/R
v = numpy.ones_like(x)*v0 * y/R
w = numpy.ones_like(x)*v0 * z/R
h = numpy.ones_like(x)*dx
cs = numpy.sqrt(gamma*p/rho)
e = numpy.ones_like(x)*p/(gammal*rho)
m = numpy.ones_like(x) * (dx**3) * rho0

part.add_particles(x=x,y=y,z=z,rho=rho, p=p, e=e, u=u, v=v, w=w, h=h, m=m, h0=h.copy())

def check_particles_inflow_to_disk(self):
    numb_before = self.particles[0].get_number_of_particles()
    part = self.particles[0]

    R2 = part.x*part.x + part.y*part.y + part.z*part.z
    selected = []

    # 1.) Remove particles inside and outside
    for i in range(len(R2)):
        if (R2[i] < Rstar**2) | (R2[i] > (outer_coef)**2):
            selected.append(i)
    self.particles[0].remove_particles(selected)
    remove = len(selected)

    # 2.) Always add N particles
    add = 1

    if (add > 0):
        a = scipy.random.random()
        if a < (self.dt/self.comm.Get_size()/(dx**2)):
            self.add_my_particles_inflow_to_disk(self.particles[0], add,
            rho0, -v0, T, dx, gamma, R00, add)

def add_my_particles_inflow_to_disk(self, part, add, rho0, v0, T, dx, gamma, R00, remove):
    gammal = gamma - 1.0
    b = 1.0
    tol = 1.0

    x = numpy.ones(add) * 0.0
    y = numpy.ones(add) * R00 * b - scipy.random.random(add)*tol
    z = numpy.ones(add) * 0.0

    rho = numpy.ones_like(x)*rho0
    p = numpy.ones_like(x)* rho0/(1.695e-1) * 1000. * 1.38e-23 * T / 1.66e-27 * 1.4e-15

    V0 = numpy.sqrt(1./numpy.sqrt(x**2 + y**2))
    u = -V0
    v = numpy.ones_like(x) * 0.0
    w = numpy.ones_like(x) * 0.0
    h = numpy.ones_like(x)*dx
    cs = numpy.sqrt(gamma*p/rho)
    e = numpy.ones_like(x)*p/(gammal*rho)
    m = numpy.ones_like(x) * (dx**3) * rho0

    new = get_particle_array(name="new", x=x,y=y,z=z,rho=rho, p=p, e=e,
    u=u, v=v, w=w, h=h, m=m, h0=h.copy())
    self.particles[0].append_parray(new)

```

Seznam použité literatury

- [1] THOMPSON, Michael J. 2006. *An introduction to astrophysical fluid dynamics*. London: Imperial College Press. ISBN 18-609-4615-1.
- [2] COX, John P. 1980. *Theory of stellar pulsation*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, xiv, 380 p. ISBN 06-910-8253-7.
- [3] BONDI, H., F. HOYLE, F. K. LAMB, A. D. SCHWOPE, Robert WHITEHURST a K. HORNE. 1944. *On the Mechanism of Accretion by Stars: Recent Observational Developments*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 104(5): 77-91. DOI: 10.1007/978-94-011-0858-4_6.
- [4] BONDI, H. 1952. *On Spherically Symmetrical Accretion*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 112(2): 195-204. DOI: 10.1093/mnras/112.2.195.
- [5] KING, A, J FRANK a Derek J RAINE. 2002. *Accretion power in astrophysics*. 3rd ed. /. New York: Cambridge University Press, xiv, 384 p. ISBN 05-216-2957-8.
- [6] LUCY, L. B. 1977. *A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*. The Astronomical Journal. 82. DOI: 10.4324/9780203782897.
- [7] GINGOLD, R. A. a J. J. MONAGHAN. 1977. *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 181(3): 25-67. DOI: 10.1007/978-3-540-71471-2_2.
- [8] MONAGHAN, J. J., J A FUTTERMAN, Sudarshan TIWARI, Otto ZEMAN, Dieter BISKAMP, Pierre SAGAUT, Claude CAMBON, Pierre SAGAUT a Claude CAMBON. 2002. *SPH compressible turbulence*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 335(3): 327-357. DOI: 10.1017/cbo9780511546099.010.
- [9] RAMACHANDRAN, P. a Ch. KAUSHIK. *PySPH: A Python Framework for Smoothed Particle Hydrodynamics* [online]. [cit. 2015-05-12]. Dostupné z: <http://conference.scipy.org/proceedings/scipy2010/pdfs/ramachandran.pdf>
- [10] RIVINIUS, Thomas, Alex C. CARCIOFI a Christophe MARTAYAN. 2013. *Classical Be stars*. The Astronomy and Astrophysics Review. 21(1). DOI: 10.1007/s00159-013-0069-0. ISSN 0935-4956. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/s00159-013-0069-0>

- [11] QUIRRENBACH, A., D. F. BUSCHER, D. MOZURKEWICH, C. A. HUMMEL a J. T. ARMSTRONG. 1994. *Maximum-entropy maps of the Be shell star zeta Tauri from optical long-baseline interferometry*. *Astronomy and astrophysics*. 283(no. 2, p. L13-L16). ISSN 0004-6361.
- [12] QUIRRENBACH, A., K. S. BJORKMAN, J. E. BJORKMAN, C. A. HUMMEL, D. F. BUSCHER, J. T. ARMSTRONG, D. MOZURKEWICH, N. M. ELIAS II a B. L. BABLER. 1997. *Constraints on the Geometry of Circumstellar Envelopes: Optical Interferometric and Spectropolarimetric Observations of Seven Be Stars*. *The Astrophysical Journal*. 479(1): 477-496. DOI: 10.1086/303854. ISSN 0004-637x. Dostupné také z: <http://stacks.iop.org/0004-637X/479/i=1/a=477>
- [13] JASHEK, M. SLETTEBAK, A. JASHEK, C 1981. *Be star terminology*
- [14] COLLINS, G. W., II 1986. IN: *Physics of Be stars; Proceedings of the Ninety-second IAU Colloquium, Boulder, CO, Aug. 18-22*. Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1987, p. 3-19; Diskuze, p. 20, 21.
- [15] KRŮŽ, S. a P. HARMANEC. 1975. *A hypothesis os the binary origin of the Be stars*. *Bulletin of the astronomical institute of Czechoslovakia*. (26, 65-81).
- [16] HANUSHIK, R. R. 1996. *On the structure of Be star disks*. *Astronomy and Astrophysics*. (312,; L17-L20).
- [17] BJORKMAN, J. E. 1997. *Circumstellar disks*. *Bauingenieur*. Berlin, Springer-Verlag. (497, p.75): 239. DOI: 10.1007/BFb0113487. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/BFb0113487>
- [18] PRINGLE, J. E. 1981. *Accretion Discs in Astrophysics*. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 19(1): 137-160. DOI: 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033. ISSN 0066-4146. Dostupné také z: <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.aa.19.090181.001033>
- [19] KRTIČKA, J., S. P. OWOCKI a G. MEYNET. 2011. *Mass and angular momentum loss via decretion disks*. *Astronomy*. (vol. 527): A84-. DOI: 10.1051/0004-6361/201015951. ISSN 0004-6361. Dostupné také z: <http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361/201015951>
- [20] OKAZAKI, A. T. 2007. *Theory vs. Observation of Circumstellar Disks and Their Formation*. *Astronomical society of the Pacific Conference Series*. (vol. 361, p.230).
- [21] HAUBOIS, X., A. C. CARCIOFI, Th. RIVINIUS, A. T. OKAZAKI a J. E. BJORKMAN. 2012. *Dynamic Evolution of Viscous Disks around Be Stars. I. Photometry*. *The Astrophysical Journal*. 756(2): 156-. DOI: 10.1088/0004-637X/756/2/156. ISSN 0004-637x. Dostupné také z: <http://stacks.iop.org/0004-637X/756/i=2/a=156?key=crossref.7d7a1e74487c7d47a7e7f5b6f23cbc73>
- [22] MOLTENI, D., G. BELVEDERE a G. LANZAFAME. 1991. *Three-dimensional simulation of polytropic accretion discs*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 249(4): 748-754. DOI: 10.1093/mnras/249.4.748.

- [23] ŠTEFL, S., S. P. OWOCKI a A. T. OKAZAKI. 2007. *Structure and Dynamics of Circumstellar Disks*. In: ASP Conference Series. Laboratories for Stellar and Circumstellar Physics: Active OB Stars, s. 256-265. Vol. 361.
- [24] LANZAFAME, G., G. BELVEDERE a D. MOLTENI. 2006. *Low compressibility accretion disc formation in close binaries: the role of physical viscosity*. *Astronomy and Astrophysics*. 453(3): 1027-1036. DOI: 10.1051/0004-6361:20054225. ISSN 0004-6361. Dostupné také z: <http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361:20054225>

