

ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY  
PŘÍRODOVĚDECKÉ FAKULTY  
MASARYKOVY UNIVERZITY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

# DYNAMICKÉ CHARAKTERISTIKY BINÁRNÍCH ASTEROIDŮ

TOMÁŠ HENYCH

BRNO 2008

## *Anotace*

Diplomová práce zkoumá slapové působení v soustavách binárních asteroidů. Slapy mohou být jedním z mechanismů, které významně ovlivňují dynamický stav těchto soustav. Nejdříve je vysvětleno, jak slapy vznikají a jaké mají důsledky na rotaci a oběh těles kolem společného těžiště. Dále jsou tyto efekty popsány kvantitativně. Těžištěm práce je rozbor vlastností synchronního stavu binárních soustav. Teoretické předpovědi týkající se synhronního stavu jsou potom porovnány s daty charakterizujícími binární asteroidy.

## *Klíčová slova*

binární asteroidy, planetky, dynamika, slapy, synchronní stavy

## *Annotation*

This paper focuses on tides in binary asteroids. Tides represent one of the mechanisms that could influence dynamical state of these asteroids. It is explained how tide is raised on one body by another and what are the consequences of tides on rotation and the orbit of bodies. A quantitative description of these effects is given as well. Most of attention is paid to the synchronism in binary asteroids. Theoretical predictions are then compared with binary asteroids dataset.

## *Keywords*

binary asteroids, minor planets, dynamics, tides, synchronous states

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně za použití uvedené literatury a velmi cenných rad vedoucího práce Dr. Petra Pravce.

V Brně dne:

Tomáš Henych

Děkuji vedoucímu své práce Petru Pravcovi za velmi podnětné diskuze, díky kterým jsem tuto práci napsal a hlouběji pronikl do problematiky binárních asteroidů, konzultantovi Filipu Hrochovi za stálou podporu a povzbuzení a Lucii Jílkové a Tereze Krejčové za mnohobarevné opravy textu, které přispěly k vylepšení jeho konečné podoby.

Velký dík patří mým rodičům, bez kterých by tato práce napsána být nemohla.

*You Can't Unring a Bell*

Tom Waits

---

# Obsah

---

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Binární asteroidy</b>                       | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Slapové působení v soustavě dvou těles</b>  | <b>10</b> |
| 2.1      | Vznik slapů . . . . .                          | 10        |
| 2.2      | Tření . . . . .                                | 12        |
| 2.3      | Změna rotace planety . . . . .                 | 13        |
| 2.4      | Momenty sil . . . . .                          | 15        |
| <b>3</b> | <b>Časové škály změny rotace</b>               | <b>18</b> |
| <b>4</b> | <b>Časový vývoj velké poloosy</b>              | <b>20</b> |
| 4.1      | Běžné binární soustavy . . . . .               | 20        |
| 4.2      | Rychlý oběh sekundáru . . . . .                | 22        |
| <b>5</b> | <b>Synchronní stav</b>                         | <b>24</b> |
| 5.1      | Dva synchronní stavy . . . . .                 | 24        |
| 5.2      | Podmínka stability . . . . .                   | 26        |
| <b>6</b> | <b>Výpočet pro binární asteroidy</b>           | <b>28</b> |
| 6.1      | Databáze binárů . . . . .                      | 28        |
| 6.2      | Podmínky stability pro vzorek binárů . . . . . | 29        |
| 6.3      | Hledání synchronní frekvence . . . . .         | 30        |
| 6.4      | Porovnání s daty z databáze binárů . . . . .   | 31        |

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| <b>Závěr</b>                                   | <b>34</b> |
| <b>A Odvození orbitálního momentu hybnosti</b> | <b>36</b> |
| <b>Literatura</b>                              | <b>41</b> |

## Kapitola 1

---

# Binární asteroidy

---

*Binární asteroidy jsou velmi dobře zařízené vesmírné laboratoře, které umožňují získat jinak obtížně dostupné informace o fyzikálních vlastnostech a struktuře asteroidů. Protože asteroidy představují jisté velmi malé riziko pro život na Zemi, jsou pro nás tyto informace užitečné a je důležité zabývat se jejich interpretací.*

Pojmem binární asteroid označujeme soustavu dvou malých těles sluneční soustavy, která obíhají kolem společného těžiště, obíhajícího kolem Slunce. Obecně označujeme tělesa jako primární (to těžší) a sekundární, nebo zkráceně jako primár a sekundár. V některých případech je poměr hmotností obou těles malý a sekundární těleso lze nazvat satelitem.

Existence binárních asteroidů je již přes deset let velmi přesvědčivě dokládána celou řadou pozorování nejrůznějšími přímými i nepřímými metodami. Přehled těchto metod, historie výzkumu binárních asteroidů, argumenty pro jejich existenci i hypotézy vzniku a vývoje takových soustav je možné nalézt v přehledovém článku Merline (2002).

Právě vývoj dynamiky binárních asteroidů je předmětem této práce. Existuje několik možných mechanismů vzniku těchto soustav, ale je také zajímavé zkoumat, jaké fyzikální děje na ně působí dlouhodobě po vzniku. Odtud potom vychází formulace hypotéz vysvětlujících rozložení rotačních a oběžných period, velikostí velkých poloos a dalších elementů vzájemných drah binárních soustav, které v současnosti pozorujeme. Tyto hypotézy je následně možné ověřit porovnáním s naměřenými daty.

Práce je úžeji zaměřena na slapové působení v binárních asteroidech, snaží se tedy uchopit jeden z důležitých gravitačních efektů, které se zde uplatňují. Pro odvození vztahů, které slapy popisují, vyslovíme několik předpokladů.

### *Rotace asteroidů*

První předpoklad se týká rotace asteroidů. Vyjdeme z toho, že asteroidy rotují jako tuhá tělesa kolem své hlavní osy, vůči které mají největší moment setrvačnosti (Burns, 1973). Tak se dá charakterizovat základní rotační stav a velmi pravděpodobně se v něm nachází většina asteroidů. Výjimku tvoří tzv. *tumbleři* (tumblers, non-principal axis rotators). Tyto asteroidy nerotují jednoduše kolem jedné ze svých hlavních os, jsou v excitovaném rotačním stavu.

### *Izolované soustavy*

Dále budeme předpokládat, že soustava binárního asteroidu je izolovaná, půjde nám především o platnost zákona zachování celkového momentu hybnosti v soustavě. Tento předpoklad bude platný, když bude sekundární těleso obíhat relativně blízko primárního tělesa. Jak blízko to musí být, popisuje tzv. *Hillova sféra*, což je kulový prostor o poloměru  $R_H$  od primáru. Charakterizuje vzdálenost, ve které se vyrovnají slapové účinky tělesa, které ruší pohyb sekundárního tělesa, s přitažlivostí primárního tělesa. V našem případě se na rušení pohybu sekundáru nejvíce podílí Slunce. Poloměr Hillovy sféry je dán vztahem

$$R_H = \left( \frac{M_1}{M_\odot} \right)^{1/3} R, \quad (1.1)$$

kde  $M_1$  je hmotnost primárního tělesa,  $M_\odot$  hmotnost Slunce a  $R$  vzdálenost binárního asteroidu od Slunce (Weidenschilling, 2002).

Protože většina binárních asteroidů má poloosu vzájemné dráhy výrazně menší než je poloměr Hillovy sféry pro takovou soustavu, jsou dlouhodobě stabilní vůči slapovému působení Slunce (případně Jupiteru), podrobněji Chauvineau (1990). Pokud se binární asteroid nepřiblíží k jinému hmotnému tělesu (např. k Zemi v případě těch blízkozemních), můžeme zanedbat výměnu momentu hybnosti s okolím a považovat soustavu za izolovanou.

### *Rocheova mez*

Jestliže Hillova sféra vymezuje vnější hranici existence stabilního binárního asteroidu, pak vnitřní hranice je v prvním přiblížení dána *Rocheovou mezí*. Ta kolem

primárních těles vymezuje prostor, ve kterém nemůže stabilně obíhat ideálně tekutý satelit s vázanou rotací, držený pohromadě jen vlastní gravitací. Asteroidy sice nejsou ideálně tekuté, nicméně velká část asteroidů není monolitická, tvoří je menší tělesa (pak jsou označovány jako tzv. *rubble piles*, viz např. Richardson, 2002). Struktura asteroidů je potom taková, že pevnost v tahu je blízká nule, tedy tato tělesa drží pohromadě jejich vlastní gravitace (a také tření, způsobené „zaklíněním“ jednotlivých částí asteroidu).

Rocheův poloměr  $a_L$  pro malý kulový satelit je dán jako

$$a_L = \left( \frac{3M_1}{M_2} \right)^{1/3} R_2 = \left( \frac{3\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3} R_1, \quad (1.2)$$

kde  $M_1$  a  $M_2$ ,  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a  $R_1$  a  $R_2$  jsou po řadě hmotnosti, hustoty a poloměry primárního a sekundárního tělesa (když je budeme zjednodušeně považovat za koule). Pro shodnou hustotu obou těles bude Rocheova mez

$$a_L \approx 1,44R_1. \quad (1.3)$$

Pokud je satelit v hydrostatické rovnováze, platí pro Rocheovu mez

$$a_L = 2,46R_1. \quad (1.4)$$

Podrobnější rozbor tohoto problému je možné nalézt v Murray a Dermott (2000) a pramenech tam uvedených. Dolní mez odpovídá pozorovaným binárním soustavám, viz Pravec a kol. (2006).

### *Věk asteroidů*

Nakonec se zmíníme o jedné důležité charakteristice binárních asteroidů, a tou je jejich typický věk. Blízkozemní soustavy jsou stabilní po dobu několika desítek milionů let, přičemž hlavním mechanismem jejich rozrušení jsou blízké průlety kolem terestrických planet – Merline (2002).

Pro asteroidy v hlavním pásu můžeme použít závěry uvedené v Chauvineau (1992). Za dominantní efekt ovlivňující stabilitu těchto soustav je označeno srážkové narušení (angl. *collisional disruption*) a věk takových soustav je srovnatelný se stářím sluneční soustavy. Nicméně mohou se uplatňovat ještě další efekty, které typický věk těchto soustav omezují.

Nyní již přejdeme k problematice, která je tématem této práce, slapovému působení v binární soustavě a jeho důsledkům.

## Kapitola 2

---

# Slapové působení v soustavě dvou těles

---

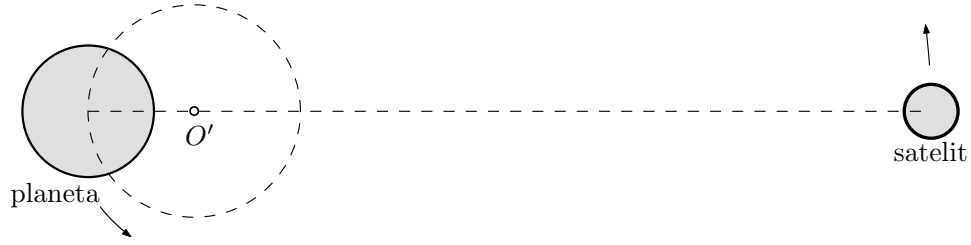
*Nejpodstatnější interakcí v měřítcích, ve kterých se běžně zabýváme sluneční soustavou, je ta gravitační. Při studiu dynamiky sluneční soustavy se obvykle pracuje s hmotnými body. Co se ale stane, když tuto aproximaci opustíme a nahradíme hmotné body tělesy s nenulovými rozměry?*

V důsledku závislosti velikosti gravitačního zrychlení na poloze uvnitř těles konečných rozměrů, dojde ke vzniku *slapů*. Tento efekt můžeme zanedbat, pokud jsou rozměry těles mnohem menší než jejich vzájemné vzdálenosti. Bude však významný, když půjde například o planetu a její satelit nebo binární asteroid. Protože právě slapy se budeme podrobněji v této práci zabývat, je namístě vysvětlit princip jejich vzniku. Budeme přitom postupovat podle Murray a Dermott (2000).

## 2.1 Vznik slapů

Mějme tedy izolovanou soustavu dvou těles (planetu a satelit), která na sebe vzájemně gravitačně působí. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se pohybují po kruhových drahách kolem společného těžiště  $O'$  tak, jak je to znázorněno na obrázku (2.1).

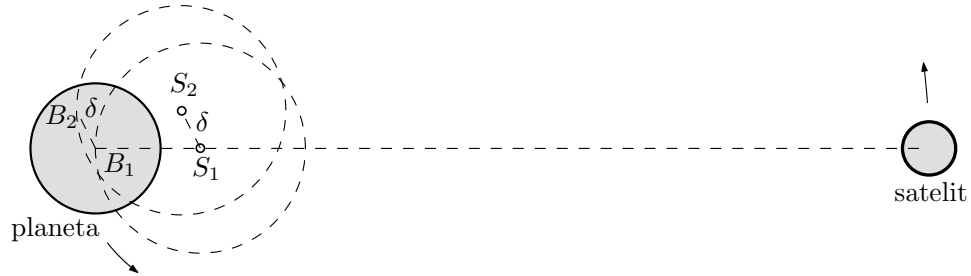
Abychom celou situaci zjednodušili, budeme slapovou deformaci zkoumat odděleně od ostatních efektů. Předpokládejme, že planeta ani satelit vůbec nerotují.



Obrázek 2.1 Izolovaná soustava dvou těles, která obíhají kolem společného těžiště  $O'$  po kruhových drahách.

Potom se libovolný bod uvnitř planety pohybuje po kružnici o shodném poloměru. Pro snazší pochopení je celá situace zachycena na obrázcích (2.2) a (2.3).

Zvolme si bod, který bude od středu hmotnosti planety libovolně posunutý o vzdálenost  $\delta$  (přitom ale zůstane jejím vnitřním bodem). Při oběhu planety kolem těžiště soustavy se bude bod otáčet po kružnici o stejném poloměru jako střed planety. Střed jeho kruhového pohybu ale bude posunutý o stejnou vzdálenost  $\delta$  od těžiště soustavy. To ale znamená, že na všechny body působí v každém okamžiku stejné odstředivé zrychlení (má stejnou velikost i směr).

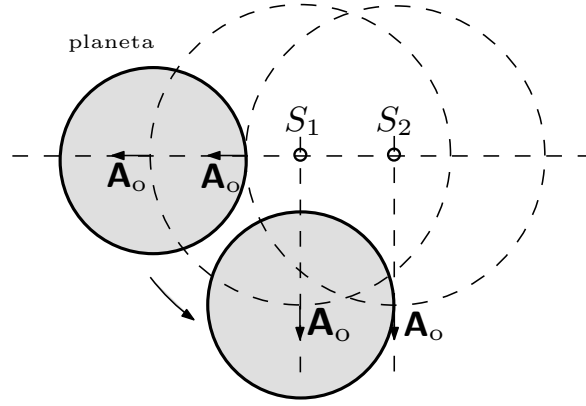


Obrázek 2.2 Všechny body planety (zde např.  $B_1$  a  $B_2$ ) obíhají po kružnicích o stejném poloměru, jejich středy ( $S_1$  a  $S_2$ ) jsou vůči sobě posunuté o stejnou vzdálenost  $\delta$  jako body  $B_1$  a  $B_2$ .

Toto odstředivé zrychlení míří vždy opačným směrem než gravitační zrychlení udílené planetě přitažlivostí satelitu. Jejich velikosti jsou si rovny ve středu hmotnosti planety, tak jak to vyžaduje předpoklad oběhu obou těles po kruhové dráze kolem společného těžiště soustavy. Velikost gravitačního zrychlení  $A_g$ , které působí na střed hmotnosti planety, je

$$A_g = \mathcal{G} \frac{m_s}{r^2}, \quad (2.1)$$

kde  $\mathcal{G}$  je gravitační konstanta,  $m_s$  hmotnost satelitu a  $r$  vzdálenost středů hmotnosti planety a satelitu.



Obrázek 2.3 Na všechny body planety působí v každém okamžiku stejně velké i stejně orientované odstředivé zrychlení  $\mathbf{A}_o$ .

Nyní se vracíme k faktu, který jsme označili za původce slapů – závislosti velikosti gravitačního zrychlení na poloze uvnitř tělesa. Na různé části planety tedy působí jiné gravitační zrychlení vyvolané jejím satelitem. Zároveň ale na každý bod planety působí stejné odstředivé zrychlení, které je rovno gravitačnímu zrychlení  $\mathbf{A}_g$ .

Slapové zrychlení definujeme jako rozdíl mezi gravitačním a odstředivým zrychlením v daném bodě (tedy gravitačním zrychlením působícím na střed hmotnosti planety)

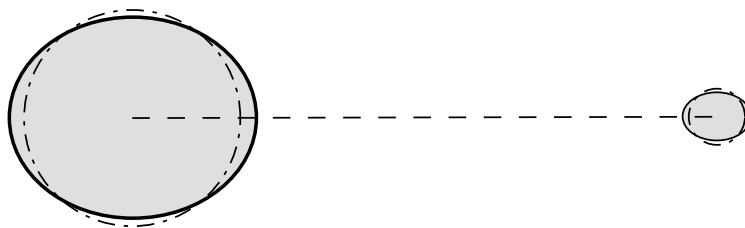
$$\mathbf{A}_{\text{slapové}} \equiv \mathbf{A} - \mathbf{A}_g. \quad (2.2)$$

Z této definice můžeme ukázat, proč na planetě vzniknou dvě *slapová vzdutí* (v angličtině *tidal bulge*).

Nejdříve uvažujme o slapovém zrychlení na spojnici planety a satelitu. V místě planety, které je blíže satelitu, je gravitační zrychlení větší než ve středu hmotnosti planety, tedy slapové zrychlení míří k satelitu. Naopak v místě, které je na odvrácené straně planety, je gravitace vyvolaná satelitem slabší než ve středu planety a výsledné zrychlení tedy míří od satelitu. Podobnými úvahami pro zrychlení, která neleží na spojnici planeta–satelit, dojdeme k závěru, že slapová vzdutí budou vypadat přibližně jako na obrázku (2.4).

## 2.2 Tření

Předchozí závěry jsou platné za jednoho dosud nevyřčeného předpokladu. Tím je dokonalá elasticita deformovaného tělesa. Elastické těleso se slapově deformuje symetricky podle osy, která spojuje středy deformovaného a deformujícího tělesa. Pro



Obrázek 2.4 Přibližný tvar slapových vzdutí. Čerchovanou čarou je vyznačen původní, nedeformovaný tvar planety a satelitu.

asteroidy tento předpoklad ovšem splněn není. V takových tělesech je nutné uvažovat přítomnost třecích sil.

Nejdříve se podívejme, jak běžné binární soustavy vypadají. Ať už se jedná o soustavy planeta – satelit nebo binární asteroid, můžeme uvést jednu obecnou charakteristiku: pro drtivou většinu<sup>1</sup> pozorovaných binárních soustav je oběžná doba těles kolem společného těžiště  $P_{\text{orb}}$  větší než rotační perioda primárního tělesa  $P_1$ , tedy  $P_{\text{orb}} > P_1$ .

V dalších úvahách budeme počítat s tím, že je tato podmínka splněna. Zjistíme, jaký vliv to bude mít na rotaci planety a satelitu, a dále se podíváme na časový vývoj velké poloosy binární soustavy.

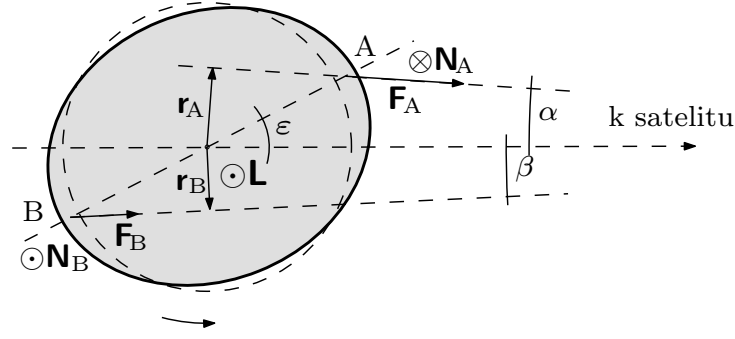
## 2.3 Změna rotace planety

Pokud je oběžná doba satelitu delší než rotační perioda planety, předbíhá slapové vzdutí satelit v jeho oběhu o úhel, který označíme  $\varepsilon$ . Nyní uvažujme, co z této asymetrické polohy slapového vzdutí vyplývá pro rotaci planety. Pomůže nám k tomu obrázek (2.5), na kterém je pohled shora na soustavu planeta – satelit. Čerchovaně je zakreslena nedeformovaná planeta, plnou čarou potom její deformovaný tvar a také směr její rotace. Dále jsou zobrazeny gravitační síly, které působí na bližší i vzdálenější slapové vzdutí a ramena těchto sil.

Protože gravitační síly neleží na spojnici planety a satelitu, působí na planetu momenty těchto sil. Uvažujme o jejich velikostech. Síla působící na vzdutí, které je blíže satelitu (ozn. A) má větší velikost než síla působící na vzdálenější vzdutí B, tedy  $F_A > F_B$ . Totéž lze říci o ramenech těchto sil, protože  $\alpha > \beta$ , platí tedy  $r_A > r_B$ . Moment síly je dán vektorovým součinem ramene síly a síly. Protože zde ale pracujeme přímo s pravoúhlými průměty ramena síly do směru kolmého k působící

---

<sup>1</sup> Zatím jedinou známou výjimkou je Marsův měsíc Phobos. Ten Mars oběhne asi za 7 h 39 min, zatímco jedna otočka Marsu trvá 24 h 37 min.



Obrázek 2.5 K odvození změn rotace planety. Na obrázku je čerchovaně zakreslena ne-deformovaná planeta, plnou čarou její deformovaný tvar, stejně jako směr její rotace a s ní spojený moment hybnosti  $\mathbf{L}$ . Dále jsou zde zakresleny síly působící na obě slapová vzdutí,  $\mathbf{F}_A$ ,  $\mathbf{F}_B$ , jejich ramena  $\mathbf{r}_A$ ,  $\mathbf{r}_B$ , a také momenty těchto sil  $\mathbf{N}_A$ ,  $\mathbf{N}_B$  (pro přehlednost obrázku jsou zakresleny mimo svá působišť).

síle, zjednoduší se výpočet na skalární násobek jejich velikostí, tedy

$$N_i = r_i F_i, \quad i = A, B, \quad (2.3)$$

kde  $N_i$  značí velikosti momentů sil  $F_i$  a  $r_i$  jsou velikosti ramen těchto sil. Celkově lze tedy o velikostech momentů sil psát

$$N_A > N_B, \quad (2.4)$$

což vyplývá z předchozích úvah o velikostech sil a jejich ramen.

Nyní uvažujme o směrech momentů sil. Z obrázku (2.5) je patrné, že  $N_A$  míří od čtenáře do roviny papíru, zatímco  $N_B$  má směr opačný. Jestliže tyto dva momenty sil vektorově sečteme, a platí-li přitom rovnice (2.4), bude výsledný moment sil mířit ve směru  $N_A$ , tedy od čtenáře.

V obrázku (2.5) je naznačen směr rotace planety v matematicky kladném směru, tzn. že vektor momentu hybnosti spojený s její rotací  $\mathbf{L}$  míří ke čtenáři. Podle druhé impulzové věty je časová změna momentu hybnosti tělesa rovna vektorovému součtu vnějších momentů sil, které na něj působí. Vyjádřeno matematicky

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}}, \quad (2.5)$$

kde  $\mathbf{L}$  je moment hybnosti a  $\mathbf{N}_{\text{ext}}$  značí vnější momenty sil. Jestliže mají rotační moment hybnosti planety a výsledný moment sil, který na planetu působí, opačný směr, znamená to, že velikost momentu hybnosti se bude s časem zmenšovat. Jinými slovy, slapové působení satelitu na planetu vede ke zpomalování její rotace.

Protože jsme při svých úvahách nepoužívali žádné předpoklady, které by platily jen pro planetu, můžeme naše závěry aplikovat také na satelit. Důležitou změnou oproti předchozí situaci ale je, že velká část satelitů má vázanou rotaci, to znamená, že jejich rotační perioda je rovna oběžné době.

Nyní se podíváme, jak velkými momenty sil na sebe planeta a satelit působí.

## 2.4 Momenty sil

V této části odvodíme velikosti momentů sil, kterými působí satelit na planetu a také planeta na satelit. Vycházíme přitom z článku Goldreich a Soter (1966), použijeme ale značení, které je konzistentní s dalšími částmi této práce. Velikost momentu síly, kterým působí satelit na planetu, je

$$N_1 = \frac{6\mathcal{G}}{5} \frac{M_1 M_2 R_1}{a^3} H \sin 2\varepsilon, \quad (2.6)$$

kde  $M_1$  a  $M_2$  jsou hmotnosti planety a satelitu,  $R_1$  poloměr planety,  $a$  velká poloosa,  $H$  výška slapové deformace a  $\varepsilon$  je úhel, o který slapové vzdutí na planetě předbíhá satelit (nebo se za ním opožďuje). Jeho význam je zřejmý z obrázku (2.5).

Výšku slapového vzdutí určíme jako  $H = \zeta h$ , kde

$$\zeta = \frac{3M_2 R_1^4}{4M_1 a^3} \quad (2.7)$$

je rovnovážná výška slapů a  $h$  je tzv. *Loveho číslo* (Love, 1927), které vypovídá o struktuře deformovaného tělesa. Pokud známe strukturu deformovaného tělesa, můžeme tuto konstantu spočítat. Pro homogenní pevné těleso je

$$h = \frac{5/2}{1 + \tilde{\mu}}, \quad (2.8)$$

kde  $\tilde{\mu}$  je *efektivní rigidita* (tuhost), která udává poměr mezi gravitační a pružnou silou, které působí na těleso. Je definována jako

$$\tilde{\mu} \equiv \frac{19\mu}{2g\rho R_1}, \quad (2.9)$$

kde  $\mu$  je tuhost tělesa,  $g = \mathcal{G}M_1/R_1^2$  je gravitační zrychlení na povrchu tělesa a  $\rho$  je jeho průměrná hustota. Když je  $\tilde{\mu} \ll 1$ , pak se těleso chová jako kapalina, naopak pokud je  $\tilde{\mu} \gg 1$ , převládá v tělese vliv pružných sil. Pro tělesa, kterými se zabýváme, je obvykle  $\tilde{\mu} \gg 1$ , je tedy možné první člen jmenovatele rovnice (2.8) zanedbat a máme

$$h = \frac{5/2}{\tilde{\mu}}. \quad (2.10)$$

Vyjádření výrazu  $\sin 2\varepsilon$  z rovnice 2.6 vyplývá z úvah o disipaci energie při slapovém působení a je převzatý z Goldreich a Soter (1966). Pro malý úhel  $\varepsilon$  platí

$$\sin 2\varepsilon = \frac{1}{Q}, \quad (2.11)$$

kde  $Q$  je specifická disipační funkce. Definujeme ji jako

$$Q \equiv \frac{2\pi E_0}{\Delta E}, \quad (2.12)$$

kde  $\Delta E$  je energie disipovaná během jednoho cyklu a  $E_0$  je maximální energie uložená ve slapové deformaci. Pro planetu, resp. satelit je

$$Q'_i = Q(1 + \tilde{\mu}), \quad (2.13)$$

opět za podmínky  $\tilde{\mu} \gg 1$  zanedbáme první člen v závorce a dosadíme za  $\tilde{\mu}$  z rovnice (2.9). Když ještě vyjádříme gravitační zrychlení na povchu tělesa  $g$  a hustotu  $\rho$  (obě tělesa budeme zjednodušeně považovat za homogenní koule), dostaneme po menších úpravách

$$Q'_i = \frac{38\pi R_i^4 \mu Q}{3\mathcal{G} M_i^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.14)$$

kdy pro obě tělesa uvažujeme stejnou tuhost  $\mu$  i disipační funkci  $Q$ .

Když výše uvedené vztahy dosadíme do rovnice (2.6), dostaneme pro velikost momentu síly, kterým působí satelit na planetu, vztah

$$N_1 = \frac{9\mathcal{G}}{4} \frac{R_1^5 M_2^2}{Q'_1 a^6}. \quad (2.15)$$

Stejným způsobem můžeme také odvodit velikost momentu síly, kterým působí planeta na satelit, tedy

$$N_2 = \frac{9\mathcal{G}}{4} \frac{R_2^5 M_1^2}{Q'_2 a^6}. \quad (2.16)$$

Tyto výsledky nyní využijeme pro odhad časových škál, na kterých slapy způsobují změny rychlosti rotace planety a satelitu, a také změny dalších parametrů binární soustavy. Ještě předtím se ale podívejme, jaké veličiny ve vztazích pro momenty sil vystupují.

Z pozorování binárních soustav včetně asteroidů můžeme obvykle určit rozměry těles, s menší přesností jejich hmotnosti – většinou máme alespoň přibližný odhad jejich hustoty – a také velkou poloosu soustavy ze známé periody oběhu obou těles kolem společného těžiště. Jedinými neznámými veličinami jsou specifická disipační funkce  $Q$  a tuhost tělesa  $\mu$  – obojí vystupuje ve členu  $Q'_i$ , viz rovnici (2.14).

Při výpočtech konkrétních hodnot se používají odhady těchto parametrů, které vycházejí především z pozorování těles podobných asteroidům, u kterých tyto parametry můžeme alespoň přibližně určit. To je případ Marsova měsíce Phobos, přesnější odhady těchto parametrů máme pro planety sluneční soustavy a jejich měsíce. Podrobnější rozbor je možné nalézt v Goldreich a Soter (1966).

## Kapitola 3

---

### Časové škály změny rotace

---

*V předchozích částech jsme odvodili princip, jakým dochází k brždění rotace planety (a satelitu), a také velikosti momentů sil, kterými na sebe obě tělesa v důsledku slapů působí. Nyní toho využijeme k odhadu časové závislosti úhlové frekvence primárního a sekundárního tělesa v soustavě binárního asteroidu.*

Vyjdeme z předpokladů o rotaci asteroidů, které jsme vyslovili v kapitole (1). Podle nich většina pozorovaných asteroidů rotuje jako tuhé těleso kolem hlavní osy, vůči které má největší moment setrvačnosti. Potom se dá velikost momentu hybnosti spojeného s rotací primáru a sekundáru napsat jako

$$L_i = I_i \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

kde  $I_i$  jsou momenty setrvačnosti a  $\Omega_i$  úhlové frekvence primáru, resp. sekundáru. Když využijeme platnosti druhé impulzové věty (rovnice (2.5)) a úvah z předchozí kapitoly, můžeme časovou derivaci rovnice (3.1) zapsat jako

$$\dot{L}_i = I_i \dot{\Omega}_i = -N_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

kde  $N_i$  jsou momenty síly, kterými na sebe obě tělesa působí. Pro změnu periody rotace primáru tak bude platit

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{N_1}{I_1}, \quad (3.3)$$

kde  $I_1 = \alpha M_1 R_1^2$  je moment setrvačnosti primáru a konstanta  $\alpha$  závisí na rozložení hmoty v tomto tělese (pro homogenní kouli je  $\alpha = 2/5$ ).

Když moment setrvačnosti a moment síly – rov. (2.15) spolu s (2.14) – dosadíme do rovnice (3.3), dostaneme

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{27\mathcal{G}M_2^2M_1}{152\pi\alpha\mu QR_1a^6}. \quad (3.4)$$

Předpokládejme nyní, že platí  $a = \text{konst.}$  (o tomto předpokladu viz diskuzi níže). Pro počáteční podmínky  $\Omega_1(t=0) = \Omega_1^0$  je řešením předchozí rovnice

$$\Omega_1 = \Omega_1^0 - \frac{27\mathcal{G}^2q^2M_1^3}{152\pi\alpha\mu QR_1a^6}t, \quad (3.5)$$

kde jsme zavedli poměr hmotností sekundárního a primárního tělesa  $q \equiv M_2/M_1$ .

Vztahy popisující časovou změnu rotace primárního tělesa se dají použít také pro změnu rotace sekundárního tělesa, platí

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{N_2}{I_2}, \quad (3.6)$$

přitom sekundár považujeme za homogenní kouli, tedy  $I_2 = \frac{2}{5}M_2R_2^2$ . Opět dosadíme z rovnic (2.16) a (2.14) a dostaneme

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{135\mathcal{G}M_1^2M_2}{304\pi\mu QR_2a^6}. \quad (3.7)$$

Za stejného předpokladu  $a = \text{konst.}$ , pro počáteční podmínky  $\Omega_2(t=0) = \Omega_2^0$  a při použití  $q = M_2/M_1$  je řešení rovnice

$$\Omega_2 = \Omega_2^0 - \frac{135\mathcal{G}^2qM_1^3}{304\pi\mu QR_2a^6}t. \quad (3.8)$$

Zpomalování rotace planety, resp. satelitu ale není jediný efekt, který mají slapové síly na svědomí. Protože podle počátečního předpokladu jde o izolovanou soustavu, bude se v ní zachovávat celkový moment hybnosti. To povede k časové změně velké poloosy binární soustavy a tedy porušení předpokladu, za kterého jsme integrovali rovnice (3.4) a (3.7). Uvedené výsledky tedy musíme chápat jako lineární aproximaci změny rotace v okamžiku pozorování.

## Kapitola 4

---

### Časový vývoj velké poloosy

---

*V izolované soustavě se zachovává celkový moment hybnosti. Jestliže se tedy mění úhlové frekvence rotace obou těles (a tedy momenty hybnosti spojené s rotací), bude se také měnit orbitální moment hybnosti.*

#### 4.1 Běžné binární soustavy

Mějme dvě tělesa o hmotnostech  $M_1$ , resp.  $M_2$  ( $M_1 > M_2$ ), která obíhají kolem společného těžiště po kruhových drahách. Navíc uvažujme běžnou situaci, kdy tělesa obíhají kolem těžiště pomaleji, než primární (těžší) těleso rotuje. Více o tomto předpokladu viz kapitola (2.2). Celkový moment hybnosti soustavy můžeme napsat jako

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_{\text{orb}}, \quad (4.1)$$

kde  $\mathbf{L}_1$  a  $\mathbf{L}_2$  jsou momenty hybnosti spojené s rotací prvního a druhého tělesa,  $\mathbf{L}_{\text{orb}}$  je orbitální moment hybnosti soustavy. Uvažujme dále, že vektory jednotlivých momentů hybnosti jsou paralelní a souhlasně orientované, takže velikost vektoru celkového momentu hybnosti je dána součtem velikostí vektorů momentu hybnosti z rovnice (4.1).

Protože je celkový moment hybnosti soustavy konstantní, derivací rovnice (4.1)

podle času dostaneme

$$\dot{L}_1 + \dot{L}_2 + \dot{L}_{\text{orb}} = 0, \quad (4.2)$$

a tedy

$$\dot{L}_{\text{orb}} = -\dot{L}_1 - \dot{L}_2. \quad (4.3)$$

Nyní se vracíme k rovnici (3.2) z předchozí kapitoly, podle které můžeme časové změny jednotlivých rotačních momentů hybnosti napsat jako

$$\dot{L}_i = I_i \dot{\Omega}_i = -N_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.4)$$

kde  $\Omega_i$  jsou úhlové frekvence primáru, resp. sekundáru a  $N_i$  jsou momenty síly, kterými na sebe obě tělesa působí. Jejich velikosti jsou odvozeny v kapitole (2.4), tedy

$$N_1 = \frac{9\mathcal{G}}{4} \frac{R_1^5 M_2^2}{Q'_1 a^6} \quad \text{a} \quad N_2 = \frac{9\mathcal{G}}{4} \frac{R_2^5 M_1^2}{Q'_2 a^6}, \quad (4.5)$$

kde  $Q'_i$  je dáno vztahem

$$Q'_i = \frac{38\pi R_i^4 \mu Q}{3\mathcal{G} M_i^2}. \quad (4.6)$$

Dosadíme-li tyto vztahy postupně do rovnice (4.4) a pak do rovnice (4.3), dostaneme

$$\dot{L}_{\text{orb}} = \frac{9}{4} \frac{\mathcal{G}^2}{a^6} \frac{3M_1^2 M_2^2}{38\pi\mu Q} (R_1 + R_2). \quad (4.7)$$

Dále bude výhodné používat vyjádření pomocí poměrů hmotností ( $q = M_2/M_1$ ) a poloměrů ( $X = R_2/R_1$ ) těles. Předchozí rovnice potom vypadá následovně

$$\dot{L}_{\text{orb}} = \frac{9}{4} \frac{\mathcal{G}^2}{a^6} \frac{3M_1^4 q^2}{38\pi\mu Q} R_1 (1 + X). \quad (4.8)$$

V příloze (A) jsme odvodili obecný vztah pro velikost orbitálního momentu hybnosti soustavy dvou těles, která obíhají kolem společného těžiště. Pro kruhovou dráhu (nulová excentricita  $e$ ) a dále přepsaný pomocí poměrů hmotností  $q$  vypadá následovně

$$L_{\text{orb}} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} n a^2 = \frac{q}{q + 1} M_1 n a^2, \quad (4.9)$$

kde  $n$  je velikost úhlové rychlosti. Z posledních dvou rovnic dostáváme

$$\frac{d(a^2 n)}{dt} = \frac{9}{4} \frac{\mathcal{G}^2}{a^6} \frac{3M_1^3 q(1 + q)}{38\pi\mu Q} R_1 (1 + X). \quad (4.10)$$

Z třetího Keplerova zákona – rovnice (A.8) – vyplývá, že

$$a^2 n = [\mathcal{G}(M_1 + M_2)a]^{1/2} = [\mathcal{G}M_1(1 + q)a]^{1/2}. \quad (4.11)$$

Dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{d(a^{1/2})}{dt} = \frac{9}{4} \frac{\mathcal{G}^{3/2}}{a^6} \frac{3M_1^{5/2} q(1+q)^{1/2}}{38\pi\mu Q} R_1(1+X). \quad (4.12)$$

Předpokládáme-li, že tělesa jsou kulová, platí  $M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3$  ( $\rho$  je průměrná hustota tělesa). Po dosazení do předchozí rovnice a drobných úpravách dostaneme

$$a^{11/2} da = \frac{24\pi^{3/2}\mathcal{G}^{3/2}\rho^{5/2}R_1^{17/2}q(1+q)^{1/2}(1+X)}{19\sqrt{3}\mu Q} dt. \quad (4.13)$$

Integrací a dosazením počáteční podmínky  $a(t_0) = a_0$  dostaneme po drobných úpravách

$$\left(\frac{a(t)}{R_1}\right)^{13/2} - \left(\frac{a_0}{R_1}\right)^{13/2} = \frac{156\pi^{3/2}G^{3/2}\rho^{5/2}R_1^2q(1+q)^{1/2}(1+X)}{19\sqrt{3}\mu Q} (t - t_0), \quad (4.14)$$

kde  $t_0$  je počáteční a  $t$  konečný čas. Když ještě dosadíme za  $X = q^{1/3}$ , což platí pro kulová tělesa, dostaneme konečnou podobu rovnice pro odhad časového vývoje velké poloosy za daných zjednodušujících předpokladů

$$\left(\frac{a(t)}{R_1}\right)^{13/2} - \left(\frac{a_0}{R_1}\right)^{13/2} = \frac{156\pi^{3/2}G^{3/2}\rho^{5/2}R_1^2q(1+q)^{1/2}(1+q^{1/3})}{19\sqrt{3}\mu Q} (t - t_0). \quad (4.15)$$

## 4.2 Rychlý oběh sekundáru

V podkapitole (2.2) jsme vyslovili předpoklad o periodách oběhu sekundáru a rotace primáru,  $P_{\text{orb}} > P_1$ . Ten platí pro většinu pozorovaných těles, nicméně je fyzikálně zajímavé podívat se také na situaci, kdy předpoklad neplatí. Mějme tedy  $P_{\text{orb}} < P_1$ , tzn. že sekundár obíhá kolem primáru rychleji, než primár rotuje a sledujme, jak se změní odvozené vztahy.

Vraťme se k obrázku (2.5). Nyní se bude slapové vzdutí na planetě zpožďovat za satelitem o stejný úhel  $\varepsilon$ . Tím pádem bude nyní moment síly  $\mathbf{N}_A$  mířit ve směru ke čtenáři a  $\mathbf{N}_B$  od něj. Protože je stále  $N_A > N_B$ , míří výsledný moment síly ke čtenáři a má stejný směr jako rotační moment hybnosti planety  $\mathbf{L}$ . Podle druhé impulzové věty (2.5) nyní dochází ke zvětšování tohoto momentu hybnosti, tedy k urychlování rotace planety. Ze zákona zachování celkového momentu hybnosti soustavy potom vyplývá, že bude docházet ke zmenšování velké poloosy  $a$ .

Dále si všimneme k jakým změnám dojde ve vztazích pro odhad časových škál vývoje úhlové frekvence planety a satelitu a velké poloosy jejich vzájemné dráhy.

Předchozí úvahy vedou ke změně znaménka momentu síly v rovnici (3.2), která bude nyní vypadat jako

$$\dot{L}_i = I_i \dot{\Omega}_i = N_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.16)$$

To se projeví ve výsledném vztahu pro změnu úhlové frekvence rotace planety

$$\Omega_1 = \Omega_1^0 + \frac{27\mathcal{G}^2 q^2 M_1^3}{152\pi\alpha\mu Q R_1 a^6} t \quad (4.17)$$

a podobně také pro satelit

$$\Omega_2 = \Omega_2^0 + \frac{135\mathcal{G}^2 q M_1^3}{304\pi\mu Q R_2 a^6} t. \quad (4.18)$$

Změna znaménka momentu síly v rovnici (4.16) ovlivní také vztahy pro časový vývoj velké poloosy. Rovnice (4.8) bude nyní

$$\dot{L}_{\text{orb}} = -\frac{9}{4} \frac{\mathcal{G}^2}{a^6} \frac{3M_1^4 q^2}{38\pi\mu Q} R_1 (1 + X) \quad (4.19)$$

a výsledná rovnice pro vývoj velké poloosy je

$$\left(\frac{a_0}{R_1}\right)^{13/2} - \left(\frac{a(t)}{R_1}\right)^{13/2} = \frac{156\pi^{3/2} \mathcal{G}^{3/2} \rho^{5/2} R_1^2 q (1+q)^{1/2} (1+q^{1/3})}{19\sqrt{3}\mu Q} (t - t_0). \quad (4.20)$$

Zamysleme se nyní, co tyto rovnice obecně znamenají. Uvažovali jsme o dvou situacích. V prvním případě, kdy byla perioda oběhu sekundáru delší než rotační perioda primáru,  $P_{\text{orb}} > P_1$ , docházelo kvůli slapovému působení ke zpomalování rotace primáru a ke zvětšování velké poloosy jejich vzájemné dráhy.

Ve druhém případě, kdy platilo  $P_{\text{orb}} < P_1$ , se naopak rotace planety urychlovala a velká poloosa se zmenšovala. To naznačuje, že mezní situace, kdy  $P_{\text{orb}} = P_1$ , a kterou budeme označovat jako synchronní stav<sup>1</sup>, je labilní rovnováhou. Každé vychýlení z tohoto stavu vede k dalšímu vzdalování soustavy od tohoto stavu.

Jak ukážeme v další kapitole, situace je o něco složitější. Budeme přitom vycházet z informací, které uvádí Counselman (1973) a také Harris a Ward (1982).

---

<sup>1</sup> Přesněji pro něj platí podmínka  $P_{\text{orb}} = P_1 = P_2$ , tedy všechny periody v binární soustavě jsou shodné. To je ekvivalentní s podmínkou  $n = \Omega_1 = \Omega_2$ , kterou používáme dále.

## Kapitola 5

---

### Synchronní stav

---

*V této kapitole budeme zkoumat synchronní stav v binárních soustavách. Ukážeme, že za určitých okolností může být synchronní rotace a oběh obou těles stabilním konečným stavem slapového vývoje.*

#### 5.1 Dva synchronní stavy

I nadále uvažujeme izolovanou soustavu dvou těles, obíhajících kolem společného těžiště, a stále proto platí, že se zachovává celkový moment hybnosti soustavy. Podle předchozí části můžeme jeho velikost zapsat jako

$$L = L_1 + L_2 + L_{\text{orb}}, \quad (5.1)$$

kde  $L_1$  a  $L_2$  jsou velikosti momentů hybnosti spojených s rotací prvního a druhého tělesa. Jejich velikosti vyjádříme jako

$$L_i = I_i \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.2)$$

kde  $\Omega_i$  jsou úhlové frekvence primáru, resp. sekundáru a  $I_i$  jsou jejich momenty setrvačnosti. Orbitální moment hybnosti  $L_{\text{orb}}$  je pro tělesa s kruhovou dráhou

$$L_{\text{orb}} = \frac{q}{1+q} M_1 n a^2, \quad (5.3)$$

kde  $n$  je velikost úhlové rychlosti těles kolem těžiště soustavy (střední pohyb) a  $q$  je poměr hmotností obou těles. Tento vztah přepíšeme užitím třetího Keplerova zákona jako

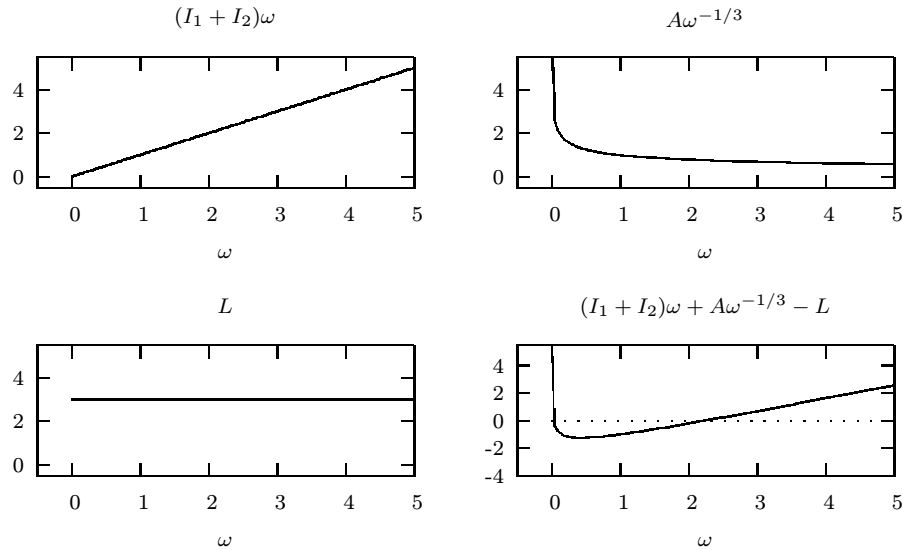
$$L_{\text{orb}} = \mathcal{G}^{2/3} \frac{qM_1^{5/3}}{(1+q)^{1/3}} n^{-1/3} \equiv An^{-1/3}, \quad (5.4)$$

označení  $A$  využijeme při některých výpočtech a v grafech pro větší přehlednost.

Nyní budeme kvalitativně vyšetřovat synchronní stav. Ten je charakterizován podmínkou  $\Omega_1 = \Omega_2 = n \equiv \omega$ . Předchozí vztahy pro jednotlivé momenty hybnosti dosadíme do rovnice (5.1) a dostaneme tak nelineární rovnici pro  $\omega$ , což je společná úhlová frekvence rotace a oběhu obou těles

$$(I_1 + I_2)\omega + \mathcal{G}^{2/3} \frac{qM_1^{5/3}}{(1+q)^{1/3}} \omega^{-1/3} - L = 0. \quad (5.5)$$

Máme v ní součet tří funkcí, takže nejjednodušší kvalitativní rozbor provedeme tak, že načtneme grafy všech tří funkcí a sečteme je. Jednotlivé funkce i jejich součet ukazuje obrázek (5.1).



*Obrázek 5.1* Schematické zobrazení grafů jednotlivých členů rovnice (5.5) a jejich součtu k vysvětlení existence dvou synchronních stavů v binární soustavě. Na osách jsou libovolné jednotky, popisek svislé osy je pro lepší přehlednost nad každým grafem.

Odtud je patrné, že existence synchronního stavu závisí na obsahu celkového momentu hybnosti v binární soustavě. Pro soustavu s relativně malým celkovým

momentem hybnosti nemusí synchronní stav existovat vůbec. Taková je například soustava pomalu rotujícího primáru a malého sekundáru, který obíhá blízko primáru (moment hybnosti spojený s rotací sekundáru je obvykle malý vůči dvěma ostatním složkám momentu hybnosti soustavy).

Je-li naopak celkový moment hybnosti velký, budou existovat dva synchronní stavy. Velký obsah momentu hybnosti mají soustavy s rychle rotujícím primárem a větším sekundárem, který obíhá ve větší vzdálenosti od primáru.

V úvahu připadá ještě situace, kdy je celkový moment hybnosti soustavy právě roven předchozím dvěma členům rovnice. Potom bude mít rovnice (5.5) právě jeden reálný kořen a bude existovat jedna synchronní úhlová frekvence  $\omega$ .

## 5.2 Podmínka stability

Nyní odvodíme podmínku, která rozliší mezi dvěma synchronními stavy (pokud v dané soustavě existují). Zapišeme celkový moment hybnosti jako v rovnici (5.5) pro dvě různé situace. Nejdříve pro synchronní stav se společnou úhlovou frekvencí  $\omega$ , a pak pro stav s malou změnou frekvencí  $\Delta\omega$  a  $\Delta n$ . Podle předpokladu je celkový moment hybnosti soustavy konstantní, momenty hybnosti těchto dvou stavů se budou rovnat, tedy

$$L = I_1\omega + I_2\omega + A\omega^{-1/3} = I_1(\omega + \Delta\omega) + I_2(\omega + \Delta\omega) + A(\omega + \Delta n)^{-1/3}, \quad (5.6)$$

kde

$$A = \mathcal{G}^{2/3} \frac{qM_1^{5/3}}{(1+q)^{1/3}}. \quad (5.7)$$

Protože nám půjde o to, porovnat změnu  $\Delta\omega$  a  $\Delta n$ , je ve třetím členu pravé strany rovnice (5.6) společná frekvence  $\omega$ , ale její změna je  $\Delta n$ . Drobnými úpravami a použitím binomického rozvoje dostaneme předchozí rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} A\omega^{-1/3} &= (I_1 + I_2)\Delta\omega + A\omega^{-1/3} \left(1 + \frac{\Delta n}{\omega}\right)^{-1/3} \\ &\approx (I_1 + I_2)\Delta\omega + A\omega^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta n}{\omega}\right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

a odtud vyjádříme změnu úhlové frekvence rotace obou těles v závislosti na změně středního pohybu

$$\Delta\omega = \frac{A}{3\omega^{4/3}(I_1 + I_2)} \Delta n. \quad (5.9)$$

Když dosadíme za  $A$  a dále ze třetího Keplerova zákona, dostaneme

$$\Delta\omega = \frac{qM_1a^2}{3(1+q)(I_1 + I_2)}\Delta n. \quad (5.10)$$

Velikost členu na pravé straně rovnice (5.10) před  $\Delta n$  určuje, jak rychle se budou měnit  $\omega$  a  $n$ . Když bude tento člen menší než jedna, bude se rychleji měnit střední pohyb  $n$  než úhlová frekvence  $\omega$ . Velikost  $a$  v tomto členu určuje tzv. *vnitřní synchronní dráhu*.

Pro sekundár vychýlený nad tuto synchronní dráhu, se bude oběžná perioda prodlužovat rychleji než rotační perioda primáru a rozdíl mezi těmito periodami se bude dále zvětšovat. Když sekundár naopak vychýlíme pod ní, bude se jeho oběžná perioda zkracovat rychleji než rotační perioda primáru a opět se rozdíl mezi nimi zvětšuje. Z toho vyplývá, že vnitřní synchronní dráha je nestabilní vůči slapovým vlivům.

Bude-li zmíněný člen rov. (5.10) větší než jedna, bude naopak rychleji růst úhlová frekvence  $\omega$  než  $n$ . Tehdy hovoříme o *vnější synchronní dráze*. Pro sekundár nad (pod) touto synchronní dráhou, se bude oběžná perioda prodlužovat (zkracovat) pomaleji než rotační perioda primáru a rozdíl mezi těmito periodami se bude naopak zmenšovat. Odtud plyne, že vnější synchronní stav je stabilní a platí, že slapový vývoj směřuje od vnitřního synchronního stavu k vnějšímu a vnější synchronní stav je stabilní konečný stav slapového vývoje (Harris a Ward, 1982).

Podmínka, která tyto dva stavy rozliší se dá napsat také jako

$$\frac{qM_1}{1+q}a^2 > 3(I_1 + I_2). \quad (5.11)$$

Pokud je splněna, jde o vnější (stabilní) synchronní stav. V prvním přiblížení můžeme binární asteroid pokládat za soustavu dvou homogenních koulí, které mají stejnou hustotu  $\rho$  a momenty setrvačnosti

$$I_i = \frac{2}{5}M_iR_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (5.12)$$

Dosadíme-li ještě do nerovnice (5.11) hmotnost primáru  $M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3$ , dostaneme podmínku na vnější synchronní stav v této zjednodušené situaci jako

$$\left(\frac{a}{R_1}\right)^2 > \frac{6(1+q)(1+q^{5/3})}{q}. \quad (5.13)$$

Odtud vyplývá, že jenom soustavy s velkým  $q$  (hmotnými sekundáry) mají slapově stabilní synchronní dráhy blízko primáru (Weidenschilling, 1989).

Naše teoretické předpovědi nyní porovnáme s napozorovanými daty popisujícími binární asteroidy.

## Kapitola 6

---

# Výpočet pro binární asteroidy

---

*Tato kapitola se věnuje porovnání teoretických předpovědí předchozích kapitol s daty, která charakterizují binární asteroidy.*

## 6.1 Databáze binárů

Fotometrickému pozorování binárních asteroidů se věnuje ve světě několik profesionálních i amatérských observatoří. Koordinaci pozorování zajišťuje Oddělení meziplanetární hmoty Astronomického ústavu Akademie věd České republiky v Ondřejově. Na základě fotometrických a radarových pozorování a dále pozorování dalekohledy s adaptivní optikou byla vytvořena databáze binárních asteroidů, která obsahuje veškerá dostupná data charakterizující tyto soustavy od blízkozemních až po Jupiterovy Trojany. Vlastnosti databáze a zevrubný popis charakteristik, které obsahuje, jsou uvedeny v Pravec a Harris (2007).

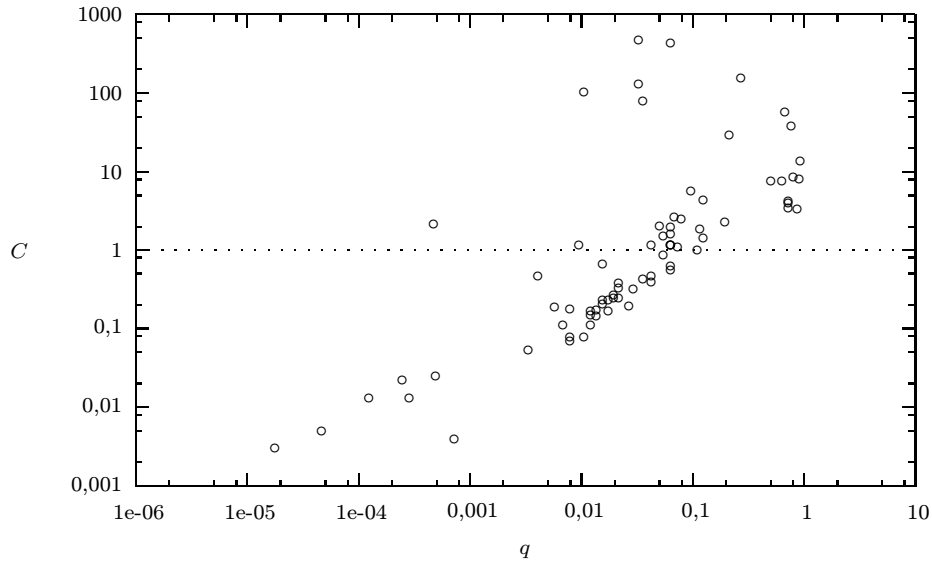
Z celkového počtu 89 binárních asteroidů, uvedených v poslední aktualizované verzi databáze (ze 4. prosince 2007), bylo vybráno 33 soustav, u kterých byly určeny, nebo alespoň odhadnuty, všechny potřebné fyzikální veličiny. Ty jsou použity k výpočtu kritéria existence stabilní synchronní dráhy v binární soustavě a k výpočtům koeficientů rovnice (5.5), kterou následně pro tyto soustavy vyřešíme a nalezneme synchronní frekvence a poloosy synchronních drah.

## 6.2 Podmínky stability pro vzorek binárů

Podívejme se na konkrétní soustavy binárních asteroidů z databáze a spočtěme, pro které je splněna podmínka existence vnější synchronní dráhy. Když přepíšeme nerovnici (5.13) pomocí veličin z uvedené databáze binárů a označíme levou stranu nerovnice jako  $C$ , dostaneme podmínku

$$C \equiv \mathcal{G}^{2/3} \left( \frac{\rho}{24\pi} \right)^{2/3} \frac{10}{3} \frac{X^3 P_{\text{orb}}^{4/3}}{(1 + X^3)^{1/3} (1 + X^5)} > 1. \quad (6.1)$$

Názorně celou situaci ukazuje graf závislosti  $C$  na  $q$  ( $q = X^3$ ), který je na obrázku (6.1). Obě osy grafu jsou v logaritmickém měřítku, navíc je zde zakreslena funkce  $C = 1$ , aby bylo patrné, pro které soustavy je podmínka existence vnějšího synchronního stavu splněna. Z grafu vidíme, že vnější (stabilní) synchronní dráha existuje blízko těžiště pro soustavy s velkým poměrem hmotností  $q$ .



*Obrázek 6.1* Závislost  $C$  (viz nerov. 6.1) na poměru hmotností složek binární soustavy  $q$ . Data jsou převzata z databáze binárních asteroidů, viz Pravec a Harris (2007).

Naše tvrzení ověříme výpočtem poloosy synchronních drah pro tyto binární soustavy a výsledky výpočtu použijeme k další předpovědi týkající se plně synchronních binárních soustav.

### 6.3 Hledání synchronní frekvence

Nyní nás bude zajímat řešení rovnice (5.5), hledáme tedy synchronní frekvence  $\omega$  konkrétních binárních soustav. Ačkoliv analytické řešení této rovnice za určitých podmínek existuje, jeho tvar je velmi složitý (program *Mathematica*, Wolfram Research). Spokojíme se tedy s numerickým řešením.

Budeme zjednodušeně předpokládat, že jednotlivá tělesa v binární soustavě jsou homogenní koule se shodnou hustotou  $\rho$  a vyjádříme všechny veličiny v rovnici (5.5) pomocí snáze měřitelných veličin z databáze binárních asteroidů. Pak můžeme první člen této rovnice napsat jako

$$I_1 + I_2 = \frac{\pi}{60} \rho D_1^5 (1 + X^5), \quad (6.2)$$

kde  $D_1$  je průměr primárního tělesa a  $X = D_2/D_1$  je poměr průměrů sekundárního a primárního tělesa. Druhý člen se dá stejným způsobem upravit na

$$\mathcal{G}^{2/3} \frac{q M_1^{5/3}}{(1+q)^{1/3}} = \mathcal{G}^{2/3} \frac{X^3}{32(1+X^3)^{1/3}} \left( \frac{4\pi}{3} \rho \right)^{5/3} D_1^5. \quad (6.3)$$

Poslední člen rovnice je celkový moment hybnosti soustavy (se záporným znaménkem) a napíšeme ho jako

$$L = \frac{\pi^2}{30} \rho D_1^5 \left( \frac{1}{P_1} + \frac{X^5}{P_2} \right) + \frac{\mathcal{G}^{2/3}}{(24\pi^4)^{5/3}} \frac{X^3 \rho^{5/3} P_{\text{orb}}^{1/3}}{32(1+X^3)^{1/3}}, \quad (6.4)$$

kde  $P_1$ ,  $P_2$  jsou periody rotace primárního a sekundárního tělesa a  $P_{\text{orb}}$  jejich perioda oběhu kolem těžiště. Pozorování naznačují, že u většiny binárních soustav je  $P_2 = P_{\text{orb}}$ , ale pokud není tento údaj znám spolehlivě nebo se tato možnost nejeví aspoň pravděpodobná, není v následující analýze taková soustava zahrnuta.

Numerické řešení rovnice (5.5) bylo provedeno v programu *Octave* (Eaton, 2002). Ten obsahuje funkci `fsolve` na řešení nelineárních rovnic nebo jejich soustav. Tato funkce je postavena na subrutině `hybrd` z balíku `minpack` (More, 1980). Když pro danou soustavu spočteme synchronní frekvenci  $\omega$ , můžeme také určit velkou poloosu  $a_s$  synchronní dráhy (nebo drah) ze třetího Keplerova zákona

$$a_s = \left( \frac{\pi \mathcal{G} D_1^3 \rho (1 + X^3)}{6\omega^2} \right)^{1/3}. \quad (6.5)$$

Odhad nejistot vypočtených hodnot byl proveden následujícím způsobem. Nejdříve jsme vypočítali nejistoty koeficientů rovnice (5.5) pomocí zákona šíření chyb

z nejistot veličin z databáze binárních asteroidů (ty vyplývají z měření nebo se jedná o realistické odhady nejistot). Potom jsme řešili rovnici (5.5) pro vypočtené koeficienty a jejich maximálně vychýlené hodnoty. Odtud potom dostaneme odhad nejistoty vypočtených synchronních frekvencí a standardním šířením chyb také nejistotu poloosy synchronních drah. Nejistoty jsou uváděny v podobě faktoru (ozn.  $f$  s indexem příslušné veličiny), kterým po vynásobení, resp. dělení veličiny, určujeme její maximální, resp. minimální, hodnotu (v angličtině chyba „*factor of*“).

Tam, kde pro vychýlené koeficienty neexistovaly reálné kořeny rovnice (5.5) – viz kvalitativní rozbor této rovnice na začátku kapitoly – jsme našli jejich maximální výchylku, pro kterou ještě existoval jeden reálný kořen a tuto výchylku výsledné synchronní frekvence považovali za její nejistotu.

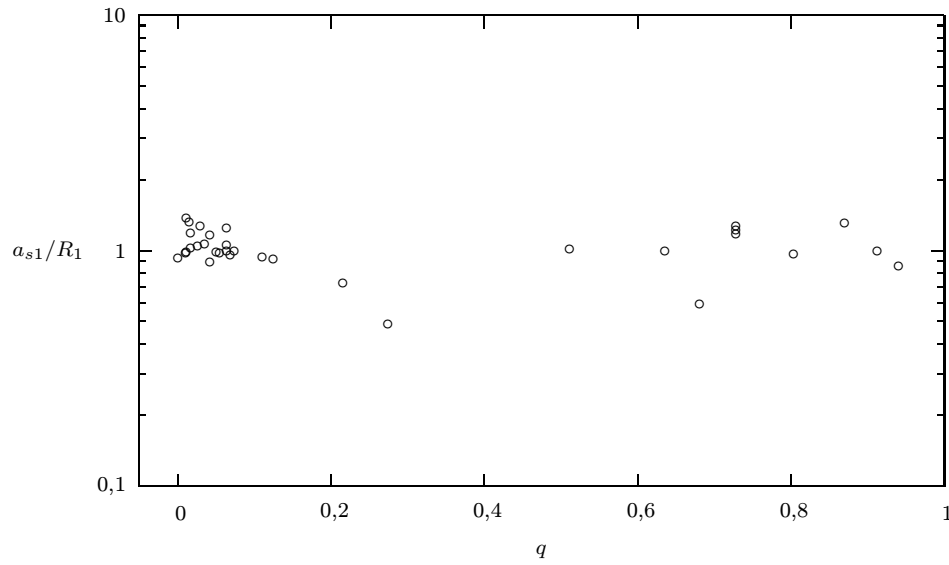
## 6.4 Porovnání s daty z databáze binárů

Přibližně pro třetinu soustav z databáze binárů (viz kapitola 6.1) byly spočteny koeficienty rovnice (5.5) a nalezeny její kořeny. Pak byly spočítány poloměry vnitřních a vnějších synchronních drah těchto binárních asteroidů. Všechny údaje jsou shrnuty v tabulce (A.1). Následující dva grafy na obrázcích (6.2) a (6.3) pak ukazují závislost poloměru vnitřní a vnější synchronní dráhy (vyjádřeného v poloměrech primárního tělesa) na poměru hmotností sekundáru a primáru.

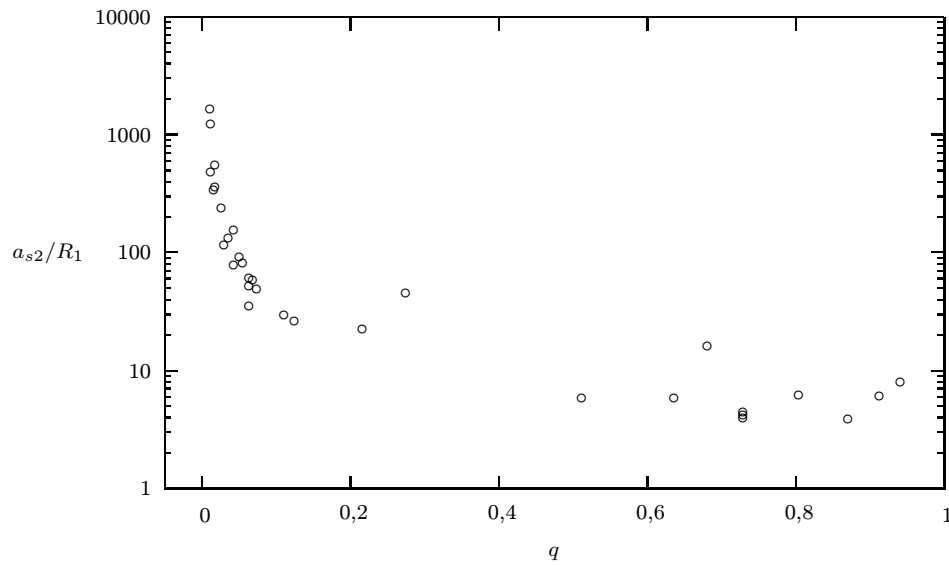
Z prvního grafu na obr. (6.2) je patrné, že vnitřní synchronní dráha, která je slapově nestabilní, má velmi malý poloměr (kolem jednoho poloměru primáru). Z dříve odvozených vztahů se zdá pravděpodobné, že soustavy, ve kterých sekundár obíhal pod vnitřní synchronní dráhou, během krátkého času zanikly. Vývoj poloměru dráhy vede k jejímu zmenšování a následně pravděpodobně ke kolizi obou těles.

Druhý graf na obr. (6.3) pak ukazuje, že soustavy s malým poměrem hmotností mají vnější, slapově stabilní, synchronní dráhu daleko od primárního tělesa. Podle úvah a vztahů odvozených výše v této kapitole a v kapitole (4) se bude velká poloosa sekundáru zvětšovat, sekundár se bude vzdalovat od vnitřní synchronní dráhy a blížit se k vnější synchronní dráze (Harris a Ward, 1982). Poloosa dráhy je ale pro takové soustavy velká, takže slapový vývoj do takového stavu může trvat mnohem delší dobu, než je typický věk binárního asteroidu (nebo dokonce stáří sluneční soustavy).

Jak roste poměr hmotností primáru a sekundáru, klesá velmi rychle poloměr vnější synchronní dráhy, takže pro soustavy těles se srovnatelnými hmotnostmi je v řádu jednotek maximálně desítek poloměrů primárního tělesa. Tyto soustavy mohou stabilního synchronního stavu dosáhnout za dobu kratší, než je jejich typický věk (viz kapitola 1).



*Obrázek 6.2* Rozložení poloměru vnitřní (slapově nestabilní) synchronní dráhy binárních soustav v závislosti na poměru hmotností  $q$  sekundárního a primárního tělesa. Svislá osa má logaritmické měřítko, data pochází z databáze binárních asteroidů.



*Obrázek 6.3* Rozložení poloměru vnější (stabilní) synchronní dráhy binárních soustav v závislosti na poměru hmotností  $q$  sekundárního a primárního tělesa. Svislá osa má logaritmické měřítko, data pochází z databáze binárních asteroidů.

Takové synchronní soustavy binárních asteroidů skutečně pozorujeme, jejich přehled je v tabulce (6.1). Mezi soustavami z databáze binárních asteroidů je deset takových soustav a z přehledu je patrné, že poměr jejich hmotností (zhruba platí  $q = X^3$ ) je větší než přibližně 0,5. To je konzistentní s předpovědí, která vyplývá z podmínky existence vnější synchronní dráhy v malé vzdálenosti od těžiště binární soustavy – viz nerovnice (5.13).

| označení       | $D_1$ (km) | $X$   | $P_s$ (h) | $f_{P_s}$ | $a_s/R_1$ | $f_{a_s}$ | $a/R_1$ | $s_a/R_1$ |
|----------------|------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|-----------|
| (90) Antiope   | 86,7       | 0,955 | 16,5051   | 1,7       | 3,9       | 1,9       | 3,94    | 0,0237    |
| (809) Lundia   | 7          | 0,9   | 15,4      | 2,3       | 4,2       | 2,8       | 4,29    | 1,29      |
| (854) Frostia  | 9          | 0,98  | 37,711    | 6,0       | 8,0       | 7,7       | 7,78    | 3,11      |
| (1089) Tama    | 9,4        | 0,9   | 16,444    | 2,2       | 4,4       | 2,6       | 4,47    | 0,804     |
| (1139) Atami   | 5          | 0,8   | 27,45     | 3,7       | 5,9       | 4,7       | 6       | 1,8       |
| (1313) Berna   | 10         | 0,97  | 25,464    | 3,8       | 6,1       | 4,8       | 6,2     | 2,48      |
| (2478) Tokai   | 8          | 0,86  | 25,891    | 3,3       | 5,9       | 4,1       | 6,25    | 1,88      |
| (4492) Debussy | 11         | 0,93  | 26,606    | 3,6       | 6,2       | 4,6       | 6,18    | 2,47      |
| (4951) Iwamoto | 4          | 0,88  | 118       | 15,6      | 16,3      | 20,5      | 16,5    | 4,95      |
| (69230) Hermes | 0,6        | 0,9   | 13,894    | 2,1       | 3,9       | 2,6       | 4       | 1,2       |

*Tabulka 6.1* Vlastnosti synchronních binárů z databáze binárních asteroidů. Synchronní periody  $P_s$  a jim odpovídající velikosti hlavních poloos  $a_s$  vyjádřených v poloměrech primárního tělesa  $R_1$  spolu s chybami (pro jejich popis viz text). Pro srovnání jsou uvedeny změřené nebo odhadnuté poloosy  $a$ .  $D_1$  je průměr primárního tělesa a  $X$  je poměr průměrů sekundáru a primáru.

Nejistoty určení synchronních frekvencí a odpovídajících poloos synchronních drah jsou velké hlavně proto, že u některých veličin použitých při výpočtu máme jen velmi přibližné odhady jejich hodnot. Jde především o hustotu těles, kterou zpravidla odhadujeme jen na faktor 1,5. Vypočtené a změřené nebo odhadnuté poloosy drah se pak liší pravděpodobně kvůli předpokladu kulových těles, který obvykle není splněn.

Za pozornost stojí ještě jedna věc, ačkoliv jsme se jí nakonec v této práci příliš nevěnovali. Jsou to časové škály slapového vývoje velké poloosy synchronních soustav. Podle vztahů z kapitoly (4) vychází pro většinu soustav přibližně od  $10^5$  do  $10^7$  let (Pravec, 2008). Nicméně dvě soustavy tvoří výjimku, (69230) Hermes a (4951) Iwamoto. Pro ně vychází tyto časy řádově  $10^9$ , resp.  $10^{11}$  let, tedy delší než je jejich předpokládaný věk a v případě asteroidu (4951) Iwamoto také stáří sluneční soustavy. Je tedy otázkou, jak se mohly do synchronního stavu dostat.

První možností je, že sekundární tělesa vznikla blízko synchronní dráhy. Je ale také možné, že vedle slapů působí v těchto soustavách další efekty, které mohou mít na jejich dynamiku větší vliv než slapy.

---

## Závěr

---

Tato diplomová práce se zaměřuje na slapové působení v soustavách binárních asteroidů. Jde o jeden z gravitačních efektů, které mohou vysvětlit současný dynamický stav těchto soustav, tedy poloosu jejich vzájemných drah, periodu oběhu těles kolem společného těžiště, rotační periody obou těles a některé další vlastnosti.

V první kapitole uvádíme stručnou charakteristiku binárních asteroidů. Dále se věnujeme podmínkám stability těchto soustav a jejich typickému věku, tedy době, po kterou binární asteroidy jako stabilní soustavy existují.

V druhé kapitole je popsán mechanismus vzniku slapů pro idealizovanou soustavu dvou těles, která obíhají kolem společného těžiště po kruhových drahách. Potom jsou popsány důsledky nedokonalé elasticity reálných těles, která jsou slapově deformována. Tento efekt vede k časovému vývoji rotačních period těles, a jestliže je soustava izolovaná, tak také ke změně velikosti poloosy vzájemné dráhy. Časové škály změn jsou popsány ve třetí a čtvrté kapitole.

Pátá kapitola se věnuje synchronnímu stavu v binární soustavě. Pro ten platí, že rotační periody obou těles jsou shodné s oběžnou dobou kolem jejich společného těžiště. Nejdříve je odvozena rovnice (5.5), ze které je možné společnou synchronní periodu vypočítat. V kvalitativním rozboru této rovnice je ukázáno, že v obecném případě existují synchronní periody dvě. Následně je odvozena podmínka, která určuje stabilitu synchronního stavu vůči slapovému působení.

V šesté kapitole jsou potom naše teoretické předpovědi porovnány s naměřenými daty, která vystihují dynamiku binárních asteroidů. Pro vybrané soustavy jsou spočteny obě synchronní periody a odpovídající poloosy synchronních drah. Odhady nejistot vychází ze změřených nebo odhadnutých nejistot veličin, použitých při vý-

počtu synchronních period. Protože některé z nich jsou zatíženy velkou nejistotou (zvláště hustota těles), je i nejistota výsledných hodnot velká.

Hlavní výsledky této práce ukazují grafy na obrázcích (6.2) a (6.3) v kapitole (6). První ukazuje závislost poloměru tzv. vnitřní synchronní dráhy na poměru hmotností sekundárního a primárního tělesa. Je z něj patrné, že tento poloměr je na poměru hmotností těles prakticky nezávislý a jeho hodnota je blízká poloměru primárního tělesa. To odpovídá situaci, kdy by se obě tělesa spojila v jediné a takto vzniklé těleso rotovalo s vypočtenou synchronní periodou. Ta pro většinu těles odpovídá kritické periodě rotace, při které ještě nedojde k jeho rozpadu. Podrobnější informace lze nalézt v Pravec a Harris (2007) nebo v Pravec a kol. (2007).

Druhý graf zobrazuje závislost poloměru tzv. vnější synchronní dráhy na poměru hmotností obou těles. Tentokrát vidíme silnou závislost poloměru dráhy na poměru hmotností, pro větší hodnoty poloměr velmi rychle klesá (svislá osa grafu má logaritmické měřítko). To je v souladu s podmínkou (5.13) z kapitoly (5), která pro danou soustavu určuje, jestli bude vnější, slapově stabilní, synchronní dráha blízko těžiště této soustavy.

Pokud je pro binární soustavu vnější synchronní dráha blízko jejího těžiště, může díky slapovému vývoji velké poloosy taková soustava dosáhnout stabilní synchronní dráhy ještě před svým rozpadem. Tak je možné vysvětlit pozorování synchronních binárních asteroidů, pro které jsou typické velké poměry hmotností sekundáru a primáru. Charakteristiky těchto soustav jsou shrnuty v tabulce (6.1) v kapitole (6).

Pro přesnější odhady časových škál, na kterých dochází k synchronizaci oběhu a rotace obou těles binárního asteroidu, by bylo užitečné změřit s větší přesností především jejich hustotu. Pozorování dalších binárních asteroidů by mohla přispět ke zhodnocení významu slapů v jejich dynamice. Jak je ale patrné ze závěrů této práce, slapové působení patří k důležitým efektům, které ovlivňují dynamické charakteristiky binárních asteroidů.

## Příloha A

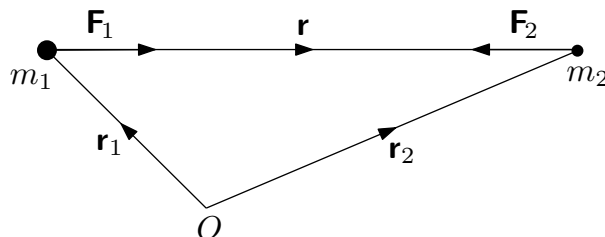
---

### Odvození orbitálního momentu hybnosti

---

*Pro popis soustavy binárního asteroidu budeme hojně používat pojem orbitální moment hybnosti (obvykle značený  $\mathbf{L}_{\text{orb}}$ ). Při jeho odvození budeme sledovat postup uvedený v Murray a Dermott (2000).*

Vyjdeme z úvah o problému dvou těles o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  a polohových vektorech  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  udávajících jejich polohu vůči počátku  $O$  spojenému s inerciální vztahnou soustavou. Situaci ilustruje obrázek (A.1).



*Obrázek A.1* Popis pohybu dvou těles, která na sebe gravitačně působí, v inerciální vztahné soustavě. V obrázku jsou vyznačeny polohové vektory těles i síly, kterými na sebe působí.

Relativní polohu  $m_2$  vůči  $m_1$  udává vektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Vzájemné gravitační síly a zrychlení jsou potom dány

$$\mathbf{F}_1 = +\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}_2 = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (\text{A.1})$$

Druhá časová derivace vektoru relativní polohy  $m_2$  vůči  $m_1$  je  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$  a když dosadíme z rovnice (A.1), dostaneme

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.2})$$

přičemž  $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ . Na naší cestě ke vztahu pro orbitální moment hybnosti se vyhneme řešení této rovnice, místo toho se soustředíme na odvození jedné pohybové konstanty. Když vynásobíme vektorově rovnici (A.2) vektorem  $\mathbf{r}$ , vyjde  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$  a po integraci

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}. \quad (\text{A.3})$$

Vektor  $\mathbf{h}$  je konstantní a kolmý k oběma vektorům,  $\mathbf{r}$  i  $\dot{\mathbf{r}}$ . Je označován jako *kinetický moment hybnosti*. Při dalších úvahách bude vhodné vyjádřit jeho velikost v polárních souřadnicích. Nejdříve tedy vyjádření vektorů  $\mathbf{r}$  a  $\dot{\mathbf{r}}$  v těchto souřadnicích

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad \text{a} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{A.4})$$

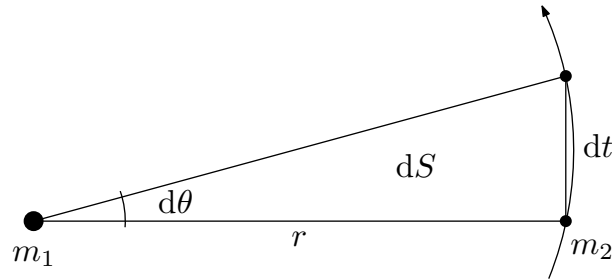
kde  $\hat{\mathbf{r}}$  a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  jsou jednotkové vektory polární souřadnicové soustavy. Po dosazení do rovnice (A.3) dostaneme  $\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$ , kde  $\hat{\mathbf{z}}$  je jednotkový vektor tvořící s  $\hat{\mathbf{r}}$  a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  bázi válcové soustavy. Pro velikost  $h$  platí

$$h = r^2\dot{\theta}. \quad (\text{A.5})$$

Nyní obrátíme svou pozornost k matematické podobě druhého Keplerova zákona

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}h, \quad (\text{A.6})$$

význam veličin v této rovnici je názorně vysvětlen na obrázku (A.2).



*Obrázek A.2* Ilustrace druhého Keplerova zákona. Plocha opsaná průvodičem tělesa  $m_2$  za čas  $dt$  je  $dS$ .

Integrací této rovnice dostaneme

$$S = \frac{1}{2} hT, \quad (\text{A.7})$$

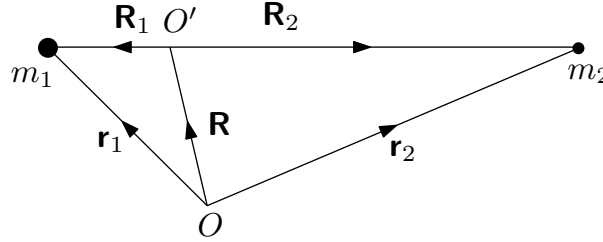
kde  $T$  je perioda oběhu tělesa  $m_2$  kolem tělesa  $m_1$ ,  $S$  je celková plocha elipsy a je rovna  $S = \pi ab = \pi a\sqrt{1-e^2}$ . Dále využijeme třetího Keplerova zákona, který je možné zapsat jako  $a^3 4\pi^2/T^2 = \mu$ , v anglosaské literatuře je však běžný poněkud odlišný zápis

$$n^2 a^3 = \mu, \quad (\text{A.8})$$

kde  $n = 2\pi/T$  označuje střední pohyb (v angličtině *mean motion*) a  $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ . Když dosadíme do rovnice (A.7), dostaneme pro  $h$  vztah

$$h = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = na^2 \sqrt{1-e^2}. \quad (\text{A.9})$$

Pro vyjádření celkového orbitálního momentu hybnosti soustavy přejdeme k popisu v *těžiškové soustavě*. Ta je schematicky znázorněna na obrázku (A.3).



*Obrázek A.3* Popis pohybu dvou těles v těžiškové vztažné soustavě. V obrázku jsou vyznačeny polohové vektory těles vztažené k těžišti soustavy i k původnímu počátku souřadnic a také polohový vektor těžiště.

Polohový vektor těžiště je dán rovnicí

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 - (m_1 + m_2) \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.10})$$

Napišeme-li polohové vektory obou těles  $m_1$  a  $m_2$  vůči těžišti jako

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \quad \text{a} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}, \quad (\text{A.11})$$

plyne z rovnice (A.10)

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = \mathbf{0}. \quad (\text{A.12})$$

Z této vektorové rovnice vyplývá, že  $\mathbf{R}_1$  má vždy opačný směr než  $\mathbf{R}_2$ , takže těžiště leží na spojnici  $m_1$  a  $m_2$ . Pro vzájemnou vzdálenost těchto těles můžeme psát  $r = R_1 + R_2$  a mezi vzdálenostmi těles od těžiště platí vztah

$$m_1 R_1 = m_2 R_2. \quad (\text{A.13})$$

Odtud potom vyplývá

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{a} \quad R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r. \quad (\text{A.14})$$

Pro relativní pohyb  $m_2$  vůči  $m_1$  jsme našli konstantu  $h = r^2 \dot{\theta}$ . Podobnou konstantu můžeme nalézt i pro jednotlivá tělesa v těžišťové soustavě, protože  $R_1$  a  $R_2$  jsou úměrné  $r$ , tedy

$$h_1 = R_1^2 \dot{\theta} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h \quad \text{a} \quad h_2 = R_2^2 \dot{\theta} = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h. \quad (\text{A.15})$$

Konečně z předchozích vztahů a z rovnice (A.9) je velikost orbitálního momentu hybnosti

$$L_{\text{orb}} = m_1 h_1 + m_2 h_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} n a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (\text{A.16})$$

| označení          | $D_1$ (km) | $X$   | $P_{s1}$ (h) | $f_{P_{s1}}$ | $P_{s2}$ (h) | $f_{P_{s2}}$ | $a_{s1}/R_1$ | $f_{a_{s1}}$ | $a_{s2}/R_1$ | $f_{a_{s1}}$ | $P_{orb}$ (h) | $a/R_1$ |
|-------------------|------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------|
| (90) Antiope      | 86,7       | 0,955 | 16,5051      | 1,7          | 3,22167      | 1,3          | 3,89         | 1,5          | 1,31         | 1,2          | 16,5051       | 3,94    |
| (809) Lundia      | 7          | 0,9   | 15,4         | 2,3          | 2,37926      | 1,4          | 4,22         | 1,9          | 1,22         | 1,5          | 15,4          | 4,29    |
| (854) Frostia     | 9          | 0,98  | 37,711       | 6,0          | 1,33956      | 1,7          | 7,97         | 4,3          | 0,86         | 1,6          | 37,711        | 7,78    |
| (1089) Tama       | 9,4        | 0,9   | 16,444       | 2,2          | 2,27749      | 1,3          | 4,41         | 1,8          | 1,18         | 1,3          | 16,444        | 4,47    |
| (1139) Atami      | 5          | 0,8   | 27,45        | 3,7          | 1,93621      | 1,6          | 5,93         | 2,8          | 1,01         | 1,5          | 27,45         | 6       |
| (1313) Berna      | 10         | 0,97  | 25,464       | 3,8          | 1,66661      | 1,6          | 6,10         | 2,9          | 0,99         | 1,6          | 25,464        | 6,2     |
| (1338) Duponta    | 8          | 0,23  | 24705,1      | 1,4          | 3,70941      | 1,1          | 483,92       | 1,4          | 1,37         | 1,3          | 17,57         | 4       |
| (1717) Arlon      | 9          | 0,6   | 224,42       | 12,9         | 1,31701      | 1,7          | 22,40        | 8,9          | 0,73         | 1,6          | 117           | 15,6    |
| (2044) Wirt       | 7          | 0,25  | 14292        | 1,4          | 3,50634      | 1,1          | 336,36       | 1,5          | 1,32         | 1,3          | 18,97         | 4       |
| (2478) Tokai      | 8          | 0,86  | 25,891       | 3,3          | 1,80339      | 1,5          | 5,86         | 2,6          | 0,99         | 1,5          | 25,891        | 6,25    |
| (3309) Brorfelde  | 5          | 0,26  | 29678,9      | 1,4          | 2,39619      | 1,1          | 547,84       | 1,4          | 1,02         | 1,3          | 18,48         | 4       |
| (4492) Debussy    | 11         | 0,93  | 26,606       | 3,6          | 1,6543       | 1,6          | 6,16         | 2,8          | 0,97         | 1,6          | 26,606        | 6,18    |
| (4951) Iwamoto    | 4          | 0,88  | 118          | 15,6         | 0,82692      | 1,8          | 16,25        | 10,8         | 0,60         | 1,6          | 118           | 16,5    |
| (5381) Sekhmet    | 1          | 0,3   | 8898,47      | 1,8          | 2,57195      | 1,1          | 237,67       | 1,6          | 1,04         | 1,2          | 12,5          | 3,08    |
| (5477) 1989 UH2   | 3          | 0,4   | 853,86       | 2,2          | 2,44591      | 1,2          | 52,21        | 1,8          | 1,05         | 1,3          | 24,42         | 4,93    |
| (6084) Bascom     | 7          | 0,37  | 1984,12      | 2,1          | 2,22101      | 1,2          | 91,21        | 1,8          | 0,98         | 1,4          | 43,5          | 7,14    |
| (7088) Ishtar     | 1,2        | 0,42  | 759,597      | 2,2          | 2,21188      | 1,2          | 48,44        | 1,9          | 0,99         | 1,4          | 20,63         | 4,5     |
| (9069) Hovland    | 3          | 0,4   | 468,877      | 2,8          | 3,14621      | 1,4          | 35,01        | 2,3          | 1,25         | 1,4          | 30,33         | 6       |
| (16635) 1993 QO   | 3,8        | 0,35  | 4465,21      | 1,7          | 1,93457      | 1,1          | 156,24       | 1,6          | 0,89         | 1,4          | 32,25         | 5,79    |
| (17260) 2000 JQ58 | 5          | 0,26  | 15844,3      | 1,4          | 2,99793      | 1,1          | 360,52       | 1,5          | 1,19         | 1,4          | 14,757        | 3,2     |
| (31345) 1998 PG   | 0,9        | 0,4   | 1080,44      | 1,9          | 2,22481      | 1,2          | 61,08        | 1,7          | 0,99         | 1,4          | 14,01         | 3,33    |
| (32039) 2000 JO23 | 1,8        | 0,65  | 644,798      | 10,1         | 0,70367      | 1,6          | 45,98        | 7,1          | 0,49         | 1,5          | 360           | 32,2    |
| (35107) 1991 VH   | 1,2        | 0,38  | 1709,95      | 2,0          | 2,16984      | 1,2          | 82,71        | 1,8          | 0,97         | 1,4          | 32,67         | 6       |
| (65803) Didymos   | 0,75       | 0,22  | 157221       | 1,5          | 2,21821      | 1,0          | 1661,00      | 1,4          | 0,97         | 1,2          | 11,91         | 3,04    |
| (66063) 1998 RO1  | 0,8        | 0,48  | 355,272      | 2,4          | 2,03412      | 1,3          | 29,52        | 2,0          | 0,94         | 1,3          | 14,54         | 3,5     |
| (66391) 1999 KW4  | 1,28       | 0,33  | 3518,13      | 1,3          | 2,52735      | 1,1          | 132,99       | 1,3          | 1,07         | 1,2          | 17,422        | 3,96    |
| (69230) Hermes    | 0,6        | 0,9   | 13,894       | 2,1          | 2,553        | 1,4          | 3,94         | 1,8          | 1,27         | 1,4          | 13,894        | 4       |
| (76818) 2000      | 2,8        | 0,35  | 1587,04      | 1,9          | 2,87074      | 1,1          | 78,40        | 1,7          | 1,16         | 1,2          | 14,127        | 3,43    |
| (85938) 1999 DJ4  | 0,35       | 0,5   | 299,504      | 2,9          | 1,94036      | 1,4          | 26,45        | 2,3          | 0,92         | 1,5          | 17,73         | 4       |
| (137170) 1999 HF1 | 3,5        | 0,23  | 100543       | 1,2          | 2,26409      | 1,0          | 1233,52      | 1,5          | 0,98         | 1,5          | 14,03         | 3,43    |
| 1996 FG3          | 1,5        | 0,31  | 2866,27      | 1,7          | 3,30873      | 1,1          | 115,78       | 1,5          | 1,27         | 1,3          | 16,14         | 3,73    |
| 2000 DP107        | 0,8        | 0,41  | 1026,95      | 2,4          | 2,1069       | 1,2          | 59,13        | 1,9          | 0,95         | 1,3          | 42,12         | 7,25    |
| 2002 CE26         | 3,45       | 0,09  | 8,7e+8       | 1,3          | 3,28952      | 1,0          | 380652,48    | 1,3          | 0,93         | 1,2          | 15,6          | 2,72    |

*Tabulka A.1* Synchronní periody  $P_{s1}$ , resp.  $P_{s2}$  a odpovídající velké poloosy  $a_{s1}$ , resp.  $a_{s2}$  vyjádřené v poloměrech primárního tělesa  $R_1$  spolu s chybami – viz text v kapitole (5). Poslední sloupec obsahuje orbitální periodu  $P_{orb}$  a odvozené nebo změřené velké poloosy  $a$  těchto soustav z databáze binárů.

---

## Literatura

---

- Burns, J. A., Safronov, V. S., 1973. *Asteroid nutation angles* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **165**, 403–411.
- Chauvineau, B., Farinella, P., Mignard, F., 1992. *Lifetime of binary asteroids versus gravitational encounters and collisions* In Lunar and Planetary Inst., Asteroids, Comets, Meteors 1991, 113–116.
- Chauvineau, B.; Mignard, F., 1990. *Stability of Binary Asteroids* Asteroids, comets, meteors III, Proceedings of a meeting (AMC 89), Astronomical Observatory of the Uppsala University.
- Counselman, C. C., III, 1973. *Outcomes of Tidal Evolution* Astrophysical Journal **180**, 307–316.
- Eaton J. W., 2002. *GNU Octave Manual* Network Theory Limited
- Goldreich, P., Soter, S., 1966. *Q in the Solar System*, Icarus **5**.
- Harris, A. W., Ward, W. R., 1982. *Dynamical constraints on the formation and evolution of planetary bodies* In Annual review of earth and planetary sciences **10**, 61–108.
- Love, A. E. H., 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* Dover, New York.
- Merline, W. J. *et al.*, 2002. *Asteroids Do Have Satellites* In Asteroids III, University of Arizona Press, Tucson, 289–312.

- More, J. J., Garbow, B. S., Hillstom, K. E., 1980. *User guide for MINPACK-1* Argonne National Lab., USA.
- Murray, C. D., Dermott, S. F., 2000. *Solar System Dynamics* Cambridge University Press
- Pravec, P., 2008: soukromé sdělení.
- Pravec, P. a kol., 2006. *Photometric survey of binary near-Earth asteroids* Icarus **181**, 63–93.
- Pravec, P., Harris, A. W., 2007. *Binary asteroid population* Icarus **190**, 250–259.
- Pravec, P., Harris, A. W.; Warner, B. D., 2007. *NEA rotations and binaries* Near Earth Objects, our Celestial Neighbors: Opportunity and Risk, Proceedings of IAU Symposium 236. Cambridge University Press, 167–176.
- Richardson, D. C., Leinhardt, Z. M., Melosh, H. J., Bottke, W. F., Jr., Asphaug, E., 2002. *Gravitational Aggregates: Evidence and Evolution* In Asteroids III, University of Arizona Press, Tucson, 501–515.
- Weidenschilling, S. J., 2002. *On the Origin of Binary Transneptunian Objects* Icarus **160**, 212–215.
- Weidenschilling, S. J., Paolicchi, P., Zappalà, V., 1989. *Do asteroids have satellites?* In Asteroids II, University of Arizona Press, Tucson, 643–658.
- Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 6.0, Champaign, IL (2007).

Tato práce byla vysázena pomocí programu T<sub>E</sub>X a balíku maker C<sub>S</sub>LaT<sub>E</sub>X.