

MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta



Diplomová práce

ASTROFYZIKA SUPERNOV

Petr Kurfürst

Brno 2010

Děkuji vedoucímu práce Mgr. Filipu Hrochovi, Ph.D. za věnovaný čas, za podnětné rady, připomínky a cenné odkazy na literaturu a zdroje. Za totéž děkuji rovněž konzultantu doc. Mgr. Jiřímu Krtičkovi, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Brně dne 14. 5. 2010

Petr Kurfürst

Abstrakt:

Hlavním cílem této práce je studium analytického řešení rané fáze světelných křivek supernov, jmenovitě pak supernov typu Ia. První část práce uvádí základní fakta a popisuje teoretická východiska. Na základě detailního fyzikálního odvození je nejprve vyjádřena obecná rovnice bolometrické světelné křivky, zahrnující rovněž účinky radioaktivního rozpadu syntetizovaných prvků, dále je pak zkonstruován model atmosfér supernov typu Ia pomocí aproximace absolutně černým tělesem, umožňující volbu parametrů, nezávislý na vzdálenosti. Následným porovnáním takto získaných teoretických světelných křivek, nejen bolometrických, ale i v různých barvách, se skutečně pozorovanými světelnými křivkami dvou vybraných supernov, lze odhadnout jejich základní charakteristiky, zejména počáteční množství syntetizovaného  $^{56}\text{Ni}$ , energii exploze, maximální celkový zářivý výkon, rychlost rozpínání, vzdálenost.

Klíčová slova: Supernovy, radioaktivní rozpad, teoretické modely, světelné křivky

Abstract:

The main task of this work is to study the early phase of the analytic light curves of supernovae, especially those of the type Ia. The first part sets out the basic facts and describes the theoretical background. On the basis of a detailed physical derivation is first expressed the general equation of bolometric light curve, which also includes the effects of radioactive decay of newly synthesized elements, then the distance independent model of atmospheres of the type Ia supernovae in blackbody approximation, allowing the choice of parameters, is constructed. The following comparison of obtained theoretical light curves, not only bolometric, but also in different photometric colors, with observed light curves of two selected supernovae enables to estimate their basic characteristics, namely initial amount of synthesized  $^{56}\text{Ni}$ , explosion energy, maximum luminosity, distance.

Keywords: Supernovae, radioactive decay, theoretical models, light curves

# Obsah

<b>1</b>	<b>Co jsou supernovy?</b>	<b>6</b>
1.1	Základní fakta a stručná historie jejich poznávání. . . . .	6
1.2	Závěrečné fáze hvězdného vývoje . . . . .	8
1.3	Současná klasifikace supernov . . . . .	11
1.4	Zbytky po supernovách, úloha supernov ve vývoji vesmíru .	15
<b>2</b>	<b>Stavba a vývoj hvězd</b>	<b>17</b>
2.1	Polytropní model . . . . .	17
2.2	Fotonový plyn . . . . .	22
2.3	Gravitační vazebná energie . . . . .	23
2.4	Elektronově degenerovaná látka . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Gravitační kolaps</b>	<b>32</b>
3.1	Látka při velmi vysokých hustotách . . . . .	32
3.2	Neutronové hvězdy . . . . .	34
3.3	Průchod rázové vlny . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Světelné křivky</b>	<b>40</b>
4.1	Světelné křivky supernov . . . . .	40
4.2	Časový průběh chladnutí . . . . .	43
4.3	Okrajové podmínky . . . . .	46
4.4	Prostorové řešení . . . . .	51
4.5	Zářivý výkon . . . . .	55
4.6	Radioaktivní ohřev . . . . .	58
4.7	Řešení pro malé počáteční poloměry . . . . .	60
4.8	Řešení pro libovolné počáteční poloměry . . . . .	64



<b>5 Světelné křivky supernov typu Ia</b>	<b>66</b>
5.1 Termonukleární supernovy . . . . .	66
5.2 Raná fáze světelné křivky . . . . .	69
5.3 Aproximace černým tělesem . . . . .	74
5.4 Supernova SN 1998bu . . . . .	81
5.5 Supernova SN 2002er . . . . .	87
5.6 Diskuse výsledků . . . . .	91
<b>6 Závěr</b>	<b>94</b>
<b>A Zdrojové soubory a data</b>	<b>95</b>
A.1 Zdrojové soubory pro numerické výpočty rovnic . . . . .	95
A.2 Fotometrická data SN 1998bu, SN 2002er . . . . .	104
<b>Literatura</b>	<b>107</b>

# Kapitola 1

## Co jsou supernovy?

### 1.1 Základní fakta a stručná historie jejich poznávání.

Některé hvězdy v pozdním stadiu svého vývoje po vyčerpání všech zdrojů nukleární energie projdou krátkou, bouřlivou, velmi významnou fází, označovanou jako supernova či „exploze supernovy“. Jedná se tedy o určitý velmi specifický typ proměnných hvězd, jejichž proměnnost je natolik dramatická, že se v průběhu jejich vývoje může odehrát pouze jednou. Poté totiž hvězda zcela zásadním způsobem změni svoje charakteristiky – její vnitřní část se v důsledku gravitačního zhroucení změni v mimořádně silně gravitačně vázaný objekt – neutronovou hvězdu (případně dokonce černou díru), přičemž obal hvězdy je díky explozi odvržen, nebo v některých případech dojde k její úplné dezintegraci a rozplynutí, takže přestane jako hvězda existovat.

Označení supernova bylo zavedeno okolo roku 1934 pro hvězdy [36], které – podobně jako v té době již poměrně dobře známé novy – náhle zvýší svoji jasnost. Amplituda jasnosti u supernov je však na rozdíl od nov o několik řádů větší (charakteristikou a popisem nov se v této práci nebudu zabývat). V naší Galaxii bylo minimálně čtyřikrát v historii prokazatelně zaznamenáno vzplanutí supernovy (byť ve své době o podstatě tohoto jevu neměl nikdo ani tušení). Tyto nepřehlédnutelné úkazy, alespoň v novověku, zásadně ovlivnily pohled na vesmír okolo nás. V roce 1006 exploduje supernova v souhvězdí Vlka, z čínských záznamů víme o supernově v souhvězdí Býka z roku 1054, jejímž pozůstatkem je známá a dobře prostudovaná Krabí mlhovina. V roce 1572 se objevuje supernova v Kassiopei; na základě svých vlastních pečlivých

pozorování dospěl Tycho Brahe k přesvědčení, že se tento objekt, nyní nazývaný Tychonova supernova, musí nacházet ve „sféře stálic“. Propracovaná a do té doby pohodlná středověká kosmologie, hlásající (mimo jiné) v této sféře naprostou nehybnost a neměnnost, se počala hroutit. 9. října 1604 se objevila supernova v Hadonoši, popsána Johannem Keplerem (Keplerova supernova). Tato supernova byla rovněž prvním vážným astronomickým pozorováním Galileovým, který se pokoušel změřit její paralaxu; poněvadž žádnou nenaměřil, opět předpokládal, že se musí nacházet mezi stálicemi.

Od té doby byla příroda na další galaktické, nebo alespoň velmi blízké supernovy skoupá. V roce 1885 Ernst Hartwig objevil supernovu v sousední galaxii M31. V současnosti je v Galaxii také známo několik dalších objektů – intenzivních zdrojů radiového záření, které jsou s největší pravděpodobností zbytky supernov (například Řasová mlhovina v souhvězdí Labutě) [36].

Zajímavým způsobem supernovy (nebo spíše fakt, že ve své době jejich podstata a odlišnost od nov ještě nebyly známy) zasáhly do úvah o velikosti naší Galaxie a povaze a vzdálenostech jiných „mlhovin“, které probíhaly (význačná v tomto směru byla zvláště tzv. *Velká debata*) ve 20. letech 20. století. Právě okolnost, že astronomové tehdy tyto jevy ve vzdálených „mlhovinách“ považovali za novy, bránila představě o jejich skutečných vzdálenostech, které jim tak nutně vycházely mnohem menší, takže byly většinou považovány za pouhé prachoplynné součásti naší Galaxie. Zásadní pochyby v tomto směru ukončilo až pozorování cefeid v těchto „hvězdných ostrovech“ (dnes bezpečně víme, že jde o vzdálené galaxie), provedené Edwinem Hubblem. Tím začalo být také zřejmé, že „novy“ v nich pozorované musí být nesrovnatelně jasnější, než ty galaktické.

V moderní době počet supernov, pozorovaných v cizích galaxiích neustále přibýval. Zřejmě nejvelkolepější úkaz tohoto druhu od doby Keplerovy nastal 23. února 1987, kdy explodoval modrý veleobr Sanduleak ve Velkém Magellanově mračnu. Zanedlouho se objevila další velmi jasná supernova SN1993J v blízké galaxii M81.

V současnosti se vzplanutí supernov v jiných galaxiích, a to i na velké vzdálenosti, pozorují zcela běžně v rámci celé řady výzkumných projektů. Z těchto pozorování pochází podstatná část poznatků nejen o tomto jevu, ale i o dalších širokých fyzikálních a kosmologických souvislostech. Zároveň se přirozeně objevuje celá řada nejasných, často nečekaných či překvapivých jevů, mnoho z nich je již do značné míry popsáno empiricky, jejich úplné nebo alespoň uspokojivé fyzikální vysvětlení by mělo být velkou výzvou pro budoucnost.

## 1.2 Závěrečné fáze hvězdného vývoje

Pomineme-li popis vývojových stadií velmi málo hmotných hvězd, tj. hvězd s počáteční hmotností nižší než zhruba  $0,5 M_{\odot}$ , tedy málo hmotných červených trpaslíků, případně dokonce hnědých trpaslíků, jejichž závěrečné fáze vývoje nemohou s procesem, vedoucím k supernově ani vzdáleně souviset, podívejme se pro úplnost nejprve krátce na vývoj hvězd s různými počátečními hmotnostmi:

- (a) Hvězdy relativně méně hmotné ( $M_{\text{init}} \approx 0,5 M_{\odot} - 11 M_{\odot}$ )

Tyto hvězdy procházejí během pobytu na hlavní posloupnosti „běžnými“ termojadernými etapami. Po vyčerpání téměř veškerého vodíku v jádře dojde k zapálení vodíku ve slupce okolo vyhořelého heliového jádra, představujícího „popel“ předchozího procesu. Dalším smršťováním a zahříváním dojde při teplotách zhruba  $10^8$  K k zapálení heliových reakcí v jádru, jejich produktem bude uhlík, případně kyslík. Posléze dojde i k zapálení helia ve slupce, stále rovněž hoří ještě výše položená vodíková slupka. U hvězd sluneční hmotnosti zde jejich termojaderný vývoj končí, poté co projdou stadiem asymptotické větve obrů, završené několika tepelnými pulzy a odhozením obalu – planetární mlhoviny, dojde k obnažení zbylého jádra – ultrafialového elektronově degenerovaného bílého trpaslíka s teplotou řádově  $10^5$  K a hmotností přibližně  $0,5 M_{\odot}$ , který se dále nijak nevyvíjí a navzdory velkým zásobám vnitřní energie postupně, byť velmi pomalu chladne [22].

U hvězd s vyšší hmotností může díky vyšší centrální teplotě dojít i k zapálení uhlíku a kyslíku a k syntéze dalších prvků (uvádím zde schematicky jen některé nejvýznamnější procesy, které zásadním způsobem formují další vývoj). Při spalování helia může dojít k reakci  $^{12}\text{C} \rightarrow ^{16}\text{O}$ , spalováním uhlíku, resp. kyslíku dále k reakcím např.  $^{16}\text{O} \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ ,  $^{20}\text{Ne} \rightarrow ^{24}\text{Mg}$  a další postupné syntéze relativně lehkých prvků až po  $^{32}\text{S}$ . Zvláště významná je reakce  $^{20}\text{Ne} \rightarrow ^{24}\text{Mg}$ , produkující volné neutrony, které potom díky tomu, že snadněji pronikají Coulombovskou bariérou těžkých jader, umožňují syntézu ještě těžších prvků.

Vznik prvků s vyšší hmotností, než  $N = 23$  umožňují další děje, z nichž nejpodstatnější [36] jsou tzv.:

- $\alpha$ -proces: Pomocí  $\alpha$  částic při teplotách  $10^9$  K syntéza prvků až do  $^{40}\text{Ca}$ . Podmínkou je přítomnost nevyhořelého helia v jádře hvězdy.

- $e$ -proces: Probíhá při teplotách  $4 \cdot 10^9$  K a vyšších a při poměru počtu  $p^+/n^0 \leq 300$ , syntetizuje prvky skupiny železa, např. Ni, Co, Fe, atd.

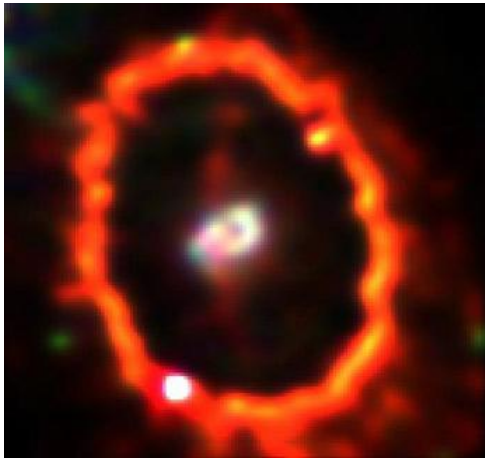
Nicméně hvězdy v uvedeném hmotnostním rozpětí  $0,5M_{\odot}$  až  $11M_{\odot}$  do doby, než je jejich obal dezintegrovan výše popsány tepelnými pulzy a následným odhozením planetární mlhoviny, tedy než je jejich jaderný vývoj v důsledku celkového úbytku hmotnosti zastaven, stihnou podle své hmotnosti dojít k syntéze určitých výše uvedených prvků, avšak nestačí projít kompletním jaderným vývojem, vrcholícím právě syntézou prvků skupiny železa a skončí tedy jako bílí trpaslíci různého chemického složení (namísto uhlíko-kyslíkového bílého trpaslíka, typického pro hvězdy sluneční hmotnosti může u hmotnějších hvězd převládat např. neon, hořčík, křemík, atd.). Gradient tlaku elektronově degenerované látky bílého trpaslíka je v tomto případě stále schopen odolat její tíze, nedochází tak k dalšímu gravitačnímu hroucení, jehož následkem by byla právě exploze supernovy.

(b) Hvězdy velmi hmotné ( $M_{\text{init}} > 11 M_{\odot}$ )

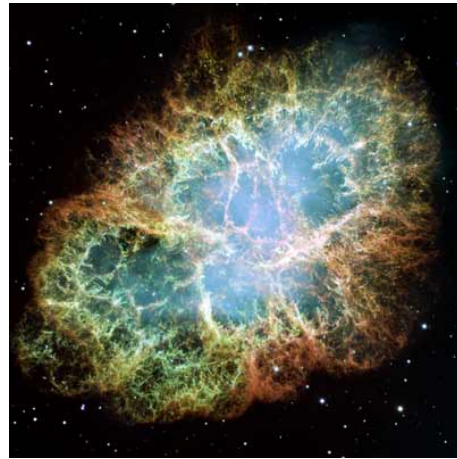
Jaderné pochody v nitru takto hmotných hvězd jsou rychlejší, než případná dezintegrace jejich obalu, jádro hvězdy tak „dokáže“ dojít až do stadia syntézy prvků skupiny železa, jejichž celková hmotnost se díky intenzivně probíhajícímu  $e$ -procesu rychle zvětšuje. Tyto prvky jsou nejstabilnější, jejich jádra nejpevněji vázána, pro vznik těžšího jádra než  $N > 56$  je energie spotřebována, nikoli vyzářena. Nitra hvězd, ve kterých se začne vytvářet železný „popel“ za krátkou dobu přestanou produkovat další jadernou energii. Vyhasnutí exotermických reakcí v železném jádře hvězdy, již bez možnosti nastartovat syntézu ještě těžších prvků, má za následek další rychlé smršťování hvězdy. Podrobnosti celého procesu jsou z hlediska jaderné fyziky komplikovanější, do hry vstupuje např. fotodisociace železa intenzivním zářením při takto vysokých teplotách, tím je ovšem jádro hvězdy díky spotřebování značné energie na pohlcení fotonů opět ochlazen, což ještě usnadní gravitační kontrakci, tyto detaily jdou ovšem už nad rámec této práce [1] [36]. Jakmile hmotnost železného jádra překročí tzv. *Chandrasekharovu mez*, tj. hmotnost přibližně  $M_{\text{Ch}} \approx 1,44 M_{\odot}$  (podrobný popis a fyzikální vysvětlení této meze – viz kapitola 2.4), nedokáže již gradient tlaku elektronově degenerované látky odolat její tíze, nastane tak další gravitační smršťování, probíhající rychlostí volného pádu (v příslušném gravitačním potenciálu). To je zastaveno až v okamžiku, kdy dojde k degeneraci neutronového plynu při hustotách, blízcích se  $10^{17} - 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$ , tedy ke vzniku

extrémně husté neutronové hvězdy (viz kapitoly 1.3, 3.2). Ve výjimečných případech, kdy počáteční hmotnost hvězdy převyší  $50 M_{\odot}$ , nemusí gravitačnímu smršťování odolat ani neutronově degenerovaná látka, hvězda tak kolabuje „nade všechny meze“, tj. vytvoří černou díru [22].

Rychlý gravitační kolaps hvězdy do stadia neutronové hvězdy, případně černé díry je provázen procesy, které jsou označovány jako exploze supernovy. Není to ovšem jediná varianta, další principiálně odlišnou možností je termonukleární exploze uhlíko-kyslíkového bílého trpaslíka, nacházejícího se v podvojném systému. Následkem přetoku látky z druhé složky těsné dvojhvězdy pozvolna narůstá jeho hmotnost, jeho rozměry se zmenšují (viz kapitola 2.4), díky takto uvolněné potenciální energii se jeho nitro zahřívá, až po překročení jisté kritické meze dojde k překotné termojaderné explozi, která velmi rychle zachvátí celou hvězdu. Ta je kompletně dezintegrována a celý její objem, nikoli jen obal, expanduje do prostoru. Právě podrobnější rozbor světelných křivek tohoto typu supernov (označovaných také jako typ Ia – viz následující kapitola 1.3) bude podstatnou součástí této diplomové práce.



Obrázek 1.1: Supernova SN 1987A ve Velkém Magellanově mračnu, její „světelné echo“. Snímek HST z roku 1997. Zdroj [42].



Obrázek 1.2: Krabí mlhovina v souhvězdí Býka – pozůstatek po supernově z roku 1054. Snímek HST. Zdroj [42].

## 1.3 Současná klasifikace supernov

Rozdělení či klasifikace supernov do jednotlivých typů není zcela jednoznačné. Podle průběhu světelné křivky a vzhledu spekter se supernovy dělí na dva základní typy I a II. Supernovy typu I jsou jasnější než typ II, jejich světelná křivka se vyznačuje strmějším poklesem jasnosti, rovněž v jejich spektrech nenacházíme čáry vodíku. Ukazuje se, že toto základní dělení by vypadalo poněkud jinak, pokud bychom na ně nazírali z hlediska fyzikální podstaty celého děje, tj. podle charakteru zárodečné hvězdy a příčiny její destrukce, s tím také souvisí místa jejich výskytu, resp. typy galaxií, ve kterých je nacházíme. Typ I bylo tedy nutné dále rozdělit na tři hlavní podtypy. Kromě toho existují další, jemnější dělení podle detailního průběhu světelných křivek, apod.

Vzhledem k tomu, že v předchozí kapitole 1.2 jsem se podrobněji zabýval procesem gravitačního kolapsu jader velmi hmotných hvězd, uvedu (bez ohledu na číselné pořadí) nejprve typ, který právě souvisí s tímto jevem:

- Supernovy typu II

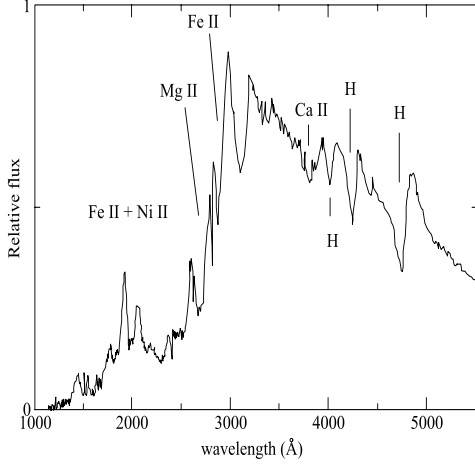
jsou gravitačně kolabující velmi hmotné hvězdy, proč se tyto hvězdy v určitém okamžiku zhroutí a co tomu předchází je v hrubých rysech popsáno v předchozí kapitole 1.2. V okamžiku kolapsu, který následuje poté, co hmotnost jádra, složeného z nahromaděných prvků skupiny železa (izotopy s nukleonovým číslem  $N = 56$ , významný je obzvláště  $^{56}\text{Ni}$ , který bývá počátečním prvkem radioaktivních rozpadových řad, přispívajících rozhodujícím způsobem k celkové energii supernovy po průchodu maximem jasnosti) přestoupí *Chandrasekharovu mez* ( $M_{\text{Ch}} \approx 1,44 M_{\odot}$ ), dochází k volnému pádu vnějších vrstev tohoto jádra, jehož rychlost dosahuje několika desítek tisíc  $\text{km s}^{-1}$ . Uvolnění obrovského množství potenciální energie vede k prudkému zahřátí látky, následuje fotodisociace jader železa gama zářením nejprve na heliová jádra a neutrony, posléze na jednotlivé volné protony a neutrony [1] [36].

Se vzrůstající hustotou (v rozmezí hustot  $10^{10}$  až  $10^{14} \text{ kg m}^{-3}$ ) dojde k tzv. *neutronizaci*, kdy se elektrony spojují s protony do neutronů při současné produkci elektronového neutrina. Tento proces lze také popsat jako inverzní  $\beta$ -rozpad

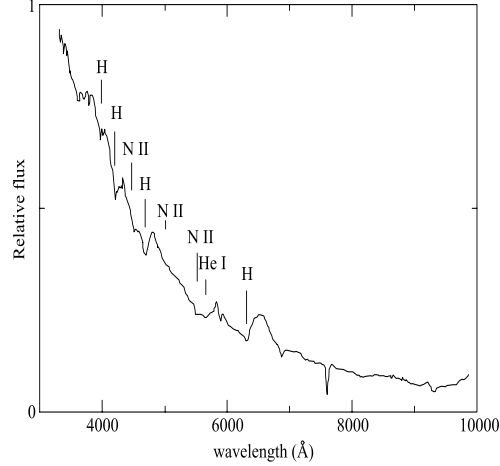
$$p^+ + e^- = n^0 + \nu, \quad (1.1)$$

ke kterému dochází jen při mimořádně vysokých rychlostech elektronů, vstupujících do reakce ( $v_{e^-} \geq 0,92c$ ), kdy je energeticky výhodnější spojit ele-

ktrony a protony do neutronů, které zaujímají ve fázovém prostoru mnohem menší objem než lehké elektrony. Během neutronizace je látka dobře stlačitelná, protože klesá počet volných elektronů v jednotce hmotnosti; právě relativistické elektrony byly hlavním zdrojem tlaku v materiálu [22].



Obrázek 1.3: Příklad spektra supernovy typu II v blízké UV a optické oblasti (SN 1999em). Zdroj [6].



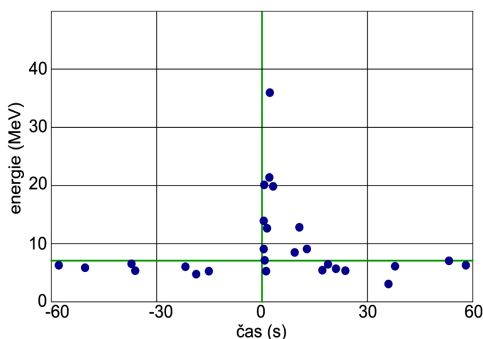
Obrázek 1.4: Příklad spektra supernovy typu II v optické a blízké IR oblasti (SN 1999em). Zdroj [6].

Poněvadž neutrino téměř neinteragují s okolní hmotou, projde jejich naprostá většina vyššími vrstvami zcela volně. Vzhledem k extrémním hustotám a obrovskému počtu neutrin jsou však některá z nich přece jen zachycena, takže látce předají svoji hybnost a energii, tím ji zahřejí a akcelerují, vnější vrstvy supernovy tak začínají expandovat.

Kolaps se zastaví (ve většině případů) až díky tlaku *neutronově degenerované látky* při hustotách vyšších než  $10^{16} \text{ kg m}^{-3}$ , což je analogie elektronově degenerované látky (viz kapitola 2.4), vznikající ovšem díky mnohem kratším de Broglieho vlnovým délkám neutronů při mnohem vyšších hustotách. Svoji roli zde nejspíš také sehrávají krátkodosahové odpuzivé síly mezi neutrony, zprostředkované silnou interakcí. Náhlé zabrždění gravitačního kolapsu (v řádu milisekund) způsobí mohutnou „odraženou“ rázovou vlnu, která se šíří hvězdou směrem k povrchu. Tato rázová vlna, šířící se v daném prostředí nadzvukovou rychlostí, přispívá rozhodujícím způsobem k zahřátí a urychlení látky obálky – iniciuje tak vlastní explozi supernovy [22]. Její ohromná energie zároveň „dotuje“ syntézu jader prvků těžších než železo.



V poslední době se ukazuje, že skutečnost je pravděpodobně ještě mnohem složitější: hlavním „motorem“ exploze nejspíš nemusí být ani tato rázová vlna, která naopak díky tomu, že disociuje jádra prvků ve vyšších vrstvách, svoji energii ztrácí, ale obrovská počáteční teplota nově vytvořeného neutronového jádra ( $10^{11}$  K i vyšší), aby se neutronové jádro nevypařilo, musí být většina termální energie přeměněna v další enormní produkci neutrin (*neutrino-cooling*). Při tom vznikají páry neutrino-antineutrino všech vůní, na rozdíl od inverzního  $\beta$ -rozpadu při neutronizaci, kdy vznikají pouze neutrina elektronová. Celkové množství těchto termálních neutrin také mnohonásobně převyšuje počet neutrin elektronových. Oba tyto mechanismy produkce neutrin nicméně přemění drtivou většinu gravitační potenciální energie kolapsu do zhruba desetisekundové neutrinové exploze s celkovou energií  $10^{46}$  J (což je nejméně o dva až tři řády více, než energie všech ostatních procesů, které u tohoto typu supernov proběhnou). Část těchto termálních neutrin (odpovídající zhruba energii  $10^{44}$  J) interaguje s látkou, nacházející se ve zhuštěném čele nyní již zpomalené rázové vlny a předá jí opět svoji hybnost a energii, což je teprve hlavní příčina exploze [3][12].



Obrázek 1.5: Schematický záznam zachytu 11-ti neutrin ze supernovy SN 1987A v japonském detektoru Superkamiokande II. Zdroj [47].

Neutrina, pocházející ze supernovy SN 1987A byla skutečně detekována především v japonském zařízení Superkamiokande (ale i jinde), dodatečnou prohlídkou záznamu se zjistilo, že tato neutrina byla zaregistrována zhruba o 3 hodiny dříve, než optické fotony [47]; jde tak mimo jiné o nepřímé potvrzení výše posaného scénáře, kdy neutrina musí mít před fotony viditelného světla „náskok“, protože pochází z hlubších vrstev hvězdy.

Předpokládaná nenulová klidová hmotnost neutrin musí být tedy velmi malá, pokud je fotony ani za tak poměrně dlouhou dobu nedoženou.

Pozůstatkem supernov typu II by tedy měla být rychle rotující neutronová hvězda, tzv. *pulzar* (viz kapitola 3.2). V mnoha případech takové pulzary skutečně pozorujeme, někdy ne, názory na důvod se liší [22].

Další jemnější dělení tohoto typu supernov, související s tvarem světelné křivky, bude podrobněji rozvedeno v kapitole 4.1.

- Supernovy typu Ib, Ic

Právě tyto supernovy patří kvůli podobě svých spekter, neobsahujících čáry vodíku a vyšší jasnosti k typu I, ačkoli se v podstatě nejspíš jedná opět o velmi hmotné gravitačně kolabující hvězdy. Stejně jako supernovy typu II je nacházíme výhradně ve spirálních či nepravidelných galaxiích, tedy v místech, kde vznikají i v současnosti nové hvězdy. Jejich spektra se vzájemně liší především výskytem silných čar helia u supernov typu Ib, které u typu Ic nepozorujeme. Od následujícího typu Ia se spektra obou odlišují absencí velmi intenzivní čáry Si II na vlnové délce 615 nm [36].

V současnosti převládá názor, že vzplanutí supernov typu Ib a zřejmě také Ic je spojeno s komplikovaným vývojem těsných dvojhvězd, případně velmi hmotných Wolfových-Rayetových hvězd [22].

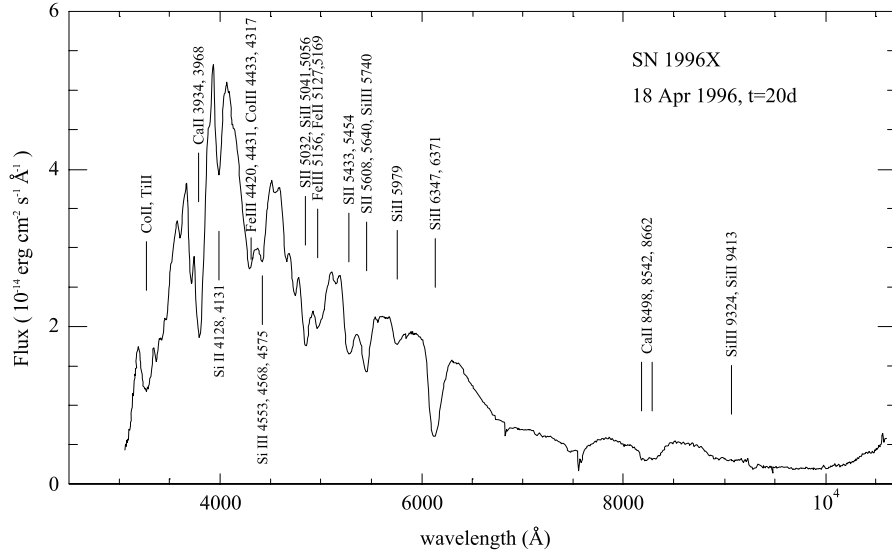
- Supernovy typu Ia

Tyto supernovy se vyznačují (v oboru elektromagnetického záření) největší jasností, v maximu dosahují absolutní hvězdné velikosti až  $-19,6$  mag. Fyzikální podstata děje související s tímto typem supernov se od předchozích typů liší a byla už v principu popsána v závěru předchozí kapitoly 1.2. Všeobecně se soudí, že se jedná o termonukleárně explodujícího uhlíko-kyslíkového bílého trpaslíka, který je součástí těsné dvojhvězdy. Vyskytují se ve všech typech galaxií a oblastech, i v takových kde tvorba hvězd již dávno ustala; je tedy zřejmé, že původci tohoto typu supernov musí být méně hmotné hvězdy [22].

Světelné křivky těchto supernov jsou téměř totožné, lze je proto považovat za tzv. *standardní svíčky* pro určování vzdáleností ve vesmíru (tato věc je přirozeně při podrobnějším pohledu poněkud komplikovanější, větší detaily jsou uvedeny v kapitolách 5.1, 5.2). V jejich spektrech převládají čáry kovů a těžších prvků (viz následující obrázek 1.6), nevyskytují se čáry vodíku. Obdobně jako u ostatních typů supernov je jejich světelná křivka po průchodu maximem určována rozpadem radioaktivních prvků, především  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ , posléze  $^{56}\text{Co}$  na již stabilní  $^{56}\text{Fe}$  [2] [21]. Právě tyto supernovy nejspíš nejvíce obohacují mezihvězdnou látku nejen o prvky skupiny železa, ale i o uhlík a kyslík.

Jak již bylo uvedeno, předčí tyto supernovy ostatní typy svým zářivým výkonem, z hlediska celkové energie jsou však supernovy typu II mnohem vydatnější. Výrazná většina této energie je ovšem odnášena formou obtížně detekovatelných (jejich celkový počet se odhaduje až na  $10^{57}$ ) neutrin.

Právě tento typ supernov, respektive rozbor jejich světelných křivek včetně aplikace určitých teoretických fyzikálních předpokladů na dvou konkrétních případech, bude podstatnou částí této práce (viz kapitoly 5.3 – 5.4).



Obrázek 1.6: Příklad spektra supernovy typu I, patrné jsou pouze čáry kovů (SN 1996X). Opraveno o extinkci. Zdroj [33].

## 1.4 Zbytky po supernovách, úloha supernov ve vývoji vesmíru

Ačkoli tato oblast již přímo s tématem diplomové práce nesouvisí, přesto se jí také alespoň krátce dotknou.

Pozůstatky po supernovách mohou být jak neutronové hvězdy (případně černé díry), tak rozsáhlé mlhovinné útvary. Právě tyto, často snadno pozorovatelné svítící objekty – svítící mlhoviny, bývají označovány termínem *zbytek supernovy* (v anglické literatuře se obvykle užívá zkratka SNR – *supernova remnant*). Jak již bylo uvedeno, typickým příkladem je Krabí mlhovina – pozůstatek supernovy z roku 1054, která je dobře pozorovatelná i v malém dalekohledu, u jejího amorfního, přibližně eliptického tvaru je měřitelné dokonce i rozpínání: úhlový poloměr velké poloosy se zvětšuje přibližně o 0,22 úhlové vteřiny za rok, rovněž byl identifikován rychle rotující

pulzar. Tyto mlhovinné zbytky supernov jsou ovšem jevy pouze dočasné, pozorovatelné jen několik tisíc let. Společně s pulzary se ale jedná o jedinečný soubor objektů s velmi zajímavými astrofyzikálními vlastnostmi [36].

Zajímavým jevem je také tzv. světelné echo (viz obrázek 1.1), kdy záření supernovy osvětluje mezihvězdnou a okolohvězdnou látku s určitým zpožděním, takže k nám přichází opravdu jako „ozvěna“. Takové echo bylo pozorováno například u supernov SN 1987A, SN 1993J, SN 1998bu a mohou být pomocí něj měřeny vzdálenosti.

Supernovy hrají mimořádnou roli i z hlediska dalšího chemického vývoje galaxií a vesmíru vůbec. Prostřednictvím dalekosáhlých expanzí svých obálek díky srážkám s mezihvězdnou látkou a rázovým vlnám, vznikajícím v místě střetu, tuto látku zahušťují a vedou tak ke vzniku nových hvězd, zároveň obohacují mezihvězdnou látku o prvky těžší než helium, včetně prvků těžších než železo, vznikajících během exploze. Tyto prvky tak mohou ve stále větší a větší míře obsahovat nejen mladší generace nových hvězd, ale i ostatní tělesa, včetně planet pozemského typu.

Je také možné, že supernovy svým kosmickým zářením mohly přispět ke vzniku pozemského života. Na druhou stranu by expoze velmi blízké (zhruba do nějakých třiceti světelných let) supernovy mohla být pro život na Zemi nebezpečná, v uvedené vzdálenosti se ale žádná taková potenciální hvězda nenalézá.

Se supernovami také velmi pravděpodobně souvisejí mimořádně energetické (v elektromagnetickém oboru vůbec nejzářivější události v celém vesmíru) a zdaleka ne zcela objasněné gama záblesky (gamma-ray bursts). Tyto záblesky mohou mít délku trvání od několika milisekund až po desítky minut, typické trvají několik sekund, maximálně desítky sekund a uvolní se během nich takové množství energie, jaké Slunce vyžáří za celou dobu své existence (téměř  $10^{46}$  J). Přebývá názor, že většina pozorovaných záblesků záření gama vzniká při explozi velmi masivních hvězd, gravitačně kolabujících přímo do podoby černé díry (tzv. *hypernov*). Určitá část těchto záblesků (tzv. krátké záblesky) může vznikat při splynutí dvojice neutronových hvězd (pokud je podvojný systém tvořen dvěma neutronovými hvězdami, mohou tyto postupně díky vyzařování gravitačních vln ztrácet energii orbitálního pohybu a postupně se k sobě přibližovat).

Zdroje těchto záblesků se nacházejí ve velmi vzdálených galaxiích, taková událost v Galaxii by zřejmě vedla k zániku života na Zemi [22].

# Kapitola 2

## Stavba a vývoj hvězd

### 2.1 Polytropní model

Jak naznačuje název této kapitoly, bude nejprve vhodné popsat a objasnit fyzikální principy některých jevů, které s tématem supernov tak či onak souvisejí, nebo bude jejich detailní rozbor nezbytný pro pochopení dalšího textu. Buď se jedná o problémy obecnější fyzikální (nebo astrofyzikální) povahy, jako je například vnitřní stavba hvězd, popis fotonového plynu, gravitační vazebné energie, nebo půjde o podrobnější pohled na to, co explozi supernovy předchází, tedy popis vztahů v elektronově degenerovaném plynu, včetně odvození Chandrasekharovy meze. Příští kapitola se potom krátce dotkne některých základních dějů, doprovázejících gravitační kolaps a toho, co v případě explozí supernov (s výjimkou typu Ia) většinou vzniká, tedy neutronových hvězd. Začnu tedy vnitřní stavbou hvězd [1].

Předpokládejme, že v obecném vztahu mezi tlakem  $P$  a hustotou  $\rho$

$$P = K\rho^\gamma, \quad (2.1)$$

lze  $\gamma$  zapsat jako  $1 + 1/n$ , kde  $K$ ,  $n$  jsou konstanty, potom lze psát

$$P = K\rho^{1+1/n}. \quad (2.2)$$

Také hustotu můžeme zavést jako  $\rho = \lambda\theta^n$ , kde  $\lambda$  je škálovací konstanta. Zvolíme-li ve středu hvězdy  $\theta = 1$ , potom  $\lambda = \rho_c$ , kde  $\rho_c$  je centrální hustota. Pokud porovnáme rovnici hydrostatické rovnováhy  $dP/dr = -\rho g$ , tedy  $dP/dr = -\rho GM/r^2$  a rovnici distribuce hmotnosti ve sféricky symetrickém tělese  $dM/dr = 4\pi r^2\rho$ , potom musí platit  $dP/dr = -(4\pi G\rho/r^2) \int \rho r^2 dr$

a lze tedy psát

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi r^2 G \rho. \quad (2.3)$$

Chceme-li dostat bezrozměrnou verzi této rovnice, zvolíme  $\xi = r/a$ , kde

$$a = \sqrt{\frac{(n+1)K\lambda^{(1-n)/n}}{4\pi G}}. \quad (2.4)$$

(Fyzikální rozměr konstanty  $K$  je  $[\text{m}^{2+3/n} \text{kg}^{-1/n} \text{s}^{-2}]$ , rozměr konstanty  $\lambda$  je  $[\text{kg m}^{-3}]$ , rozměr veličiny  $a$  je tedy  $[\text{m}]$ , takže veličina  $\xi$  je bezrozměrná). Z rovnice (2.3) tak dostáváme

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \theta^n \quad (2.5)$$

nebo, po úpravě

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0, \quad (2.6)$$

což je obvyklá forma Laneovy-Emdenovy rovnice, nazývané také polytropická diferenciální rovnice (L-E rovnice).

Jaké jsou okrajové podmínky? V centru ( $\xi = 0$ ) bude vhodné stanovit  $\theta = 1$ . Z rovnice (2.5) vyplývá, že v centru musí platit Neumannova okrajová podmínka  $d\theta/d\xi = 0$ . Na povrchu ( $\xi = \xi_R$ ) hustota i tlak jdou k nule, takže platí Dirichletova okrajová podmínka  $\theta_R = 0$ .

V případě sférické symetrie lze hmotnost uvnitř poloměru  $r$  zapsat

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr. \quad (2.7)$$

Z rovnice (2.5) vyplývá, že  $\xi^2 d\theta/d\xi = -\int \xi^2 \theta^n d\xi$ , rovnicí (2.7) pomocí již uvedeného zapíšeme jako  $M_r = -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 d\theta/d\xi$ , tedy

$$M = -4\pi a^3 \rho_c \left[ \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi_R}. \quad (2.8)$$

Průměrnou hustotu hvězdy o poloměru  $R$  můžeme zapsat  $\langle \rho \rangle = 3M/4\pi R^3$ , tedy  $\langle \rho \rangle = 3M/4\pi a^3 \xi_R^3$ , pomocí rovnice (2.8) lze zapsat poměr průměrné a centrální hustoty vztahem

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\rho_c} = - \left[ \frac{3}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi_R}. \quad (2.9)$$

Z rovnice (2.2) můžeme dále stanovit centrální tlak  $P_c$ , kdy  $\lambda = \rho_c$ ,  $\theta = 1$ , výraz pro konstantu  $K$  odvodíme z rovnice (2.4), kde  $a = R/\xi_r$ ,  $\lambda = \rho_c$ , takže  $P_c = 4\pi GR^2 \rho_c^2 / (n+1) \xi_R^2$ . Po dalším dosazení za  $\rho_c$  z rovnice (2.9), kdy  $\langle \rho \rangle = 3M/4\pi R^3$ , dostáváme vztah

$$P_c = \frac{GM^2}{R^4} \left[ 4\pi(n+1) \left| \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi_R}^2 \right]^{-1}. \quad (2.10)$$

Porovnáme-li takto poměr centrálního tlaku a hustoty, dostáváme

$$\frac{P_c}{\rho_c} = - \frac{GM}{R} \left[ (n+1) \xi_R \left| \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi_R} \right]^{-1}. \quad (2.11)$$

Další užitečný vztah obdržíme, použijeme-li průměrnou hustotu  $\langle \rho \rangle$  k eliminaci poloměru hvězdy  $R$

$$\frac{P_c}{\rho_c} = -GM^{2/3} \left( \frac{4\pi \langle \rho \rangle}{3\rho_c} \right)^{1/3} \left[ (n+1) \xi_R \left| \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi_R} \right]^{-1} \rho_c^{1/3}. \quad (2.12)$$

Způsob zápisu tohoto vztahu je dán požadavkem získat v první závorce na pravé straně vyčíslitelný podíl  $\langle \rho \rangle / \rho_c$  podle vztahu (2.9).

Analytická řešení L-E rovnice existují pro  $n = 0, 1, 5$  [14], pro ostatní  $n$  je rovnice řešitelná numericky. Obzvlášť významné je řešení pro index  $n = 3$  (Eddingtonův standardní model – viz popis v [1], str. 552), které představuje limitní případ pro vnitřní stavbu hmotných bílých trpaslíků, ve kterých je tlak vytvářen relativistickým degenerovaným elektronovým plynem ( $P \sim \rho^{4/3}$ ).

Pro  $n = 0$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) získáme řešení přímou integrací se zahrnutím uvedených okrajových podmínek

$$\theta = 1 - \frac{\xi^2}{6}. \quad (2.13)$$

Pro  $n = 1$  ( $\gamma = 2$ ) řešíme sférickou Besselovu diferenciální rovnici, výsledný tvar bude

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (2.14)$$

Pro  $n = 5$  ( $\gamma = 1, 2$ ) dostáváme prostřednictvím tzv. Emdenovy transformace, kde  $\theta = Ax^\omega z$ ,  $\omega = 2/(n - 1)$

$$\theta = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\xi^2}. \quad (2.15)$$

Následující tabulka 2.1, vytvořená na základě numerického výpočtu (viz zdrojový soubor č. 1, kapitola A.1 v příloze A), shrnuje některé hodnoty bezrozměrných proměnných pro různé indexy  $n$ . První sloupec vyjadřuje poloměr  $\xi_R$ , třetí sloupec souřadnici hmotnosti  $[\xi^2 d\theta/d\xi]_{\xi_R}$  – viz rovnici (2.8), čtvrtý sloupec podíl  $\langle \rho \rangle / \rho_c$ . Z tabulky je vidět, že v případě indexu  $n = 0$  je v celé hvězdě konstantní hustota, v případě indexu  $n = 5$  má hvězda nekonečně velký poloměr a nekonečně velkou centrální hustotu, avšak konečnou hmotnost. Důležité hodnoty dostáváme pro index  $n = 1, 5$ , což odpovídá  $\gamma = 5/3$  a pro index  $n = 3$ , což odpovídá  $\gamma = 4/3$ .

Tabulka 2.1: Polytropní řešení

$n$	$\xi_R$	$[d\theta/d\xi]_{\xi_R}$	$[\xi^2 d\theta/d\xi]_{\xi_R}$	$\langle \rho \rangle / \rho_c$
0	2,4494897	-0,8164966	-4,8989793	1,0000000
1	3,1415927	-0,3183099	-3,1415927	0,3039636
1,5	3,6537537	-0,2033013	-2,7140551	0,1669253
2	4,3528746	-0,1272487	-2,4110460	0,0876997
3	6,8968486	-0,0424298	-2,0182360	0,0184562
4	14,971546	-0,0080181	-1,7972298	0,0016067
5	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	-1,7320507	$\rightarrow 0$

Za předpokladu, že hvězda je tvořena materiálem, který se chová jako ideální plyn a srážky částic tohoto plynu jsou hlavním zdrojem tlaku ve hvězdě, lze následně stanovit i její centrální teplotu  $T_c$ . Vyjdeme-li ze vztahu [22]

$$P = \rho \mathcal{A} T / \mu_s, \quad (2.16)$$

kde  $\mathcal{A}$  je  $k/u$ , tedy podíl Boltzmannovy konstanty a atomové hmotnostní jednotky, je to tedy  $10^3 \mathcal{R} \cdot \text{mol kg}^{-1}$ , kde  $\mathcal{R}$  je univerzální plynová konstanta



s rozměrem  $\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$  a  $\mu_s$  je bezrozměrná veličina, tzv. střední hmotnost, připadající na jednu částici (nazývaná též střední molekulová hmotnost). Z toho vyplývá, že  $T/\mu_s = P/\mathcal{A}\rho$ , tedy  $T_c/\mu_s = P_c/\mathcal{A}\rho_c$ , takže pro index polytropy  $n = 3$  z rovnice (2.11) dostaneme

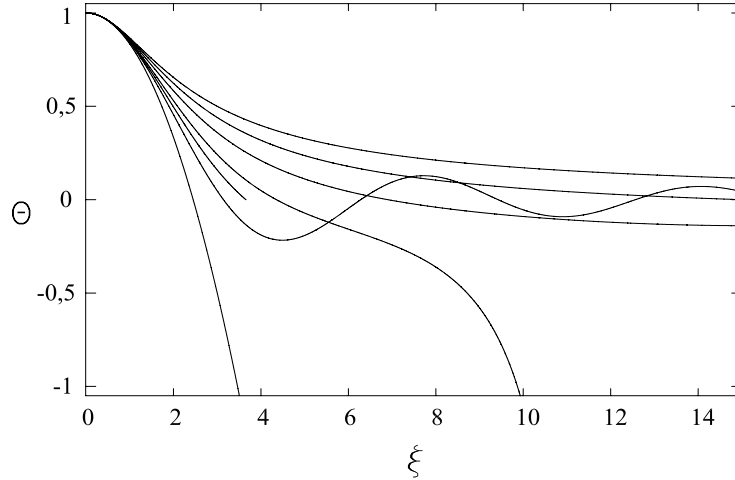
$$\frac{T_c}{\mu_s} \approx 1,956 \cdot 10^7 \text{ K} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \left( \frac{R_\odot}{R} \right), \quad (2.17)$$

nebo z rovnice (2.12) obdobným způsobem, opět pro index polytropy  $n = 3$ , dostáváme

$$\frac{T_c}{\mu_s} \approx 4,617 \cdot 10^5 \text{ K} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3} \rho_c^{1/3}, \quad (2.18)$$

kde hustota je v jednotkách  $\text{kg m}^{-3}$ .

Následuje graf jednotlivých řešení Laneovy-Emdenovy rovnice pro indexy polytropy (postupně zleva)  $n = 0, 1, 3/2, 2, 3, 4, 5$ . Řešení pro index polytropy  $n = 1$  má tvar Besselovy funkce. Řešení pro index  $3/2$  nemůže nabývat záporných hodnot (poněvadž se v rovnici vyskytuje výraz  $\theta^{3/2}$ ):



Obrázek 2.1: Graf řešení Laneovy-Emdenovy rovnice pro indexy polytropy (postupně zleva):  $n = 0, 1, 3/2, 2, 3, 4, 5$ . Numerické řešení – viz zdrojový soubor č. 1 v kapitole A.1 v příloze A.

## 2.2 Fotonový plyn

Exploze supernov jsou pravděpodobně nejzářivějšími událostmi, které pozorujeme. Po několik týdnů je jejich jas srovnatelný s jasnem celé mateřské galaxie. Celkový zářivý výkon „průměrné“ supernovy  $L_{(SN)} \approx 10^{10} L_{\odot}$ , její efektivní teplota je řádově srovnatelná se sluneční, její povrch musí být tedy řádově  $10^{10}$  krát větší. Pozorovaná efektivní teplota supernov v okolí maxima jasnosti je vyšší než sluneční, předpokládáme sférickou supernovu s dvojnásobnou efektivní teplotou, potom její poloměr musí být  $R_{SN} \approx 2,5 \cdot 10^4 R_{\odot}$ , tj.  $2 \cdot 10^{13}$  m, což je asi dvacetkrát více, než u největších známých hvězd (červených veleobrů), což znamená, že supernovy *musí mít velký vyzařující povrch*; zároveň s nízkou hustotou látky (viz graf – obrázek 5.4) a ohromným množstvím emitovaných fotonů a radiačním tlakem představují tedy spíš fotonové či „světelné“ koule [1]. Z toho důvodu bude třeba se blíže podívat i na vlastnosti fotonového plynu [35]:

Pokud chceme stanovit tlak  $P$  a vnitřní energii  $U$  fotonového plynu, musíme nejprve stanovit entropii takového plynu. Při výpočtu entropie vyjdem ze vztahu (v následujícím textu této kapitoly Boltzmannova konstanta  $k_B = 1$ ) pro Landauův potenciál  $\Omega = -T \ln Z$  a protože se jedná o ideální kvantový (bosonový) plyn, můžeme popsat stav celého systému pomocí stavu jedné částice

$$\Omega = T \sum_i \ln (1 - e^{-(\epsilon_i - \mu)/T}). \quad (2.19)$$

$\sum_i$  lze vyjádřit jako  $\int \rho(\epsilon) d\epsilon$ , kde  $\rho(\epsilon) d\epsilon$  je počet jednočásticových stavů s energií v intervalu  $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ . Vztah (2.19) bude mít tvar

$$\Omega = T \int \rho(\epsilon) \ln (1 - e^{-(\epsilon - \mu)/T}) d\epsilon. \quad (2.20)$$

Dále je výhodné přejít do impulsového prostoru, resp. do prostoru vlnových vektorů, kde počet stavů v objemu  $d^3\mathbf{k} \rightarrow (L/\pi)^3 d^3\mathbf{k}$ , tento výraz je třeba ještě vydělit počtem oktantů (sférický systém), tedy  $d^3\mathbf{k} \rightarrow (L/2\pi)^3 d^3\mathbf{k}$ . Fotony představují ultrarelativistický bosonový plyn, kde  $\epsilon = \hbar kc$ , se dvěma polarizačními stavy, jehož chemický potenciál  $\mu = 0$ , takže

$$\rho(\epsilon) d\epsilon = 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 4\pi k^2 \frac{dk}{d\epsilon} d\epsilon = 8\pi \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \epsilon^2 d\epsilon. \quad (2.21)$$

Výraz (2.20) bude mít potom tvar:

$$\Omega = \frac{8\pi VT}{(2\pi\hbar c)^3} \int_0^\infty \epsilon^2 \ln(1 - e^{-\epsilon/T}) d\epsilon. \quad (2.22)$$

Provedeme substituci  $y = \epsilon/T$ , po integraci dostáváme

$$\Omega = -\frac{8\pi VT^4}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy. \quad (2.23)$$

Hodnota bezrozměrného integrálu je  $\Gamma(4)\zeta(4) = \pi^4/15$ , Stefanova-Boltzmanova konstanta  $\sigma = \pi^2/60 \hbar^3 c^2$ . Pokud zavedeme další obvyklou konstantu  $a = 4\sigma/c$ , potom  $a = \pi^2/15 (\hbar c)^3$ . Rovnici (2.23) potom lze psát

$$\Omega = -\frac{aT^4 V}{3}. \quad (2.24)$$

Entropie  $S = -(\partial\Omega/\partial T)_{V,\mu}$ , v tomto případě

$$S = \frac{4aT^3 V}{3}. \quad (2.25)$$

Vnitřní energie  $U = \Omega + TS + \mu N$ , tedy v případě fotonového plynu bude

$$U = aT^4 V. \quad (2.26)$$

Tlak  $P = -(\partial\Omega/\partial V)_{T,\mu}$ , radiační tlak tedy bude

$$P = \frac{aT^4}{3}. \quad (2.27)$$

## 2.3 Gravitační vazebná energie

Celková vnitřní energie hvězdy je

$$U = \int_0^M E dm, \quad (2.28)$$

kde  $E$  je vnitřní energie na jednotku hmotnosti [1]. Gravitační potenciální energie (budeme ji nyní značit  $E_{\text{gr}}$ ) je rovna celkové práci, vykonané gravitačním polem, nutné k soustředění všech hmotných částic z nekonečna do hvězdy:

$$E_{\text{gr}} = \int_{\infty}^r F_g(r) dr = - \int_{\infty}^r \int_0^M G \frac{M'(r) dM'(r)}{r^2} dr = \int_0^M \frac{GM'(r)}{r} dM'(r). \quad (2.29)$$

Lze zvolit i opačnou znaménkovou konvenci se zápornou gravitační potenciální energií a místo gravitační vazebné energie  $B$  (tato terminologie je převzata z [1]) zavést celkovou energii  $E_{\text{tot}} = -B$  (viz například [19]), došli bychom ale pochopitelně k přesně stejným výsledkům.

Gravitační vazebná energie  $B$  (která je rovna záporné celkové energii) je potom

$$B = E_{\text{gr}} - U. \quad (2.30)$$

V této znaménkové konvenci, kde  $E_{\text{gr}}$  je kladná, musí být znaménko před  $U$  záporné. Dosadíme-li do rovnice (2.29) upravenou rovnici hydrostatické rovnováhy

$$\frac{GM}{r} = -\frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr}, \quad (2.31)$$

dostaneme  $E_{\text{gr}} = -4\pi \int_0^R r^3 (dP/dr) dr$ , což se po integraci per partes a substituci  $4\pi r^2 \rho dr = dm$  rovná výrazu

$$E_{\text{gr}} = -4\pi r^3 P \Big|_0^R + \int_0^M \frac{3P}{\rho} dm. \quad (2.32)$$

Gravitační vazebná energie hvězdy v hydrostatické rovnováze se potom podle rovnic (2.28) a (2.30) musí rovnat

$$B = -4\pi r^3 P \Big|_0^R + \int_0^M \left( \frac{3P}{\rho} - E \right) dm. \quad (2.33)$$

V další úvaze spojíme vztah pro gravitační potenciální energii  $E_{\text{gr}}$  s rovnicí polytropy. Můžeme vyjít opět z upravené rovnice hydrostatické rovnováhy

ve tvaru  $dP/\rho = -(GM/r^2) dr$ , kde  $r = a\xi$  a za  $M$  dosadit rovnici (2.8) pro obecnou souřadnici  $\xi$ . Dostáváme tedy výraz  $dP/\rho = 4\pi Ga^2 \rho_c d\theta$ , po dosazení za  $a$  z rovnice (2.4) bude  $dP/\rho = (n+1)K\rho_c^{1/n} d\theta$ . Vzhledem k rovnici (2.2), kde  $\rho = \rho_c \theta^n$  se výraz  $K\rho_c^{1/n} d\theta$  rovná  $d(P/\rho)$ . Můžeme tedy psát

$$d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{1}{(n+1)} \frac{dP}{\rho}. \quad (2.34)$$

Nyní budeme integrovat per partes rovnici (2.32). Pomocí jednoduchých úprav dostaneme  $[4\pi r^3 P]_0^R - 3 \int d(P/\rho)M(r) - [4\pi r^3 P]_0^R$ , tedy

$$E_{\text{gr}} = -3 \int d\left(\frac{P}{\rho}\right) M(r). \quad (2.35)$$

Za výraz  $d(P/\rho)$  dosadíme z rovnice (2.34) a za  $dP/\rho$  opět z rovnice hydrostatické rovnováhy, dostáváme

$$E_{\text{gr}} = \frac{3}{n+1} \int_0^R \frac{GM^2(r)}{r^2} dr. \quad (2.36)$$

Tento integrál musíme opět integrovat per partes

$$E_{\text{gr}} = \frac{3}{n+1} \left\{ \left[ -\frac{GM^2(r)}{r} \right]_0^R + 2 \int_0^M \frac{GM'(r)}{r} dM'(r) \right\}, \quad (2.37)$$

a protože integrál na pravé straně se podle rovnice (2.29) rovná  $E_{\text{gr}}$ , lze rovnici (2.37) dále upravit do tvaru

$$E_{\text{gr}} = \frac{3}{n+1} \left( 2E_{\text{gr}} - \frac{GM^2}{R} \right) = \frac{3}{5-n} \left( \frac{GM^2}{R} \right). \quad (2.38)$$

To také odpovídá běžně uváděnému výrazu pro celkovou gravitační potenciální energii sférického tělesa s rovnoměrnou hustotou (kde  $n = 0$ ), získanému integrací soustředných kulových ploch,  $E_{\text{gr}} = (3/5) GM^2/R$ .

Rovnici (2.32) lze ještě upravit, pokud předpokládáme hydrostatickou rovnováhu, kde tlak na povrchu  $P_R$  se blíží k nule, potom člen  $[4\pi r^3 P]_0^R \rightarrow 0$ , takže rovnice (2.32) se zjednoduší do podoby

$$E_{\text{gr}} = \int_0^M \frac{3P}{\rho} dm. \quad (2.39)$$

Uvažujeme-li navíc adiabatické řešení ([1], str. 555), kdy  $PV^\gamma = \text{konst.}$ ,  $dE = -P dV$  (v rámci zde zavedené konvence  $E$  představuje vnitřní energii na jednotku hmotnosti,  $V$  představuje objem na jednotku hmotnosti), po úpravě  $E = -PV^\gamma \int dV/V^\gamma$ , tedy  $E = PV/(\gamma - 1)$ , kde  $\gamma = \text{konst.}$ , potom rovnici (2.39) lze psát

$$E_{\text{gr}} = \int_0^M 3(\gamma - 1)E dm = 3(\gamma - 1)U, \quad (2.40)$$

která pro  $\gamma = 5/3$  nabývá jednoduché formy viriálové věty. Gravitační vazebná energie  $B$  potom bude

$$B = \left(\gamma - \frac{4}{3}\right) \frac{E_{\text{gr}}}{\gamma - 1} \quad (2.41)$$

a po zahrnutí rovnice (2.38)

$$B = 3 \left(\gamma - \frac{4}{3}\right) \frac{GM^2/R}{(5-n)(\gamma-1)} = \frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (2.42)$$

Pro tuto chvíli zanedbáme excitační, ionizační energii a energii jaderných vazeb, takže celková energie hvězdy je právě  $-B$ . Stabilita hvězdy závisí na znaménku faktoru  $(\gamma - 4/3)$ . Uvažujme adiabatickou (takže  $\gamma$  je skutečně konstanta) kontrakci hvězdy o velikosti  $\delta R$ . Změna gravitační vazebné energie potom (z rovnice (2.42)) je

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial R} \delta R = -\frac{B}{R} \delta R. \quad (2.43)$$

Pro  $\gamma = 4/3$  zůstává gravitační vazebná energie beze změny bez ohledu na změnu poloměru  $\delta R$ , to znamená, že taková hvězda se nachází na hranici stability.

V případě, že  $\gamma > 4/3$ , kontrakce vyžaduje zvýšení gravitační vazebné energie (neboli snížení celkové energie – například jejím vyzářením). Pro  $\gamma < 4/3$  je hvězda dynamicky nestabilní, při kontrakci dochází naopak ke snižování gravitační vazebné energie a k nárůstu kinetické energie kontrakce, kolaps akceleruje (gravitační časová škála).

Z rovnice (2.42) je také zřejmé, že pro ideální jednoatomový plyn, u nějž  $\gamma = 5/3$ , se zanedbatelným radiačním tlakem, bude

$$B = \frac{E_{\text{gr}}}{2}, \quad (2.44)$$

což je opět klasická podoba viriálové věty. Pro směs takového ideálního plynu a záření (viz [14], kapitola 7) se rovnice (2.42) redukuje na

$$B = \frac{\beta}{2} E_{\text{gr}}, \quad (2.45)$$

kde  $\beta = P_g/P$ , tedy  $1 - \beta = P_r/P$ . V případě výrazně převažujícího tlaku záření, tj. fotonového plynu, kde  $\beta \rightarrow 0$ , se taková hvězda opět nachází na hranici stability.

Totéž vyplývá přímo z rovnic (2.42), (2.44); v případě nerelativistického degenerovaného plynu, kde  $n = 3/2$  musí být [19]

$$E_{\text{gr}} = \frac{6}{7} \frac{GM^2}{R}, \quad B = \frac{3}{7} \frac{GM^2}{R}, \quad (2.46)$$

v ultrarelativistickém případě  $n = 3$ ,  $\gamma = 4/3$ , tedy

$$E_{\text{gr}} = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R}, \quad B = 0. \quad (2.47)$$

## 2.4 Elektronově degenerovaná látka

Elektronově degenerovaná látka hraje při popisu událostí, které předcházejí explozím supernov zásadní úlohu, poněvadž jednak je rozhodující „stavební substancí“ bílých trpaslíků, jednak je to právě tlak relativistického degenerovaného elektronového plynu, který do určité fáze brání další gravitační kontrakci.

Při popisu vlastností elektronově degenerovaného plynu můžeme uvažovat elektronový plyn při absolutní nulové teplotě (kompletně degenerovaný Fermiho plyn). Toto přiblížení lze provést, protože stavové rovnice degenerované látky jsou zcela odlišné od stavových rovnic klasického ideálního, tj. relativně řídkého a horkého plynu. Tlak v degenerovaném plynu totiž významně závisí na jeho hustotě a jen zcela nepatrně na teplotě, takže její vliv lze aspoň v prvním přiblížení pominout a považovat ji za nulovou [22].

Počet kvantových stavů elektronu, nacházejícího se v objemu  $V$  s velikostí hybnosti v intervalu od  $p$  do  $p + dp$  bude ( $g = 2$  – spinová degenerace) [19]

$$2 \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} = V \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.48)$$

Elektrony díky Pauliho vylučovacímu principu obsazují všechny stavy hybnosti od nuly po limitní  $p = p_F$ , tzv. poloměr *Fermiho koule* (Fermi sphere)

v prostoru hybností. Celkový počet elektronů, nacházejících se v těchto stavech je tedy

$$N = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.49)$$

Fermiho hybnost tedy bude

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} (N/V)^{1/3} \hbar. \quad (2.50)$$

Pro další přesné výpočty bychom museli numericky řešit rovnice, zahrnující relativistický výraz pro energii

$$\epsilon = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}. \quad (2.51)$$

Můžeme však analyticky názorným způsobem řešit případy nerelativistického a ultrarelativistického elektronově degenerovaného plynu [19]:

- **Nerelativistický elektronově degenerovaný plyn (NR)**

Pokud  $p_F \ll m_0 c$ , potom platí

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = (3\pi^2)^{2/3} (N/V)^{2/3} \hbar^2 / 2m_e. \quad (2.52)$$

Celkovou energii plynu dostaneme vynásobením počtu stavů (rovnice (2.48)) energií jednoho stavu  $p^2/2m$  a integrací přes všechny hybnosti

$$E = \frac{V}{2m_e \pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{V p_F^5}{10m_e \pi^2 \hbar^3} \quad (2.53)$$

nebo po dosazení výrazu z rovnice (2.50) lze psát

$$E = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10 m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} N. \quad (2.54)$$

Dále, protože pro ideální fermionický (i bosonický) kvantový plyn obecně platí  $E = 3/2 PV$  (podrobnosti zde nebudu odvozovat – viz například [19]), lze napsat, že pro tlak nerelativistických degenerovaných elektronů platí

$$P_{(NR)} = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{5m_e} n_e^{5/3}, \quad (2.55)$$



kde  $n_e$  je koncentrace elektronů (počet elektronů v objemu  $V$ ),  $m_e$  je hmotnost elektronu. Koncentrace elektronů má rozměr hustoty, jejíž mocnina  $5/3$  odpovídá faktoru  $\gamma$ , vidíme tedy, proč pro nerelativistický plyn  $\gamma = 5/3$ , tedy  $n = 3/2$ .

V úvodu této kapitoly jsme postulovali, že  $T \rightarrow 0$  nebo alespoň  $T$  je velmi malá oproti limitní energii  $\epsilon_F$ , teplotu  $T_F \approx \epsilon_F$  nazýváme teplotou degenerace, při jejím překročení dojde k jejímu „sejmutí“.

Z rovnice (2.2) také vyplývá, že  $P = K\rho^\gamma$ . Pro hustotu částic  $i$ -tého druhu platí

$$\rho_i = m_i n_i = \mu_i m_H n_i, \quad (2.56)$$

kde  $m_i$  je objemová hmotnost  $i$ -tého druhu částic,  $n_i$  jejich koncentrace,  $\mu_i$  je jejich *molekulová hmotnost*,  $m_H$  je hmotnost atomu vodíku. V případě nerelativistického elektronově degenerovaného plynu můžeme potom velikost konstanty  $K$  z rovnice (2.2) napsat jako

$$K = P/\rho^\gamma = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{5m_e} \frac{1}{(\mu_e m_H)^{5/3}}. \quad (2.57)$$

Po dosazení tohoto výrazu a příslušné hodnoty  $n$  ( $\mu_e = 2$ , převrácená hodnota  $1/\mu_e$  udává průměrný počet elektronů na baryon, což pro prvky těžší než vodík můžeme aproximovat jako  $1/2$ ) do rovnice (2.4) obdržíme [15]

$$a = \text{konst} \cdot \rho_c^{-1/6} \approx 10^8 \cdot \rho_c^{-1/6}. \quad (2.58)$$

Poněvadž jsme definovali  $a = R/\xi_R$ , můžeme z rovnice (2.8) a tabulky 2.1 odvodit vztah mezi hmotností a poloměrem hvězdy, složené z takového nerelativistického elektronově degenerovaného plynu

$$M = \text{konst} \cdot R^{-3} \approx 1,7 \cdot 10^{51} R^{-3}. \quad (2.59)$$

Pokud do tohoto vztahu dosadíme velikost poloměru  $R$  v řádu  $10^4$  km, dostaneme skutečně přibližně sluneční hmotnost.

Toto je velmi důležitý výsledek, který říká, že hmotnost takové hvězdy je nepřímo úměrná jejímu objemu, tedy, že se vzrůstající hmotností její velikost klesá. Tím klesá také prostor pro volné elektrony, takže díky Heisenbergovu principu neurčitosti musí vzrůstat jejich hybnost. V případě, že se jejich rychlost začne blížit rychlosti světla, musíme použít ultrarelativistickou aproximaci.

• Ultrarelativistický elektronově degenerovaný plyn (UR)

Pokud  $p_F \gg m_0c$ , dostáváme [19]

$$\epsilon = cp, \quad \epsilon_F = cp_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3}. \quad (2.60)$$

Obdobným postupem, jako ve vztazích (2.53) až (2.55) s tím, že pro ultrarelativistický fermionický (i bozonický) plyn obecně platí  $E = 3PV$ , dostaneme vztahy pro energii a tlak ultrarelativistických degenerovaných elektronů

$$E = \frac{3}{4} (3\pi^2)^{1/3} \hbar c N \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3}, \quad (2.61)$$

$$P_{(UR)} = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{4/3} = \frac{\hbar c}{4} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3}. \quad (2.62)$$

Pro ultrarelativistický elektronově degenerovaný plyn platí  $\gamma = 4/3$ , tedy  $n = 3$ .

Opět zcela obdobně jako v nerelativistickém případě:

$$K = P/\rho^\gamma = \frac{\hbar c}{4} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{(\mu_e m_H)^{4/3}}. \quad (2.63)$$

V tomto případě obdržíme

$$a = \text{konst} \cdot \rho_c^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.64)$$

Z rovnice (2.8) a tabulky 2.1 pro ultrarelativistický elektronově degenerovaný plyn vyplývá

$$M = \text{konst.} \doteq 4\pi a^3 \rho_c \cdot 2,01284. \quad (2.65)$$

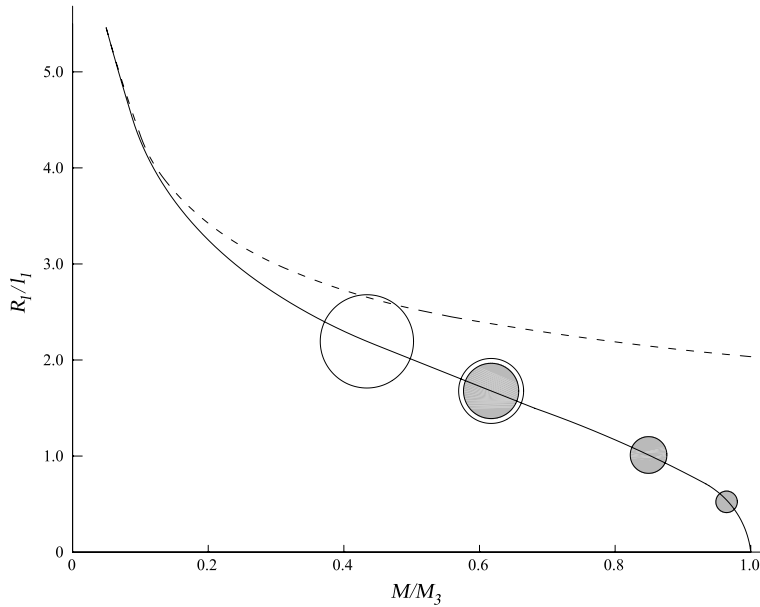
Tento výsledek, již zcela nezávislý na poloměru, představuje limitní hmotnost, tzv. *Chandrasekharovu mez*, při které (pokud by gradient tlaku, bránil kontrakci tělesa, nevznikl jako důsledek jiného procesu) se poloměr hvězdy blíží k nule [15]. Z rovnice (2.8) a tabulky 2.1 dále vyplývá

$$M_{\text{Ch}} \doteq \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_H)^2} \cdot 2,01284 \doteq 5,76 \mu_e^{-2} M_\odot. \quad (2.66)$$

Pokud do tohoto vztahu dosadíme příslušné konstanty a za  $\mu_e$  dosadíme výše uvedenou hodnotu 2, dostaneme:

$$M_{\text{Ch}} \approx 2,86 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1,44 M_{\odot}. \quad (2.67)$$

Následující obrázek, převzatý z [15], ukazuje průběh závislosti poloměr–hmotnost, plná čára představuje numericky vypočítanou přesnou relativistickou závislost, čárkovaná čára nerelativistickou závislost. Konstanta  $l_1$  (viz odvození, uvedené v [15]) má význam  $(2A/\pi G)^{1/2}/B$ , kde konstanta  $A = \pi m_e^4 c^5/3h^3$ , konstanta  $B = 8\pi m_e^3 c^3 \mu_e m_{\text{H}}/3h^3$ , označení  $M_3$  odpovídá zde uvedenému  $M_{\text{Ch}}$ . Oblasti uvnitř odpovídající konfigurace hvězdy, které lze považovat za relativistické, jsou vyplněné šedou barvou.



Obrázek 2.2: Relativistický (plná čára) a nerelativistický (čárkovaná čára) průběh závislosti poloměr–hmotnost pro hvězdu, složenou z elektronově degenerované látky (bílý trpaslík). Šedou barvou jsou vyplněné oblasti, které lze považovat za relativistické. Popis jednotlivých os – viz text před grafem. Zdroj [15].

# Kapitola 3

## Gravitační kolaps

### 3.1 Látka při velmi vysokých hustotách

Výraz pro tlak nerelativistického elektronově degenerovaného plynu v rovnici (2.55) lze zapsat ekvivalentním způsobem

$$P_{(NR)} = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left( \frac{\rho}{m'} \right)^{5/3}, \quad (3.1)$$

kde  $m'$  je hmotnost látky, připadající na 1 elektron (poněvadž v případě kolabujících jader hmotných hvězd, ale i v případě bílých trpaslíků půjde o látku složenou z prvků těžších, než vodík,  $m' \approx 2m_p \approx 3,34 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ ). V nerelativistickém případě lze také předpokládat, že  $p_F \ll mc$ , takže po dosazení do rovnic (2.50), (3.1) lze zhruba napsat nerovnosti  $\rho \ll 2 \cdot 10^9 \text{kg m}^{-3}$ ,  $P \ll 10^{22} \text{Pa}$  [19].

Pokud se hustota a tlak začnou těmito hodnotám blížit, elektronový plyn se stane relativistickým, pokud se jim vyrovnají, půjde o ultrarelativistický případ, takže rovnici (2.62) můžeme obdobným způsobem zapsat

$$P_{(UR)} = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{\rho}{m'} \right)^{4/3}. \quad (3.2)$$

Další zvyšování hustoty vede ke stavům, kdy nukleární reakce záchytu elektronů atomovými jádry (se současnou emisí elektronových neutrin) jsou termodynamicky výhodnější (tedy k tzv. *neutronizaci*, popsatelné inverzním beta rozpadem – viz rovnici (1.1)). Tyto procesy snižují elektrický náboj jader, zatímco jejich hmotnost se prakticky nemění.

S dále vzrůstající hustotou a tlakem více a více jader zachytí elektron; celkový počet elektronů klesá, ale tlak elektronového plynu zůstává konstantní (podrobnosti – viz [19], str. 318–326). Při hustotě  $\rho \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$  a tlaku  $P \approx 10^{29} \text{ Pa}$  počet neutronů převyší počet elektronů, jádra se tak začnou rozpadat na jednotlivé neutrony, při hustotě  $\rho \approx 10^{12} \text{ kg m}^{-3}$  začne hrát rozhodující roli tlak neutronového plynu. Od této hustoty výše lze látku považovat za neutronově degenerovaný Fermiho plyn, jehož stavovou rovnici (analogicky k rovnici (3.1)) lze vyjádřit jako

$$P = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \rho^{5/3}, \quad (3.3)$$

kde  $m_n$  je hmotnost neutronu. Při hustotách  $\rho \gg 6 \cdot 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$  se také neutronově degenerovaný plyn stane ultrarelativistickým, jeho stavová rovnice, opět analogicky k rovnici (3.2), potom bude

$$P = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{\rho}{m_n} \right)^{4/3}. \quad (3.4)$$

Při těchto hustotách ovšem začne hrát významnou roli jaderná síla mezi nukleony (silná interakce), všechny okolnosti s tím spojené nejsou dosud objasněny, lze pouze poznamenat, že za těchto podmínek mohou začít vznikat i jiné částice, než neutrony (např. piony, hyperony, kvark-gluonová plazma). Vzhledem k Pauliho vylučovacímu principu je přeměna neutronů na tyto částice termodynamicky výhodnější, každý druh částice obsazuje jednotlivé stavy samostatně.

V kapitole 2.4 byly odvozeny závislosti mezi hmotností a poloměrem sférického tělesa, složeného z elektronově degenerovaného plynu, rovnovážný stav lze vyjádřit jednoduchou relací  $M = M(R)$  pro všechny poloměry  $R$ . Pro relativně velká  $R$  (a tedy pro nižší hustoty), elektronový plyn lze považovat za nerelativistický a potom  $M \sim R^{-3}$  (viz vztah (2.59)). Pokud poloměr je velmi malý, potom hustota vzroste natolik, že dostáváme ultrarelativistický případ a funkce  $M(R) \rightarrow M_{\text{Ch}}$  pokud  $R \rightarrow 0$ . K tomu je třeba poznamenat, že vztahy pro reálnou limitující hodnotu  $M_{\text{Ch}} \approx 1,44 M_{\odot}$  jsou ve skutečnosti komplikovanější, protože hustota v takovém tělese rapidně klesá se vzdáleností od centra (viz [19], str. 325), takže v blízkosti centra může jít o ultrarelativistický plyn, zatímco ve větších vzdálenost se plyn chová nerelativisticky.

Jak již bylo také zmíněno v této kapitole, v případě, že  $R$  je velmi malé a hustoty vzrostou na výše uvedené hodnoty, vstupuje do hry neutronizace, která zabrání (v naprosté většině případů) další kontrakci.

## 3.2 Neutronové hvězdy

Objekty, složené z neutronově degenerované látky jsou jedním ze dvou možných rovnovážných stavů hvězd po vyčerpání zásob jaderného paliva (kromě již popsaných objektů, sestávajících z elektronově degenerované látky – bílých trpaslíků, ale i jiných typů objektů v závěrečných stádiích vývoje s nižšími hmotnostmi). Pokud je hmotnost objektu (hvězdy) dostatečná, „neutronový“ stav látky je termodynamického hlediska vždy výhodnější. O existenci takových objektů teoreticky spekulovali již ve třicátých letech 20. století Walter Baade a Fritz Zwicky.

Problematiky neutronových hvězd (případně černých děr) se zde dotknu pouze informativně, aniž bych zacházel do hlubších matematických detailů, ty jsou značně komplikované a jsou zatíženy řadou teoretických problémů. Jednak neznáme přesně tvar stavové rovnice při extrémně vysokých tlacích a hustotách, také nemůžeme v dalších úvahách vycházet z Newtonovy gravitační teorie, výpočty musí být prováděny na základě obecné teorie relativity, numerickou integrací přesných stavových rovnic relativistického degenerovaného Fermiho plynu, vycházejících z rovnice (2.51) [19]. Detailnější výpočty této problematiky provedli v roce 1939 nezávisle na sobě Lev Landau a Robert Oppenheimer spolu s Georgem Volkoffem, právě díky zahrnutí relativistických efektů odhadli také horní hranici hmotnosti těchto hvězd, nazývá se po nich Landau-Oppenheimer–Volkoffova mez (*LOV* mez). Při překročení této meze, která podle různých odhadů činí  $1,4 M_{\odot} - 3 M_{\odot}$ , dojde k „neomezenému“ gravitačnímu hroucení do singulárního bodu — ke vzniku černé díry.

Existují i termodynamické odhady minimální hmotnosti těchto hvězd, pod níž by tlak nebyl dostatečný a neutrony by se rozpadaly zpět na samostatné protony a elektrony. Ta činí zhruba  $0,1 M_{\odot}$ , neexistuje však spolehlivá teorie vzniku takových hvězd s hmotností nižší, než  $1 M_{\odot}$ , což odpovídá i pozorovaným skutečnostem — dosud objevená neutronová hvězda s nejnižší hmotností se pohybuje okolo  $1,2 M_{\odot}$  [22].

Protože tlak na povrchu hvězdy musí být nulový, je zřejmé, že ve vnějších vrstvách tělesa budou tlak i hustota relativně nízké, tyto vrstvy budou tvořeny elektrony a jádry (elektronově degenerovaným plynem). Ačkoli tloušťka této vrstvy může být srovnatelná s poloměrem neutronově degenerovaného jádra, jeho hustota je o mnoho řádů nižší, hmotnost této vnější vrstvy lze tedy zanedbat a celkovou hmotnost uvažovat pouze jako hmotnost jádra. Pro odhad velikosti takové hvězdy (respektive jejího jádra) lze vyjít z násle-

dujících vztahů: v případě nerelativistického neutronově degenerovaného plynu můžeme postupovat obdobným způsobem, jako při odvození vztahu (2.59), kde ovšem v rovnici (2.57) bude místo  $m_e$  dosazena hmotnost neutronu  $m_n$  a místo výrazu  $\mu_e m_H$  opět  $m_n$ , takže rovnice bude mít tvar

$$K = P/\rho^\gamma = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{5 m_n^{8/3}}, \quad (3.5)$$

a kde tedy výraz (2.58) bude mít hodnotu [19]

$$a = \text{konst} \cdot \rho_c^{-1/6} \approx 4 \cdot 10^6 \cdot \rho_c^{-1/6}. \quad (3.6)$$

Tím dospějeme k rovnici

$$M = \text{konst} \cdot R^{-3} \approx 7 \cdot 10^{42} R^{-3}. \quad (3.7)$$

Po dosazení hmotností v rozmezí  $1,45 M_\odot - 3 M_\odot$  vychází poloměr tělesa zhruba  $13 - 10$  km.

Velikost gravitační vazebné energie hvězdy lze podle vztahu (2.46) zapsat:  $B = 3/7 (GM^2/R_n)$ , kde  $R_n$  je poloměr „neutronové“ sféry, po dosazení vychází hodnoty okolo  $2,2 \cdot 10^{46}$  J. Analogické vztahy pro ultrarelativistický neutronově degenerovaný plyn by vedly k odvození hodnoty *LOV* meze, zahrnutí relativistických efektů jej však velmi komplikuje, další postup zde nebudu uvádět.

Podle současných teoretických modelů vypadá (zjednodušené) standardní rozvrstvení typické neutronové hvězdy zhruba následovně [22]:

- atmosféra z nedegenerované látky o tloušťce několika mm,
- vnější vrstva z elektronově degenerovaného plynu o tloušťce několika stovek metrů,
- přechodová vrstva, kde již začíná převládat „neutronový“ plyn o tloušťce zhruba 1 km,
- vlastní jádro složené z neutronově degenerované látky, o poloměru řádově 10 km a hustotou  $10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ .

S neutronovými hvězdami je spojeno mnoho dalších velmi zajímavých jevů, zejména rychlá rotace (zachování momentu hybnosti), velmi silné magnetické pole a otázky spojené s tzv. *pulzary*. Tato speciální témata zde už ovšem nebudu podrobněji rozebírat.

### 3.3 Průchod rázové vlny

Typická „průměrná“ supernova představuje objekt s celkovým zářivým výkonem  $10^{10} L_{\odot}$ , který po dobu několika týdnů emituje zářivou energii (v průměru)  $E_{\text{rad}} \approx 7 \cdot 10^{42} \text{ J}$ . To je energie, odpovídající asi 20-ti násobku klimové energie Země. Z Dopplerova posuvu emisních a absorpčních čar víme, že střední expanzní rychlosti explodujících supernov jsou v rozmezí od 2000 do 10 000  $\text{km s}^{-1}$ . Tomu odpovídá kinetická energie  $E_K \approx 10^{44} \text{ J}$ . Analýza detekovaných neutrin ze supernovy SN1987A ukazuje, že uvolňovaná energie je ještě větší,  $E_{\nu\bar{\nu}} \approx 2,7 \cdot 10^{46} \text{ J}$  [1].

Z uvedeného vyplývá, že pokud vnější okraj (povrch) explodující supernovy expanduje rychlostí  $10^4 \text{ km s}^{-1}$ , potrvá pár týdnů, než dosáhne vzdálenosti (poloměru)  $2 \cdot 10^{13} \text{ m}$ , což je časová škála, typická pro pozorované supernovy. Nejjednodušším modelem supernovy (byť velmi zjednodušeným) je představa velkého množství energie, uvolněného kolapsem zárodečné hvězdy. Následně vyvolaná rázová vlna zahřeje a urychlí materiál, který expanduje a září. Během expanze se vnitřní energie v rozpínající se obálce mění na kinetickou (viz vztah (4.34)). Tlak koná práci při dalším urychlování expandující hmoty, jejíž střední rychlost se blíží [1]

$$\langle v \rangle \approx 10^7 \sqrt{\frac{E_K}{10^{44} \text{ J}} \frac{M_{\odot}}{M}} \text{ m s}^{-1}. \quad (3.8)$$

Rychlost expanze „povrchu“ je ještě vyšší – viz vztah (4.50).

Přeměna vnitřní energie na kinetickou vytváří principiální problém při modelování záření supernov: tím, že se poměrně rychle redukuje celkový objem tepelné energie, která může být přeměněna na viditelné záření, vykazuje model supernovy, zahřáté pouze rázovou vlnou, při další expanzi rychle ochlazené, velmi neefektivní produkci záření. Řešením tohoto problému je radioaktivní ohřev (viz kapitola 4.6). Energie, získaná radioaktivním rozpadem, je nezávislá na expanzi obálky supernovy a uvolňuje se v dostatečném množství i v době, kdy obálka dosahuje výše uvedených rozměrů. Podívejme se nyní blíže také na základní vlastnosti této rázové vlny [1].

Uvažujme hvězdu, která je zárodkem supernovy. Pokud je v hydrostatické rovnováze, potom její gravitační vazebná energie na jednotku hmotnosti (viz rovnice (2.42)) odpovídá  $B/M \approx GM/R$ , průměrný tlak a hustota (podle rovnice hydrostatické rovnováhy) také odpovídají  $\bar{P}/\bar{\rho} \approx GM/R$ .



Pro rychlost zvuku  $v_s$  v ideálním plynu platí

$$v_s = \sqrt{\gamma \mathcal{A} T / \mu_s}. \quad (3.9)$$

Odvození tohoto vztahu zde nebudu uvádět, je podrobně probráno v [20], §64.

Kinetická energie exploze supernovy na jednotku hmotnosti,  $E_K/M \approx v^2/2$  ( $v$  nyní znamená rychlost čela rázové vlny, nikoli rychlost částic ideálního plynu jako v předchozím odstavci), musí být mnohem větší, než gravitační vazebná energie na jednotku hmotnosti,  $B/M \approx P/\rho$ , z toho ovšem vyplývá, že

$$v \gg v_s, \quad (3.10)$$

takže expanzní rychlost je silně nadzvuková. V drtivé většině případů exploze musí způsobit rázovou vlnu. Průchod rázové vlny povrchem zárodečné hvězdy, tj. okamžik, kdy rázová vlna dorazí na povrch zkolabované zárodečné hvězdy, je prvním vizuálním indikátorem exploze, neutrina (a případné gravitační vlny) mohou uniknout dříve.

Podíl tlaku plynu a celkového tlaku je (viz vztah (2.16))

$$\beta = \frac{P_g}{P} = \frac{\mathcal{A}\rho T}{\mu_s P}. \quad (3.11)$$

Podíl tlaku záření a tlaku plynu je (viz vztah (2.27))

$$1 - \beta = \frac{P_r}{P} = \frac{aT^4}{3P}. \quad (3.12)$$

Podíl tlaku záření a tlaku plynu tedy musí být

$$\frac{1 - \beta}{\beta} = \frac{aT^3 \mu_s}{3\mathcal{A}\rho}. \quad (3.13)$$

Pokud střední hustota je  $\langle \rho \rangle = 3M/4\pi R^3$ , kde  $R \approx 2 \cdot 10^{13}$  m (viz str. 22, 36), potom střední hustota v případě takové modelové supernovy  $\langle \rho \rangle \approx 5 \cdot 10^{-11} M/M_\odot$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ).

Tepelná energie supernovy v okamžiku průchodu rázové vlny (viz [1], str. 562) je  $E_{Th} \approx aT^4 V \approx aT^4 4\pi R^3/3$ ,  $E_{Th}(0) \approx E_K(0) \approx 10^{44}$  J, z toho vyplývá

$$T_0 \approx 4,5 \cdot 10^4 \text{ K}. \quad (3.14)$$

Z toho též dále vyplývá

$$\frac{1 - \beta}{\beta} \approx 5,5 \cdot 10^4 \mu_s \frac{M_\odot}{M}. \quad (3.15)$$

Střední molekulová hmotnost  $\mu_s$  v případě standardního slunečního složení  $\approx 0,62$ , v případě vyššího obsahu těžších prvků ještě roste, takže tlak záření, jak jsme předpokládali, výrazně převažuje. Toto je zásadní zjednodušení pro navazující model; s výjimkou energie radioaktivního rozpadu a energie rekombinace, vnitřní energii plynu můžeme zanedbat. Supernova je v podstatě „koule“ světla (záření).

To má zajímavé důsledky [1]. Kombinací vztahů (3.13) a (2.25) dostáváme, že entropie záření (na jednotku hmotnosti) je

$$S_{(r)} = \frac{4\mathcal{A}(1 - \beta)}{\mu_s \beta}. \quad (3.16)$$

Po dosazení (3.15) dostáváme

$$S_{(r)} \approx 1,8 \cdot 10^9 \frac{M_\odot}{M} \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (3.17)$$

Vyjádříme-li teplotu  $T$  z rovnice (3.11), dosadíme do rovnice (3.12) a celkový tlak  $P$  vyjádříme pomocí rovnice (2.12), dostáváme (viz [1], str. 155)

$$1 - \beta = -\frac{a}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mathcal{A}}\right)^4 G^3 M^2 \frac{4\pi \langle \rho \rangle}{3\rho_c} \left[ (n+1)\xi_R \left| \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi_R} \right]^{-3} \beta^4, \quad (3.18)$$

což je tzv. Eddingtonova *kvartická rovnice*. Dosadíme-li hodnoty konstant a hodnoty z tabulky 2.1 pro  $n = 3$  (Eddingtonův standardní model), potom

$$1 - \beta \approx 0,00298 (\mu_s \beta)^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2. \quad (3.19)$$

Předpokládáme, že  $\beta$  je stejná v celé hvězdě, to je vhodná aproximace, protože skutečně  $\beta$  se s poloměrem mění jen velmi zvolna (výjimkou může být termonukleární slupkové hoření). Pro ionizovaný plyn z čistého vodíku  $\mu_s = 1/2$ ; pro ionizované čisté  ${}^4\text{He}$   $\mu_s = 4/3$ . Z rovnice (3.19) je patrné, že radiační tlak se vyrovná tlaku plynu ( $\beta = 0,5$ ) až při velmi vysokých hmotnostech  $M/M_\odot \approx 200$  ( $S_{(r)} \approx 6,65 \cdot 10^4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) pro čistý vodík a  $M/M_\odot \approx 29$  ( $S_{(r)} \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) pro čisté  ${}^4\text{He}$ .

Pro naprostou většinu hvězd  $\beta$  leží poblíž 1, v rozsahu od  $(1 - 10^{-6})$  do 0, 2. Tomu odpovídá rozsah entropií záření (na jednotku hmotnosti)  $S_{(r)}$  od přibližně  $8 \cdot 10^{-2} \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  do přibližně  $2,5 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (celková entropie ovšem tak nízká není, zde se jedná skutečně pouze o entropii záření) [1].

Na první pohled je zřejmé, že tyto entropie jsou mnohem nižší, než entropie supernovy v rovnici (3.17). Abychom dostali tak vysokou entropii, potřebujeme ohřev při nižších teplotách, než jsou teploty v nitrech běžných hvězd. To je další podstatný argument pro zahrnutí efektu radioaktivního ohřevu (viz kapitola 4.6).

Pro silnou rázovou vlnu je  $E = aT^4V \approx \langle v \rangle^2/2$ , tedy vzhledem k rovnici (3.8),  $E \approx 5 \cdot 10^{13} (\langle v \rangle/10^7 \text{ m s}^{-1})^2 \text{ J kg}^{-1}$ . Typické pozorované rychlosti jsou  $5000 \text{ km s}^{-1}$  pro supernovy typu II a  $10000 \text{ km s}^{-1}$  pro supernovy typu I. Během expanze se vnitřní energie mění na kinetickou, v čase  $t_0$ , tj. v čase průchodu rázové vlny povrchem hvězdy (tj. jejího „objevení se“ na povrchu kolabované hvězdy), kinetická energie  $E_K(0) \approx E_K(t)/2 \approx v_a^2/4$ , (viz kapitola 4.3),  $v_a$  je asymptotická rychlost rozpínání, tj. rychlost „po velmi dlouhé době“. Předpokládejme, že v čase  $t_0$  je poloměr  $R_0 \leq 10^{12} \text{ m}$ , což splňují prakticky všechny hvězdy,  $v_0 = 10^7 \text{ m s}^{-1}$ , potom doba tzv. hydrodynamické expanze

$$\tau_h = 10^5 \text{ s} \left( \frac{R}{R_0} \right) \left( \frac{v_0}{v} \right) \quad (3.20)$$

je poměrně krátká, jeden den, i méně. Následující fáze setrvačného rozpínání bude zhruba homologická; exploze z bodu, nebo z velmi malého objemu, vyvolává homologickou expanzi, kde  $v \sim r$ , (podobně jako například kosmologické rozpínání vesmíru, kde  $v = Hr$ ; konstanta úměrnosti může být proměnná v čase, ale nezávisí na  $r$ ), takže můžeme napsat časovou derivaci specifického objemu, kde  $R$  je hraniční poloměr,  $R = R_0 + v_a t$  (viz vztah (4.22)), z toho vyplývá [1]  $dV/dt = d/dt [(4/3)\pi(R_0 + v_a t)^3] \approx 3v_a V/R$ .

S tím, jak rázová vlna postupuje směrem k povrchu, se výrazně mění radiální průběh hustoty ve hvězdě. Strmý pokles hustoty směrem od jádra k obalu je expanzí jádra výrazně redukován. To nám umožňuje (samozřejmě opět v určité zjednodušující, avšak opodstaněné aproximaci) při následujících úvahách, týkajících se světelných křivek, předpokládat rovnoměrné rozložení hustoty a konstantní opacitu v homologicky expandující obálce [1].

# Kapitola 4

## Světelné křivky

### 4.1 Světelné křivky supernov

V této kapitole se zaměřím spíše na popis světelných křivek supernov typu II, respektive supernov s gravitačně kolabujícím jádrem, zatímco popis světelných křivek supernov typu Ia („termonukleárních“ supernov) bude součástí následující kapitoly 5, zaměřené právě na tento typ. Poměrně podrobné odvození základních fyzikálních vztahů (viz rovnice (4.97), (4.102)), popisujících časový vývoj těchto křivek, bude potom východiskem jak pro „malé“ (tj. typ Ia), tak pro libovolné počáteční poloměry.

Časový vývoj světelných křivek supernov je nejdůležitějším zdrojem informací o podstatě tohoto jevu, proto jsou světelné křivky také hlavním objektem zájmu. Podstatné informace nepřináší ovšem pouze časový průběh těchto křivek, ale také absolutní jasnost v maximu a struktura křivek v jednotlivých barvách. Díky rozboru světelných křivek je možné určovat jednotlivé typy supernov, množství celkové energie exploze a z toho vyplývající jemnější detaily různých vývojových modelů, jako například množství syntetizovaných radioaktivních prvků, původní velikost zárodečné hvězdy, atd.

K celkové energii supernovy přispívá několik zdrojů. Kromě již zmíněného zahřátí rázovou vlnou (nebo jadernou reakcí u typu Ia – viz kapitola 5) v počáteční fázi, je to především radioaktivní rozpad prvků, které se v průběhu exploze vytvoří. Hlavní příspěvek tvoří  $^{56}\text{Ni}$ , který je nestabilní a rozpadá se s poločasem rozpadu 6,1 dne na  $^{56}\text{Co}$ . Tento rozpad probíhá díky záchytu elektronů při současné produkci  $\gamma$  záření. Izotop  $^{56}\text{Co}$  je rovněž nestabilní a rozpadá se s poločasem rozpadu 78,8 dne na stabilní izotop  $^{56}\text{Fe}$ . Tento rozpad probíhá jednak prostřednictvím záchytu elektronů (81%) s produkcí

$\gamma$ -záření, jednak jako rozpad  $\beta$  (19%) s produkcí pozitronů (viz kapitola 5). Záření  $\gamma$  je poté rozptýleno nebo termalizováno v látce obálky a následně převyzářeno především jako optické fotony, nebo fotony náležející do blízké infračervené (NIR) oblasti [2] [21].

Tvar světelných křivek závisí především na velikosti a hmotnosti zárodečné hvězdy a energetické vydatnosti exploze. Detailní průběh křivek je také formován dalšími vlivy, např. rekombinací, probíhající v obálce během jejího ochlazování, srážkou rázové vlny s látkou, obklopující hvězdu, možnou akrecí látky na kompaktní pozůstatek po supernově, v pozdních fázích zářením světelného echa, atd.

Prvním projevem kolapsu jádra supernovy je mohutný tok neutrin, který je (zhruba o několik hodin později) následován průchodem rázové vlny „povrchem“ hvězdy, doprovázeným emisí elektromagnetického záření, nejprve formou UV záblesku. S pokračující expanzí obálky se supernova stává viditelnou v optické oblasti, počáteční nárůst světelné křivky je dán kombinací expandujícího povrchu a pomalého poklesu teploty.

Zhruba po několika týdnech se vnější části expandující obálky ochladí natolik, že ionizovaný vodík rekombinuje, kritická teplota leží mezi 4000 K až 6000 K. Neutrální vodík je průhledný pro většinu vlnových délek, čelo rekombinace postupuje dovnitř hvězdy a tvoří tak fotosféru hvězdy. Jakmile vodík začne rekombinovat, fotony z vnitřních, teplejších oblastí vodíkové obálky mohou uniknout, vidíme tedy hlouběji do hvězdy. Ta neustále expanduje, teplota rekombinující fotosféry ovšem zůstává zhruba konstantní, světelná křivka tak po určitou dobu vytváří zhruba vodorovné plató [21].

V tomto bodě lze supernovy II. typu (SNII) rozdělit podle tvaru světelné křivky do dvou podtypů [1]. Supernovy typu II-Linear (SNII-L) vykazují po průchodu maximem poměrně rychle a plynule klesající světelnou křivku, zatímco supernovy typu II-Plateau (SNII-P) zůstávají po určitou dobu po průchodu maximem na téměř konstantní jasnosti.

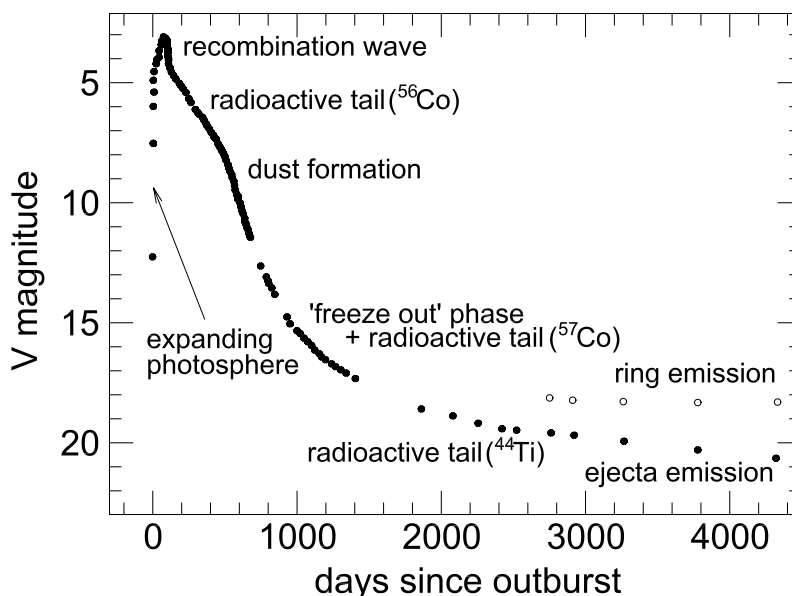
Vznik „plató“ fáze souvisí se změnou opacity vnějších vrstev explodující hvězdy. Rázová vlna, vyvolaná kolapsem jádra postupuje hvězdou a zahřívá vnější obálku na teplotu, přesahující  $10^5$  K, veškerý vodík v obálce je tak ionizován. Opacita ionizovaného vodíku je vysoká, převážně díky Thomsonovu rozptylu termálních fotonů na volných elektronech. Délka „plató“ fáze je dána především tloušťkou expandující obálky (která je zase určena její hmotností a energií exploze, tj. rychlostí rozpínání).

Poté, co rekombinační vlna projde celou vodíkovou obálkou, plató fáze (pokud se vyskytovala) skončí, průběh světelné křivky SNII přejde do fáze,

určené především radioaktivním rozpadem  $^{56}\text{Co}$  na  $^{56}\text{Fe}$ , která je už víceméně shodná pro všechny SNII. Počet pozorovaných typických SNII-L supernov je mnohem vzácnější, než SNII-P. To svého času vedlo k úvahám, zda se nejedná o jiný druh objektu, v současnosti převládá názor, že nepřítomnost plató fáze je způsobena mnohem tenší vodíkovou obálkou u supernov typu SNII-L [21].

Ještě složitější je průběh pozdní fáze světelné křivky. Velmi málo objektů lze sledovat po dlouhou dobu, většinou přestávají být fotometricky rozlišitelné od mateřské galaxie. V těchto pozdních fázích také dominantní úlohu hraje záření disku, obklopujícího hvězdu, ionizovaného rázovou vlnou a zářením supernovy, zhruba 1500 dnů po explozi je záření tohoto disku intenzivnější, než záření vlastní obálky.

Světelné křivky některých supernov se vyvíjejí pomaleji, ve svém spektru vykazují užší čáry (narrow lines) – typ SNII-n. Tyto objekty zůstávají jasné po neobvykle dlouhou dobu, nejpravděpodobnějším vysvětlením je interakce rázové vlny s hustým okolním materiálem, přeměna kinetické energie na světlo představuje dodatečný zdroj zářivé energie.



Obrázek 4.1: Světelná křivka supernovy SN 1987A, různé její fáze. Poté, co se fotosféra stane dostatečně průhlednou, křivka je vytvářena výhradně díky radioaktivnímu rozpadu v „nebulární“ obálce (100 dní po explozi). V pozdní fázi převažuje záření prstence. Zdroj [21].

## 4.2 Časový průběh chladnutí

Jestliže vyzářená energie má být uhrazena energií z vnitřního zdroje, může se tak obecně stát konvekcí nebo zářením. V případě expanze obálky supernovy se tak děje takřka výhradně zářením (při popisu kapitol 4.2 až 4.8 vycházím převážně z [1], nebudu zde tedy tento zdroj dále uvádět).

U hvězdy v hydrostatické rovnováze bude tok energie povrchem koule o poloměru  $r$  odpovídat vztahu (rovnice energetické rovnováhy)

$$\frac{\partial L_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r), \quad (4.1)$$

kde  $dL_r$  je zářivý výkon uvolněný v kulové slupce o poloměru  $r$ , tloušťce  $dr$  a hustotě  $\rho$ ,  $\epsilon(r)$  je výkon příslušného objemu hvězdné látky ve vzdálenosti  $r$  od centra hvězdy na jednotku hmotnosti.

Jestliže však hvězda není v přísně rovnovážném vztahu, pak k energii  $\epsilon$  je třeba přičíst změnu vnitřní energie  $U$ , tj. energii uchovanou díky tepelné kapacitě hvězdného materiálu, a změnu gravitační potenciální energie  $E_p$  (vše na jednotku hmotnosti) [22]

$$\frac{\partial L_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \left( \epsilon + \frac{dU}{dt} + \frac{dE_p}{dt} \right). \quad (4.2)$$

Při explozi supernovy se jedná o expanzi fotonového plynu, vnitřní energie  $U$  na jednotku hmotnosti (budeme ji značit  $E$ ) klesá, bude tedy  $-E$ , potenciální energie se rovná záporné práci, provedené explozí, tedy  $-W$ . Jak již bylo dříve odvozeno pro fotonový plyn

$$E = aT^4 V, \quad (4.3)$$

kde vzhledem k tomu, že  $E$  je energie na jednotku hmotnosti, je i  $V$  objem na jednotku hmotnosti, tedy  $1/\rho$ . Pro tlak fotonového plynu (záření) platí

$$P = aT^4/3. \quad (4.4)$$

Jednou ze základních rovnic stavby hvězd je rovnice zářivé difúzní rovnováhy

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{c}{3\kappa\rho} a \frac{\partial T^4}{\partial r}. \quad (4.5)$$

Rovnici (4.2) lze tedy napsat ve tvaru

$$\frac{\partial L_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \left( \epsilon - \frac{dE}{dt} - \frac{dW}{dt} \right), \text{ tedy } \frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon - \frac{dE}{dt} - \frac{P dV}{dt}, \quad (4.6)$$

a po přepsání

$$\frac{dE}{dt} + \frac{P dV}{dt} = \epsilon - \frac{\partial L_r}{\partial M_r}, \quad (4.7)$$

což je I. věta termodynamiky. Po dosazení z rovnic (4.3), (4.4) a (4.5) můžeme psát (nehomogenní parabolickou parciální diferenciální rovnici)

$$\frac{d}{dt}(aT^4V) + \frac{aT^4}{3} \frac{dV}{dt} = \epsilon - \frac{\partial}{\partial M_r} \left( -4\pi r^2 \frac{c}{3\kappa\rho} a \frac{\partial T^4}{\partial r} \right). \quad (4.8)$$

Nejjednodušší modely světelných křivek vycházejí z difúzního ochlazování obálky, zahřáté rázovou vlnou, spojenou s explozí supernovy, bez dodatečného mechanismu ohřevu. To sice není reálná astrofyzikální situace, poslouží ale jako modelový příklad pro jednodušší vybudování některých matematických vztahů, které budou později použity při řešení s dodatečným ohřevem. Z rovnice (4.8) vypadne člen  $\epsilon$ , stane se tak homogenní parabolickou parciální diferenciální rovnicí a bude mít tvar

$$4aT^3V\dot{T} + aT^4\dot{V} + \frac{aT^4}{3}\dot{V} = \frac{V}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{c}{3\kappa\rho} a \frac{\partial T^4}{\partial r} \right), \quad (4.9)$$

tedy

$$4T^4 \left( \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{V}}{3V} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c}{3\kappa\rho} r^2 \frac{\partial T^4}{\partial r} \right). \quad (4.10)$$

Vzhledem k homologické expanzi  $\dot{V}/V = 3\dot{R}/R$ , kde  $\dot{R}$  můžeme označit jako  $v_p$  a vzhledem k zanedbání zrychlení, způsobeného prací  $P dV$  se jedná o konstantu (rychlost rozpínání „povrchu“). Poslední rovnici lze přepsat

$$4T^4 \left( \frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{R}}{R} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c}{3\kappa\rho} r^2 \frac{\partial T^4}{\partial r} \right). \quad (4.11)$$

Jenom malá část explozivní energie (několik procent) unikne jako záření, drtivá většina se přemění na kinetickou energii obálky. To ovšem vede k adiabatickému řešení, kde platí  $TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$  Pro fotonový plyn  $\gamma = 4/3$ , takže lze položit  $T \propto R(t)^{-1}$ , kde  $R(t)$  je poloměr „povrchu“ expandující obálky. Prostorové závislosti ( $r$ ) a časové závislosti ( $t$ ) lze separovat tak, že položíme

$$T(r, t)^4 = \Psi(x)\phi(t) T_0^4 R_0^4 / R(t)^4, \quad (4.12)$$



kde  $T_0 = T(0, 0)$ ,  $R_0 = R(0)$ . Bezrozměrná radiální souřadnice  $x = r/R(t)$ . Z rovnice (4.12) vyplývá, že

$$T(r, t) = \Psi(x)^{1/4} \phi(t)^{1/4} T_0 R_0 / R(t), \quad (4.13)$$

a tudíž (proměnnou budu psát dále většinou jenom u  $R(t)$ )

$$\dot{T} = \Psi^{1/4} \frac{1}{4} \phi^{-3/4} \dot{\phi} \frac{T_0 R_0}{R(t)} - \Psi^{1/4} \phi^{1/4} \frac{T_0 R_0}{R(t)^2} \dot{R}, \quad (4.14)$$

takže výraz v závorce na levé straně rovnice (4.11) bude

$$\frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{\phi}}{4\phi}. \quad (4.15)$$

Celou rovnicí (4.11) lze (po převedení všech explicitně časově závislých výrazů a konstant na levou stranu, prostorově závislých výrazů na pravou) zapsat

$$\frac{3R(t)^2}{c} \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\Psi x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa \rho} x^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (4.16)$$

Nyní je třeba ještě analyzovat veličiny  $\kappa$  (opacitu) a  $\rho$  (hustotu) ve jmenovateli pravé strany rovnice. V případě hustoty můžeme předpokládat, že je funkcí radiální souřadnice i času, můžeme tedy provést separaci

$$\rho(r, t) = \rho_0 \eta(x) R_0^3 / R(t)^3, \quad (4.17)$$

kde  $\rho_0$  je opět  $\rho(0, 0)$ . Funkce  $\eta(x)$  udává radiální rozdělení hustoty, o němž předpokládáme, že se vzhledem k homologické expanzi v čase nemění (nebo nanejvýš jen velmi zvolna).

Opacita je funkcí teploty, hustoty a chemického složení, obecně může tedy být také funkcí prostoru i času. Otázka časové variace chemického složení je mimořádně důležitá, pro jednoduchost ji ale nyní zanedbáme. To lze, protože, jak již bylo uvedeno, v průběhu expanze vzhledem k teplotám a hustotám neustále dominuje Thomsonův rozptyl, při němž opacita je téměř konstantní. Jestliže  $\kappa$  bude pouze  $\kappa(x)$  a v prostorové části rovnice stanovíme poměr opacity vzhledem k vnitřnímu okraji  $\kappa(0)$ , bude rovnice (4.16) vypadat

$$\frac{3\rho_0 \kappa(0)}{c} \frac{R_0^3}{R(t)} \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\Psi x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\kappa(0)}{\kappa(x) \eta(x)} x^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (4.18)$$

Na levé straně ještě pro jednoduchost zavedeme konstantu

$$\tau_0 = 3R_0^2 \rho_0 \kappa(0)/c\alpha^2, \quad (4.19)$$

kteřá má rozměr času a znamená charakteristickou dobu zářivé difúze v čase  $t = 0$  (v závislosti na obsažených konstantách). Celou separovanou rovnicí pak můžeme zapsat

$$\tau_0 \frac{R_0}{R(t)} \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\Psi x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\kappa(0)}{\kappa(x) \eta(x)} x^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = -\alpha^2. \quad (4.20)$$

Vlastní hodnota je uvedena v kvadratické podobě jako  $\alpha^2$ ; protože funkce  $\phi(t)$ ,  $\Psi(x)$  vyjadřují časový a prostorový průběh teploty, musí být vlastní hodnota nezáporná.

Nyní se přednostně zaměříme na řešení levé strany rovnice, to znamená

$$\ln \phi(t) = - \int_0^t \frac{R(t')}{\tau_0 R_0} dt'. \quad (4.21)$$

Protože jsme již definovali konstantní rychlost rozpínání „povrchu“  $v_p$ , můžeme napsat

$$R(t) \approx R_0 + v_p t, \quad (4.22)$$

takže

$$\phi(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{\tau_0} + \frac{t^2}{2\tau_0 \tau_h} \right) \right], \quad (4.23)$$

kde jsme zavedli další konstantu  $\tau_h = R_0/v_p$ , která má také rozměr času, přesněji řečeno vyjadřuje čas, ve kterém rázová vlna dospěje na povrch kolabujícího jádra  $R_0$ , tj. počátek expanze. Brzy poté bude  $t > 2\tau_h$ , to znamená, že druhý výraz v exponentu převýší první a v poklesu funkce  $\phi(t)$  bude se vzrůstajícím časem stále více převažovat gaussovský průběh nad exponenciálním.

### 4.3 Okrajové podmínky

Abychom nejlépe odhadli hodnoty příslušných konstant  $\tau_0$ ,  $\alpha^2$ , atd. budeme nyní řešit prostorovou část rovnice (4.20) s vhodnou volbou okrajových podmínek. V centru hvězdy zavedeme podmínku, plynoucí ze spojitě symetrie

rozložení teploty okolo středu  $\partial\Psi/\partial x = 0$ . Na „povrchu“ vyjdeme z obecné Eddingtonovy okrajové podmínky

$$T^4 = \frac{3}{4}T_{\text{ef}}^4 (\tau + q), \quad (4.24)$$

kde zvolíme  $q \approx 2/3$ , dále definujeme optickou hloubku jako

$$\tau = \int_r^{R(t)} \rho\kappa \, dr'. \quad (4.25)$$

Z rovnice (4.24) plyne, že  $\tau_{\text{ef}} = 2/3$ , na tuto optickou hloubku se tedy vztahují efektivní teploty hvězd. Pokud definujeme střední volnou dráhu  $\lambda = 1/\rho\kappa$ , která se velmi pozvolna mění, tedy je téměř konstantní, můžeme stanovit vnitřní poloměr fotosféry, resp. poloměr „dna“ fotosféry, jako

$$R_{\text{ph}}(t) = R(t) - \frac{2}{3}\lambda. \quad (4.26)$$

Volba  $q \approx 2/3$  odpovídá planparalelní atmosféře a musí být modifikována, pokud se  $\lambda$  stane význačnou vůči  $R_{\text{ph}}(t)$ . Obdobnou separací proměnných v prostorové části dostaneme

$$\Psi(x) = \frac{3}{4}\Psi_{\text{ef}} (\tau + q), \quad (4.27)$$

a po rozepsání

$$\Psi(x) = \frac{3}{4}\Psi_{\text{ef}} \left( \int_x^1 \frac{R(t)}{\lambda(x)} \, dx + q \right), \quad (4.28)$$

kde se  $\Psi_{\text{ef}}$  a  $q$  (protože jde jen o prostorové řešení) berou jako konstanty.

$$\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x} = -\frac{3}{4}\Psi_{\text{ef}} \frac{R(t)}{\lambda(x)}, \quad (4.29)$$

$R(t)/\lambda(x)$  má význam optické hloubky, derivace funkce  $\Psi(x)$  nezávisí na konstantě  $q$ . Z této rovnice vyjádříme  $\Psi_{\text{ef}}$  a dosadíme do rovnice (4.27) pro vnější „povrchovou“ hraniční podmínku  $x = a$ , kde ovšem  $\tau \rightarrow 0$ . Tím dostaneme modifikaci konstanty  $q$ ,

$$\Psi(a) = -\frac{2}{3} \frac{\partial\Psi}{\partial x} \Big|_a \frac{\lambda(a)}{R(t)}. \quad (4.30)$$

Pro hustý objekt,  $\lambda(a) \ll R(t)$ , tak  $\Psi(a) \rightarrow 0$ . Jakmile transparentnost, tj. poměr  $\lambda(a)/R(t)$  vzrůstá,  $\Psi(a)$  vzrůstá.

Do našich úvah o okrajových podmínkách na vnějším okraji musíme ovšem zahrnout také počáteční (časové) podmínky. V okamžiku, kdy rázová vlna dospěje na povrch kolabujícího jádra ( $r = R(0)$ , čas  $t = 0$ ) dojde k zahřátí a urychlení následně expandující obálky. Jak už bylo uvedeno, ve fotonovém plynu (v tomto případě jde o převažující fotonový plyn)  $\gamma = 4/3$ , za silnou rázovou vlnou se energie dělí (v případě, že zářivé ztráty jsou relativně malé – jak bylo již uvedeno) na tepelnou a kinetickou (budeme je značit  $E_{Th}$  a  $E_K$ ). Toto vezmeme jako přibližnou výchozí podmínku pro veškerý expandovaný plyn v čase  $t = 0$ .

Rovněž tak bude velmi užitečné zavést tři bezrozměrné veličiny, nazvané momenty – moment rozložení tepelné energie, moment rozložení kinetické energie, moment rozložení hmotnosti. Adiabatická homologická expanze ( $E_{Th} = aT^4V$ ,  $T \propto R(t)^{-1}$ ,  $V \propto R(t)^3$ , tedy  $E_{Th} \propto R(t)^{-1}$ ) umožňuje psát

$$E_{Th}(t) = E_{Th}(0)R(0)/R(t) \quad (4.31)$$

a celková energie exploze supernovy (označíme  $E_{SN}$ ) je

$$E_{SN} = E_{Th}(0) + E_K(0) = E_{Th}(t) + E_K(t) = E_{Th}(0)/f. \quad (4.32)$$

V případě silné rázové vlny v převážně fotonovém plynu pro poměr jednotlivých energií platí  $f = E_{Th}(0)/E_{SN} \approx 0,5$  (viz [1], str. 562), tedy  $E_{Th}(0) \approx E_K(0)$ . Na základě rovnice (4.31) lze tedy psát

$$E_{Th}(t) = fE_{SN}R(0)/R(t) = gE_{SN}, \quad (4.33)$$

kde jsme zavedli  $g = fR(0)/R(t)$  a podle rovnice (4.32)

$$E_{Th}(t) = g(E_{Th}(t) + E_K(t)) = gE_K(t)/(1 - g). \quad (4.34)$$

Z poslední rovnice vidíme, že po delší době, kdy  $R(t) \gg R(0)$ , tedy  $g \rightarrow 0$  musí  $E_{Th} \rightarrow 0$ , tedy  $E_K \rightarrow E_{SN}$ , tedy veškerá tepelná energie se přemění na kinetickou. Po dlouhé době tak musí platit  $E_k(t) = 2E_K(0)$ , z toho vyplývá  $\dot{R}(t) = v_p(t) = \sqrt{2}v_p(0)$ , což znamená asi 40ti procentní nárůst rychlosti během expanze. Většina tohoto nárůstu proběhne během prvního zdvojnásobení  $R(t)$ , což je zhruba za první den (i méně) od okamžiku  $t = 0$ , proto

je konstantní rychlost vhodnou aproximací pro pozdější období. Tepelnou energii fotonového plynu můžeme také vyjádřit jako

$$E_{Th}(t) = \int_V aT^4 dV = \int_0^{R(t)} 4\pi r^2 aT^4 dr. \quad (4.35)$$

Kinetickou energii lze psát

$$E_K(t) = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^{R(t)} 4\pi r^2 \rho v^2 dr. \quad (4.36)$$

Způsobem, zavedeným v rovnici (4.12), můžeme rovnici (4.35) rozepsat

$$E_{Th}(t) = 4\pi a \int_0^1 \Psi(x) \phi(t) \frac{R_0^4 T_0^4}{R(t)} x^2 dx, \quad (4.37)$$

a pokud definujeme již zmíněný moment (druhý moment) prostorového rozložení tepelné energie ve fotonovém plynu

$$I_{Th} = \int_0^1 \Psi(x) x^2 dx, \quad (4.38)$$

můžeme rovnici (4.37) přepsat

$$E_{Th}(t) = [4\pi a R_0^3 T_0^4] I_{Th} \phi(t) R_0/R(t). \quad (4.39)$$

Výraz v hranaté závorce má rozměr energie, výraz  $\phi(t) R_0/R(t)$  je funkcí času:  $R(t)^{-1}$  díky expanzi,  $\phi(t)$  díky zářivé difúzi.

Stejně tak můžeme separovat i rovnici (4.36), kde ovšem ještě

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [xR(t)] = xv_p. \quad (4.40)$$

Po dosazení tohoto výrazu do rovnice (4.36) můžeme psát

$$E_K(t) = 2\pi \int_0^1 \rho_0 R_0^3 v_p(t)^2 \eta(x) x^4 dx \quad (4.41)$$

a pokud obdobně definujeme (čtvrtý) moment prostorového rozložení kinetické energie ve fotonovém plynu

$$I_K = \int_0^1 \eta(x) x^4 dx, \quad (4.42)$$

můžeme rovnici (4.41) přepsat

$$E_K(t) = [2\pi \rho_0 R_0^3] v_p(t)^2 I_K, \quad (4.43)$$

kde výraz v hranaté závorce má rozměr hmotnosti, zbytek udává rychlostní škálu, tj. rychlost v závislosti na  $x$ .

Nakonec zavedeme stejným způsobem ještě druhý moment rozložení hmotnosti. Ve sféricky symetrickém případě

$$M = 4\pi \int_0^{R(t)} \rho r^2 dr = 4\pi \int_0^1 \rho_0 R_0^3 \eta(x) x^2 dx. \quad (4.44)$$

Druhý moment rozložení hmotnosti ve fotonovém plynu definujeme

$$I_M = \int_0^1 \eta(x) x^2 dx, \quad (4.45)$$

takže můžeme rovnici (4.44) zapsat jako

$$M = [4\pi \rho_0 R_0^3] I_M. \quad (4.46)$$

Všechny takto definované momenty budou velice potřebné později pro výpočty, zahrnující dodatečný radioaktivní ohřev, tj. pro řešení nehomogenních diferenciálních rovnic s pravou stranou, vyjadřující právě tento energetický zdroj.

Střední kvadratickou rychlost  $\langle v^2 \rangle = 2E_K/M$  lze pomocí rovnic (4.43) a (4.46) vyjádřit jako

$$\langle v^2 \rangle = v_p(t)^2 I_K/I_M. \quad (4.47)$$

Dříve, než budeme kvantifikovat výraz v závorce

$$\frac{I_K}{I_M} = \frac{\int_0^1 \eta(x) x^4 dx}{\int_0^1 \eta(x) x^2 dx}, \quad (4.48)$$

musíme se ještě zabývat exponenciální funkcí  $\eta(x)$ , tj. funkcí, udávající radiální průběh hustoty, která má obecný tvar

$$\eta(x) = e^{1,723Dx}. \quad (4.49)$$

Konstanta  $D$  v exponentu může prakticky nabývat libovolných hodnot v intervalu  $\langle -3, +3 \rangle$ . Příklad  $D = 0$  odpovídá stejnoměrné hustotě, ostatní hodnoty jdou postupně od silného nárůstu hustoty směrem k centru, až po silný nárůst hustoty směrem k povrchu. Rázová vlna přetvoří jakoukoli počáteční distribuci hustoty, takže tyto konstanty odpovídají rozdělení hustoty až po průchodu rázové vlny (po explozi). Hodnoty z oblasti  $D \approx 0$  se blíží strukturám hustoty, nalezeným v mnoha numerických simulacích. Faktor 1,723 má historický původ; v případě, že  $D = -1$  se  $\eta(x)$  nejvíce blíží předexplozivní struktuře červených veleobrů (viz [1], str. 564). Funkce tak má tvar  $\eta(x) = e^{-1,723x}$ .

Pro případ stejnoměrné hustoty ( $\eta(x) = 1$ ,  $I_K/I_M = 3/5$ ) platí

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{5} v_p(t)^2 \quad (4.50)$$

nebo také  $v_p(t) \approx 1,3v_{\text{rms}}$  (z anglického *root mean square* – odmocnina ze střední kvadratické rychlosti). Nárůst hustoty směrem k centru i zesílení rázové vlny směrem k povrchu jádra musí, vzhledem k výše uvedenému, dávat vyšší faktor.

## 4.4 Prostorové řešení

V dalším odstavci se budeme analyticky zabývat řešením prostorové části rovnice (4.20) v případě stejnoměrné hustoty ( $D = 0$ ,  $\eta(x) = 1$ ). Vzhledem k již zmíněnému Thomsonovu rozptylu také  $\kappa(x)/\kappa(0) = 1$ , čímž se řešení pravé části rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{1}{\Psi x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = -\alpha^2. \quad (4.51)$$

Po derivování výrazu v závorce a jednoduché úpravě přejde rovnice na tvar

$$x\Psi'' + 2\Psi' + \alpha^2 x\Psi = 0, \quad (4.52)$$

kteřou snadno vyřešíme pomocí substituce  $x\Psi(x) = z(x)$ . Obecné řešení substituované rovnice  $z'' + \alpha^2 z = 0$  po zpětném dosazení  $x\Psi$  bude

$$\Psi(x) = A \frac{\sin(\alpha x)}{x} + B \frac{\cos(\alpha x)}{x}. \quad (4.53)$$

V centru hvězdy ( $x = 0$ ) musí být konečná nenulová teplota, hodnota  $\Psi(0)$  musí být proto také konečná. Z toho důvodu konstanta  $B$  musí být nulová, jinak by  $\Psi(0) \rightarrow \infty$ . Navíc je výhodné zvolit  $\Psi(0) = 1$ , hodnotu konstanty  $A$  lze vyjádřit prostřednictvím  $T_0$ . Pokud  $\Psi(0) = 1$ , potom  $A = 1/\alpha$ . Takto normovaná funkce  $\Psi(x)$  bude

$$\Psi(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}. \quad (4.54)$$

Pro vnější povrch ( $x = 1$ )

$$\Psi(1) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad \Psi'(1) = \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \quad (4.55)$$

Na základě rovnice (4.30) můžeme vyjádřit i optickou hloubku  $R(t)/\lambda(1)$  pro  $x = 1$  jako funkci  $\alpha$

$$\frac{R(t)}{\lambda(1)} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha} \right). \quad (4.56)$$

Podmínka  $\Psi(1) \geq 0$ , vyplývající z požadavku nezáporné teploty, implikuje, že  $\alpha$  musí ležet v intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ . Nezáporná vlastní hodnota  $\alpha^2$  tedy musí ležet v intervalu  $\langle 0, \pi^2 \rangle$ , přičemž pro  $\alpha^2 = 0$  je funkce normována, takže  $\Psi(1) = 1$ , pro  $\alpha^2 = \pi^2$  funkce  $\Psi(1) = 0$ , tedy řešení s nulovým vyzařováním. Na základě všech těchto předpokladů můžeme zkonstruovat tabulku průběhu těchto (vlastních) funkcí pro některé vlastní hodnoty  $\alpha^2$ :

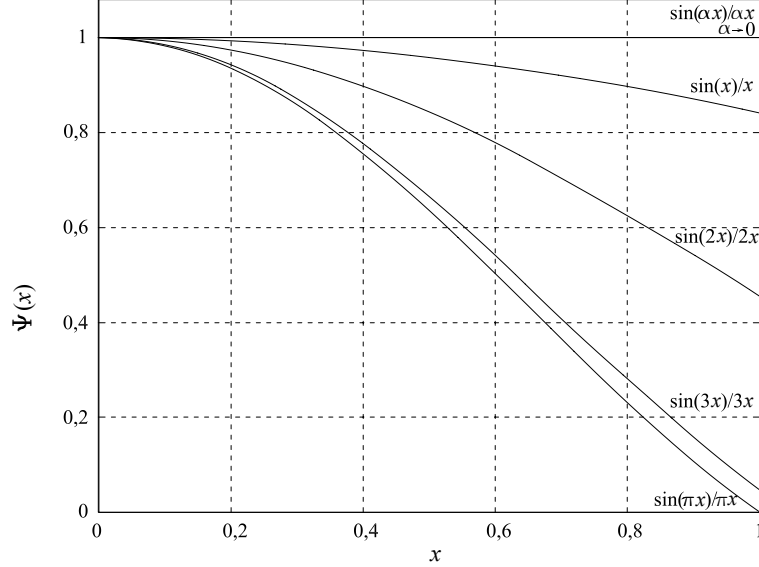
Tabulka 4.1: Vlastní funkce

$\alpha^2$	$\Psi(1)$	$\Psi(1)'$	$R(t)/\lambda(1)$
0	1	0	0
2	0,6985	-0,5425	0,518
4	0,4546	-0,8708	1,277
6	0,2605	-1,0304	2,637
7	0,1798	-1,0594	3,928
8	0,1089	-1,0603	6,490
9	0,0470	-1,0370	14,697
9,5	0,0193	-1,0175	35,227
9,85	9,947(-4)	-1,0010	670,92
$\pi^2$	0	-1	$\infty$

Z tabulky je vidět, že až při poměrně malých  $(R(t)/\lambda(1) < 10)$  optických hloubkách se funkce  $\Psi(1)$  výrazněji odchýlí od řešení s nulovým vyzařováním



$\alpha^2 = \pi^2$  (numerické modely pro případy nerovnoměrných hustot dávají podobné výsledky).



Obrázek 4.2: Řešení s nulovým vyzařováním – graf závislosti  $\Psi(x)$  na  $x$  (vztah 4.54) pro některé hodnoty  $\alpha$ .

V následující tabulce 4.2 se zaměříme pouze na toto „řešení s nulovým vyzařováním“, které bude diskutováno pro různé volby funkce rozložení hustoty  $\eta(x)$ . Vlastní hodnoty  $\alpha^2$  a hodnoty druhého momentu prostorového rozložení tepelné energie ve fotonovém plynu  $I_{Th}$  pro nerovnoměrné hustoty ( $D \neq 0$ ) jsou vypočítány numerickou integrací z rovnice

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^2 \exp(-1,723Dx) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = -\alpha^2 \Psi \quad (4.57)$$

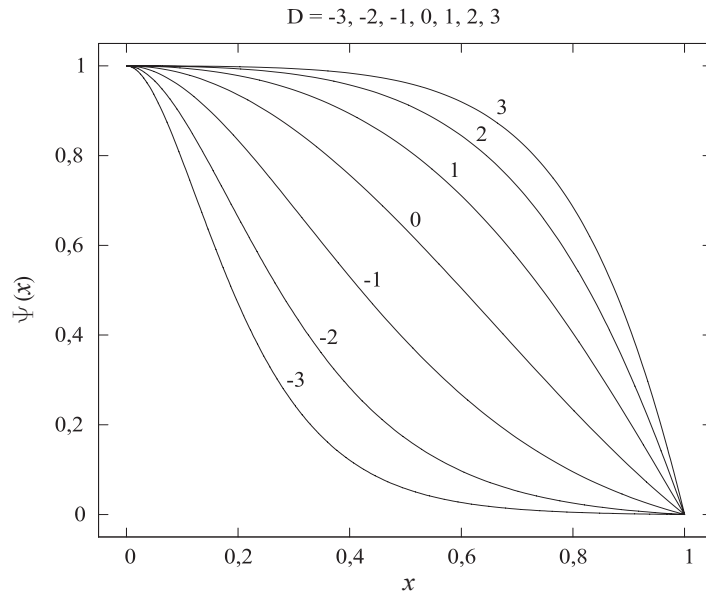
na základě stejných okrajových podmínek, jako v případě  $D = 0$  (viz zdrojový soubor č. 2, kapitola A.1 v příloze A).

Hodnoty momentů  $I_K$ ,  $I_M$  získáme integrací rovnic (4.42), (4.45), do kterých dosadíme rovnici (4.49). Výpočet podílu povrchové rychlosti a odmocniny ze střední kvadratické rychlosti  $v_p/v_{rms}$  provedeme na základě vztahu (4.47). Z tabulky 4.2 je dále vidět, že hodnoty  $\eta(1)$ , vyjadřující podíl povrchové a centrální hustoty, se liší v maximu až téměř o pět řádů. Hodnoty podílu  $v_p/v_{rms}$  směrem k nižším centrálním koncentracím (přirozeně) mírně klesají. Důležitými veličinami, užitečnými pro další výpočty, jsou téměř konstantní

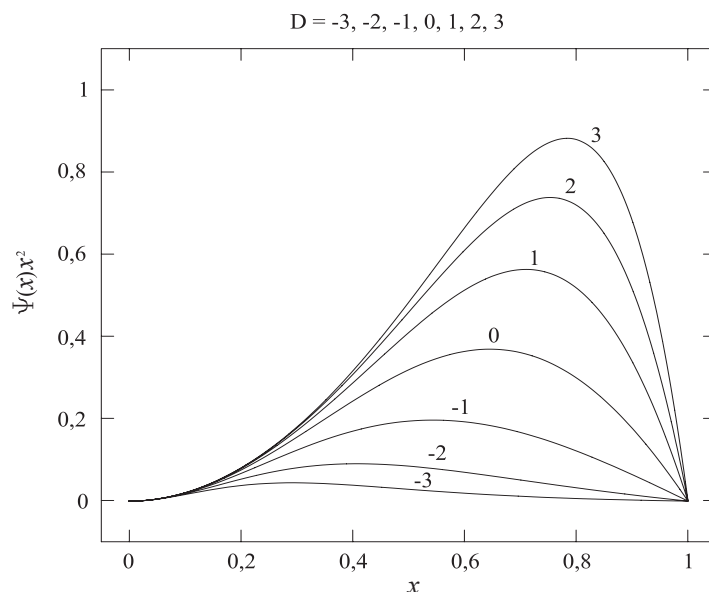
součiny  $\alpha^2 I_K$ ,  $\alpha^2 I_M$ , kterých se poměrně málo dotýkají i velké změny vnitřní stavby hvězdy a pohybují se zhruba okolo hodnot 2 a 3.

Tabulka 4.2: Řešení s nulovým vyzařováním

$D$	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$\alpha^2$	189,720	89,007	32,931	$\pi^2$	2,566	0,610	0,137
$I_{Th}$	1,028	2,485	5,619	0,101	0,146	0,183	0,210
$I_K$	3,829	0,013	0,049	0,2	0,864	3,897	18,187
$I_M$	0,013	0,032	0,097	1/3	1,277	5,305	23,374
$v_p/v_{rms}$	1,836	1,580	1,406	1,291	1,216	1,167	1,134
$\eta(1)$	0,006	0,032	0,179	1	5,601	31,375	175,740
$\alpha^2 I_K$	0,726	1,166	1,620	1,974	2,215	2,376	2,487
$\alpha^2 I_M$	2,447	2,911	3,204	3,290	3,275	3,235	3,196



Obrázek 4.3: Graf závislosti  $\Psi(x)$  na  $x$  podle vztahu (4.57) pro vybrané hodnoty  $D$  v intervalu  $\langle -3, +3 \rangle$ . Vně tohoto intervalu viditelně průběh křivek začíná postrádat fyzikální smysl. Zdrojový soubor č. 2, kapitola A.1, příloha A.



Obrázek 4.4: Graf závislosti  $\Psi(x)x^2$  na  $x$  podle vztahu (4.38) pro vybrané hodnoty  $D$  v intervalu  $\langle -3, +3 \rangle$ . Zdrojový soubor č. 3, kapitola A.1, příloha A.

## 4.5 Zářivý výkon

Vyjdeme-li z rovnice zářivé rovnováhy (4.5), dostaneme po dosazení (4.12), (4.17) tuto rovnici

$$L = -\frac{4\pi ac R_0 T_0^4}{3\rho_0 \kappa(x) \eta(x)} \phi(t) x^2 \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}. \quad (4.58)$$

Na základě předpokladu z předchozího odstavce, že  $\kappa(x)/\kappa(0) = 1$  (Thomsonův rozptyl), lze položit  $\kappa(x) = \kappa(0) = \kappa_0$ , po úpravě dostáváme

$$L = -\frac{4\pi ac}{3\kappa_0 \rho_0} R_0 T_0^4 \phi(t) \left[ \frac{x^2}{\eta(x)} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right]_{x=1}. \quad (4.59)$$

Rovnici (4.57) je možné přepsat

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{\eta(x)} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right) dx = -\alpha^2 \int_0^1 \Psi(x) x^2 dx. \quad (4.60)$$

Výraz na pravé straně je ovšem  $-\alpha^2 I_{Th}$ , takže

$$\left[ \frac{x^2}{\eta(x)} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right]_{x=1} = -\alpha^2 I_{Th}. \quad (4.61)$$

Rovnice (4.59) bude tedy vypadat

$$L = \frac{4\pi ac}{3\kappa_0 \rho_0} R_0 T_0^4 \phi(t) \alpha^2 I_{Th} \quad (4.62)$$

Rovnici (4.39) lze v čase  $t = 0$  v souladu s rovnicí (4.23), ze které vyplývá, že  $\phi(0) = 1$ , napsat

$$E_{Th}(0) = [4\pi a R_0^3 T_0^4] I_{Th}. \quad (4.63)$$

Z rovnice (4.46) vyplývá

$$4\pi R_0^3 = \frac{1}{\rho_0} \frac{M}{I_M}. \quad (4.64)$$

Po jejím dosazení do rovnice (4.63) lze psát

$$I_{Th} = \frac{\rho_0}{\alpha T_0^4} \frac{I_M}{M} E_{Th}(0). \quad (4.65)$$

Po dosazení tohoto výrazu do rovnice (4.62) lze tedy zářivý výkon vyjádřit

$$L(1, t) = \frac{4\pi c R_0 E_{Th}(0)}{3\kappa_0 M} \alpha^2 I_M \phi(t). \quad (4.66)$$

Tím se podařilo vyjádřit zářivý výkon pomocí výrazu, který, s výjimkou  $\phi(t)$ , je konstantní, součin  $\alpha^2 I_M$  (viz tabulku 4.2) je téměř nezávislý na jakkoli výrazných změnách funkce průběhu hustoty  $\eta(x)$  a jeho hodnota se pohybuje zhruba okolo 3. Můžeme tedy napsat

$$L(1, t) = L(1, 0) \phi(t), \quad (4.67)$$

takže  $\phi(t)$  obsahuje veškerou časovou závislost. Výraz pro  $L(1, 0)$ , tj. pro celkový zářivý výkon v čase  $t = 0$ , lze ještě upravit; z rovnice (4.47), do které dosadíme  $\langle v^2 \rangle = 2E_K/M$ , dostáváme

$$I_M = I_K v_p(t)^2 M / (2E_K(t)). \quad (4.68)$$

V kapitole 4.3 jsme odvodili, že

$$E_K(t \gg t_0) \rightarrow E_{SN}, \text{ tedy } E_K(t) \approx E_{Th}(0)/f. \quad (4.69)$$

Po dosazení do rovnice (4.70) s tím, že  $v_p(t)$  pro  $t \gg t_0 \approx \text{konst.} = v_p$ , pro výraz  $L(1, 0)$  vyplývá

$$L(1, 0) \approx \left[ \frac{2\pi}{3} c f \alpha^2 I_K \right] \frac{R_0 v_p^2}{\kappa_0}. \quad (4.70)$$

Výraz v hranaté závorce je opět poměrně nezávislý na detailech modelu, s výjimkou velmi silné koncentrace hustoty ke středu platí  $\alpha^2 I_K \approx 2$ . V uvedené aproximaci ( $t \gg t_0$ ) je proto  $L(1, 0)$  závislý pouze na počátečním poloměru  $R_0$ , opacitě  $\kappa_0$  a kinetické energii „povrchu“ na jednotku hmotnosti  $v_p^2$ .

Křivka celkového zářivého výkonu jako funkce  $\phi(t)$  tak představuje charakteristiku supernovy, nezávislou na její vzdálenosti. Pro funkci  $\phi(t)$  ve stejné aproximaci ( $t \gg t_0$ ) z rovnice (4.23) vyplývá

$$\phi(t) \approx \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_0\tau_h}\right). \quad (4.71)$$

Dobu, za kterou hodnota funkce  $\phi(t)$  klesne na  $e^{-n}$  původní hodnoty (kde  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), označíme  $t_n$ . Z rovnice (4.71) je okamžitě vidět, že

$$t_n = \sqrt{2n\tau_0\tau_h}. \quad (4.72)$$

Dosadíme-li za  $\tau_0$  podle (4.19) a  $\tau_h = R_0/v_p$  (viz kapitola 4.2), při zahrnutí rovnice (4.64), dostaneme

$$t_n = \left(\frac{M\kappa_0}{v_p}\right)^{1/2} \left(\frac{3n}{2\pi c \alpha^2 I_M}\right)^{1/2}. \quad (4.73)$$

Výraz ve druhé závorce opět nezávisí na rozložení hustoty (již známý invariant  $\alpha^2 I_M$  ve jmenovateli), takže čas  $t_n$  je mírou expandující hmotnosti  $M$ , tj. hmotnosti rozpínající se obálky supernovy. Čas  $t_n$  ovšem závisí také na hodnotě opacity a na předpokladu, že opacita je konstantní v čase (rekombinace při nižších teplotách sníží efektivní hodnotu opacity). Vše vychází z předpokladu sférické symetrie, nepravidelný tvar by mohl mít výrazné „díry“, kterými prochází záření rychleji, než předpokládá hladký sféricky symetrický model. Jak možnost rekombinace, tak určité míry nepravidelnosti, vytváří „chybu“ ve smyslu vyšší expandující hmotnosti, než je odvozená.

## 4.6 Radioaktivní ohřev

Světelné křivky z předchozí kapitoly je nyní třeba zobecnit zahrnutím efektů radioaktivního ohřevu, způsobeného radioaktivním rozpadem různých nuklidů. Mezi nimi jsou z hlediska ohřevu nejvýznamnější  $^{56}\text{Ni}$  a  $^{56}\text{Co}$ . Řešení s ohřevem (nehomogenní parabolická parciální diferenciální rovnice) je „analytické“ pouze v tom smyslu, že je vyjádřené pomocí integrálů, snadno řešitelných numericky, které mohou být rovněž tabelovány jako funkce.

Jednoduchý, přitom astrofyzikálně významný případ, zahrnující ohřev, je: malý počáteční poloměr, zdrojem energie (ohřevu) je exponenciální radioaktivní rozpad jednoho významného prvku (například  $^{56}\text{Ni}$ ). Ten je možné rozšířit i na případy větších počátečních poloměrů; světelné křivky bez ohřevu (řešení z předchozí kapitoly) se ukáží jako limitní případ. Metodu můžeme posléze zobecnit zahrnutím radioaktivního rozpadu i dalších prvků a vzrůstající průhlednosti pro gama a rentgenové záření. Efekt, plynoucí z dostředně se pohybující meze rekombinace při chladnutí, může být zahrnut jako změna vnějšího okraje.

Zjednodušující předpoklady jsou: homologická expanze a sférická symetrie, zcela převažující tlak záření, vybraný prvek je v expandující obálce přítomen a průběh rozložení jeho hustoty jenom mírně narůstá směrem k centru.

Výchozími rovnicemi pro další úvahy budou (4.7), (4.8), kde  $\epsilon$  je výkon radioaktivního ohřevu na jednotku hmotnosti. Nechť

$$\epsilon = \epsilon^0 \xi(x) \nu(t), \quad (4.74)$$

kde  $\epsilon^0$  je konstanta,  $\xi(x)$  vyjadřuje prostorové rozložení hustoty nuklidu, který způsobuje ohřev (analogie  $\eta(x)$ , kde se ovšem jedná o veškerou hmotu) a  $\nu(t)$  je funkcí, vyjadřující časovou závislost ohřevu. Funkce  $\nu(t)$  pro jeden obecný nuklid  $X$  s poločasem rozpadu  $\tau_X$  má obecnou podobu

$$\nu(t) = e^{-t/\tau_X}. \quad (4.75)$$

Například pro jednoduchý rozpad samotného  $^{56}\text{Ni}$ ,  $\epsilon_0^{\text{Ni}} = 4,78 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu(t) = e^{-t/\tau_{\text{Ni}}}$ , kde  $\tau_{\text{Ni}} = 7,605 \times 10^5 \text{ s}$ .

Při řešení výchozích rovnic postupujeme stejně, jako v případě bez ohřevu, rovnice (4.11), se zahrnutím rovnice (4.15), bude potom vypadat

$$aT^4 \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ac}{3\kappa\rho} r^2 \frac{\partial T^4}{\partial r} \right) + \epsilon. \quad (4.76)$$

Po separaci proměnných (zatím pouze v prvním členu na pravé straně) podle rovnic (4.12) a (4.17) a úpravě lze psát

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{R(t)}{\tau_0 R_0} \frac{1}{x^2 \Psi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{\eta(x)} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right) + \frac{\epsilon}{a T^4 V}. \quad (4.77)$$

Poslední člen na pravé straně lze rozepsat ( $V = 1/\rho$ )

$$\frac{\epsilon}{a T^4 V} = \frac{\epsilon^0 \xi(x) \nu(t)}{a \Psi(x) \phi(t)} \frac{R(t)^4}{R_0^4 T_0^4} \frac{\rho_0 \eta(x) R_0^3}{R(t)^3}. \quad (4.78)$$

Počáteční objem  $V(0, 0)$  (označíme  $V_0$ ) je podle rovnice (4.17) roven  $1/\rho_0 \eta_0$ , ovšem podle rovnice (4.49):  $\eta_0 = 1$ , takže lze psát  $\rho_0 = 1/V_0$ . Platí tedy

$$\frac{\epsilon}{a T^4 V} = \left[ \frac{\epsilon^0}{a T_0^4 V_0} \right] \frac{R(t)}{R_0} \frac{1}{\phi(t)} \left[ \frac{\xi(x) \eta(x)}{\Psi(x)} \right] \nu(t). \quad (4.79)$$

Přesné rozložení hustoty radioaktivních nuklidů v obálce supernovy nelze určit. Pro řešení tohoto výrazu použijeme tedy následující aproximace. Nejprve předpokládáme, že toto rozložení je časově neproměnné. Dále, z kapitoly 4.4 je zřejmé, že prostorové rozložení teploty v obálce narůstá směrem k centru. V teplejších centrálních oblastech lze očekávat vyšší výskyt produktů nukleosyntézy, funkce rozložení hustoty radioaktivních nuklidů  $\xi(x)$  také narůstá směrem k centru. Hydrodynamické nestability by měly vyhladit původně ostrý pík tohoto rozložení do mírnějšího průběhu. Jakmile se radioaktivní ohřev stane důležitým, jeho relativní příspěvek k lokálnímu i celkovému objemu tepla narůstá, takže vše se ještě více blíží uvedené aproximaci. Konečně, s klesající optickou hloubkou se funkce rozložení teploty také zmírňuje (viz tabulka 4.1). Podobně, jak klesá optická hloubka pro gama a rentgenové záření, rozložení energie se stává méně lokalizované, tedy jeho průběh mírnější.

Průběh rozložení hustoty radioaktivních nuklidů musí být také svázán s průběhem rozložení celkové hustoty  $\eta(x)$ . Z popsaných důvodů můžeme brát výraz ve druhé hranaté závorce předchozího vztahu jako konstantu (kterou označíme například  $b$ ), tedy  $b = [\xi(x)\eta(x)/\Psi(x)] \approx \text{konst.}$  To ale znamená, že celý výraz pro radioaktivní ohřev, popsáný rovnicí (4.79), je závislý pouze časově, takže prostorové řešení rovnice (4.77), pokud definujeme vlastní hodnotu  $\alpha^2$  stejně jako v předešlém řešení bez ohřevu, bude

$$\frac{1}{x^2 \Psi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{\eta(x)} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right) = -\alpha^2, \quad (4.80)$$

tedy totožné s výrazem pro řešení bez ohřevu (viz rovnice (4.57)). Za stejných podmínek bude časové řešení podle rovnic (4.77) a (4.79) vypadat

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} = -\frac{R(t)}{\tau_0 R_0} + \left[ \frac{b \epsilon^0}{a T_0^4 V_0} \right] \frac{1}{\phi} \frac{R(t)}{R_0} \nu(t). \quad (4.81)$$

Pokud označíme konstantní výraz v hranaté závorce:  $\tilde{\epsilon} = [b \epsilon^0 / a T_0^4 V_0]$ , bude po malých úpravách a dosazení za  $\nu(t)$  rovnice (4.81) vypadat

$$\dot{\phi} + \frac{R(t)}{\tau_0 R_0} \phi = \tilde{\epsilon} \frac{R(t)}{R_0} e^{-t/\tau_x}. \quad (4.82)$$

## 4.7 Řešení pro malé počáteční poloměry

Označme na čase závislý faktor z předchozí rovnice  $R(t)/\tau_0 R_0 = \dot{u}$ , kde  $R(t) = R(0) + v_p t$ , potom

$$u(t) = \frac{t}{\tau_0} + \frac{v_p t^2}{2\tau_0 R_0}. \quad (4.83)$$

Již dříve jsme zavedli  $R_0/v_p = \tau_h$ , nyní zavedeme další časový parametr  $\tau_m$  (efektivní doba zářivé difúze):  $\tau_m^2 = 2\tau_0 R_0/v_p = 2\tau_0 \tau_h$ , takže rovnice (4.83) bude

$$u(t) = \left[ \frac{t}{\tau_0} + \left( \frac{t}{\tau_m} \right)^2 \right]. \quad (4.84)$$

Tento parametr má zásadní vliv na chování světelných křivek v případě řešení bez ohřevu (viz rovnice (4.71)), rovněž zde bude jedním ze základních parametrů. Nyní můžeme rovnici (4.82) přepsat

$$\tilde{\epsilon} \frac{R(t)}{R_0} e^{-t/\tau_x} = \dot{\phi} + \phi \dot{u} = e^{-u} \frac{d}{dt} (\phi e^u). \quad (4.85)$$

Pro jednoduchost budeme nyní uvažovat případ, kdy  $R_0$  je malé, tj.  $R_0 \rightarrow 0$ , obecnější případ s libovolným  $R_0$  uvedeme v následující kapitole. Nejdříve se ještě pozorně podíváme na konstantní časový parametr  $\tau_0$ . V kapitole 4.3 jsme definovali 2. moment rozložení hmotnosti (viz vzorce (4.45), (4.46))

$$I_M = \int_0^1 \eta(x) x^2 dx = \frac{M}{4\pi \rho_0 R_0^3} = \frac{V_0 M}{4\pi R_0^3}, \quad (4.86)$$



kde  $M$  je celková hmotnost expandující obálky. Dále, rovnici (4.19) přepíšeme jako  $\tau_0 = 3R_0^2\kappa_0/V_0c$ , kde  $V_0$  se podle rovnice (4.86) rovná  $4\pi R_0^3 I_M/M$ . Podle tabulky 4.2 často používaný součin  $\alpha^2 I_M \approx 3$ , lze tedy definovat další parametr  $\beta = 4\pi\alpha^2 I_M/3$ , tedy  $\beta \approx 13,8$ . Rovnice (4.19) potom bude

$$\tau_0 R_0 = \frac{M\kappa_0}{\beta c} = \text{konst.}, \quad (4.87)$$

takže pokud  $R_0 \rightarrow 0$ , potom  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Z rovnice (4.84) je okamžitě vidět, že v tomto případě první člen na pravé straně  $t/\tau_0 \rightarrow 0$  a celá rovnice (4.84) se potom zjednoduší na

$$u(t) \rightarrow \left(\frac{t}{\tau_m}\right)^2. \quad (4.88)$$

Abychom dále upřesnili konstantní faktor  $\tilde{\epsilon}$  z předchozí kapitoly (rovnice (4.82)), kde  $\tilde{\epsilon} = [b\epsilon^0/aT_0^4V_0]$ , musíme opět použít některé identity. Označme celkovou „počáteční“ hmotnost vybraného radioaktivního nuklidu  $X$ , tj. jeho celkovou hmotnost v obálce supernovy v čase  $t = 0$ , jako  $M_X^0$  (například  $M_{Ni}^0$ ). Potom musí platit  $M_X^0 = \int \xi(x) dV_0$ , kde  $V_0$  se podle rovnice (4.17) rovná výrazu  $V\eta(x)R_0^3/R(t)^3$ . Lze tedy psát

$$M_X^0 = \int_V \xi(x)\eta(x)\frac{R_0^3}{R(t)^3} dV = \int_0^{R(t)} \xi(x)\eta(x)\frac{R_0^3}{R(t)^3} \frac{1}{V_0} 4\pi r^2 dr. \quad (4.89)$$

Zavedeme-li  $x = r/R(t)$ , po jednoduchých úpravách dostáváme

$$M_X^0 = \frac{4\pi R_0^3}{V_0} \int_0^1 \xi(x)\eta(x) x^2 dx. \quad (4.90)$$

V rovnici (4.39) je vyjádřeno celkové množství tepelné energie

$$E_{Th}(t) = [4\pi a R_0^3 T_0^4] I_{Th} \phi(t) R_0/R(t), \quad (4.91)$$

kde podle rovnice (4.38) druhý moment prostorového rozložení tepelné energie ve fotonovém plynu

$$I_{Th} = \int_0^1 \Psi(x) x^2 dx. \quad (4.92)$$

Shrneme-li všechny tyto výsledky, můžeme novým způsobem zavést konstantu  $b$ , kterou jsme v předchozí kapitole definovali jako  $b = [\xi(x)\eta(x)/\Psi(x)]$ . Rozšířením konstantní pravé strany  $[\xi(x)\eta(x)/\Psi(x)]$  dostaneme

$$b = \frac{4\pi R_0^3}{V_0} \frac{\int_0^1 \xi(x)\eta(x) x^2 dx}{\int_0^1 \Psi(x)x^2 dx} \left[ \frac{V_0}{4\pi R_0^3} \right], \quad (4.93)$$

kde se výraz před hranatou závorkou podle (4.90), (4.92) rovná  $M_X^0/I_{Th}$ , faktor v hranaté závorce (rovnice (4.86)) je  $I_M/M$ . Při rozdělení původního faktoru  $b$  do dvou integrálů (v čitateli a jmenovateli) se využívá toho, že čítec  $\xi(x)\eta(x)$  i jmenovatel  $\Psi(x)$  mají stejný průběh, liší se pouze o konstantu.

Rovnici (4.93) můžeme tedy přepsat

$$b = \left( \frac{M_X^0}{M} \right) \frac{I_M}{I_{Th}}. \quad (4.94)$$

Pro faktor  $\tilde{\epsilon} = [b \epsilon_X^0/a T_0^4 V_0]$  musí po zahrnutí rovnice (4.93) a po rozšíření v duchu rovnice (4.91) platit

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_X^0 M_X^0 \left[ \frac{\phi(t) R_0/R(t)}{4\pi a R_0^3 T_0^4 I_{Th} \phi(t) R_0/R(t)} \right]_{t=0}, \quad (4.95)$$

kde celý výraz ve jmenovateli je právě  $E_{Th}(0)$  (4.91). Můžeme tedy psát

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon_X^0 M_X^0 \phi(0)}{E_{Th}(0)}. \quad (4.96)$$

Pokud tedy  $R_0 \rightarrow 0$ , což je v této kapitole předpoklad a pokud  $E_{Th}(0) \neq 0$ , respektive  $E_{Th}(0) > 0$ , potom musí mít konstanta  $\tilde{\epsilon}$  konečnou hodnotu.

Nyní můžeme přikročit k obecnému řešení funkce  $\phi(t)$  v této aproximaci. Vydeme z rovnice (4.85), do které za  $u(t)$  dosadíme rovnici (4.88). Řešení homogenní rovnice známe, je to rovnice (4.71), přepsáno s nověji zavedenými konstantami:  $\phi(t) = \exp(-t^2/\tau_m^2)$ . Partikulární řešení nalezneme standardním způsobem, metodou variace konstant obyčejné lineární diferenciální rovnice 1. řádu. Za  $\dot{u}$  dosadíme  $(1+v_p t/R_0)/\tau_0$ , kde ovšem  $v_p t/R_0 \gg 1$ , takže:  $\dot{u} \approx t/\tau_0 \tau_h \approx 2t/\tau_m^2$ . Hodnotu  $\phi(0)$  ve faktoru  $\tilde{\epsilon}$  můžeme vzhledem k rovnici (4.23) položit rovnu jedné. Obecné řešení bude součtem partikulárního a homogenního řešení a bude vypadat

$$\phi(t) = \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} e^{-t^2/\tau_m^2} \int_0^t e^{t'^2/\tau_m^2} \frac{t'}{\tau_h} e^{-t'/\tau_X} dt' + e^{-t^2/\tau_m^2}. \quad (4.97)$$

Exaktní řešení této rovnice je v zásadě možné pouze numerickou integrací. Můžeme však opět udělat některé význačné aproximace.

- (a) První aproximace se týká doby krátce po začátku expanze, kdy  $t \rightarrow 0$ , tedy  $t \ll \tau_m$ , kdy, po úpravách podle rovnic (4.86), (4.87), „efektivní doba zářivé difúze“  $\tau_m = (2\kappa M/\beta c v_p)^{1/2}$  je velká (relativně velká vůči  $t$ ) při „velkém“  $\kappa M/v_p$  (viz rovnice (4.73)). Zároveň lze také psát  $t \ll \tau_X$ . Všechny členy  $\exp(\omega)$  budou vyjádřeny pomocí Taylorova rozvoje až do 1. derivace a následně ponechány pouze konstanty, lineární a kvadratické členy. Do rozvoje nebude ovšem zahrnuto homogenní řešení, protože vzhledem k velikosti konstant, náležejících k prvnímu členu je toto zanedbatelné. Výsledná aproximativní funkce bude

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \frac{t^2}{2\tau_h}. \quad (4.98)$$

Tato aproximace odpovídá rostoucí části světelné křivky, kdy „efektivní difúzní časy“  $\tau_m$  jsou „dlouhé“.

- (b) Další aproximace – průběh funkce  $\phi(t)$  v okolí maxima světelné křivky získáme z rovnice (4.85), kde položíme  $\dot{\phi} = 0$ . Rovnice potom bude

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \tau_0 e^{-t/\tau_X}. \quad (4.99)$$

V maximu světelné křivky se ztráta energie zářivou difúzí vyrovná s příspěvkem radioaktivního ohřevu. Křivka rozpadu radioaktivního prvku  $X$  protne křivku celkového zářivého výkonu v jeho maximu. To znamená, že zářivý výkon v daném okamžiku závisí na opacitě pouze nepřímo přes výraz  $\tau_m/\tau_X$  a ten je zcela nezávislý na tvaru světelné křivky.

- (c) Poslední aproximace se týká doby, kdy  $t \gg t_0$ , tedy „pozdější doby“. V tomto období je také expandující obálka již značně rozsáhlá a řídká, lze tedy stanovit:  $t/\tau_m \gg \tau_m/\tau_x$ , kde, po úpravách podle rovnic (4.86), (4.87),  $\tau_m = (2\kappa M/\beta c v_p)^{1/2}$ . Parametr  $\tau_m$  je „malý“ při „malém“  $\kappa M/v_p$ . V této aproximaci lze také zhruba stanovit  $t \approx n \tau_X$ . Homogenní člen bude rovněž zanedbán. Rovnice (4.97) potom bude vypadat

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} e^{-t^2/\tau_m^2} \left[ e^{-t/\tau_X} \right]_0^t \int_0^t \frac{d}{dt} \left( e^{t^2/\tau_m^2} \right) \tau_0 dt,$$

a po dokončení integrace

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \tau_0 \left( e^{-t/\tau_X} - e^{-t^2/\tau_m^2} \right). \quad (4.100)$$

Pro velmi „malou efektivní dobu zářivé difúze“  $\tau_m$  se členy s kvadratickými exponenty mohou zanedbat a funkce  $\phi(t)$  bude pouze funkcí radioaktivního rozpadu

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \tau_0 e^{-t/\tau_X}. \quad (4.101)$$

## 4.8 Řešení pro libovolné počáteční poloměry

V rovnici (4.84) jsme zavedli výraz  $u(t)$ , obecné řešení rovnice (4.85) (viz popis při řešení rovnice (4.97) s tím, že nyní za  $\dot{u}$  dosadíme celý nezjednodušený výraz  $(1 + v_p t/R_0)/\tau_0$ ), bude

$$\phi(t) = \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} e^{-u(t)} \int_0^t e^{u(t')} \left( 1 + \frac{t'}{\tau_h} \right) e^{-t'/\tau_X} dt' + e^{-u(t)}. \quad (4.102)$$

Provedeme stejné aproximace obdobným způsobem i s obdobnými závěry, jako v předchozí kapitole pro řešení s malým počátečním poloměrem.

(a) Aproximace pro dobu krátce po začátku expanze:

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \left[ t + \left( \frac{1}{\tau_h} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_X} \right) \frac{t^2}{2} \right]. \quad (4.103)$$

(b) Aproximace v okolí maxima světelné křivky:

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \tau_0 e^{-t/\tau_X}. \quad (4.104)$$

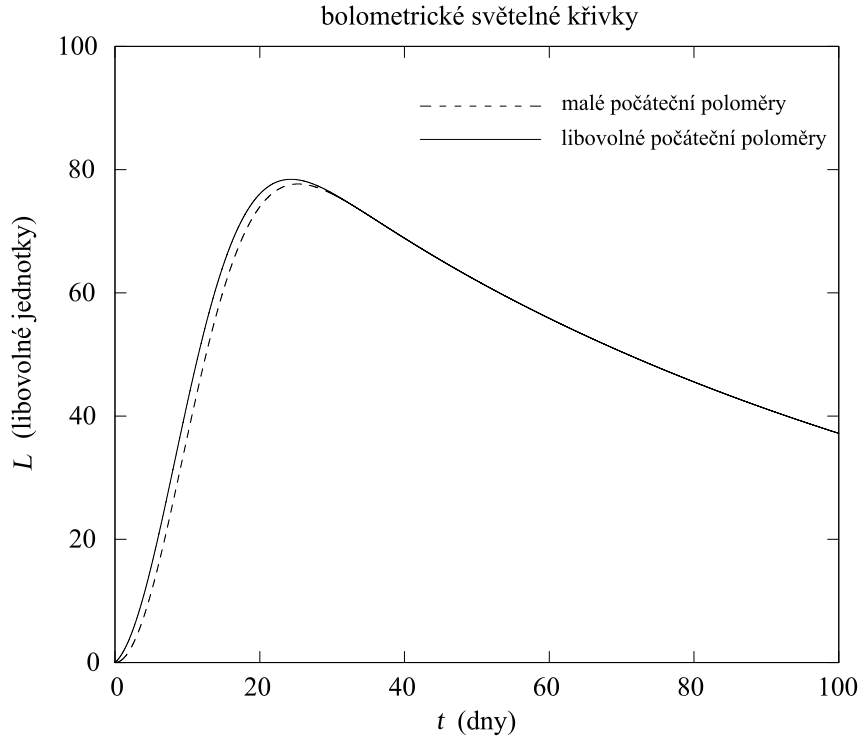
(c) Aproximace, kdy  $t \gg t_0$ :

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \tau_0 \left( e^{-t/\tau_X} - e^{-u(t)} \right). \quad (4.105)$$

Pro velmi „malou efektivní dobu zářivé difúze“ bude opět

$$\phi(t) \approx \frac{\epsilon_X^0 M_X^0}{E_{Th}(0)} \tau_0 e^{-t/\tau_X}. \quad (4.106)$$

Z rovnice (4.102) je vidět, že  $\phi(0) = 1$ , dále  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ , což je stejné jako v řešení bez ohřevu. Také je vidět, že pokud bychom položili  $\epsilon_X^0 M_X^0 = 0$ , dostaneme  $\phi(t) = e^{-u(t)}$ , což je opět řešení funkce  $\phi(t)$  bez ohřevu.



Obrázek 4.5: Numerický výpočet průběhu funkce (4.67), kde funkce  $\phi(t)$  je zobrazena pro malé i libovolné počáteční poloměry – grafické zobrazení rovnic (4.97), (4.102) se zvolenými hodnotami (např. v jednotkách dní)  $\tau_0 = 100$ ,  $\tau_h = 1$ ,  $\tau_X = 100$ , a s jednotkovými hodnotami všech ostatních konstant. Viz zdrojový soubor č. 6., kapitola A.1, příloha A.

Z uvedeného je tedy vidět, že v „pozdější době“, tj. v době zhruba od maxima světelné křivky, obzvláště potom v době klesající fáze, se průběh světelné křivky chová obdobně v případech malých i libovolně velkých poloměrů.

# Kapitola 5

## Světelné křivky supernov typu Ia

### 5.1 Termonukleární supernovy

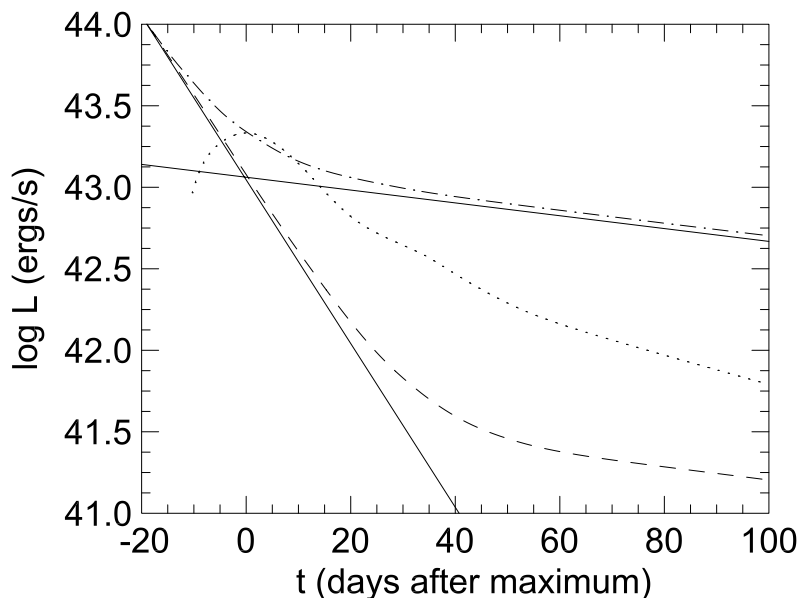
Termonukleární zapálení bílých trpaslíků následkem přetoku látky v podvojném systému, které je nejpreferovanějším současným scénářem (i když i tento scénář má v poslední době více variant – viz tato kapitola, str. 68) pro tento typ supernovy, nepředpokládá průchod rázové vlny, podobné té u supernov II. typu, povrchem hvězdy. Nárůst jasnosti je způsoben rychlým rozpínáním obálky a trvá zhruba tři týdny. Tvar světelné křivky ve fázi nárůstu jasnosti je určován především rostoucí difúzí fotonů z obálky.

Maxima bývá nejprve dosaženo v blízkých infračervených (NIR) vlnových délkách, až zhruba o několik dní později následují optické vlnové délky. Zatímco světelná křivka v modré barvě ( $B$ ) vykazuje několik měsíců po svém maximu monotónní pokles jasnosti, křivky v NIR vlnových délkách, tj. v barvách  $I$ ,  $J$ ,  $H$  a  $K$  vytvářejí u většiny supernov typu Ia zhruba po dvaceti dnech druhé maximum. Ve světelných křivkách barev  $V$  a  $R$  jsou často obdobně pozorována tzv. „ramena“ (v některých případech tato druhá maxima chybí). Podstata druhých maxim a ramen v dlouhovlnnějších barvách není jednoznačně zřejmá, nejspíš se jedná o převyzaření krátkovlnnějších fotonů v obálce, případně v látce, obklopující hvězdu, svoji roli také může sehrávat postupující rekombinace [21].

V raných fázích je prakticky veškerá energie zachycena v obálce a se zvětšujícím se povrchem se zvyšuje i jasnost. Okolo maxima jsou energetické příspěvky radioaktivního rozpadu  $^{56}\text{Ni}$  a  $^{56}\text{Co}$  téměř identické (toto bylo již teoreticky popsáno v práci [2], potvrzeno to bylo také ve významné práci [26]). Tento důležitý rys lze využít při odhadu celkového množství

radioaktivního materiálu, syntetizovaného při explozi.

Zhruba po 40-ti dnech světelné křivky ve všech barvách nastoupí fázi exponenciálního poklesu jasnosti, ve které zůstávají po několik měsíců. Hlavním zdrojem energie je zde radioaktivní rozpad  $^{56}\text{Co}$ , postupem času stále více „nebulární“ obálka zachycuje stále méně  $\gamma$ -fotonů, takže zhruba po 150-ti dnech se ve sklonu křivky začne rozhodující měrou projevovat pozitronová emise ( $\beta$ -rozpad  $^{56}\text{Co}$ ) – viz obrázek 5.1. Několik set dní po explozi světelným křivkám dominuje záření světelného echa, existuje několik objektů, kde toto bylo pozorováno (např. SN 1998bu) [21].



Obrázek 5.1: Schema bolometrické křivky typické supernovy typu Ia. Plné čáry představují rozpadové funkce  $^{56}\text{Ni}$  (strná čára) a  $^{56}\text{Co}$  (povlovná čára). Horní čerchovaná čára představuje hypotetickou světelnou křivku, pokud by veškerá energie  $\gamma$ -záření byla v obálce zachycena a převyzářena, naopak spodní čárkovaná čára představuje světelnou křivku, jejímž energetickým zdrojem v pozdější fázi by byl pouze  $\beta$ -rozpad  $^{56}\text{Co}$ . Prostřední tečkovaná čára představuje skutečně pozorovanou bolometrickou světelnou křivku. Zdroj [21].

Posledních 15 až 20 let, díky zmnohonásobení pozorovacích možností, přineslo mnoho dalších poznatků, s nimi ovšem vyvstalo také množství nových otázek. Začalo být také zřejmé, že světelné křivky supernov typu Ia ne-

jsou zcela identické. V roce 1993 (viz popis v [25]) byl poprvé popsán empirický vztah mezi jasností v maximu a rychlostí poklesu světelné křivky, tzv. „*luminosity-decline rate relation*“. Maximální jasnost v barvě  $B$  souvisí s rychlostí poklesu světelné křivky tak, že jasné (energetičtější) supernovy mají tendenci k pomalejšímu poklesu v této barvě. Z toho důvodu byla zavedena opět empirická veličina  $\Delta m_{15}(B)$ , vyjadřující pokles hvězdné velikosti supernovy v barvě  $B$  za 15 dní po dosažení maxima. V práci [25] byl také definován vztah mezi pozorovaným poklesem této hvězdné velikosti a předpokládaným skutečným poklesem na základě tzv. „skutečného“ barevného excesu  $E(B-V)$ :  $\Delta m_{15}(B)_{\text{true}} \approx \Delta m_{15}(B)_{\text{obs}} + 0,1E(B-V)_{\text{true}}$ , kde „skutečný“ barevný exces je definován empiricky na základě zkoumaných spekter třiceti supernov tohoto typu jako parametr množství extinkce podél určitého vybraného směru a je s „pozorovaným“ barevným excesem svázán vztahem:  $E(B-V)_{\text{true}} = 1,018[1/E(B-V)_{\text{obs}} - 0,072]$ .

Mezi zásadní práce z tohoto období na téma světelných křivek supernov typu Ia je třeba zařadit také [24], kde je zavedena další veličina, tzv. *stretch-factor* (označovaný symbolem  $s$ ), definovaný jako faktor zkrácení nebo prodloužení časové osy v závislosti na rychlosti poklesu světelné křivky. Aplikace tohoto faktoru potom „standardizuje“ jednotlivé světelné křivky. Tento faktor bývá často kvantifikován ne zcela stejným způsobem, v práci [24] je uveden vztah mezi faktorem  $s$  a  $\Delta m_{15}$ :  $\Delta m_{15} = 1,7/s - 0,6$ . V práci [23] je uveden vztah pro reškálování časové osy:  $t' = (t - t_{B_{\text{max}}})/[s \cdot (1 + z)]$ , kde jmenovatel  $[s \cdot (1 + z)]$  bývá nazýván faktorem rozšíření  $w$  (*width factor*) a ve kterém je zahrnuta i oprava na kosmologický rudý posuv (v literatuře většinou nazývaný *K-correction*). V [11] je uvedeno:  $I(t)/I_{\text{max}} = b + f(t - t_{\text{max}})/w$ , symbolem  $b$  je zde označena jistá minimální hodnota jasnosti pozadí,  $f$  je funkce, odvozená z tzv. standardizované nebo „typické“ supernovy (*Template Supernova*),  $I_{\text{max}}$  a  $t_{\text{max}}$  jsou intenzita a čas v maximu světelné křivky.

Ze zcela nejnovějších prací, resp. astronomů, zabývajících se tímto typem supernov, lze zmínit ještě např. [18]; tým z německého Max-Planck-Institutu se mimo jiné zabývá modelováním splnutí dvou bílých trpaslíků, každého s hmotností pod Chandrasekharovou mezí (*mergers*) a také studiem atmosfér tohoto typu supernov.

Výše uvedený vztah mezi jasností v maximu a rychlostí poklesu světelné křivky umožňuje, s patřičnými korekcemi, určování kosmologických parametrů, především vzdálenosti. Nicméně jeho fyzikální podstata zdaleka není dokonale teoreticky popsána, především jeho souvislost s dnes již „klasickým“ teoretickým odvozením fyzikálních procesů a vztahů, uvedených hlavně v [1],



[2], [26]. Cesta k objasnění možných nesrovnalostí vede pravděpodobně přes pečlivé modelování přenosu záření v atmosférách supernov Ia, včetně zohlednění jejich detailního chemického složení (například jaký vliv má na tok záření obálka hvězdy, jejíž hlavní složkou je Fe), stupně ionizace v závislosti na čase, termální rovnováhy, atd. Je třeba také mít na paměti, že všechny fyzikální modely, uváděné v [1], [2], [26], vycházejí z Eddingtonovy aproximace, platné pro planparalelní atmosféry, která je sice určitým aproximačním způsobem transformována i pro sférické případy (viz kapitola 4.3); tato byť realistická modifikace, docela dobře platná pro rané fáze, má však přece jen své meze – jednak nemůže platit pro pozdní fáze (přes zhruba 80 – 100 dní po explozi) a také nepočítá právě s detailními okolnostmi přenosu záření v řídkých atmosférách rozpínajících se obálek.

Zpracování všech souvislostí, uvedených v této kapitole, do následujícího modelování světelných křivek vybraných supernov typu Ia přesahuje možnosti této diplomové práce, v následujícím textu se proto vrátím k teoretickému odvození fyziky raných fází světelných křivek, především na základě popisu, uvedeného v [1], [2], [26].

## 5.2 Raná fáze světelné křivky

Na úvod znovu shrnu výchozí fyzikální předpoklady, uvedené v kapitolách 3.3, 4.6:

- *Homologická expanze a sférická symetrie*, což je důsledek explozivního průchodu rázové vlny, pocházející původně z relativně velmi malého objemu.
- *Výrazně převažuje tlak záření*. Pro energie a hustoty, se kterými se zde setkáváme, je tato aproximace zcela odpovídající. Stavové rovnice tedy budou (viz kapitola 2.2)  $E = aT^4V$  a  $P = E/3V$ .
- *Dominující přítomnost radioaktivního izotopu  $^{56}\text{Ni}$*  v expandující látce obálky v počáteční fázi. Tento rys je univerzální pro všechny supernovy typu Ia. Prostorové rozložení hustoty tohoto nuklidu mírně roste směrem ke středu – viz kapitola 4.6, str. 59.
- *Předpoklad řešení s malým počátečním poloměrem*. U supernov typu Ia předpokládáme poloměr zárodečné hvězdy  $R_0 \ll 10^{12}$  m. Pro následující postup lze tedy vycházet ze vztahů, odvozených v kapitole 4.7.

- *Předpoklad konstantní opacity.* Pro termální fotony lze vzhledem k převládajícímu Thomsonovu rozptylu předpokládat konstantní opacitu – viz kapitola 4.2, str. 45. (To ale neplatí pro absorpci  $\gamma$ -fotonů, případně pozitronů, vzniklých  $\beta$ -rozpadem nuklidu  $^{56}\text{Co}$  – viz str. 72).

Vraťme se nyní k rovnicím (4.62) a (4.63). Jejich kombinací dostaneme trochu pozměněný výraz pro zářivý výkon

$$L(1, t) = E_{Th}(0) \phi(t) \frac{\alpha^2 c}{3\kappa_0 \rho_0 R_0^2} = (\text{viz rovnice (4.19)}) = \frac{E_{Th}(0) \phi(t)}{\tau_0}. \quad (5.1)$$

Rozšíříme-li nyní rovnici (4.97) (i rovnici (4.102)) výrazem  $\tau_0$ , dostaneme

$$\phi(t) = \frac{\epsilon_X^0 M_X^0 \tau_0}{E_{Th}(0)} e^{-t^2/\tau_m^2} \int_0^t e^{t'^2/\tau_m^2} \frac{t'}{\tau_0 \tau_h} e^{-t'/\tau_X} dt' + e^{-t^2/\tau_m^2}. \quad (5.2)$$

Pro zjednodušení lze zavést další substituční funkci  $\Lambda(t)$

$$\Lambda(t) = e^{-t^2/\tau_m^2} \int_0^t e^{t'^2/\tau_m^2} \frac{t'}{\tau_0 \tau_h} e^{-t'/\tau_X} dt' = e^{-t^2/\tau_m^2} \int_0^t e^{t'^2/\tau_m^2} \frac{2t'}{\tau_m^2} e^{-t'/\tau_X} dt' \quad (5.3)$$

a tedy

$$L(1, t) = \epsilon_X^0 M_X^0 \Lambda(t) + e^{-t^2/\tau_m^2}. \quad (5.4)$$

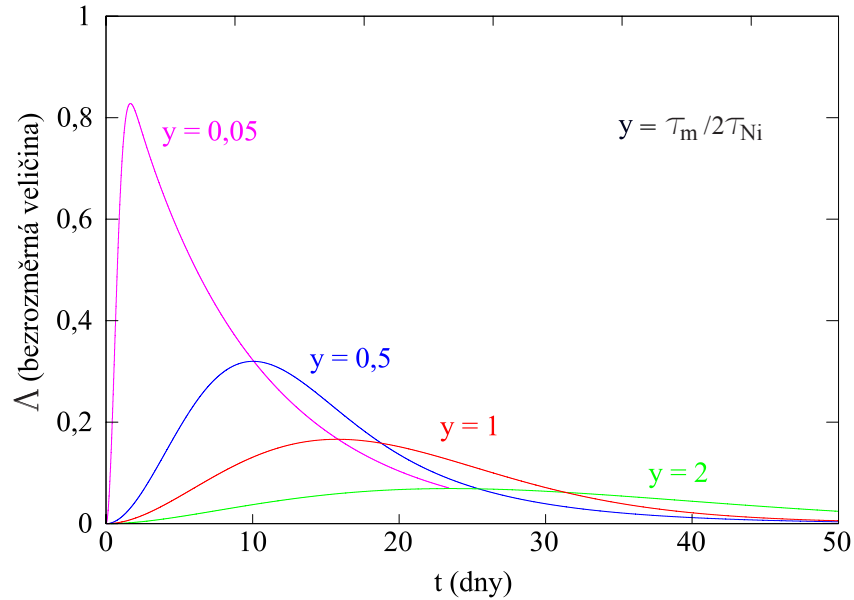
Pro první zjednodušený model rané fáze zvolme za obecný prvek  $X = ^{56}\text{Ni}$ . Jeho poločas rozpadu je přibližně 6,1 dne, z jaderné fyziky je dále zřejmé, že uváděná konstanta  $\tau_X$ , resp. nyní  $\tau_{\text{Ni}}$  je rozpadová konstanta, tedy poločas rozpadu, dělený číslem  $\ln 2$ . V případě  $^{56}\text{Ni}$  bude  $\tau_{\text{Ni}}$  zhruba 8,8 dne, přesně (viz str. 58)  $\tau_{\text{Ni}} = 7,605 \times 10^5 \text{ s}$ .

Veličina  $\epsilon_{\text{Ni}}^0$  představuje výkon radioaktivního ohřevu niklu na jednotku hmotnosti v čase  $t = 0$  (potom exponenciálně klesá s tím, jak se zmenšuje počet rozpadajících se jader), jeho hodnota (je také uvedena na str. 58) je  $4,78 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Lze ji odvodit z reakce  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co}$  (elektronový záchyt), produkující  $\gamma$ -záření s energií 2,135 MeV na jeden atom, po přepočtení na jednotku hmotnosti podle rozpadového zákona dostaneme výše uvedenou hodnotu  $\epsilon_{\text{Ni}}^0$  [1] [2].

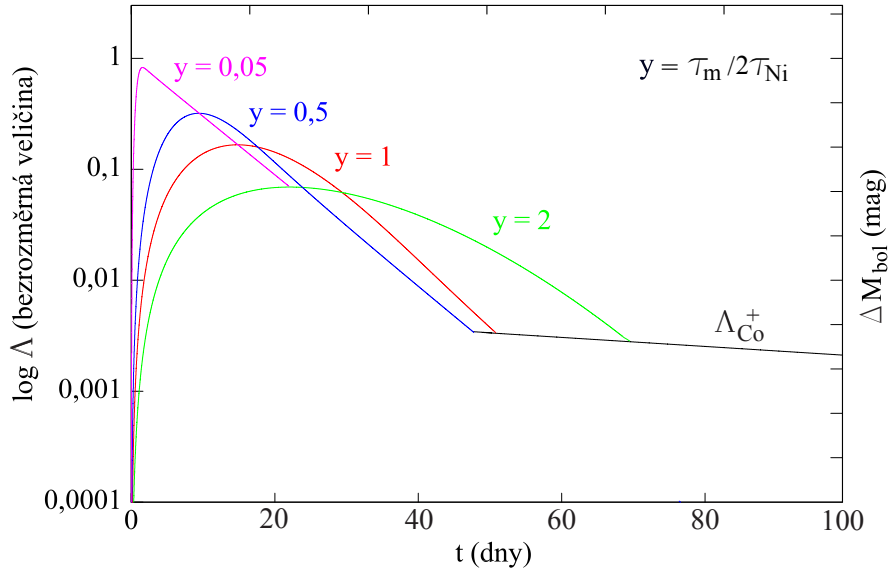
Stejným způsobem lze hodnotu této veličiny odvodit i pro  $^{56}\text{Co}$ : Reakce  $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$  probíhá s poločasem rozpadu 78,8 dne, příslušná konstanta

$\tau_{\text{Co}}$  v rovnici (5.3) (po jejím rozepsání do superpozice rozpadových řad  $^{56}\text{Ni}$  a  $^{56}\text{Co}$ ) tedy bude 113,68 dne, tj.  $9,822 \cdot 10^6$  s. Tuto hodnotu také uvádím ve zdrojových souborech pro výpočet příslušných modelů. Energie této reakce je 4,568 MeV na jeden atom, po obdobném přepočítání jako u  $^{56}\text{Ni}$  a po jejím rozdělení na rozpad elektronovým záchytem s produkcí  $\gamma$ -záření (81%) a  $\beta$ -rozpad s produkcí pozitronu (19%) tedy dostáváme:  $\epsilon_{\text{Co}}^{\gamma,0} = 6,444 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\epsilon_{\text{Co}}^{+,0} = 1,512 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$  [2].

V následujících dvou ilustrativních grafech je znázorněn průběh funkce  $\Lambda(t)$  z rovnice 5.3 s tím, že je schematicky započítána pouze rozpadová řada  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co}$ . To v této chvíli dává názornější představu o závislosti průběhu rané fáze světelné křivky na množství syntetizovaného  $^{56}\text{Ni}$ . Jednotlivé veličiny, uvedené v grafech, budou blíže popsány v následujícím textu.



Obrázek 5.2: Schematický graf, vyjadřující závislost bezrozměrné funkce  $\Lambda(t)$  (viz vztah (5.3)) na čase. Do průběhu funkce je pro názornost chování maxima světelných křivek zahrnut pouze rozpad  $^{56}\text{Ni}$ , neprojevuje se rozpad  $^{56}\text{Co}$ . Veličina  $y$  má význam  $\tau_m/2\tau_{\text{Ni}}$ , kde  $\tau_m = (2\tau_0\tau_h)^{1/2} = (2\kappa M/\beta c v_p)^{1/2}$  (viz str. 63). Rychlost rozpínání povrchu  $v_p$  a tedy i veličina  $\tau_m$  souvisí s energií exploze a tím i s množstvím syntetizovaného  $^{56}\text{Ni}$ . Větší  $\tau_m$  znamená nižší energii exploze. Zdrojový soubor pro numerický výpočet – viz příloha A, kapitola A.1, soubor č. 7.



Obrázek 5.3: Stejný graf, vyjadřující tentokrát logaritmickou závislost bezrozměrné funkce  $\Lambda(t)$  (viz vztah (5.3)) na čase. V pravé části grafu je vyznačena funkce  $\Lambda_{\text{Co}}^+$ , vyjadřující  $\beta$ -rozpad  $^{56}\text{Co}$ . I v případě, že by veškeré  $\gamma$ -fotony z rozpadu  $^{56}\text{Co}$  volně unikly, zářivý výkon by neměl pod tuto funkci klesnout. Celkový zářivý výkon, daný  $\beta$ -rozpadem  $^{56}\text{Co}$  lze vyjádřit:  $L_{\text{Co}}(t) = M_{\text{Ni}}^0 \epsilon_{\text{Co}}^+ e^{-t/\tau_{\text{Co}}}$ , kde hodnota  $\epsilon_{\text{Co}}^+$  je přepočítána na čas  $t \approx 50$  dní, tedy  $\epsilon_{\text{Co}}^+ \approx 2,561 \cdot 10^4 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\tau_{\text{Co}} = 9,822 \cdot 10^6 \text{ s}$ . Vydělíme-li funkci  $L_{\text{Co}}(t)$  hodnotami pro  $^{56}\text{Ni}$ , tedy  $M_{\text{Ni}}^0 \epsilon_{\text{Ni}}^0$ , dostaneme výraz pro funkci  $\Lambda_{\text{Co}}^+$ :  $\Lambda_{\text{Co}}^+ \approx 5,36 \cdot 10^{-3} e^{-t/\tau_{\text{Co}}}$ .

Při modelování rané fáze světelných křivek je přirozeně nutné vzít v potaz celý radioaktivní rozpad  $^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$ . Detailní kvantitativní odvození tohoto procesu není možné v této práci uvádět, jeho následný stručný výsledný popis je převzat z [7], tyto výsledky jsou rovněž citovány například v [2], str. 791.

Vzhledem k tomu, že část především  $\gamma$ -fotonů, ale i pozitronů z této reakce volně uniká, aniž je jejich energie přeměněna na termální fotony, zavádí výše zmíněná práce tzv. depoziční funkci  $D$ , vyjadřující poměrnou část energie rozpadu, přispívající k ohřevu látky obálky, resp. ke světelné křivce

$$D = G[1 + 2G(1 - G)(1 - 0,75G)], \text{ kde } G = \tau/(\tau + 1,6). \quad (5.5)$$

Veličina  $\tau$  v tomto vztahu má význam „optické“ hloubky, na základě vlastních odhadů středního účinného průřezu pro  $\gamma$ -záření (Comptonův rozptyl) tato práce uvádí

$$\tau_\gamma \approx 55,3 (0,1/\kappa) (\tau_m/2\tau_{\text{Ni}})^2 / [v_p (0,1 + t/\tau_{\text{Ni}})^2], \quad (5.6)$$

a pro pozitrony (Bhabhův rozptyl)

$$\tau_+ \approx 355\tau_\gamma. \quad (5.7)$$

Podobná depoziční funkce je zavedena i v práci [26]. Tuto depoziční funkci je třeba zahrnout do numerického řešení funkce  $\Lambda(t)$  jako časově závislé faktory k energetickým příspěvkům  $\gamma$ -záření při rozpadu  $^{56}\text{Ni}$  a  $^{56}\text{Co}$ , i při  $\beta$ -rozpadu  $^{56}\text{Co}$  (viz zdrojový soubor č. 8 v kapitole A.1 v příloze A).

V následující kapitole 5.3 odvodím podle dosud uvedených fyzikálních předpokladů dva teoretické modely, lišící se celkovou energií exploze, tedy množstvím  $^{56}\text{Ni}$ , syntetizovaného při explozi. Tyto modely budou založeny na dalších předpokladech: na již několikrát zmíněném „malém“ počátečním poloměru, na jednotné počáteční hmotnosti, tj. hmotnosti těsně překračující Chandrasekharovu mez ( $1,44 M_\odot$ ), na homologické expanzi a z ní vyplývající rovnoměrné distribuci hustoty, na Thomsonově rozptylu a tedy konstantní opacitě a také především na určující termojaderné reakci po zapálení elektronově degenerovaného jádra uhlíko-kyslíkového bílého trpaslíka po překročení Chandrasekharovy hmotnostní meze



která ovšem může vyprodukovat různé množství  $^{56}\text{Ni}$ . Energie této reakce je 44,4 MeV, takže energie na jednotku hmotnosti  $q \approx 0,76 \cdot 10^{14} \text{ J kg}^{-1}$ , tj. na 1 kg látky, vstupující do této reakce (hmotnost 1 atomu  $^{56}\text{Ni} \approx 9,352 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ ,  $\rho_{\text{Ni}} \approx 8900 \text{ kg m}^{-3}$ ). Tato energie je v krátkém čase transformována na kinetickou energii expanze (viz kapitola 4.3), takže počáteční  $M_{\text{Ni}}^0$  a  $v_p$  jsou vzájemně svázány [2].

Na základě rovnice (4.50) lze potom psát

$$v_p^2 = \frac{5}{3} \left( \frac{2E_{\text{SN}}}{M} \right), \quad (5.9)$$

kde  $E_{\text{SN}} = M_{\text{Ni}}^0 q$ , po dosazení číselných hodnot bude výraz (5.9) vypadat

$$v_p \approx 10^7 \text{ m s}^{-1} \sqrt{2,53 \frac{M_{\text{Ni}}^0}{M}}. \quad (5.10)$$

Z grafů v této kapitole je zřejmé (a to se principiálně nezmění ani po zahrnutí kompletního rozpadu  $^{56}\text{Co}$ ), že strmost poklesu funkce  $\Lambda(t)$  je určena především parametrem  $y = \tau_m/2\tau_{\text{Ni}}$ , který u tohoto typu supernov Ia závisí na  $M_{\text{Ni}}^0$  (viz například [5], str. 245, kde jsou supernovy typu Ia děleny na „rychlé“ a „pomalé“ podle rychlosti poklesu jasnosti v barvě B).

Na základě uvedených teoretických předpokladů lze tedy zhruba konstatovat: větší (energetičtější) exploze znamená vyšší jas v maximu, ale též rychlejší expanzi a tedy nižší hodnotu  $\tau_m$ , maximum tedy nastane dříve a má „ostřejší“ průběh (viz grafy na obrázcích 5.2 a 5.3).

### 5.3 Aproximace černým tělesem

Pro lepší pochopení principiálních fyzikálních procesů, týkajících se supernov typu Ia, bude nyní přínosné provést sice poněkud hypotetickou a zjednodušenou, avšak pro rané fáze (tedy do zhruba 50 – 70 dne po explozi) poměrně přílehavou konstrukci, kdy atmosféra supernovy bude aproximována rozpínajícím se absolutně černým tělesem. V tom případě bude mít záření Planckovské spektrum, odpovídající efektivní teplotě fotosféry, jejíž polohu je ovšem třeba adekvátním způsobem určit. Ve skutečnosti samozřejmě rozpínající se atmosféra je pro všechny vlnové délky stále průhlednější, její záření je tedy postupně daleko více „nebulární“ než Planckovské. Zvláště pro pozdější fáze vývoje světelných křivek toto představuje zásadní výzvu z hlediska řešení rovnice přenosu záření, kdy je navíc nutné započítat i relativistické efekty, vyvolané poměrně velkými rychlostmi rozpínání obálky. Značný rozsah a komplikovanost těchto problémů zcela přesahují rámec této práce.

V našem případě pro zohlednění transparentnosti atmosféry využijeme jednoduché aproximace, vycházející z Eddingtonovy okrajové podmínky, odvozené v kapitole 4.3. Efektivní teplotu lze obecně vyjádřit ze Stefanova-Boltzmannova zákona jako  $\sigma T_{\text{ef}}^4 = L/4\pi R_{\text{ef}}^2$ , kde termínem  $R_{\text{ef}}$  označíme „efektivní poloměr“, tj. oblast, kde lze stanovit teplotu jako efektivní. Podle rovnice (4.26) bude  $R_{\text{ef}} = R(t) - 2/3\lambda$ ,  $\lambda$  je střední volná dráha termálních fotonů. S tím, jak  $\lambda \rightarrow R$  tento vztah samozřejmě ztrácí platnost, do hry potom vstupuje množství dalších efektů jako např. sférická geometrie, proměnná opacita, „nebulární“ čárové emise, Dopplerovské efekty, atd. Nicméně i tato aproximace umožňuje studovat světelné křivky a učinit určité závěry alespoň v rané fázi, tj. zhruba do výše uvedené doby.

Pro další úvahy, spojené se zářením absolutně černého tělesa a Planckovským rozložením energie, je třeba zavést pojem tzv. *absolutní* nebo *efe-*

*ktivní magnitudy* (*AB* magnitude), který zavedl John B. Oke v práci [29] (nesouvisí s tzv. absolutní hvězdnou velikostí, tj. s hvězdnou velikostí ve vzdálenosti 10 pc; je modernější verzí systému tzv. *Vega magnitude*), který je bez vztahu ke konkrétním fotometrickým systémům a který umožňuje po přepočítání toků normovat naměřené hvězdné velikosti v jednotlivých konkrétních barevných filtrech vůči jedné barvě.

Tento systém je definován (v soustavě CGS) vztahem

$$AB_\nu = -2,5 \log f_\nu - 48,60, \quad (5.11)$$

kde  $f_\nu$  je tok záření v jednotkách [ $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}$ ] (fotometrický tok na jednotku frekvence). Konstanta na pravé straně rovnice odpovídá tzv. *nulovému bodu* (zero point), tedy *AB* magnitudě, korespondující s nulovou magnitudou při toku  $f_{\nu_0}$  na jednotku frekvence, zhruba odpovídající střední vlnové délce Johnsonova V filtru (544 nm), viz [4]. Tok  $f_{\nu_0}$  je kalibrován (viz [17]) na hodnotu 3690 Jy (Jansky),  $1 \text{ Jy} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ . V soustavě SI bude tedy rovnice (5.11) vypadat

$$AB_\nu = -2,5 \log f_\nu - 56,10. \quad (5.12)$$

V další úvaze (viz [2]) vyjdeme z Planckova vyzařovacího zákona

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad f_\nu = \pi B_\nu. \quad (5.13)$$

(Monochromatický tok záření bývá zpravidla značen  $F_\nu$ , s ohledem na historicky zavedené značení v rovnici *AB* magnitudy budu používat notaci  $f_\nu$ ). Rozšířením této rovnice výrazem  $(h\nu/k_B T)^4$  a následnými jednoduchými úpravami (včetně označení  $h\nu/k_B T = x$ ) dojdeme k vyjádření

$$f_\nu(\nu, T) = \frac{\sigma T_{\text{ef}}^4}{\nu} \left( \frac{15}{\pi^4} \frac{x^4}{e^x - 1} \right), \quad (5.14)$$

kde výraz v závorce představuje bezrozměrnou funkci. Snadno lze také ověřit, že integrací  $F = \int f_\nu d\nu$  dostaneme  $\sigma T_{\text{ef}}^4$ , tedy Stefanův zákon.

Dále zavedeme speciální hvězdnou velikost (nyní „absolutní“ ve smyslu kalibrace na určitou vzdálenost, ne však na 10 pc jako u běžných hvězd, zde bude vhodné stanovit srovnávací vzdálenost 1 Mpc), kterou budeme značit např.  $\phi$ , navíc specifikovanou pro střední frekvence jednotlivých barev, např.  $\phi(\nu)$ .

Z Pogsonovy rovnice potom vyplývá

$$\phi_{(V)}(\text{mag}) = AB_{(V)}(\text{mag}) - 5 \log D(\text{Mpc}) - A(\text{mag}), \quad (5.15)$$

kde  $D$  je vzdálenost v jednotkách Mpc a  $A$  je extinkce v určitém směru, vyjádřená v magnitudách,  $A = 1,086 \chi D$ ,  $\chi$  je absorpční (extinkční) koeficient [22].

Na základě dosud uvedeného lze přistoupit k formulaci výrazů pro světelné křivky (v jednotkách  $\phi$  magnitud) ne pouze bolometrické, nýbrž v jednotlivých barvách. Výraz pro extinkci  $A$  necháme prozatím stranou, ten bude později zahrnut při aplikaci modelových křivek na vybrané supernovy. Rovnici (5.15) lze rozvést (dosazením rovnice (5.11) ve smyslu rovnice (5.14) a vztahu mezi celkovým zářivým výkonem, zářivým tokem a vzdáleností) na tvar (v soustavě SI)

$$\phi_{(V)} = -2,5 \log \left[ \frac{\sigma T_{\text{ef}}^4}{\nu} \left( \frac{15}{\pi^4} \frac{x^4}{e^x - 1} \right) \right] - 56,10 - 2,5 \log \left( \frac{L}{4\pi F} \right). \quad (5.16)$$

V této rovnici lze za zářivý tok  $F$  ve jmenovateli pravého výrazu dosadit  $\sigma T_{\text{ef}}^4$ , takže po zlogaritmování zlomků tento člen z rovnice vypadne, za  $L$  lze dosadit rovnici (5.4) bez (nyní zanedbatelného) homogenního řešení.

Po úplném rozlogaritmování tohoto vztahu můžeme všechny oddělené konstanty sloučit do jednoho čísla, v dalším textu toto číslo budu označovat vždy dvojicí písmen, první písmeno znamená označení modelu (například dva teoretické modely v této kapitole budou označeny A, B, fitované modely pro jednotlivé konkrétní supernovy v následujících kapitolách budou označeny popořadě C, D), druhé písmeno příslušnou fotometrickou barvu. Celý, poměrně zdlouhavý postup zde nebudu rozepisovat (na základě rozměrové analýzy je pouze třeba dosadit správné jednotky), způsob jejich výpočtu je zřetelný ve zdrojovém souboru č. 8 v kapitole A.1 v příloze A.

Například výraz pro světelnou křivku hvězdné velikosti  $\phi_{(V)}(\text{mag})$  pro model A (zatím bez uvedení číselných hodnot) bude potom vypadat

$$\phi_{(V)} = AV - 2,5 \log \Lambda(t) - 2,5 \log \left( \frac{x_V^4(t)}{\exp[x_V(t)] - 1} \right). \quad (5.17)$$

Zcela zásadním a velmi citlivým parametrem je stanovení hodnoty opacity, která, jak již bylo řečeno, je považována za konstantní. V našem případě je určující Thomsonův rozptyl, Kramerova opacita vzhledem k velmi nízkým hustotám (viz graf 5.4) se zásadněji neprojeví. Zahrnutí opacity, související

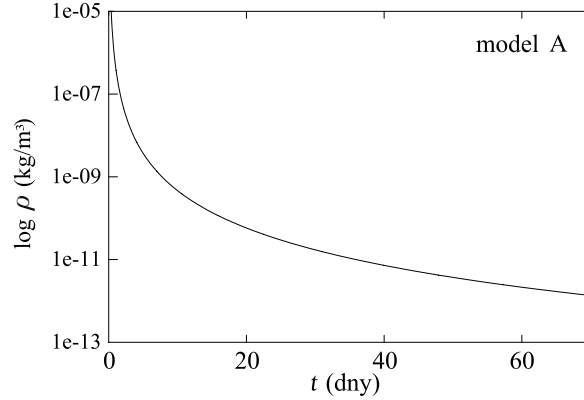


s rekombinační vlnou je rovněž nad rámec této práce. Existují komplikované modely, numericky simulující prostorově i časově proměnnou opacitu, v této aproximaci se omezím na konstantní hodnotu – protože v látce obálky jednoznačně převládají kovy, které navíc nebudou zcela ionizované, je zřejmé, že hodnota opacity bude nižší, než  $0,02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ . Pro účely této práce jsem převzal v literatuře uváděnou hodnotu konstantní Thomsonovy opacity pro tento typ supernov (viz [26], grafy na str. 48, kde je patrný zhruba konstantní prostorový průběh tokové i Roselandovy opacity),  $\kappa \approx 0,010 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ .

Dva teoreticky odvozené modely v této kapitole se liší počáteční energií, tj. množstvím syntetizovaného  $^{56}\text{Ni}$  (a z toho vyplývajících dalších parametrů, jako  $v_p$ ,  $\tau_m$ , atd.). Energetičtější **model A** předpokládá  $M_{\text{Ni}}^0 = M_\odot$ , méně energetický **model B** předpokládá  $M_{\text{Ni}}^0 = 0,5 M_\odot$ .

Časově závislá veličina  $x(t)$  v rovnici (5.17) má význam  $h\nu/k_B T_{\text{ef}}(t)$ . Jednotlivé veličiny jsou počítány numericky pomocí podobných zdrojových souborů, jaký je uveden (č. 8) v kapitole A.1 v příloze A s příslušně zvolenými hodnotami  $M_{\text{Ni}}^0$ .

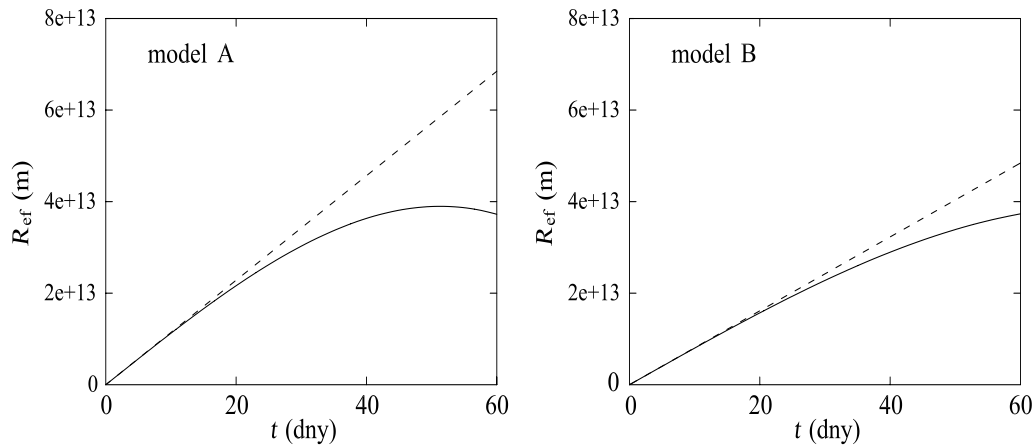
Dále zde uvádím grafy některých veličin (pokud byly počítány) souběžně pro oba teoretické modely A i B (čas  $t = 0$  je počítán vždy od okamžiku exploze):



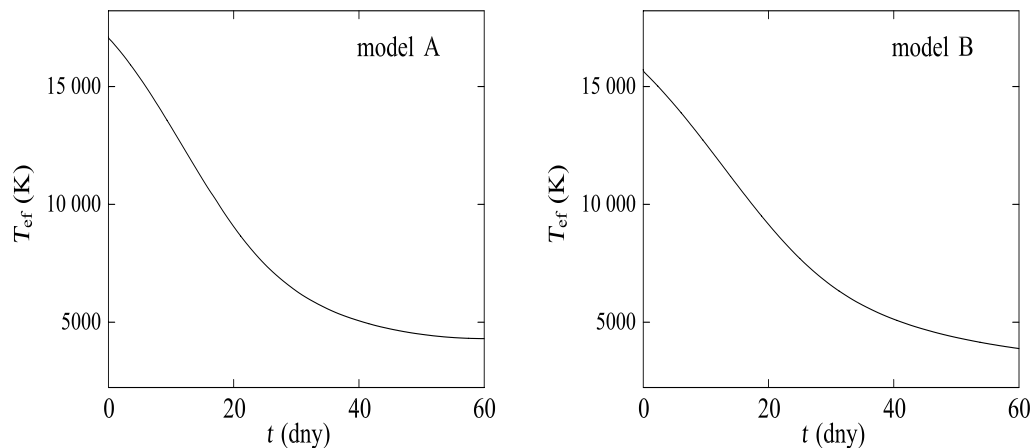
Obrázek 5.4: Graf závislosti  $\log \rho$  na čase pro model A. Rovnoměrná hustota (homologická expanze)  $\rho = 3M/4\pi R(t)^3$ , kde  $R(t) = R(0) + v_p(t)$  s tím, že  $R(0)$  je zanedbán,  $v_p(t) = v_p$  je počítána podle vztahu (5.10).

V následujících grafech budou uvedeny závislosti veličin  $R_{\text{ef}}$ ,  $T_{\text{ef}}$ ,  $\log L$  na čase pro oba modely A, B, tyto byly modelovány numericky na základě vztahů, uvedených v teoretickém odvození. Veličiny jsou počítány pouze pro ra-

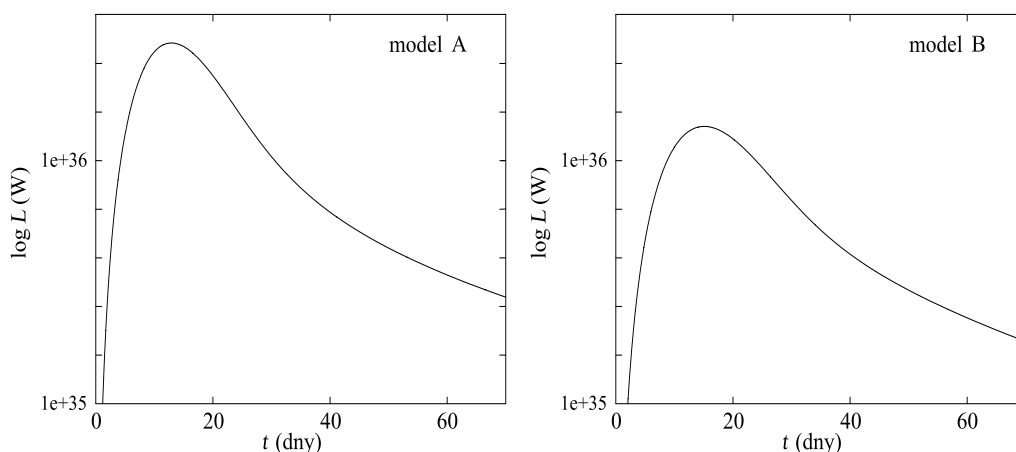
nou fázi, později se začínají projevovat odchylky od aproximace absolutně černým tělesem (např. efektivní teplota po zhruba  $t = 60$  dní u modelu A začíná mít tendenci opět stoupat, což souvisí se zmenšováním efektivního poloměru v této době).



Obrázek 5.5: Graf závislosti  $R_{\text{ef}}$  na čase pro modely A,B. Čárkovaná čára značí celkový poloměr rozpínající se obálky, plná čára „efektivní“ poloměr.

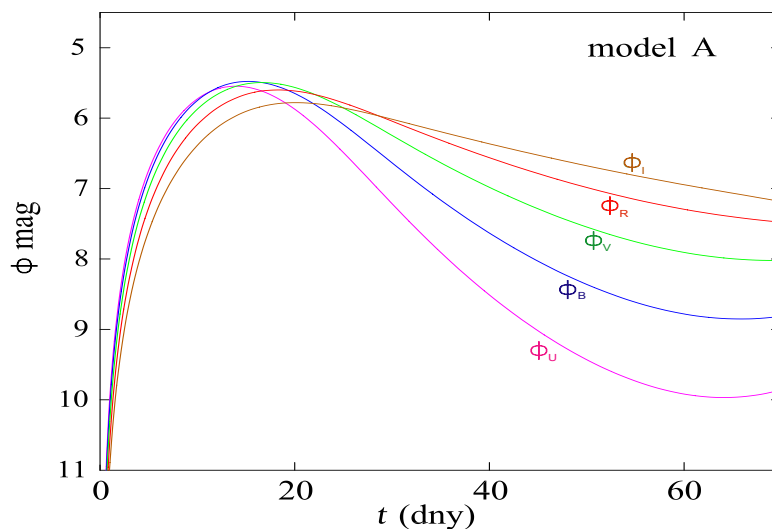


Obrázek 5.6: Graf závislosti  $T_{\text{ef}}$  na čase pro modely A,B. Je zřejmé, že průběh efektivní teploty je u modelu A v celém průběhu o něco vyšší, teplota po čase  $t \approx 50 - 60$  dní ale přestává detailně odpovídat skutečnosti (vysvětlující popis na str. 74.)

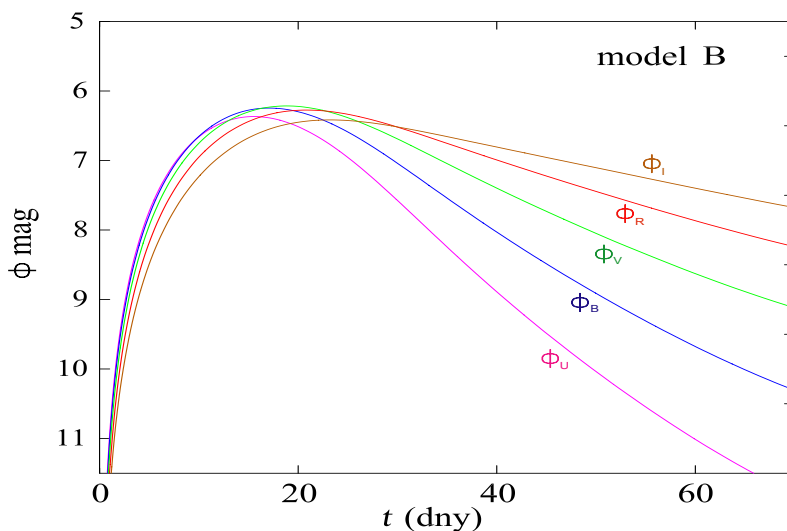


Obrázek 5.7: Graf závislosti  $\log L$  na čase pro modely A, B, vytvořený numerickou integrací rovnice (5.4).

V následujících dvou grafech jsou vykresleny závislosti  $\phi$  magnitud, definovaných v této kapitole, v uvedených fotometrických barvách na čase (rovnice (5.17)). Pojem *hvězdná velikost* bude dále často nahrazován *magnitudou*.



Obrázek 5.8: Graf závislosti  $\phi$  magnitud na čase pro model A v uvedených fotometrických barvách. Jednotlivé křivky dosahují maxima v různých časech, potom vykazují různě strmý pokles. Krátkovlnnější fotometrické barvy dosahují maxima dříve, klesají rychleji, to je důsledek klesající teploty fotosféry.



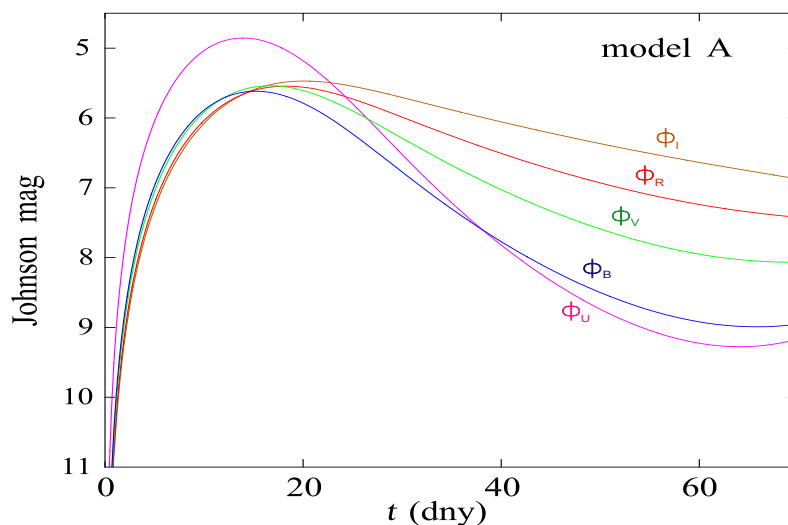
Obrázek 5.9: Graf závislosti  $\phi$  magnitud na čase pro model B v uvedených fotometrických barvách, maxima nastávají později, než u modelu A (vysvětlující text – viz str. 74.)

Průběh barevných křivek v Johnsonově fotometrickém systému je oproti průběhům křivek  $\phi$  magnitud (odpovídajících AB magnitudám), posunut o rozdíly (počítáno v magnitudách)  $\Delta_i = -2,5 \log(f_{\nu_i}/f_{\nu_0})$ , kde  $f_{\nu_i}$  jsou zářivé toky na jednotku frekvence, odpovídající středním frekvencím (vlnovým délkám) jednotlivých barevných filtrů Johnsonova fotometrického systému,  $f_{\nu_0} = 3,69 \cdot 10^{-23} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ . Opačný postup, tj. korekci pozorovaných světelných křivek, resp. naměřených hvězdných velikostí konkrétních supernov v jednotlivých barvách v různých časech na AB magnitudy (nulový bod) bude nutné použít při následné konstrukci bolometrických (resp. UBVRI) světelných křivek (viz kapitola 5.4).

Hodnoty těchto korekčních rozdílů lze spočítat, jsou též uváděny (s určitými odchylkami) v literatuře, např. v [4] [17]. Zde jsem použil údaje z často v současnosti citované práce [10], hodnoty uvedených korekcí jsou:

$$\Delta_U = -0,692, \quad \Delta_B = 0,139, \quad \Delta_V = 0,044, \quad \Delta_R = -0,055, \quad \Delta_I = -0,309$$

V následujícím obrázku 5.10 je ještě vytvořen graf průběhu světelných křivek v jednotlivých fotometrických barvách (pouze pro model A) Johnsonova fotometrického systému, kde jsou křivky z grafu 5.8 korigovány právě o tyto hodnoty.



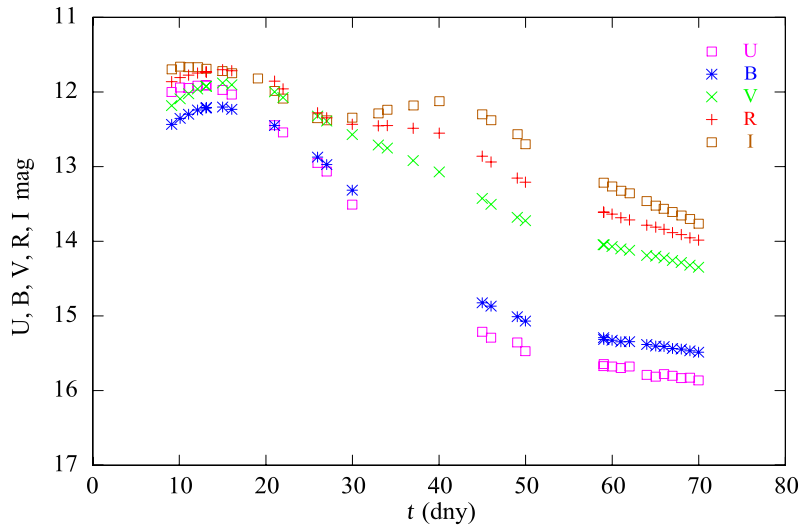
Obrázek 5.10: Graf světelných křivek v  $U, B, V, R, I$  fotometrických barvách Johnsonova systému v závislosti na čase pro model A.

V následujících kapitolách se pokusím tímto aproximativním teoretickým modelem proložit skutečně pozorované světelné křivky dvou vybraných supernov tohoto typu a následně pak provést odhad jejich základních charakteristik.

## 5.4 Supernova SN 1998bu

Exploze této supernovy byla poprvé zaznamenána 9. května 1998, soustavnější pozorování, včetně pořízení spekter, potom probíhalo od 13. května 1998. Její souřadnice na obloze jsou: rektascenze  $10^{\text{h}} 46^{\text{m}} 42,35^{\text{s}}$ , deklinace  $+11^{\circ} 50' 07,5''$  (J2000) [34] [43], její mateřskou galaxií je M96 (NGC 3368) v souhvězdí Lva. Z pochopitelných důvodů jsem v rámci této práce nemohl provádět vlastní pozorování (ani jiné aktuální supernovy), její fotometrická data jsou převzata z [34] – viz obrázek 5.11 a tabulka A.1, kapitola A.2 v příloze A. Protože se tedy nejedná o pozorovatelsky zaměřenou práci, nepřipojuji další její dokumentaci (např. snímky, orientační mapky okolí, atd.). Cílem této práce rovněž není detailní zpracování fotometrických údajů včetně exaktního provádění korekcí (např. na mezihvězdnou extinkci), ty jsou provedeny podle obecných vztahů, uvedených například v [22] [36].

Stanovení velikosti barevných excesů  $E(B-V)$ ,  $E(V-R)$ ,  $E(V-I)$  je provedeno pomocí empirických vztahů, odvozených v [23] právě pro supernovy typu Ia. V této hojně citované práci jsou na základě podrobného statistického studia většího počtu (48 různě vzdálených) supernov tohoto typu stanoveny některé tzv. skutečné barevné indexy (jmenovitě  $B-V$ ,  $V-R$ ,  $R-I$ ,  $B-I$ ,  $V-I$ ) ve formě tabelovaných empirických křivek. Fitováním pozorovacích dat těmito křivkami (pomocí programu gnuplot [46]) lze odečíst příslušné barevné excesy (viz obrázek 5.12). Barevný exces  $E(U-B)$ , který tato práce netabeluje, byl stanoven podle obecného vztahu  $E(U-B)/E(B-V) = 0,72$  (viz [22], str. 360).

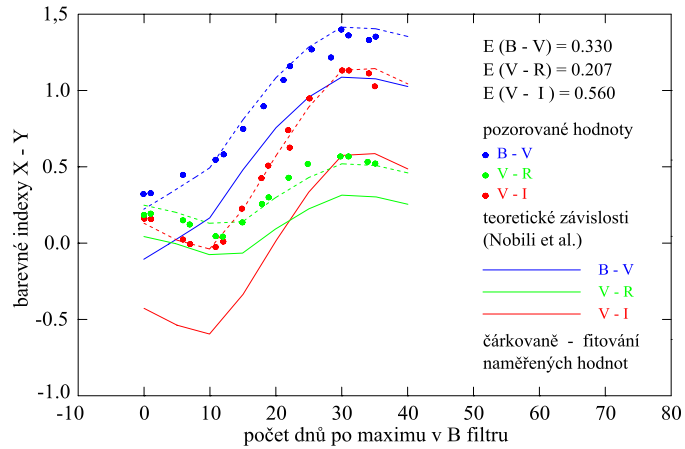


Obrázek 5.11: Graf naměřených světelných křivek v  $U, B, V, R, I$  barvách Johnsonova systému (viz tabulka A.1, kapitola A.2 v příloze A).

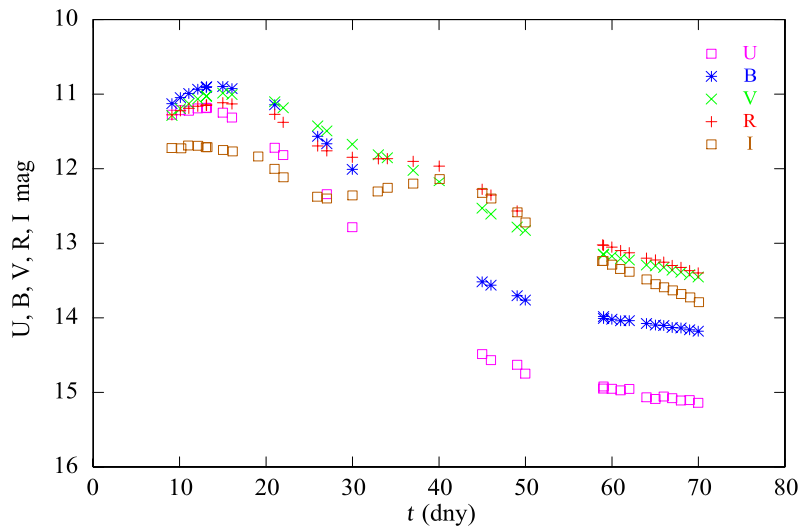
Dalším krokem byl odhad celkové extinkce  $A(V)$  v daném směru. V katalogu [43] jsou uváděny hodnoty mezihvězdné extinkce ve směru příslušných galaxií, je ovšem zahrnuta pouze galaktická extinkce, stanovení (odhad) celkové extinkce jsem proto provedl pomocí vztahů, uvedených v [22], str. 358 – 359, s tím, že byl započítán pouze vliv mezihvězdného prachu (jakožto hlavní příčiny mezihvězdné extinkce) u něž lze počítat  $A(\lambda) \sim \lambda^{-1}$ . Takto stanovená celková extinkce ve fotometrické barvě  $V$  (pro tuto supernovu) vychází  $A(V) = 0,847$  mag.

Data, opravená o barevné excesy (zde vůči naměřené světelné křivce v barvě  $V$ ) a celkovou extinkci  $A(V)$  je v dalším kroku nutné ještě normovat

na nulový bod (viz AB magnitudy, kapitola 5.3), tj. provést zpětnou korekci o hodnoty  $\Delta_U - \Delta_I$ , uvedené v kapitole 5.3. Takto celkově upravená data jsou znázorněna v grafu na obrázku 5.13, hodnoty jsou uvedené v tabulce A.1, kapitola A.2 v příloze A.

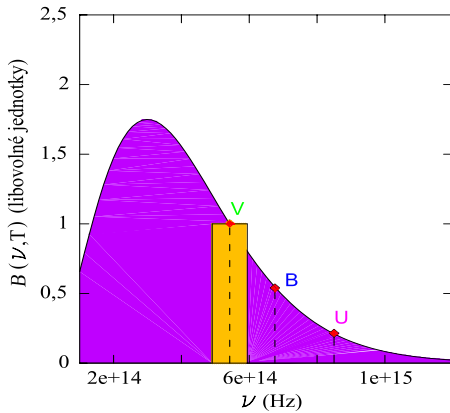


Obrázek 5.12: Určení velikosti barevných excesů pro SN 1998bu metodou převzatou z [23].



Obrázek 5.13: Graf světelných křivek v barvách dle obrázku 5.11, korigovaných o barevné excesy, celkovou extinkci v daném směru a normované na nulový bod (viz tabulka A.1, kapitola A.2 v příloze A).

Poté, co byly křivky v jednotlivých fotometrických barvách takto normovány, můžeme provést (v rámci omezených možností, daných malým počtem získaných dat a také komplikovanějším průběhem světelných křivek v barvách vyšších vlnových délek) konstrukci bolometrické světelné křivky. Nejedná se pochopitelně o plnohodnotnou bolometrickou světelnou křivku, k jejímuž sestavení bychom potřebovali mnohem více údajů v mnohem větším frekvenčním rozsahu, nýbrž pouze o tzv. „pseudobolometrickou“ (v literatuře často označovanou *UBVRI* světelnou křivku, zde dokonce *UBV*), konstruovanou pouze na základě dat z vizuálních fotometrických filtrů.

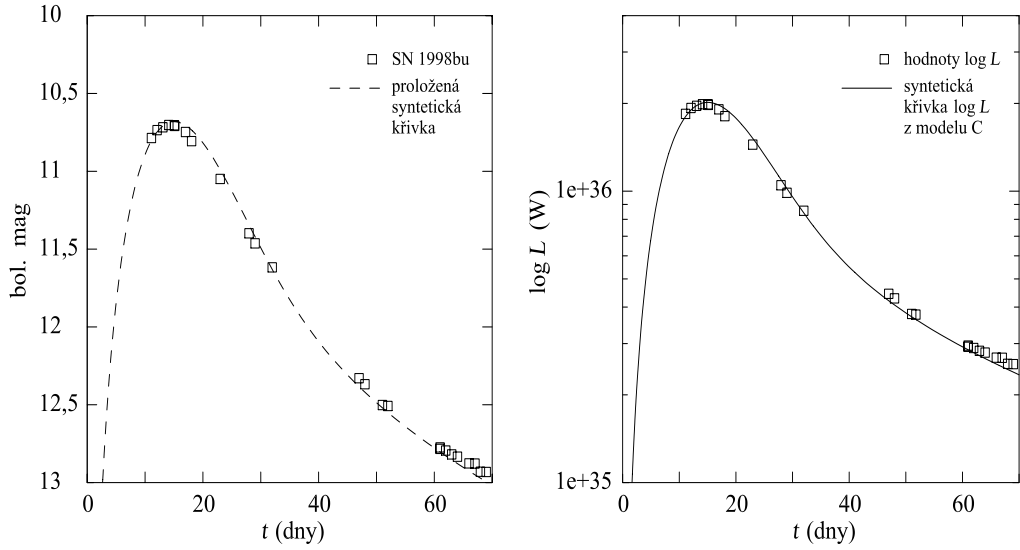


Obrázek 5.14: Konstrukce „bolometrické“ světelné křivky (příklad fitování hodnot pro 61. den SN 1998bu). Fialová plocha značí celkový bolometrický zářivý tok, žlutá plocha ekvivalentní šířku zářivého toku v Johnsonově V filtru, stanovenou výpočtem podle [4] na  $9,2 \cdot 10^{13}$  Hz.

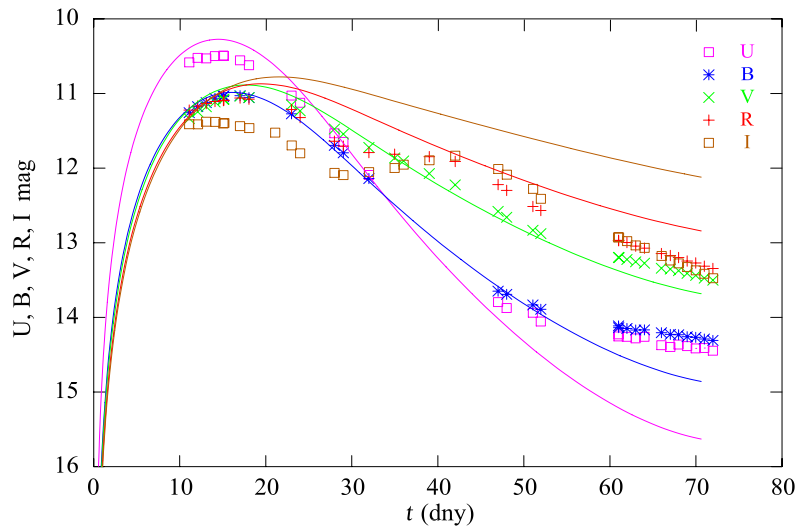
Hodnoty hvězdných velikostí ve filtrech *U, B, V* (hodnoty z filtrů *R, I* již vykazují viditelně „netermální“ průběh, takže je v podstatě nelze pro tento účel použít) ve stejném čase, přepočítané na relativní poměr intenzit (toků) v závislosti na frekvenci (takto normované AB magnitudy také vychází ze středních frekvencí jednotlivých barevných filtrů – viz kapitola 5.3) byly prokládány „Planckovou“ křivkou (program *gnuplot* [46]). Normovaný poměr obou ploch, tj. jeho rozdíl oproti minimálnímu poměru, rovnajícímu se zároveň podílu standardních konstant  $F_0, j_0$  [22], převedený Pogsonovou rovnicí na rozměr magnitudy, dává bolometrickou korekci *BC* (viz tabulka v kapitole A.2 v příloze A).

Následuje graf (levý obrázek 5.15 – hodnoty jsou v legendě označeny jako SN 1998bu) takto zkonstruovaných „bolometrických“ hvězdných velikostí, proložený teoretickou křivkou s volným parametrem pro hodnotu počátečního množství  $^{56}\text{Ni}$  ( $M_{\text{Ni}}^0$ ). Vzhledem k tomu, že časové údaje v [34] byly udány volně, musela být mírně upravena časová osa. Časové údaje v předchozích grafech byly vynášeny pouze přibližně, nyní bylo třeba srovnat tvar křivky, závislejší na parametru  $^{56}\text{Ni}$  s časovou hodnotou maxima, závislejší na parametru  $\tau_m$ , který opět závisí na  $^{56}\text{Ni}$  (teoretický popis – viz kapitola 5.3).





Obrázek 5.15: Graf „bolometrické“ světelné křivky (levý obrázek) a celkového zářivého výkonu (pravý obrázek).



Obrázek 5.16: Graf  $U$ ,  $B$ ,  $V$ ,  $R$ ,  $I$  magnitud, opravených o barevné excesy a celkovou extinkci v daném směru, proložený teoretickými křivkami odpovídajících barev, odvozených z modelu C.

Na základě takto získané hodnoty  $M_{\text{Ni}}^0$  lze modelovat teoretickou křivku celkového bolometrického zářivého výkonu  $L_{\text{bol}}$  (viz pravý obrázek 5.15), z ní pak pomocí vztahu  $M_{\text{bol}} = -2,5 \log(L_{\text{bol}}/L_0)$ , kde  $L_0 = 3,055 \cdot 10^{28} \text{ W}$ , odvodit křivku absolutní bolometrické hvězdné velikosti  $M_{\text{bol}}$ . Jejím porovnáním s fitovanou křivkou bolometrické hvězdné velikosti získáme modul vzdálenosti.

Fitování bolometrických magnitud teoretickou křivkou, odvozenou z modelu C, nelze provést pomocí programu gnuplot, poněvadž se v tomto případě nejedná o analyticky popsatelnou funkci. Pro minimalizaci odchylek byl použit Marquard–Levenbergův algoritmus ve verzi balíčku MINPACK [44]. Takto získaný reziduální součet čtverců všech odchylek má hodnotu  $s_0 = 0,021$ , střední kvadratická odchylka  $\sigma = 0,117$ . Použití těchto hodnot pro standardní výpočet chyb získaných parametrů je však v podstatě pouze formálním úkonem, poněvadž zde jednoznačně převažuje velikost systematických odchylek, daných zjednodušujícími metodami výpočtu mezihvězdné extinkce, bolometrických korekcí a především samotnou volbou aproximačního modelu supernovy jako černého tělesa.

Na základě teoretických vztahů, odvozených v kapitolách 4.2 – 4.7, 5.3 a modelu C můžeme odvodit některé další parametry. Jejich výčet uvádí následující tabulka ( $t_0$  znamená  $t \approx 0$  dní,  $t_{50}$  znamená  $t = 50$  dní).

Tabulka 5.1: Parametry supernovy 1998bu, odvozené z modelu C

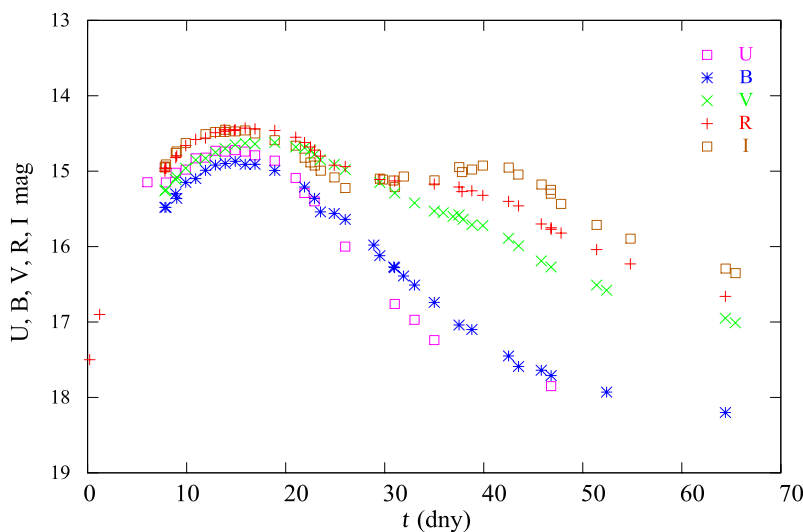
parametr	hodnota	parametr	hodnota
$M_{\text{Ni}}^0$	$(0,72 \pm 0,004) M_{\odot}$	$v_p/10^4 \text{ km s}^{-1}$	$1,13 \pm 0,003$
$E_{\text{SN}}$	$(1,09 \pm 0,006) \cdot 10^{44} \text{ J}$	$T_{\text{ef}}(t_0)$	$(16\,770 \pm 60,62) \text{ K}$
$L_{\text{bol,max}}$	$(2,10 \pm 0,011) \cdot 10^{36} \text{ W}$	$T_{\text{ef}}(t_{50})$	$(4357 \pm 14,03) \text{ K}$
$M_{\text{bol,max}}$	$(-19,59 \pm 0,007) \text{ mag}$	$R(t_{50})/10^{13} \text{ m}$	$4,86 \pm 0,015$
$M_{V,\text{max}}$	$(-19,17 \pm 0,022) \text{ mag}$	$(m - M)_{\text{bol}}$	$30,183 \pm 0,007$
$\tau_m$	$(12,85 \pm 0,021) \text{ dne}$	$(m - M)_B$	$30,151 \pm 0,015$
$t_{\text{max}}$	$(13,84 \pm 0,2) \text{ dne}$	$D$	$(10,80 \pm 0,15) \text{ Mpc}$

Na obrázku 5.16 je také uveden graf  $U, B, V, R, I$  magnitud, opravených o barevné excesy a celkovou extinkci v daném směru, proložený teoretickými křivkami odpovídajících barev, odvozených z modelu C. Hodnoty konstant ze vztahu (5.17) v tomto případě budou:  $CU \approx 6,358$ ,  $CB \approx 6,109$ ,  $CV \approx 5,870$ ,  $CR \approx 5,625$ ,  $CI \approx 5,369$ . Jednotlivé barevné křivky nejsou fitovány, je pouze srovnána hodnota maxima ve fotometrické barvě  $B$ , díky tomu vychází mírně odlišný modul vzdálenosti  $(m - M)_B = 30,151$ .

## 5.5 Supernova SN 2002er

Fotometrická data k této supernově jsou převzata z [27] – viz obrázek 5.17 a tabulka A.2, kapitola A.2 v příloze A. Postup při korekci těchto dat o barevné excesy, mezihvězdnou extinkci, jejich normování na nulový bod a prokládání teoretickým modelem je obdobný jako u supernovy SN 1998bu, takže v této kapitole popíší již jen odlišnosti oproti předchozímu.

Poloha této supernovy na obloze je dána následujícími souřadnicemi: rektascenze  $16^{\text{h}} 36^{\text{m}} 54,3^{\text{s}}$ , deklinace  $+7^{\circ} 59' 44,8''$  (J2000), její mateřskou galaxií je galaxie UGC 10743 v jižní části souhvězdí Herkula (která není součástí známé galaktické kupy Abell). Tato supernova explodovala koncem srpna 2002, maxima dosáhla 6. září 2002 [27] [43].

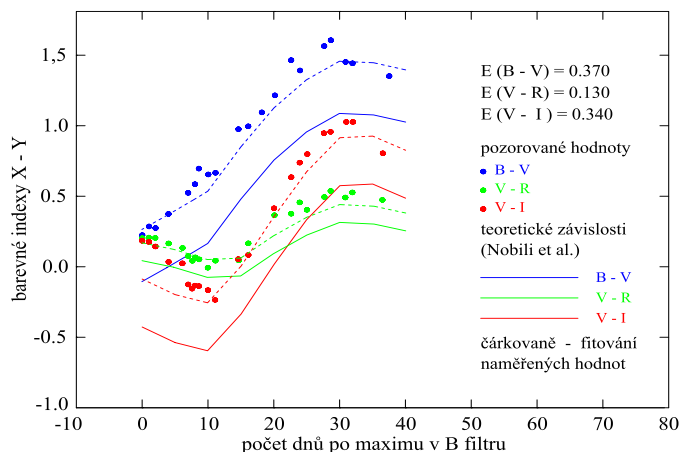


Obrázek 5.17: Graf naměřených světelných křivek v  $U, B, V, R, I$  fotometrických barvách Johnsonova systému (viz tabulka A.2, kapitola A.2 v příloze A).

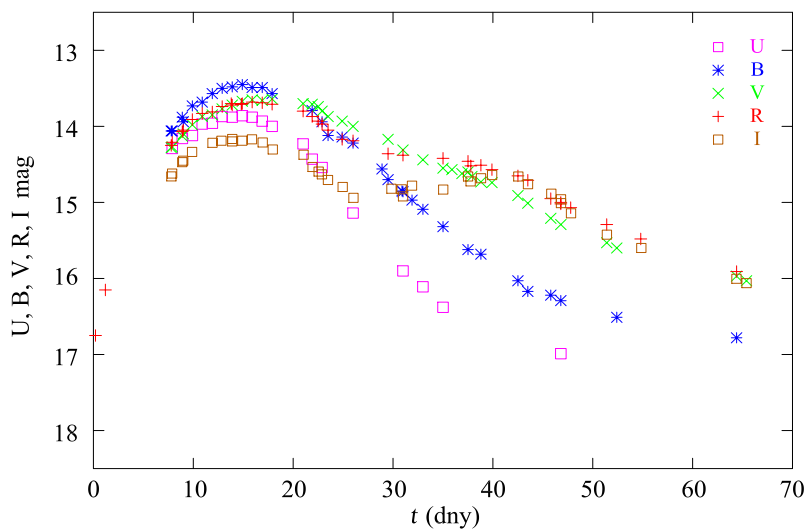
Následující grafy zobrazují tytéž veličiny jako v případě předchozí supernovy SN 1998bu. V grafu na obrázku 5.18 jsou stanoveny velikosti barevných excesů  $E(B - V)$ ,  $E(V - R)$ ,  $E(V - I)$  pomocí stejných empirických vztahů, odvozených v [23].

Celková extinkce  $A(V)$  ve fotometrické barvě  $V$  v daném směru byla odhadnuta stejně jako v kapitole 5.4 opět pomocí vztahů, uvedených v [22], str. 358 – 359, pro tuto supernovu vychází  $A(V) = 0,93$  mag.

Celkově upravená (i normovaná) data zobrazuje graf na obrázku 5.19, hodnoty jsou uvedené v tabulce A.2, kapitola A.2 v příloze A.

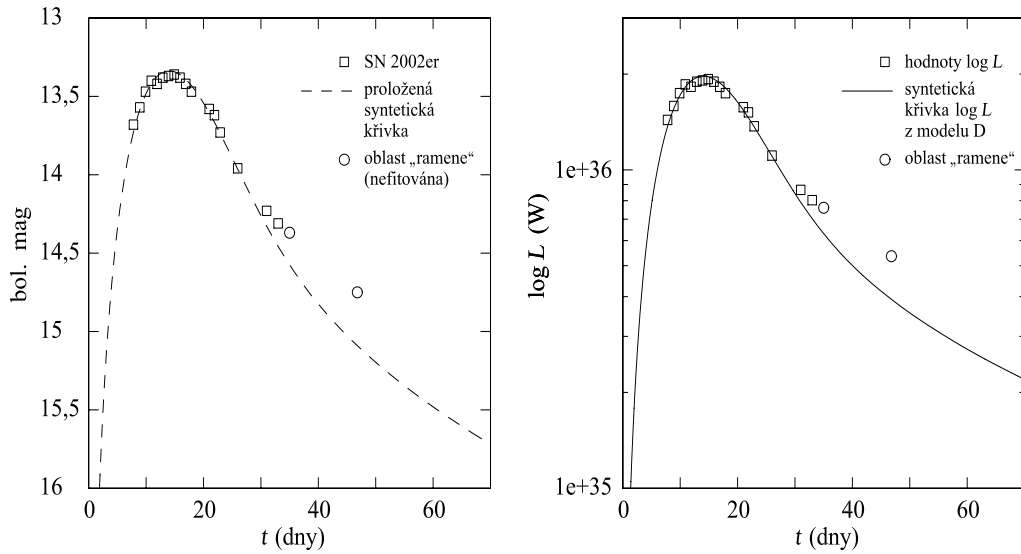


Obrázek 5.18: Určení velikosti barevných excesů pro SN 2002er metodou převzatou z [23].

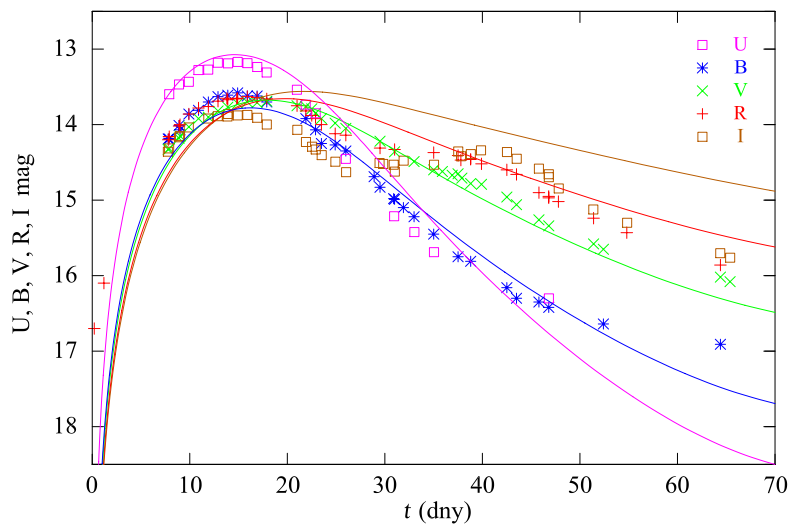


Obrázek 5.19: Graf světelných křivek v barvách dle obrázku 5.17, korigovaných o barevné excesy, celkovou extinkci v daném směru a normované na nulový bod (viz tabulka A.2, kapitola A.2 v příloze A).

Konstrukce všech bolometrických veličin proběhla rovněž zcela obdobně, jako v kapitole 5.4, jediným rozdílem bylo vyřazení hodnot křivky  $V$  z oblasti ramene (křivka  $V$  v případě SN 1998bu rameno v podstatě nevytváří).



Obrázek 5.20: Graf „bolometrické“ světelné křivky a celkového zářivého výkonu.



Obrázek 5.21: Graf  $U$ ,  $B$ ,  $V$ ,  $R$ ,  $I$  magnitud, opravených o barevné excesy a celkovou extinkci v daném směru, proložený teoretickými křivkami odpovídajících barev, odvozených z modelu D.

Fitováním bolometrických magnitud teoretickou křivkou (stejný algoritmus jako v kapitole 5.4, v tomto případě  $s_0 = 0,015$ ,  $\sigma = 0,21$ ) získáme hodnotu  $M_{\text{Ni}}^0$ , z ní opět můžeme modelovat teoretickou křivku celkového bolometrického zářivého výkonu  $L_{\text{bol}}$  (viz pravý obrázek 5.20), z ní pak pomocí vztahu  $M_{\text{bol}} = -2,5 \log(L_{\text{bol}}/L_0)$  odvodit křivku absolutní bolometrické hvězdné velikosti  $M_{\text{bol}}$  a odečíst modul vzdálenosti.

Některé parametry supernovy SN 2002er, odvozené pomocí vztahů, uvedených v kapitolách 4.2 – 4.7, 5.3 a pomocí modelu D, jsou uvedeny v následující tabulce ( $t_0$  znamená  $t \approx 0$  dní,  $t_{50}$  znamená  $t = 50$  dní).

Tabulka 5.2: Parametry supernovy 2002er, odvozené z modelu D

parametr	hodnota	parametr	hodnota
$M_{\text{Ni}}^0$	$(0,68 \pm 0,008) M_{\odot}$	$v_p/10^4 \text{ km s}^{-1}$	$1,09 \pm 0,005$
$E_{\text{SN}}$	$(1,03 \pm 0,012) \cdot 10^{44} \text{ J}$	$T_{\text{ef}}(t_0)$	$(16\,652 \pm 258,6) \text{ K}$
$L_{\text{bol,max}}$	$(1,97 \pm 0,021) \cdot 10^{36} \text{ W}$	$T_{\text{ef}}(t_{50})$	$(4347 \pm 62,4) \text{ K}$
$M_{\text{bol,max}}$	$(-19,52 \pm 0,008) \text{ mag}$	$R(t_{50})/10^{13} \text{ m}$	$4,72 \pm 0,021$
$M_{V,\text{max}}$	$(-19,11 \pm 0,104) \text{ mag}$	$(m - M)_{\text{bol}}$	$32,86 \pm 0,008$
$\tau_m$	$(13,03 \pm 0,026) \text{ dne}$	$(m - M)_B$	$32,89 \pm 0,088$
$t_{\text{max}}$	$(14,02 \pm 0,6) \text{ dne}$	$D$	$(37,59 \pm 1,82) \text{ Mpc}$

Na obrázku 5.21 je uveden graf  $U, B, V, R, I$  magnitud, opravených o barevné excesy a celkovou extinkci v daném směru, proložený teoretickými křivkami odpovídajících barev, odvozených z modelu D. Hodnoty konstant ze vztahu (5.17) v tomto případě budou:  $DU \approx 6,420$ ,  $DB \approx 6,171$ ,  $DV \approx 5,932$ ,  $DR \approx 5,687$ ,  $DI \approx 5,431$ .

Na rozdíl od předchozího případu supernovy SN 1998bu, kdy sklon teoretické křivky ve fotometrické barvě  $B$  zhruba odpovídal sklonu křivky naměřené, takže vzájemný posun byl odečten po srovnání jejich maxim, jsou v tomto případě sklony poněkud odlišné (důvodem může být vyšší mezi-hvězdná extinkce, pravděpodobnější je ale vyšší míra nepřesnosti při konstrukci bolometrické světelné křivky, poznamenané v tomto případě malým počtem použitelných dat, víceméně jen v okolí maxima).

Srovnání je tedy provedeno fitováním teoretické křivky  $B$  (Marquard–Levenbergův algoritmus [44]), ostatní barevné křivky jsou posunuty souběžně s touto křivkou. Takto odečtený modul vzdálenosti opět vychází poněkud odlišný,  $(m - M)_B = 32,89$ .

## 5.6 Diskuse výsledků

Popis teoretických východisek a systematické odvození celé řady fyzikálních vztahů, provedené v kapitolách 2.1 – 4.8 převážně na základě [1], [2], [26], s vlastním numerickým výpočtem hodnot některých veličin (viz grafy na obrázcích 4.2, 4.3, 4.4) vedlo nakonec (kromě jiných zajímavých dílčích výsledků) k vyjádření vzorců, které analyticky (nikoliv pouze empiricky na základě statistického vyhodnocení velkého počtu světelných křivek) popisují světelné křivky supernov jak v aproximaci „malých“ počátečních poloměrů, odpovídající supernovám typu Ia (viz vztah (4.67) ve smyslu (4.97)), tak „libovolných“ počátečních poloměrů, odpovídající ostatním typům supernov s gravitačně kolabující zárodečnou hvězdou, typicky supernovám typu II (viz vztah (4.67) ve smyslu (4.102)).

Numerický výpočet časového průběhu bolometrických světelných křivek (resp. průběhu křivek relativní hodnoty celkového zářivého výkonu), který jsem provedl na základě těchto obecných vztahů, prozatím s jednotkovou velikostí všech konstant, stojících před funkcí časové závislosti  $\phi(t)$  je znázorněn v grafu na obrázku 4.5. Je vidět, že průběh těchto křivek pro „malé“ i „libovolné“ počáteční poloměry se liší pouze ve fázi vzestupu a v okolí maxima, velmi brzy po průchodu maximem jsou obě křivky prakticky shodné (viz kapitola 4.8). Rovněž tvar a velikost relativního poklesu těchto křivek dobře odpovídá pozorovaným skutečnostem.

V kapitolách 5.2, 5.3 jsem s využitím teoretických základů, uvedených v předchozích kapitolách této práce a ve [2] zkonstruoval sice poměrně idealizovaný, nicméně pro ranou fázi světelné křivky přiléhavý a z hlediska zásadních fyzikálních principů ilustrativní model, aproximující záření tohoto typu supernov jako záření absolutně černého tělesa. Na rozpínajícím se „povrchu“ supernovy je tedy definována „efektivní teplota“, vzdálenost od středu expanze, kde se tato teplota nachází, je označena jako „efektivní poloměr“. Na základě vztahů (vycházejících z Planckova vyzařovacího zákona), odvozených v kapitole 5.3, jsem pomocí numerického výpočtu, jehož principy jsou uvedeny v příložených zdrojových souborech č. 7, č. 8 v kapitole A.1 v příloze A vytvořil dva teoretické modely (označené A,B) pro dvě různé hodnoty počátečního množství syntetizovaného  $^{56}\text{Ni}$ , tedy pro dvě různé velikosti energie exploze (popis – viz kapitola 5.3). Pomocí těchto modelů lze zkonstruovat nejen bolometrické hodnoty, nýbrž i průběhy světelných křivek pro různé vlnové délky, tedy pro různé fotometrické barvy (viz grafy na obrázcích 5.7 – 5.10).

Takto vytvořený teoretický model jsem se posléze pokusil porovnat se skutečně naměřenými světelnými křivkami supernov tohoto typu, zvolil jsem dva objekty s relativně dostatečným a dostupným množstvím fotometrických dat – SN 1998bu (zdroj [34]) a SN 2002er (zdroj [27]). Z těchto dat (viz tabulky v kapitole A.2 v příloze A) jsem po zkorigování barevných excesů a celkové mezihvězdné extinkce v daném směru zkonstruoval „bolometrické“ světelné křivky obou objektů (pro jejich relativní blízkost jsem neprováděl korekci na kosmologický rudý posuv), způsob této konstrukce i uvedených korekcí je popsán v kapitole 5.4.

Takto vytvořená „bolometrická“ světelná křivka byla proložena teoretickou bolometrickou světelnou křivkou s volným parametrem  $M_{\text{Ni}}^0$ , na základě určené hodnoty  $M_{\text{Ni}}^0$  lze potom modelovat křivku celkového zářivého výkonu  $L_{\text{bol}}$ , z ní pomocí Pogsonovy rovnice odvodit křivku absolutní bolometrické hvězdné velikosti  $M_{\text{bol}}$  a odečíst modul vzdálenosti. Zároveň lze modelovat světelné křivky v jednotlivých fotometrických barvách (standardně v barvách  $U, B, V, R, I$  Johnsonova fotometrického systému), potom je možné například znovu odečíst modul vzdálenosti proložením světelné křivky ve fotometrické barvě  $B$ . Celý postup i s hodnotami příslušných výsledků je popsán v kapitolách 5.4, 5.5.

Nejpodstatnějším získaným parametrem (z hlediska uvedených fyzikálních principů) je právě hodnota  $M_{\text{Ni}}^0$ , s ní v podstatě všechny ostatní parametry souvisejí. Ta byla v této práci stanovena na  $M_{\text{Ni}}^0 = 0,72 M_{\odot}$  u SN 1998bu a  $M_{\text{Ni}}^0 = 0,68 M_{\odot}$  u SN 2002er. Tato podobnost může být způsobena náhodným výběrem objektů, stejně tak jako možnou větší systematickou chybou u SN 2002er, způsobenou malým počtem výsledných dat, vhodných pro konstrukci bolometrické světelné křivky (viz graf na obrázku 5.20). (Původně jsem takto zpracovával i objekt SN 1996X, který vykazoval hodnotu  $M_{\text{Ni}}^0 \approx 0,9 M_{\odot}$ , z důvodu v podstatě identické metody a velkého rozsahu práce jsem ji nakonec neuvedl).

Významnou veličinou je maximum světelné křivky ve vizuálním oboru  $M_{V, \text{max}}$  (viz kapitola 5.1), pro SN 1998bu zde vychází:  $M_{V, \text{max}} = -19,17$  mag, v [34] se uvádí  $M_{V, \text{max}} = -19,63$  mag, v [16] se uvádí  $M_{V, \text{max}} = -19,42$  mag. V případě SN 2002er vychází v této práci:  $M_{V, \text{max}} = -19,11$  mag, zdroj [27] tuto veličinu neuvádí, místo toho jsou zde uvedeny:  $M_{\text{Ni}}^0 = 0,7 - 0,75 M_{\odot}$ ,  $L_{\text{bol, max}} \approx 1,58 \cdot 10^{43} \text{ erg s}^{-1}$  ( $1,58 \cdot 10^{36} \text{ W}$ ). Moduly vzdáleností vychází v této práci pro SN 1998bu:  $(m - M) = 30,151 - 30,183$ , [43] pro mateřskou galaxii NGC 3368 uvádí střední hodnotu 30,16. Pro SN 2002er zde vychází:  $(m - M) = 32,86 - 32,89$ , [43] pro galaxii UGC 10743 uvádí hodnotu 32,97.



Kromě již vícekrát zmíněné systematické chyby, vyplývající z použité teoretické aproximace je dalším významným zdrojem této chyby rovněž metoda konstrukce „bolometrické“ světelné křivky z dat, převzatých z [34] [27] (její popis – viz obrázek 5.14 a text na straně 84). Pro docílení vyšší přesnosti bychom museli zahrnout větší škálu fotometrických barev, veškeré záření, které pochází z radioaktivního rozpadu syntetizovaných izotopů, pokrývá nejen optické, ale i ultrafialové a infračervené vlnové délky (tato oblast bývá v literatuře nazývána *uvoir* bolometrický tok, tomu odpovídá tzv. *uvoir* světelná křivka). Na druhou stranu – až 80% bolometrického zářivého výkonu typické supernovy typu Ia bývá emitováno v rozpětí vlnových délek od 300 do 1000 nm [9], takže i tzv. *UBVRI* integrovaný zářivý tok (*UBVRI* světelná křivka) může dávat poměrně relevantní výsledek. Nicméně i k vytvoření plnohodnotných *UBVRI* světelných křivek by byla zapotřebí rozsáhlejší a souvislejší databáze (viz tabulky v kapitole A.2 v příloze A).

Další systematické zjednodušení ovšem souvisí s existencí sekundárního maxima, resp. tzv. ramen světelných křivek v dlouhovlnnějších fotometrických barvách (viz str. 66), které zde nebyly do konstrukce bolometrické křivky zahrnuty. V případě SN 1998bu bylo toto rameno v barvě *V* téměř nezatelné, křivka byla tedy konstruována v celém rozsahu až do zhruba 70. dne. Navíc bylo v tomto případě i v pozdějším období k dispozici dostatečné množství souvislých dat. V případě SN 2002er (i když celkové množství dat bylo vyšší) se negativně projevil jednak větší počet chybějících dat v barvě *U*, zároveň také výkyt poměrně výrazných ramen v barvách *V*, *R*, *I*. V tomto případě byly fitovány pouze hodnoty v oblasti poblíž maxima světelné křivky (viz grafy na obrázku 5.20). Zahrnutí druhého maxima a ramen světelných křivek do celkového výpočtu je principiálně samozřejmě možné a při komplexním výzkumu tohoto typu supernov se provádí (viz např. [9]), pro vyhodnocení těchto vlivů je ovšem třeba poměrně detailní a komplikovaný teoretický popis chování atmosféry (rychlejší změny optické hloubky v těchto vlnových délkách), související nejspíš s částečnou rekombinací a pravděpodobně i s určitými změnami struktury a rychlosti rozpínající se obálky v tomto období [9].

S tím souvisí další významná systematická nejistota, spojená především s volbou hodnoty opacity (viz str. 77), exaktní modelování časově i prostorově proměnné opacity, respektive přesné modelování rozpínajících se atmosfér supernov jako celku představuje, ve spojení s mnoha dalšími složitými jevy které se zde vyskytují, přirozenou a nezbytnou cestu, vedoucí k hlubšímu pochopení této problematiky.

# Kapitola 6

## Závěr

Z výše uvedeného je vidět, že hodnoty, získané pomocí modelu, který byl v této práci odvozen, jsou pouze přibližné, již z použité metody je zřejmé, že musí být zatížena systematickou chybou, vyplývající jednak z aproximace reálné atmosféry rozpínající se supernovy pomocí absolutně černého tělesa, jednak z další aproximace sférické atmosféry s malou optickou hloubkou zjednodušeným modelem, vycházejím z Eddingtonovy aproximace, určené pro planparalelní atmosféry. Je ale též vidět, že odchylka hodnot, spočítaných v této práci od hodnot, uváděných v literatuře není (v intervalu prvních zhruba šedesáti dní) řádová, navíc hodnoty, odvozené v různých zdrojích se často mezi sebou nerozcházejí o mnoho méně.

Na druhou stranu je tento model založený na doposud jediné skutečně ucelené a konzistentní teoretické konstrukci (v této práci ji není možné interpretovat vyčerpávajícím způsobem), popisující jevy spojené se supernovami analytickým způsobem a poskytující tak (jakkoli nedokonalý a zatížený mnoha zjednodušujícími předpoklady) komplexní pohled na fyzikální podstatu tohoto jevu.

Další prohloubení a zpřesnění našich znalostí této problematiky nicméně vede jednak přes mnohem jemnější a značně komplikované modely přenosu záření (nejen optického) ve velmi řídkých sférických (nebo dokonce asymetrických) atmosférách, pohybujících se navíc velkými rychlostmi, jednak přes dokonalejší a propracovanější modely jevů, probíhajících v „nitru“ supernov, tedy termionukleárních reakcí, radioaktivních rozpadových řad v případě supernov typu Ia (k tomu i chování látky při extrémních hustotách v případě gravitačně kolabujících jader hmotných hvězd – ostatní typy). To však již přesahuje prostor této diplomové práce.

# Příloha A

## Zdrojové soubory a data

### A.1 Zdrojové soubory pro numerické výpočty rovnic

#### (1) Výpočet Emdenovy rovnice pro $n = 0, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5$

Tvar E-L rovnice:  $y'' + \frac{2}{x}y' + y^n = 0$ . Zde je uveden zdrojový soubor pouze pro  $n = 0$ , pro ostatní hodnoty  $n$  bude výpočet obdobný. Metoda střelby [37]. (Všechny následující soubory jsou napsány v jazyce Fortran 95).

```
PROGRAM emden
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: x,y,dydx,n,dx,x2
  x=0.0
  y=1.0
  dydx=0.0
  dx=0.001
  n=0.0

  DO
    x=x+dx
    y=y+dydx*dx
    dydx=dydx-(2*dydx/x+y**n)*dx
    x2=x**2*dydx
    IF(x>15.0) EXIT
    WRITE (*,*) x,y,dydx,x2
  END DO

END PROGRAM emden
```

## (2) Výpočet funkce prostorového průběhu teploty $\Psi(x)$

Výpočet diferenciální rovnice

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^2 \exp(-1,723Dx) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = -\alpha^2 \Psi$$

pro  $D = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  (viz kapitola 4.4, rovnice (4.57)). Zde je uveden zdrojový soubor pouze pro  $D = -3$ , pro ostatní hodnoty  $D$  bude výpočet obdobný. Metoda střelby [37]. Vlastní hodnoty  $\alpha^2$  pro jednotlivá  $D$  určeny grafickou iterací v průběhu numerického integrování. Graf řešení – viz obrázek 4.3.

```
PROGRAM Psi
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: x,y,dydx,dx,a2,D
  x=0.0
  y=1.0
  dydx=0.0
  dx=0.0001
  a2=189.72
  D=-3.0

  DO
    x=x+dx
    y=y+dydx*dx
    dydx=dydx-((2/x-1.723*D)*dydx+exp(1.723*D*x)*a2*y)*dx
    IF(y<0.0) EXIT
    WRITE (*,*) x,y,dydx
  END DO

END PROGRAM Psi
```

## (3) Výpočet hodnoty (druhého) momentu prostorového rozložení tepelné energie ve fotonovém plynu $I_{Th}$

Určitý integrál funkce  $y = \Psi(x)x^2$  v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  pro různé hodnoty  $D$ . Zde je opět uveden zdrojový soubor pouze pro  $D = -3$ , pro ostatní  $D$  bude výpočet obdobný. Lichoběžníková metoda [13] [37]. Graf řešení pro jednotlivé hodnoty  $D$  – viz obrázek 4.4. Hodnoty momentu  $I_{Th}$ , vypočítané integrací jsou uvedené v tabulce 4.2.

```

PROGRAM ITherm
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: a,b,x,dx,dydx,xn,y,a2,i,i1,in,f,f1,fn
  REAL(selected_real_kind(15)) :: D,Sum
  a=0.0
  b=1.0
  dx=0.00001
  x=a+dx
  y=1.0
  f1=x**2*y
  i1=dx*f1/2.0

  x=a+dx
  y=1.0
  dydx=0.0
  D=-3.0
  a2=189.72

  Sum=0.0

  DO
    x=x+dx
    y=y+dydx*dx
    dydx=dydx-((2/x-1.723*D)*dydx+exp(1.723*D*x)*a2*y)*dx
    f=(x**2)*y
    i=dx*f
    IF(y<(-2*dydx*dx)) EXIT
    Sum = Sum + i
    WRITE (*,*) x,y,f
  END DO

  xn=b-dx
  y=y
  dydx=dydx
  y=y+dydx*dx
  fn=xn**2*y
  in=dx*fn/2.0
  Sum=Sum+i1+in

  WRITE(*,*)"ITh, D=-3:"

  WRITE(*,*) Sum
END PROGRAM ITherm

```

#### (4) Výpočet hodnoty (čtvrtého) momentu prostorového rozložení kinetické energie $I_K$

Určitý integrál funkce  $y = \exp(1.723Dx) x^4$  v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  pro různé hodnoty  $D$ . Zde je uveden zdrojový soubor pouze pro  $D = -3$ , pro ostatní  $D$  bude výpočet obdobný. Lichoběžníková metoda [13] [37].

```
PROGRAM IKin
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: a,b,x,dx,xn,i,i1,in,f,f1,fn,D,Sum
  a=0.0
  b=1.0
  dx=0.00001
  x=a+dx
  D=-3.0
  f1=exp(1.723*D*x)*(x**4)
  i1=dx*f1/2.0
  x=a+dx
  Sum=0.0

  DO
    x=x+dx
    f=exp(1.723*D*x)*(x**4)
    i=dx*f
    IF(x>(1.0-dx)) EXIT
    Sum = Sum + i
    WRITE (*,*) x,f
  END DO

  xn=b-dx
  fn=exp(1.723*D*xn)*(xn**4)
  in=dx*fn/2.0
  Sum=Sum+i1+in
  WRITE(*,*)"  $I_K$ , D=-3:"
  WRITE(*,*) Sum

END PROGRAM IKin
```

#### (5) Výpočet hodnoty (druhého) momentu rozložení hmotnosti ve fotonovém plynu $I_M$ :

Určitý integrál funkce  $y = \exp(1.723Dx) x^2$  v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  pro různé hodnoty  $D$ . Metoda výpočtu i zdrojový soubor budou zcela analogické předchozímu programu IKin.

**(6) Výpočet průběhu funkce  $\phi(t)$  pro libovolné (i malé) počáteční poloměry (vztah 4.102) (Lichoběžníková metoda [13] [37])**

Numerickou integraci je třeba rozdělit na určitý integrál funkce

$$\int_0^t \exp \left[ \frac{x}{\tau_0} + \left( \frac{x}{\tau_m} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{x}{\tau_h} \right) \exp \left( -\frac{x}{\tau_x} \right)$$

v intervalu například  $\langle 0, 100 \rangle$  a výpočet průběhu křivky

$$C \exp \left( - \left[ \frac{x}{\tau_0} + \left( \frac{x}{\tau_m} \right)^2 \right] \right) [\text{int}]$$

kteřé pro každou hodnotu  $x$  mezi sebou násobíme. Hodnoty všech konstant, zahrnutých v  $C$  (prozatím) = 1. Graf řešení – viz obrázek 4.5.

```
PROGRAM intab
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: a,b,h,N,t0,th,tx,tm,tm2,i,i1,in,x0,xn
  REAL(selected_real_kind(15)) :: f1,f,fn,g,g1,gn,k,q,q1,qn,Sum
  a=0.0
  b=100.0
  N=10000
  h=(b-a)/N
  t0=100.0
  th=1.0
  tx=100.0
  tm2=tm**2
  tm2=4E4
  x0=a
  xn=b

  g1=exp(-(x0)/(t0)+(x0)**2/(2*t0*th))
  f1=exp((x0)/(t0)+(x0)**2/(2*t0*th))*(1+(x0)/(th))*
  exp(-(x0)/(tx))
  i1=h*f1/2
  q1=g1*f1
  WRITE(*,*) x0,q1

  x0=a
  Sum=0.0
  DO
```

```

x0=x0+h
g=exp(-((x0)/(t0)+(x0)**2/(2*t0*th)))
f=exp((x0)/(t0)+(x0)**2/(2*t0*th))*(1+(x0)/(th))*
exp(-(x0)/(tx))
i=h*f
IF( x0 > (b-h) ) EXIT
Sum = Sum + i
q=g*Sum
WRITE(*,*) x0,q
END DO

```

```

x0=b
fn=exp((x0)/(t0)+(x0)**2/(2*t0*th))*(1+(x0)/(th))*
exp(-(x0)/(tx))
in=h*fn/2.0
gn=exp(-((x0)/(t0)+(x0)**2/(2*t0*th)))
Sum=Sum+i1+in
qn=gn*Sum
WRITE(*,*) x0,qn

```

END PROGRAM intab

Zdrojový soubor pro výpočet průběhu funkce  $\phi(t)$  pro malé počáteční poloměry bude obdobný, podle vztahu (4.97)

**(7) Výpočet průběhu funkce  $\Lambda(t)$  pro zvolenou hodnotu  $\tau_m/2\tau_{Ni} = 1$  (vztah (5.3)).** Pro jiné hodnoty  $\tau_m/2\tau_{Ni}$  bude výpočet obdobný (Lichoběžníková metoda [13] [37]).

Rozdělení integrálu bude obdobné jako u předchozího zdrojového souboru pro výpočet funkce  $\phi(t)$

```

PROGRAM lambda1
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: a,b,N,dx,tNi,ttNi,tm,tm2,eps0,MNi,x0
  REAL(selected_real_kind(15)) :: x0,f,f1,fn,g,g1,gn,i,i1,in,q,q1,qn,Sum
  a=0.0
  b=100.0
  N=1000.0
  dx = (b-a)/N
  tNi=8.8021           !poločas radioaktivního rozpadu 56Ni/ln2 (dny)
  ttNi=2.0*tNi
  tm=ttNi
  tm2=tm**2.0         !tm2=tm**2=2*t0*th

```



```

eps0=4.78*1E6      !Výkon radioaktivního ohřevu 56Ni (J/kg/s)
MNi=2.0*1E30      !počáteční hmotnost nuklidu 56Ni v obálce supernovy

x0=a
g1=exp(-(x0)**2.0/tm2)
f1=exp((x0)**2.0/tm2)*((x0)/(tm2/2.0))*exp(-(x0)/(tNi))
i1=dx*f1/2.0
q1=g1*i1
WRITE(*,*) x0/86400,q1

x0=a+dx
Sum=i1
DO
  x0=x0+dx
  g=exp(-(x0)**2/tm2)
  f=exp((x0)**2/tm2)*((2.0*x0)/(tm2))*exp(-(x0)/(tNi))
  i = dx*f
  IF( x0 > (b-dx)) EXIT
  Sum = Sum + i
  q=g*Sum
  WRITE(*,*) x0/86400,q
END DO

x0=b
gn=exp(-(x0)**2/tm2)
fn=exp((x0)**2/tm2)*((2.0*x0)/(tm2))*exp(-(x0)/(tNi))
in=dx*fn/2.0
qn=gn*in
WRITE(*,*) x0/86400,qn

END PROGRAM lambda1

```

Další zdrojové soubory pro výpočet jednotlivých modelů jsou velmi podobné, takže uvedu ještě jeden soubor pro aplikaci modelu na supernovu např. SN 2002er, s hodnotami  $M_{\text{Ni}}$ ,  $\tau_m$  na základě fitování bolometrické světelné křivky.

(8) Zdrojový soubor pro výpočet teoretického modelu supernovy Ia - proložením pozorovaných dat teoretickými křivkami získáme odhad charakteristik tohoto typu supernov (v tomto případě se jedná o supernovu 2002er, model je označen D, je uveden také příklad výpočtu  $B_{mag}$  se zahrnutím modulu vzdálenosti a příslušných korekcí). Rozdělení integrálu bude obdobné jako u předchozích zdrojových souborů pro výpočet funkcí  $\phi(t)$ ,  $\Lambda(t)$ . Vzhledem ke složitějšímu cyklu s depoziční funkcí půjde o obdélníkovou metodu [13] [37].

```

! MODEL D - výpočet bolometrického zářivého výkonu
PROGRAM DBo1
  IMPLICIT NONE
  REAL(selected_real_kind(15)) :: a,b,c,N,x0,dx,i,e,f,g,q,DB,tm,tm2,tNi
  REAL(selected_real_kind(15)) :: ttNi,tCo,eps0,eps1,eps2,SUM,kappa,Lambda
  REAL(selected_real_kind(15)) :: lamB,nu,rho,sigma,Bolk,Plank,MNi,MS,MBT
  REAL(selected_real_kind(15)) :: TX,vp,R,Reff,Teff,Te,taug,taupo,Dg,Dpo
  REAL(selected_real_kind(15)) :: Gg,Gpo,logLam,logTe,L,Bmag,bolmag
  a=0.0
  b=7776000.0          !90 dní (s)
  N=1000000.0
  dx=(b-a)/N
  c=2.998E8           !rychlost světla ve vakuu (m/s)
  Plank=6.626E-34    !Planckova konstanta (Js)
  Bolk=1.381E-23     !Boltzmannova konstanta (J/K)
  lamB=4.442E-7      !střední vlnová délka filtru B v Johnsonově foto-
                    !metrickém systému
  nu=c/lamB          !příslušná frekvence
  TX=Plank*nu/Bolk   !konstanta vyjadřující  $h*\nu/k$  (K) pro příslušnou
                    !frekvenci nu
  MS=1.99E30         !hmotnost Slunce (kg)
  MBT=1.44*MS        !minimální hmotnost BT, převyšující  $M_{Ch}$ 
  kappa=0.010        !konstantní opacita obálky ( $m^2/kg$ )
  sigma=5.67E-8      !Stefanova-Boltzmannova konstanta ( $W/m^2/K^4$ )
  eps0=4.78E6        !hmotnostní výkon radioaktiv. ohřevu  $^{56}Ni$  (J/kg/s)
  MNi=0.68*MS        !fitovaná počáteční hmotnost nuklidu  $^{56}Ni$  (kg)
  tCo=9822038.4      !poločas radioaktivního rozpadu  $^{56}Co/\ln 2$  (s)
  eps1=6.444E5       !hmotnostní výkon radioaktivního ohřevu  $^{56}Co$ 
                    !záchytem elektronu (emise  $\gamma$ -záření) (J/kg/s)
  eps1=eps1/eps0
  eps2=1.512E5       !hmotnostní výkon radioaktivního ohřevu  $^{56}Co$ 
                    !rozpadem  $\beta$  (emise pozitronu) (J/kg/s)
  eps2=eps2/eps0
  vp=(2.53*(MNi/MBT))*0.5*(1E7) !rychlost rozpínání okraje obálky (m/s)
  tNi=760501.44      !poločas radioaktivního rozpadu  $^{56}Ni/\ln 2$  (s)

```

```

ttNi=2.0*tNi
tm=(2*kappa*MBT/(13.8*c*vp))*0.5
tm2=tm**2.0          !tm2=tm**2=2*t0*th
!eps0*MNi (Mpc)=4.78E6*0.68*1.99E30*1.05141E-45=6.800831E-9
DB=-2.5*(log10(15.0/(4*c*(4*atan(1.0))**5.0))+
+log10(6.800831E-9)+log10(lambB))-56.1      !DB=6.171
x0=a
SUM=0.0
DO
  x0=x0+dx          !Výpočet depoziční funkce:
  taug=55.3*(0.1/kappa)*(tm/ttNi)**2.0/(vp*10.0E-7*(0.1+x0/tNi)**2.0)
  taupo=355.0*taug
  Gg=taug/(taug+1.6)
  Gpo=taupo/(taupo+1.6)
  Dg=Gg*(1.0+2.0*Gg*(1.0-Gg)*(1.0-0.75*Gg))
  Dpo=Gpo*(1.0+2.0*Gpo*(1.0-Gpo)*(1.0-0.75*Gpo))
          !výpočet funkce  $\Lambda(t)$ :
  g=exp(-(x0)**2/tm2)
  f=exp((x0)**2/tm2)*((2.0*x0)/(tm2))*(Gg*exp(-x0/tNi)+
+Gg*eps1*exp(-x0/tCo)+Gpo*eps2*exp(-x0/tCo))
  e=exp(-(x0)**2/tm2)
  i = dx*f
  SUM = SUM + i
  q=g*SUM+e/(eps0*MNi)
  L=eps0*MNi*q+e          !celkový zářivý výkon
  R=vp*x0          !celkový poloměr
  rho=3.0*MBT/(4*(4*atan(1.0)*R**3))          !hustota
  lambda=1.0/(rho*kappa)          !střední volná dráha fotonu
  Reff=R-(2.0/3.0)*lambda          !"efektivní" poloměr
  Teff=(L/(4*(4*atan(1.0))*sigma*(Reff)**2.0))**0.25 !efektivní teplota
  IF( x0 > b) EXIT
  logLam = -2.5*log10(q)
  logTe = -2.5*log10((TX**4.0)/(Teff**4.0)/(exp(TX/Teff)-1.0))
  Bmag = DB + logLam + logTe
  Bmag = Bmag + 7.887          !modul vzdálenosti Bmag pro 1 Mpc
  bolmag=-2.5*log10(L/3.05528E28)          !výpočet  $M_{bol}$ 

  WRITE(*,*) x0/86400.0,L
  !WRITE(*,*) x0/ttNi,rho
  !WRITE(*,*) x0/86400.0,Teff
  !WRITE(*,*) x0/ttNi,R,Reff
  !WRITE(*,*) x0/86400.0,Bmag
END DO

END PROGRAM DBol

```

## A.2 Fotometrická data SN 1998bu, SN 2002er

Tabulka A.1: Tabulka fotometrických dat supernovy SN 1998bu

den	Data, převzatá z [34] (mag)					Korekce barevných excesů, posun o $A(V)$				
	$U$	$B$	$V$	$R$	$I$	$U$	$B$	$V$	$R$	$I$
11,11	12,000	12,434	12,183	11,862	11,696	10,583	11,257	11,336	11,222	11,409
12,08	11,940	12,353	12,092	11,807	11,662	10,523	11,176	11,245	11,167	11,408
13,07	11,947	12,299	12,024	11,774	11,667	10,530	11,122	11,177	11,134	11,380
14,10	11,916	12,241	11,960	11,747	11,667	10,499	11,064	11,113	11,107	11,380
15,07	11,908	12,218	11,926	11,735	11,689	10,491	11,041	11,079	11,095	11,402
15,12	11,913	12,207	11,921	11,729	11,686	10,496	11,030	11,074	11,089	11,399
17,00	11,973	12,202	11,880	11,701	11,718	10,556	11,029	11,037	11,061	11,435
18,05	12,034	12,232	11,903	11,716	11,747	10,621	11,055	11,056	11,076	11,460
21,14	99,999	99,999	99,999	99,999	11,815	X	X	X	X	11,528
22,99	12,444	12,450	11,998	11,855	11,982	11,027	11,273	11,151	11,215	11,695
23,98	12,542	99,999	12,075	11,959	12,087	11,125	X	11,232	11,323	11,800
27,97	12,950	12,872	12,323	12,279	12,349	11,533	11,695	11,476	11,639	12,062
29,02	13,066	12,972	12,390	12,346	12,380	11,649	11,795	11,543	11,706	12,093
31,98	13,509	13,316	12,570	12,432	12,341	12,092	12,139	11,723	11,792	12,054
34,98	99,999	99,999	12,711	12,453	12,286	X	X	11,864	11,813	11,999
36,02	99,999	99,999	12,751	12,450	12,242	X	X	11,904	11,810	11,955
39,00	99,999	99,999	12,919	12,487	12,181	X	X	12,072	11,847	11,894
42,01	99,999	99,999	13,071	12,551	12,124	X	X	12,224	11,911	11,837
46,99	15,212	14,825	13,426	12,861	12,298	13,795	13,648	12,579	12,221	12,011
48,00	15,292	14,869	13,505	12,938	12,374	13,875	13,692	12,658	12,298	12,087
51,04	15,355	15,010	13,679	13,153	12,562	13,938	13,833	12,832	12,513	12,275
51,97	15,473	15,069	13,725	13,208	12,696	14,056	13,892	12,878	12,568	12,409
61,00	15,673	15,291	14,041	13,608	13,214	14,256	14,114	13,194	12,968	12,927
61,02	15,645	15,315	14,051	13,612	13,214	14,228	14,138	13,204	12,972	12,927
61,98	15,677	15,326	14,071	13,637	13,263	14,260	14,149	13,224	12,997	12,976
63,00	15,698	15,346	14,102	13,684	13,320	14,281	14,169	13,255	13,044	13,033
64,00	15,678	15,345	14,121	13,713	13,356	14,261	14,168	13,274	13,073	13,069
65,99	15,790	15,383	14,189	13,785	13,461	14,373	14,206	13,342	13,145	13,174
67,02	15,813	15,404	14,200	13,810	13,521	14,396	14,227	13,353	13,170	13,234
67,98	15,780	15,410	14,222	13,839	13,562	14,363	14,233	13,375	13,199	13,275
68,97	15,802	15,436	14,257	13,884	13,607	14,385	14,259	13,410	13,244	13,320
69,98	15,833	15,444	14,285	13,910	13,654	14,416	14,267	13,438	13,270	13,367
70,97	15,828	15,467	14,321	13,953	13,700	14,411	14,290	13,474	13,313	13,413
71,97	15,864	15,486	14,349	13,984	13,762	14,447	14,309	13,502	13,344	13,475

den	Normování na nulový bod (AB mag)					Bolometrické hodnoty		
	$U$	$B$	$V$	$R$	$I$	$-BC$	bol. mag	$L_{bol}$ (W)
11,11	11,275	11,127	11,286	11,277	11,718	0,500	10,786	1,841E36
12,08	11,215	11,046	11,195	11,222	11,717	0,460	10,735	1,930E36
13,07	11,222	10,992	11,127	11,189	11,689	0,410	10,717	1,962E36
14,10	11,191	10,934	11,063	11,162	11,689	0,360	10,703	1,987E36
15,07	11,183	10,911	11,029	11,150	11,711	0,320	10,709	1,977E36
15,12	11,188	10,900	11,024	11,144	11,708	0,320	10,704	1,986E36
17,00	11,248	10,899	10,987	11,116	11,744	0,240	10,747	1,909E36
18,05	11,313	10,925	11,006	11,131	11,769	0,200	10,806	1,808E36
21,14	X	X	X	X	11,837	X	X	X
22,99	11,719	11,143	11,101	11,270	12,004	0,052	11,049	1,445E36
23,98	11,817	X	11,182	11,378	12,109	X	X	X
27,97	12,225	11,565	11,426	11,694	12,371	0,028	11,398	1,048E36
29,02	12,341	11,665	11,493	11,761	12,402	0,030	11,463	9,869E35
31,98	12,784	12,009	11,673	11,847	12,363	0,056	11,617	8,565E35
34,98	X	X	11,814	11,868	12,308	X	X	X
36,02	X	X	11,854	11,865	12,264	X	X	X
39,00	X	X	12,022	11,902	12,203	X	X	X
42,01	X	X	12,174	11,966	12,146	X	X	X
46,99	14,487	13,518	12,529	12,276	12,320	0,200	12,329	4,445E35
48,00	14,567	13,562	12,608	12,353	12,396	0,240	12,368	4,288E35
51,04	14,630	13,703	12,782	12,568	12,584	0,280	12,502	3,791E35
51,97	14,748	13,762	12,828	12,623	12,718	0,320	12,508	3,770E35
61,00	14,948	13,984	13,144	13,023	13,236	0,370	12,774	2,951E35
61,02	14,920	14,008	13,154	13,027	13,236	0,370	12,784	2,924E35
61,98	14,952	14,019	13,174	13,052	13,285	0,380	12,794	2,897E35
63,00	14,973	14,039	13,205	13,099	13,342	0,386	12,819	2,831E35
64,00	14,953	14,038	13,224	13,128	13,378	0,390	12,834	2,792E35
65,99	15,065	14,076	13,292	13,200	13,483	0,415	12,877	2,684E35
67,02	15,088	14,097	13,303	13,225	13,543	0,425	12,878	2,681E35
67,98	15,055	14,103	13,325	13,254	13,584	0,395	12,930	2,556E35
68,97	15,077	14,129	13,360	13,299	13,629	0,428	12,932	2,551E35

Tabulka A.2: Tabulka fotometrických dat supernovy SN 2002er

den	Data, převzatá z [27] (mag)					Korekce barevných excesů, posun o $A(V)$				
	$U$	$B$	$V$	$R$	$I$	$U$	$B$	$V$	$R$	$I$
00,20	99,99	99,99	99,99	17,50	99,99	X	X	X	16,70	X
01,20	99,99	99,99	99,99	16,90	99,99	X	X	X	16,10	X
07,80	99,99	15,48	15,26	15,00	14,95	X	14,19	14,33	14,20	14,36
07,80	99,99	99,99	99,99	14,96	14,94	X	X	X	14,16	14,35
07,90	15,15	15,48	15,25	14,96	14,91	13,60	14,90	14,32	14,16	14,32
08,90	15,02	15,30	15,11	14,82	14,76	13,47	14,01	14,18	14,02	14,17
09,00	99,99	15,36	15,08	14,80	14,74	X	14,07	14,15	14,00	14,15
09,90	14,98	15,15	14,96	14,66	14,63	13,43	13,86	14,03	13,86	14,04
10,90	14,83	15,10	14,85	14,58	99,99	13,28	13,81	13,92	13,78	X
11,90	14,82	14,99	14,83	14,56	14,51	13,27	13,70	13,90	13,76	13,92
12,90	14,73	14,92	14,75	14,49	14,48	13,18	13,63	13,82	13,69	13,89
13,80	99,99	99,99	99,99	14,45	14,48	X	X	X	13,65	13,89
13,90	14,74	14,90	14,70	14,47	14,45	13,19	13,61	13,77	13,67	13,86
14,80	99,99	99,99	99,99	14,46	99,99	X	X	X	13,66	X
14,90	14,72	14,87	14,65	14,45	14,47	13,17	13,58	13,72	13,65	13,88
15,90	14,74	14,91	14,63	14,43	14,46	13,19	13,62	13,70	13,63	13,87
16,90	14,79	14,91	14,64	14,44	14,50	13,24	13,62	13,71	13,64	13,91
17,90	14,86	14,99	14,62	14,46	14,59	13,31	13,70	13,69	13,66	14,00
21,00	15,09	99,99	14,68	14,55	14,66	13,54	X	13,75	13,75	14,07
21,90	15,29	15,21	14,69	14,62	14,82	13,74	13,92	13,76	13,82	14,23
22,50	99,99	99,99	14,72	14,68	14,88	X	X	13,79	13,88	14,29
22,90	15,40	15,36	14,78	14,72	14,92	13,85	14,07	13,85	13,92	14,33
23,50	99,99	15,54	14,85	14,80	14,99	X	14,25	13,92	14,00	14,40
24,90	99,99	15,56	14,91	14,92	15,08	X	14,27	13,98	14,12	14,49
26,00	16,00	15,64	14,98	14,94	15,22	14,45	14,35	14,05	14,14	14,63
28,90	99,99	15,98	99,99	99,99	99,99	X	14,69	X	X	X
29,50	99,99	16,12	15,15	15,11	15,10	X	14,83	14,22	14,31	14,51
29,80	99,99	99,99	99,99	99,99	15,11	X	X	X	X	14,52
30,90	99,99	16,27	99,99	99,99	15,12	X	14,98	X	X	14,53
31,00	16,76	16,28	15,29	15,13	15,21	15,21	14,99	14,36	14,33	14,62
31,90	99,99	16,39	99,99	99,99	15,07	X	15,10	X	X	14,48
33,00	16,97	16,51	15,42	99,99	99,99	15,42	15,22	14,49	X	X
35,00	17,24	16,74	15,53	15,17	15,12	15,69	15,45	14,60	14,37	14,53
35,90	99,99	99,99	15,55	99,99	99,99	X	X	14,62	X	X
36,90	99,99	99,99	15,60	99,99	99,99	X	X	14,67	X	X
37,50	99,99	17,04	15,58	15,21	14,95	X	15,75	14,65	14,41	14,36
37,80	99,99	99,99	99,99	15,27	15,01	X	X	X	14,47	14,42
37,90	99,99	99,99	15,64	99,99	99,99	X	X	14,71	X	X
38,80	99,99	99,99	99,99	15,26	14,98	X	X	X	14,46	14,39
38,80	99,99	17,10	15,71	15,26	14,98	X	15,81	14,78	14,46	14,39
39,90	99,99	99,99	15,72	15,32	14,93	X	X	14,79	14,52	14,34
42,50	99,99	17,45	15,89	15,40	14,95	X	16,16	14,96	14,60	14,36
43,50	99,99	17,59	15,99	15,46	15,04	X	16,30	15,06	14,66	14,45
45,80	99,99	17,64	16,19	15,70	15,17	X	16,35	15,26	14,90	14,58
46,80	99,99	99,99	99,99	15,77	15,29	X	X	X	14,97	14,70
46,80	17,85	17,71	16,27	15,75	15,25	16,30	16,42	15,34	14,95	14,66
47,80	99,99	99,99	99,99	15,82	15,43	X	X	X	15,02	14,84
51,40	99,99	99,99	16,51	16,04	15,71	X	X	15,58	15,24	15,12
52,40	99,99	17,93	16,58	99,99	99,99	X	16,64	15,65	X	X
54,80	99,99	99,99	99,99	16,23	15,89	X	X	X	15,43	15,30
64,40	99,99	18,20	16,95	16,66	16,29	X	16,91	16,02	15,86	15,70
65,40	99,99	99,99	17,01	99,99	16,35	X	X	16,08	X	15,76

Pokračování tabulky A.2

den	Normování na nulový bod (AB mag)					Bolometrické hodnoty		
	<i>U</i>	<i>B</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>I</i>	<i>-BC</i>	bol. mag	$L_{\text{bol}}$ (W)
00,20	X	X	X	16,75	X	X	X	X
01,20	X	X	X	16,15	X	X	X	X
07,80	X	14,06	14,28	14,25	14,66	0,602	13,68	1,497E36
07,80	X	X	X	14,21	14,65	X	X	X
07,90	14,29	14,06	14,27	14,21	14,62	X	X	X
08,90	14,16	13,88	14,13	14,07	14,47	0,556	13,57	1,656E36
09,00	X	13,94	14,10	14,05	14,45	X	X	X
09,90	14,12	13,73	13,98	13,91	14,34	0,514	13,47	1,817E36
10,90	13,97	13,68	13,87	13,83	X	0,472	13,40	1,937E36
11,90	13,96	13,57	13,85	13,81	14,22	0,431	13,42	1,902E36
12,90	13,87	13,50	13,77	13,74	14,19	0,390	13,38	1,974E36
13,80	X	X	X	13,70	14,19	X	X	X
13,90	13,88	13,48	13,72	13,72	14,16	0,349	13,37	1,992E36
14,80	X	X	X	13,71	X	X	X	X
14,90	13,86	13,45	13,67	13,70	14,18	0,309	13,36	2,011E36
15,90	13,88	13,49	13,65	13,68	14,17	0,272	13,38	1,974E36
16,90	13,93	13,49	13,66	13,69	14,21	0,236	13,42	1,902E36
17,90	14,00	13,57	13,64	13,71	14,30	0,171	13,47	1,817E36
21,00	14,23	X	13,70	13,80	14,37	X	X	X
21,90	14,43	13,79	13,71	13,87	14,53	0,094	13,62	1,582E36
22,50	X	X	13,74	13,93	X	X	X	X
22,90	14,54	13,94	13,80	13,97	14,63	0,075	13,73	1,430E36
23,50	X	14,12	13,87	14,05	14,70	X	X	X
24,90	X	14,14	13,93	14,17	14,79	X	X	X
26,00	15,14	14,22	14,00	14,19	14,93	0,044	13,96	1,157E36
28,90	X	14,56	X	X	X	X	X	X
29,50	X	14,70	14,17	14,36	14,81	X	X	X
29,80	X	X	X	X	14,82	X	X	X
30,90	X	14,85	X	X	14,83	X	X	X
31,00	15,90	14,86	14,31	14,38	14,92	0,083	14,23	9,022E35
31,90	X	14,97	X	X	14,78	X	X	X
33,00	16,11	15,09	14,44	X	X	0,127	14,31	8,381E35
35,00	16,38	15,32	14,55	14,42	14,83	0,275	14,37	7,930E35
35,90	X	X	14,57	X	X	X	X	X
36,90	X	X	14,62	X	X	X	X	X
37,50	X	15,62	14,60	14,46	14,66	X	X	X
37,80	X	X	X	14,52	14,72	X	X	X
37,90	X	X	14,66	X	X	X	X	X
38,80	X	X	X	14,51	14,69	X	X	X
38,80	X	15,68	14,73	14,51	14,69	X	X	X
39,90	X	X	14,74	14,57	14,64	X	X	X
42,50	X	16,03	14,91	14,65	14,66	X	X	X
43,50	X	16,17	15,01	14,71	14,75	X	X	X
45,80	X	16,22	15,21	14,95	14,88	X	X	X
46,80	X	X	X	15,02	15,00	X	X	X
46,80	16,99	16,29	15,29	15,00	14,96	0,431	14,75	5,588E35
47,80	X	X	X	15,07	15,14	X	X	X
51,40	X	X	15,53	15,29	15,42	X	X	X
52,40	X	16,51	15,60	X	X	X	X	X
54,80	X	X	X	15,48	15,60	X	X	X
64,40	X	16,78	15,97	15,91	16,00	X	X	X
65,40	X	X	16,03	X	16,06	X	X	X

Význam jednotlivých veličin, uvedených v těchto tabulkách je patrný z předchozího textu, u hvězdných velikostí v záhlaví jsou pouze vynechány jednotky (mag). Časové jednotky (dny) jsou uvedeny až po jejich posunutí s ohledem na maximum světelné křivky (popis této korekce na straně 84).

# Literatura

- [1] David Arnett: *Supernovae and Nucleosynthesis*, Princeton University Press, 1996.
- [2] David Arnett: *Type I Supernovae. I. Analytic Solutions for the Early Part of the Light Curve*, The Astrophysical Journal, **253**, 1982.
- [3] Steve Barwick, John Beacom: *APS Neutrino Study*, Report of the Neutrino Astrophysics and Cosmology Working Group, 2004.
- [4] M. S. Bessel: *UBVRI Passbands*, Publications of the Astronomical Society of the Pacific, **102**, 1990.
- [5] R. Barbon, F. Ciatti, F. Rosino: *On the Light Curve and Properties of Type Ia Supernovae*, The Astronomy & Astrophysics, **25**, 1973.
- [6] E. Baron et al.: *Preliminary Spectral Analysis of the Type II Supernova 1999em*, The Astrophysical Journal, **545**, 2000.
- [7] Stirling A. Colgate, Albert G. Petschek, John T. Kriese: *The Luminosity of Type Ia Supernovae*, The Astrophysical Journal, **237**, 1980.
- [8] G. Contardo, B. Leibundgut: *Bolometric Light Curves of the Type Ia Supernovae*, Proceedings of the 9th workshop of Nuclear Astrophysics, Max-Planck-Institut für Astrophysik, 1998.
- [9] G. Contardo, B. Leibundgut, W. D. Vacca: *Epochs of Maximum Light and Bolometric Light Curves of Type Ia Supernovae*, The Astronomy & Astrophysics, **359**, 2000.
- [10] Szolt Frei, James E. Gunn: *Generating Colors and K-Correction from Existing Catalog Data*, The Astronomical Journal, **108**, 1994.

- [11] G. Goldhaber et al.: *Timescale Stretch Parametrization of Type Ia Supernova B-Band Light Curves*, The Astrophysical Journal, **558**, 2001.
- [12] Takehito Hayakawa et al.: *Principle of Universality of  $\gamma$ -process Nucleosynthesis in Core-Collapse Supernova Explosions*, The Astrophysical Journal, **648**, 2006.
- [13] Josef Humlíček: *Základní metody numerické matematiky*, skriptá, Praha, 1980.
- [14] Subrahmanyan Chandrasekhar: *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Chicago University Press, 1967.
- [15] Subrahmanyan Chandrasekhar: *On Stars, their Evolution and their Stability*, Nobel lecture, 1983.
- [16] Saurabh Jha et al.: *The type Ia Supernova 1998bu in M96 and the Hubble constant*, The Astrophysical Journal, **125**, 1999.
- [17] Harold L. Johnson: *Astronomical Measurements in Infrared*, Annual Revue of Astronomy & Astrophysics, **193**, 1966.
- [18] M. Kromer: *Vlastní poznámky z odborné přednášky*, přednáška v AsÚ AV ČR v Ondřejově – 21. 4. 2010.
- [19] Lev Davidovič Landau, Jevgenij Michajlovič Lifšic: *Vol.5 of Course of Theoretical Physics, Statistical Physics, 3-nd Edition*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.
- [20] Lev Davidovič Landau, Jevgenij Michajlovič Lifšic: *Vol.6 of Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics, 2-nd Edition*, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [21] Bruno Leibundgut, Nicholas B. Suntzeff: *Optical Light Curves of Supernovae*, Supernovae and Gamma-Ray Bursters, Lecture Notes in Physics, vol. **598**, Springer, 2003.
- [22] Zdeněk Mikulášek, Jiří Krtička: *Základy fyziky hvězd*, skriptá, Brno, 2005.
- [23] S. Nobili et al.: *The Intrinsic Colour Dispersion in Type Ia Supernovae*, The Astronomy & Astrophysics, **404**, 2003.



- [24] S. Perlmutter et al.: *Scheduled Discoveries of 7+ High-Redshift Supernovae: First Cosmology Results and Bounds on  $q_0$* , The Astronomy & Astrophysics, **404**, 1996.
- [25] M. M. Phillips et al.: *The Reddening-free Decline Rate versus Luminosity Relationship for Type Ia Supernovae*, The Astronomical Journal, **118**, 1999.
- [26] Philip A. Pinto, Ronald G. Eastman: *The Physics of the Type Ia Supernova Lightcurves: I. Opacity and Diffusion*, The Astrophysical Journal, **530**, 1996.
- [27] G. Pignata et al.: *Photometric Observations of the Type Ia SN 2002er in UGC 10743*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **355**, 2004.
- [28] Zdeněk Pospíšil: *Rovnice matematické fyziky*, studijní materiál, Brno, 2006.
- [29] John B. Oke: *Absolute spectral distributions in stars*, Annual Revue of Astronomy & Astrophysics, **230**, 1965.
- [30] Antonín Osička - Ivan Poldauf: *Anglicko - český slovník*, ČSAV, Praha, 1956.
- [31] Frederick Reif: *Statistical Physics*, Berkeley physics course, New York, 1967.
- [32] Karel Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky*, 7. vydání, Praha, 2000.
- [33] M. E. Salvo et al.: *The Template Type Ia Supernova 1996X*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **118**, 2001.
- [34] Nicholas B. Suntzeff et al.: *Optical Light Curve of the Type Ia Supernova 1998bu in M96 and the Supernova Calibration of the Hubble Constant*, The Astronomical Journal **117**, 1999.
- [35] Rikard von Unge: *Vlastní poznámky z přednášky*, kurs statistické fyziky a termodynamiky, podzimní semestr 2008.
- [36] Vladimír Vanýsek: *Základy astronomie a astrofyziky*, Academia, Praha, 1980.

- [37] Emil Vitásek: *Numerické metody*, Praha, 1987.
- [38] <ftp://nic.funet.fi/pub/astro/dbases/observations/sn1993j>
- [39] <http://aladin.u-strasbg.fr/>The GSC-II Catalog, Version 2.3.2 (2006)
- [40] <http://www.aao.gov.au/images/index.html>
- [41] <http://www.cfa.harvard.edu/supernova/SNarchive.html>
- [42] <http://hubblesite.org/gallery>
- [43] <http://nedwww.ipac.caltech.edu> (*Nasa/Ipac Extragalactic Database*)
- [44] <http://www.netlib.org/minpack>
- [45] <http://www.sai.msu.su/mirrors/isn/snimages/snlinks.html>
- [46] <http://sourceforge.net/projects/gnuplot>
- [47] <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/index-e.html>
- [48] <http://www.swinburne.edu.au/cms/astro>