

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Diplomová práce

BRNO 2013

BC. BARBORA MIKULECKÁ



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY



Modely planetek odvozené ze světelných křivek a zákrytů

Diplomová práce

Bc. Barbora Mikulecká

Vedoucí práce: Mgr. Josef Ďurech, Ph.D. Brno 2013

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Barbora Mikulecká Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce:	Modely planetek odvozené ze světelných křivek a zákrytů
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Teoretická fyzika a astrofyzika
Vedoucí práce:	Mgr. Josef Ďurech, Ph.D.
Akademický rok:	2012/2013
Počet stran:	13 + 67
Klíčová slova:	asteroidy; fotometrie; světelná křivka; zákryt; metoda inverze světelných křivek; určování tvarů planetek

Bibliographic Entry

Author: Bc. Barbora Mikulecká
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Theoretical Physics and Astrophysics

Title of Thesis: Asteroid models derived from lightcurves and occultations

Degree Programme: Physics

Field of Study: Theoretical Physics and Astrophysics

Supervisor: Mgr. Josef Ďurech, Ph.D.

Academic Year: 2012/2013

Number of Pages: 13 + 67

Keywords: asteroids; photometry; lightcurve; occultation; lightcurve inversion; shape determining

Poděkování

Na této práci psychicky, motivačně i znalostně spolupracovali: J. Ďurech, Tom, Šajri, Kamil H., Vojta, Pepa H., Pavel K., Michi, a můj táta a děda. Za značná omezení v posledních několika měsících děkuji Filípkovi, ÚDiFu Divadlu Fyziky a taky tobě Mišu.

Data světelných křivek byla získána za pomoci Kamila Hornocha na onřejovském 65cm dalekohledu.

Tato práce využívala IMCCE's Miriade VO tool.

Stěžejní programy práce byly vytvořené pomocí verze Linux 2.6.32 a komerčního softwaru Matlab na zakoupené studentské off-line licenci (MATLAB 7.12.0, The MathWorks Inc., Natick, MA, Copyright 1984-2011).

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

Brno 17. května 2013

.....
Bc. Barbora Mikulecká

Obsah

Úvod	iii
1 Základní popis asteroidů	1
1.1 Rotační stav asteroidu	1
1.2 Tvar asteroidu	1
1.3 Základní převodní vztahy	2
1.4 Velikost asteroidu	4
1.5 Miriade	4
2 Modelování tvaru asteroidů ze světelných křivek	7
2.1 Světelné křivky	7
2.2 Modelování tvaru asteroidů	9
3 Zákryty hvězd planetkami	17
3.1 Popis zákrytu	17
3.2 Pozorování zákrytů	18
3.3 Získání profilu planety	20
4 Kombinace modelovaných tvarů a zákrytů	23
4.1 Projekce tvaru asteroidu	23
4.2 Porovnávání a škálování	24
5 Praktická část	27
5.1 Výběr vhodných planetek	27
5.2 Pozorování asteroidů	29
5.3 Formátování dat	34
5.4 Nalezení tvaru pomocí Inverze světelných křivek	36
5.5 Projekce planety	44
5.6 Projekce zákrytů	46
5.7 Škálování modelu a zákrytu – minimalizace	47
5.8 Výsledky	48
Závěr	65
Příloha	i
Literatura	iii

Abstrakt

V práci jsou odvozovány globální konvexní tvary a rotační vlastnosti asteroidů na základě kombinace fotometrických dat a pozorování zákrytů hvězd planetkami. Vybrané planetky (334) Chicago, (510) Mabella, (790) Pretoria a (1366) Piccolo byly pozorovány pomocí ondřejovského 65cm dalekohledu, byla také použita starší data od různých pozorovatelů. Data byla zredukována a byly získány světelné křivky planetek. Metodou inverze světelných křivek pro ně bylo nalezeno několik možných tvarů a na základě porovnání těchto tvarů s pozorovanými zákryty byly vybrány pouze relevantní tvary a k nim příslušné rotační parametry. Modely byly velikostně naškálovány a byl tak zpřesněn průměr těchto planetek.

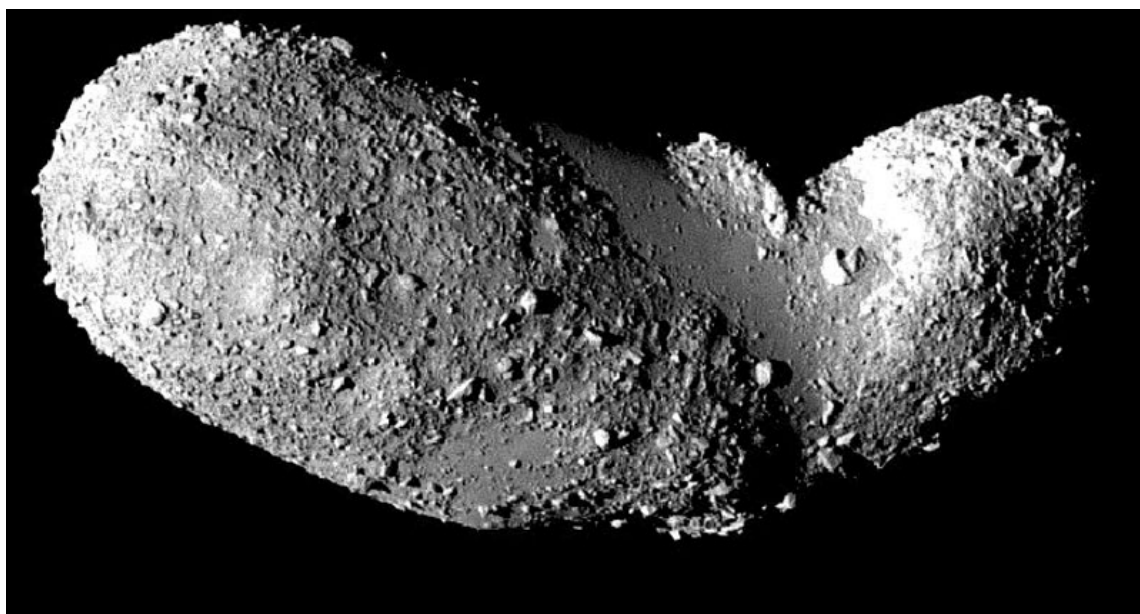
Abstract

In this thesis, we study global convex shapes and rotational properties of asteroids combining photometric data with observed asteroid occultations of stars. Chosen asteroids (334) Chicago, (510) Mabella, (790) Pretoria a (1366) Piccolo were observed with 65 cm telescope at Ondřejov Observatory. The older measurements from different authors were also used. Data were reduced and the lightcurves of asteroids were obtained. We found several possible models of studied asteroids using the lightcurve inversion. These models were compared to observed occultations. With this method, we reduced the number of relevant shapes and the rotational properties as well. Size of models was scaled to fit the observed data providing more precise diameter of these asteroids.

Úvod

Planetky jsou bezesporu otiskem minulosti naší Sluneční soustavy. Postupně nám odkrývají jeden z nejdůležitějších příběhů vesmíru – příběh o zrodu hvězdné soustavy s planetárním systémem, ve kterém existují vhodné podmínky pro vznik a dlouhodobý vývoj života. Natočení rotačních os planetek, distribuce jejich velikostí, nerovnoměrné rozložení ve Sluneční soustavě, periody rotace, to vše v sobě skrývá historické vlivy okolních planet a Slunce. Kde a za jakých podmínek vznikly planety, jak v průběhu vývoje Sluneční soustavy migrovaly, jaké bylo rozložení hmoty na počátku – k objasnění všech těchto otázek mohou přispět znalosti o planetkách.

Asteroidy jsou nejpočetnější skupinou těles ve Sluneční soustavě. Pozorováno jich bylo více než 600 000, z toho u 400 000 již byly určeny přesné orbity [41]. Dráha, absolutní hvězdná velikost a přibližná velikost jsou většinou jediné parametry, které o planetkách víme. Pouze u 6 000 z nich máme k dispozici dostatek fotometrických dat [47] k určení periody rotace a amplitudy světelných změn a zhruba u 350 planetek jsme získali i polohy rotačních os a informace o tvaru [8]. Asteroidů, které byly zkoumány vesmírnými sondami a známe detailně jejich topografii, je pouhá desítky, mezi nimi například asteroid Itokawa z obrázku 1.

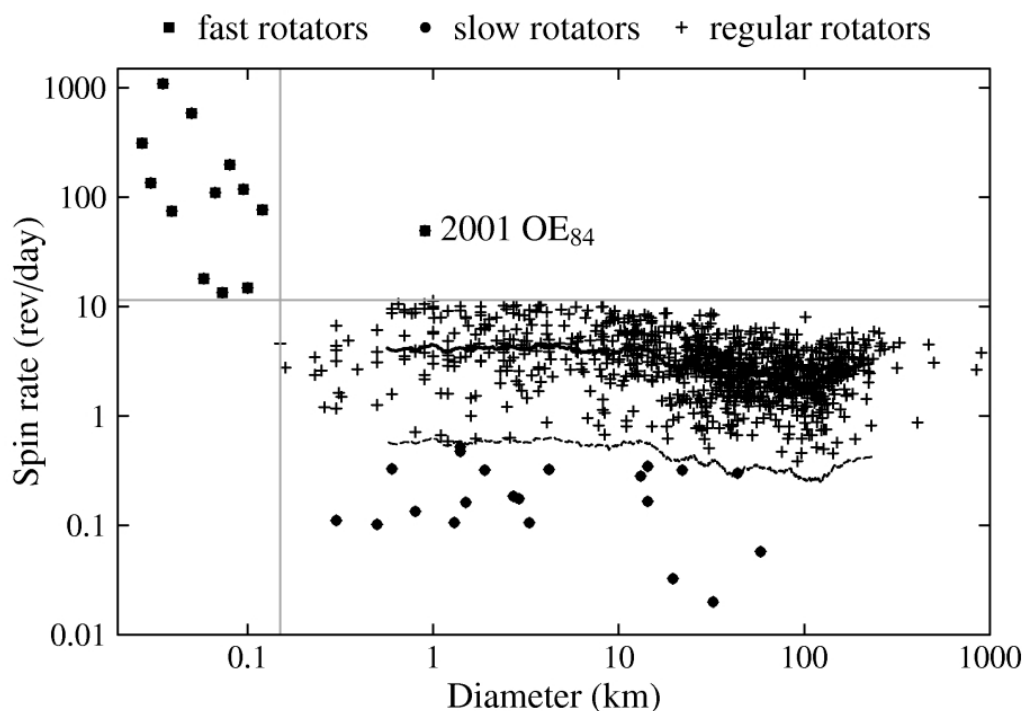


Obrázek 1: Fotografie planetky (25143) Itokawa pořízená japonskou sondou Hayabusa [43]. ©JAXA

Na obloze vypadají planety jako světelné body, na první pohled nerozlišitelné od hvězd, až po delším pozorování si můžeme všimnout jejich pohybu mezi hvězdami. Jejich rozmístění ve Sluneční soustavě je velmi nerovnoměrné. Zdaleka nejvíce planetek pozorujeme ve vzdálenosti 2,1–3,3 AU od Slunce v *hlavním pásu* mezi Marsem a Jupiterem. To je dáno výběrovým efektem, protože planety hlavního pásu jsou pro nás blíže než nejpočetněji zastoupené planety za drahou planety Neptun tzv. *transneptunická tělesa* (TNO). Početnou skupinou jsou také Kentauři, planety na drahách mezi Jupiterem a Neptunem, dále *Trojané* nacházející se v okolí Lagrangeových bodů soustavy Slunce–Jupiter L_4 a L_5 . Ve vnitřní části Sluneční soustavy nalezneme méně početnou skupinu těles křížících dráhy terestrických planet.

Protože nejvíce pozorování máme pro planety hlavního pásu, budu se v práci zabývat právě jimi. Skutečný počet planetek v hlavním pásu větších než 1 km je odhadován na 10^6 . Postupy jsou aplikovatelné i na jiné skupiny planetek, musíme však být schopni pozorovat světelné změny v různých geometriích. To bohužel vylučuje právě nejpočetnější transneptunická tělesa.

Práce se zabývá nalezením tvaru asteroidů. Jeho nalezení vede současně k určení rotačního stavu asteroidů. Budeme-li dělat simulace vývoje Sluneční soustavy, může nám nejen hustota rozložení asteroidů a distribuce jejich rotace, ale právě i rozložení směrů rotačních os velmi pomoci k simulaci správného a jednoznačného vývoje Sluneční soustavy.



Obrázek 2: Graf závislosti rotační frekvenci na velikosti asteroidů v otáčkách za den. Čtverce znázorňují skupinu rychle rotujících asteroidů, kroužky pomalu rotujících. Převzato z Bertotti a kol. (2003).

Znalost jednoho ani desítek tvarů pravděpodobně nepovede k převratným objevům. K vyvozování závěrů potřebujeme větší množství dat. Vhodnou ukázkou přímo z oboru

asteroidů jsou výsledky na obr. 2, kde bylo nepřímo potvrzeno, že planety nejsou monolitickými kusy skal. V grafu je vynesena rotační frekvence asteroidů v otáčkách za den vůči jejich průměru v kilometrech. Řádově se periody rotace pohybují mezi 2–12 hodinami. Výrazná je ostrá hranice rotační periody u hodnoty 2,25 h, nad kterou se nevyskytují (až na jednu výjimku) rychle rotující velká tělesa. Hranice rotační periody souvisí s mezní obvodovou rychlostí otáčení, při níž je překročena úniková rychlost a těleso je roztrháno na menší kusy. Jedná se o nepřímý důkaz toho, že planety nejsou monolitickým kusem skal, ale hromadou kamení, tzv. *rubble piles*. Menší, již monolitické kusy, pak v grafu nalézáme vlevo nahoře nad kritickou hodnotou rotace a nazýváme je *rychlými rotátory*. Na hranici kritické frekvence nalézáme v souladu s touto teorií binární asteroidy. Jedná se o planety, které rotovaly dostatečně rychle na to, aby zde odstředivá síla od planety odtrhla menší kus. Větší z dvojice se rozpadem mírně zpomalí, a proto jeho rotační frekvenci nalézáme lehce pod kritickou frekvencí.

Tato práce přispívá k jednoznačnému určování natočení rotačních os a tvarů asteroidů za pomoci kombinace výsledků ze dvou různých zdrojů dat: inverzí světelných křivek a zákrytů hvězd planetkami. Na základě kombinace těchto dvou zdrojů dat v práci určuji velikost planetek. Výsledky jsou v tomto případě více určující, než termální družicová měření. V první kapitole shrnu základní vlastnosti a matematický popis asteroidů jako těles rotujících ve Sluneční soustavě. V druhé kapitole objasním používanou metodu inverze světelných křivek a ve třetí kapitole popíši vznik a pozorování zákrytů hvězd planetkami. Čtvrtá kapitola popisuje porovnání těchto dvou druhů dat. V páté kapitole shrnuji praktický postup mé práce.

Kapitola 1

Základní popis asteroidů

Pro další zkoumání asteroidů je třeba uvést základní vlastnosti a matematický popis jejich orbitálních parametrů, rotačního stavu a povrchových vlastností. Kapitola má za cíl shrnutí základního popisu asteroidů jako rotujících těles ve Sluneční soustavě a popisuje praktické získávání informací o jejich pozičním a rotačním stavu pomocí webové aplikace *Miriade*.

1.1 Rotační stav asteroidu

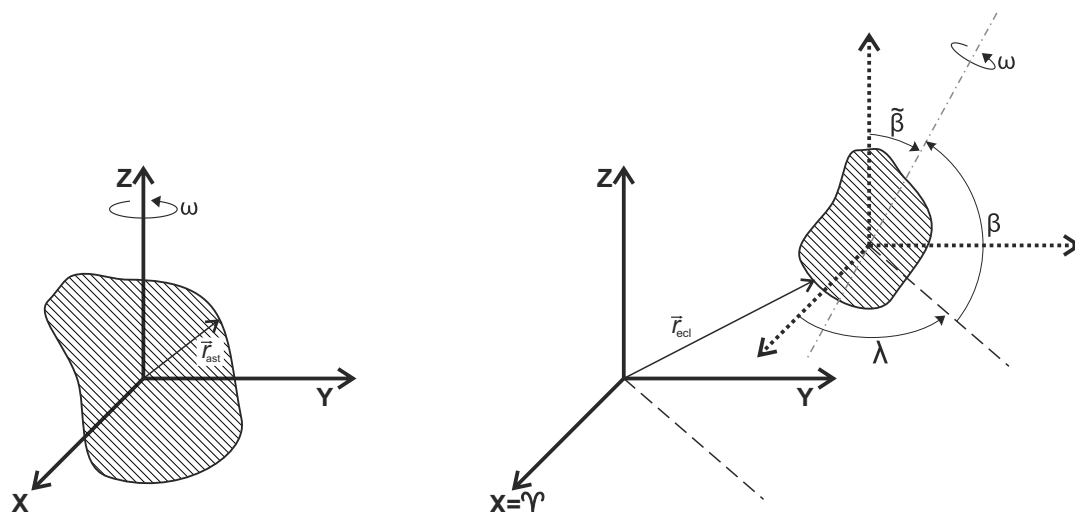
Asteroid se může nacházet v různých rotačních stavech. V základním stavu rotují asteroidy kolem osy s největším momentem setrvačnosti. V těchto stavech se nachází většina asteroidů a my pozorujeme jednorázové světelné křivky. Planetky se mohou také nacházet v excitovaném stavu například v důsledku srážky s jiným tělesem. Speciálním případem jsou binární a vícenásobné systémy asteroidů. Oba tyto příklady rozeznáme od základního víceperiodickými světelnými křivkami.

Základní rotační stav asteroidu je zcela popsán úhlovou rotační rychlostí ω a polohou pólu. Siderická doba rotace je definována jako $P = 2\pi/\omega$. Směr rotační osy asteroidu popisujeme nejčastěji v ekliptikální souřadnicové soustavě dvěma úhly, viz obrázek 1.1. Prvním je ekliptikální úhel $\tilde{\beta}$ a druhým délka λ . Úhel $\tilde{\beta}$ je měřený od severní části osy Z a jeho hodnoty se pohybují v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Někdy se využívá i ekliptikální šířka β , která je brána jako $\beta = 90^\circ - \tilde{\beta}$.

1.2 Tvar asteroidu

Souřadnicová soustava, pomocí které reprezentujeme body na povrchu asteroidu, je soustava pravoúhlá, jejíž základní rovina xy prochází středem asteroidu (střed v tomto případě není definován přesně, platí že musí ležet uvnitř tělesa a rozumně se pohybuje v blízkosti těžiště) a je kolmá na rotační osu asteroidu. Směr osy x volíme libovolně. Viz. obrázek 1.1.

V této práci se zaměřuji pouze na konvexní tvary, jejichž popis je výrazně jednodušší a jejichž určování metodou inverze světelných křivek je jednoznačné. Tvar tělesa je určen délkou radius vektoru $\vec{r}_{\text{ast}}$. Jedná se o vektor v pravoúhlé souřadnicové soustavě se středem v tělese, kterou popisují v následující kapitole 1.3. Vektor má počátek v této soustavě



Obrázek 1.1: Vlevo: souřadnicová soustava spojená s asteroidem. Vpravo: ekliptikální souřadnicová soustava a určení směru rotační osy.

a je vyjádřen pomocí sférických souřadnic jako $\vec{r}_{\text{ast}} = \vec{r}_{\text{ast}}(\vartheta, \varphi)$. Procházíme-li úhly přes povrch koule, vykresluje konec tohoto vektoru povrch tělesa.

Další možností pro konvexní těleso je použít křivost K v každém bodě jeho povrchu Σ . Pomocí křivosti popisujeme tzv. gaussovský obraz tělesa, který je jednoznačně popsán povrchovou hustotou $G = 1/K$. Abychom byli schopní praktických výpočtů, rozdělí se povrch na plochy, které vyjádříme parametricky a určíme jejich vnější normály ve sférických souřadnicích (θ, ψ) a takto vyjádřený povrch zobrazíme na jednotkovou kouli. Výraz $G(\theta, \psi)$ zde představuje povrchovou hustotu povrchového elementu v bodě (θ, ψ) .

Povrch tělesa pak vyjadřuje integrál gaussovske hustoty přes jednotkovou sféru:

$$\text{povrch} = \int_{\Sigma} G(\theta, \psi) d\sigma, \quad (1.1)$$

kde Σ je v tomto případě povrch jednotkové sféry. Pokud diskretizujeme spojitý tvar, popíšeme jej jako uspořádání mnoha plošek:

$$\text{povrch} = \sum_{p=1}^n G(\theta_p, \psi_p) \Delta\sigma_p, \quad (1.2)$$

kde $\Delta\sigma_p$ jsou plošky na jednotkové sféře odpovídající normále (θ_p, ψ_p) . Suma prochází přes jednotlivé plošky p , jejichž celkový počet je n .

V další kapitole se počítají integrály přes část povrchu tělesa, pro což zcela vyhovuje použití Gaussovskeho obrazu. Na popis tělesa radius vektorem se přechází procedurou MINKOWSKI, do té doby není třeba a v práci se používá výhradně povrchové hustoty G .

1.3 Základní převodní vztahy

V práci se velmi často používají následující převodní vztahy mezi soustavami.

- Převod výše zmíněných soustav – ekliptikální sférické pro popis směru os asteroidů a rovníkové (vůči asteroidu) pravoúhlé pro popis bodů na povrchu:

$$\vec{r}_{\text{ecl}} = R_z(\lambda)R_y(90^\circ - \beta)R_z\left(\phi_0 + \frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right)\vec{r}_{\text{ast}}, \quad (1.3)$$

v němž P je perioda rotace asteroidu, ϕ_0 počáteční rotační úhel a t_0 počáteční epocha. Tyto počáteční hodnoty můžeme zvolit libovolně. V praxi je výhodné (za předpokladu, že je planetka eliptického tvaru) zvolit čas t_0 jako čas minima světelné křivky v době malého fázového úhlu a úhel ϕ_0 jako azimutální úhel vektoru $R_y(90^\circ - \beta)R_z(\lambda)\vec{r}_{\text{ecl}}^\oplus$, kde $\vec{r}_{\text{ecl}}^\oplus$ je vektor planetka–Země v čase t_0 . Tato volba zajišťuje polohu Země přímo v rovině xz v soustavě spojené s asteroidem v čase t_0 a největší poloměr planety se bude nacházet v blízkosti osy x .

- Pravoúhlé ekliptikální na pravoúhlé rovníkové souřadnice

$$\vec{r}_{\text{ekv}} = R_x(-\varepsilon)\vec{r}_{\text{ecl}}, \quad (1.4)$$

kde ε je sklon ekliptiky k zemskému rovníku.

- Výpočet sklonu ekliptiky v čase t [JD]

Nejprve spočítáme čas uplynulý od standardní epochy J2000,0:

$$T = (t - 2451545,0)/36525.$$

Sklon ekliptiky ve stupních v čase t je pak dán vztahem:

$$\varepsilon = 23,43929111 - 0,013004166 \cdot T - 0,1638 \cdot (10^{-6}) \cdot T^2 + 0,5036 \cdot 10^{-6} \cdot T^3. \quad (1.5)$$

Vztah je formálně používán v programech s touto přesností, která ale není pro tyto účely zdaleka nutná.

- Převod sférických souřadnic na pravoúhlé

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \cos \phi \\ z &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

- Matice rotace uplatňované na asteroid

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.4 Velikost asteroidu

Velikost asteroidu je v této práci popisována pomocí ekvivalentního, někdy též efektivního průměru planetky. Jedná se o průměr, který by měla planetka stejného objemu, ale kulového tvaru.

Z fotometrických pozorování ve vizuálním spektrálním oboru nejsme schopni určit velikost asteroidu, protože data jsou závislá jak na velikosti, tak na albedu (odrazivosti) tělesa.

K určení velikosti mohou velmi přispět termální měření. Maximální intenzita vyzařování planetek jako absolutně černých těles při využití Planckovy vyzařovací funkce (bráno pro hlavní pás planetek) se pohybuje přibližně kolem hodnoty $10 \mu\text{m}$. Na těchto vlnových délkách již odražené sluneční záření přispívá minimálně a množství detekovaného světla je tak funkcí velikosti povrchu planetek.

Pro porovnání vlastních výsledků využívám v práci měření z družic IRAS – Tedesco a kol. (2004), AKARI – Usui a kol. (2011) a nejnovější výsledky WISE – Masiero a kol. (2011). Měření těchto družic využívá již změřených absolutních hvězdných velikostí¹ a vlastních termálních měření na několika vlnových délkách (například pozorování IRAS probíhala na 12, 25, 60 a $100 \mu\text{m}$).

Geometrické albedo p_v , absolutní hvězdná velikost H a průměr D jsou vzájemně svázány vztahem uvedeným například v práci autorů Fowler a Chillemi (1992):

$$D = \frac{1329}{\sqrt{p_v}} \cdot 10^{-H/5} \quad (1.6)$$

Výsledky z družic dále předpokládají jisté termální modely, na základě nichž jsou schopné určit povrchovou teplotu tělesa. Pro zjednodušení uvažují planetky jako sférická nerotující tělesa s hladkým povrchem. Teplotní rozložení předpokládají symetrické, konkrétně při zpracování dat z družice ARAKI uvažovali autoři Usui a kol. (2011) teplotní rozložení jako:

$$T(\varphi) = \begin{cases} T_{\text{SS}} \cdot \cos^{1/4} \varphi, & \text{pro } \varphi \leq \pi/2, \\ 0, & \text{pro } \varphi > \pi/2, \end{cases} \quad (1.7)$$

V rovnici je T_{SS} tzv. subsolární bod (bod na povrchu planetky nejbližší ke Slunci) a φ je úhlová vzdálenost od tohoto bodu. Používají se i složitější modely, žádné ale neuvažují tvar asteroidů.

Termální tok tělesa je počítán integrováním Planckovy funkce s uvažováním rovnice (1.6) přes sférický povrch asteroidu o průměru D . Termální tok je takto iterativně porovnáván s pozorovanými, v průběhu iterace se regulují hodnoty D a p_v . Pro přesnější popsání celého procesu je možné nahlédnout do prací Usui a kol. (2011) nebo Masiero a kol. (2011).

1.5 Miriade

Projekt Miriade je virtuální prostředí pro výpočet pozičních a fyzikálních efemerid známých těles Sluneční soustavy a je dostupný na webových stránkách The IMCCE Virtual Observatory Solar System Portal. Jeho hlavní nástroje jsou:

¹Zdánlivá hvězdná velikost planetky ve vzdálenosti 1 AU od Slunce, 1 AU od pozorovatele při fázovém úhlu $\alpha = 0^\circ$.

- výpočet efemerid planet, měsíců, asteroidů a komet ve všech běžných souřadnicových soustavách, na kterémkoliv místě na Zemi i na rozličných místech ve Sluneční soustavě (vesmírné stanice, jiné planety),
- výpočet radiálních rychlostí těles a jejich grafická vizualizace,
- vizualizace tvaru asteroidu v libovolném čase pro planetky s již určenými tvary (určené inverzní metodou, z radarových nebo optických teleskopů),
- výpočet východu a západu těles Sluneční soustavy,
- databáze fyzikálních parametrů těles Sluneční soustavy (hmotnost, střední vzdálenost, hlavní rozměry, ...).

Miriade má na svých stránkách tradiční formulář pro výpočet efemerid, nejvíc však oceňuji možnost zadání požadavku přímo skrz HTTP nebo použití Miriade na vlastních webových stránkách. Jednoduše se dají požadavky implementovat do skriptů s použitím programů `wget` nebo `curl`. Dále uvádím konkrétní příklad zadání požadavku do adresového řádku webového prohlížeče. Hlavní část požadavku s sebou nese adresu

```
http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/ephemcc_query.php?[p].
```

Potom následují požadované parametry `[p]`. Pokud např. pro planetku (1) Ceres chceme nalézt geocentrické sférické rovníkové souřadnice J2000 v čase $T = 2453002,24$, použijeme parametry ve tvaru

```
-name=a:ceres&-ep=2453002.24&-observer=500&-tcoor=1&  
-mime=text&-output=jd,
```

kde `-name` udává jméno tělesa včetně jeho druhu (a: asteroid, p: planeta, c: kometa, s: satelit), `-epoch` je čas v JD (podporuje ale několik dalších formátů), `-observer` udává střed souřadnic (je možné zadat libovolné souřadnice na povrchu Země formou geografických souřadnic), `-tcoor` zadává souřadnicovou soustavu, `-mime` je volba výstupního formátu a `-output` udává tvar výstupního formátu datumu.

Na Miriade musím ocenit neustálý vývoj a ochotu při řešení problémů či návrhů na zlepšení. Nevýhodou může být možnost výskytu chyb, vzhledem k dosavadnímu krátkému testovacímu času. Proto je dobré některé výsledky porovnat s tradičním webovým prostředím HORIZONS [39]. V průběhu této práce jsem našla při kontrole dat chybu v převodu jednotek, kterou autor stránek J. Berthier bez odkladu opravil.

Kapitola 2

Modelování tvaru asteroidů ze světelných křivek

Velká vzdálenost v kombinaci s malou velikostí jsou jen těžko překonatelnými problémy pro přímé pozorování tvarů asteroidů. V minulosti byla nejdostupnějším zdrojem dat o planetkách fotometrie a nejspíše jím zůstane i v budoucnosti.

Světelné křivky, tedy změny jasnosti v závislosti na čase, nám poskytují důležité informace o rotační periodě asteroidů. Pokud máme dostatek kvalitních fotometrických dat nejlépe za dlouhé časové období, nezůstáváme pouze u určení periody rotace, ale jsme schopni určit mnohem více – rotační stav asteroidu a jeho tvar. Metoda, která využívá fotometrických dat k určení tvarů asteroidů se nazývá *inverze světelných křivek* a její stručný popis je cílem této kapitoly.

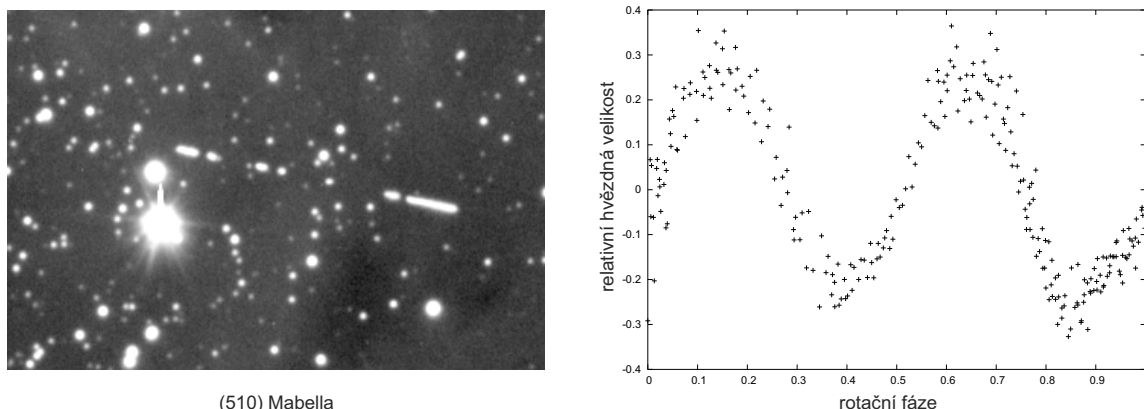
V dnešní době je inverzní metodou určeno více než 350 tvarů planetek a směry jejich rotačních os. V objevování a vyvozování důležitých závěrů jsme teprve na začátku.

2.1 Světelné křivky

2.1.1 Pozorování

Pozorovatelé planetek musí být zkušení, neboť se při plánování pozorování musejí vyhnout nepříjemným vlivům, spojeným s pohybem planetky na pozadí hvězdného pole. Vedle běžných záležitostí shodných s pozorováním proměnných hvězd, jako je výběr expoziční doby nebo dostatek srovnávacích hvězd v zorném poli, je třeba při volbě expozice brát v potaz pohyb asteroidu a nedopustit protáhnutí planetky na snímku, které vede k větším chybám ve fotometrii. Proto musí pozorovatel znát tečnou rychlost asteroidu, kterou si přepočítá na jednotky pixel za čas. Pozorování je také nutné plánovat předem, aby planetka neprocházela z větší části noci přes hvězdy. Mohli bychom diskutovat o využití profilové fotometrie, ale její výsledky zatím nejsou dostatečně přesvědčivé pro používání v přesné fotometrii.

Vedle běžných fotometrických pozorování využívám i tzv. *řídka data*, získaná z velkoplošných přehlídek oblohy pozemních dalekohledů. Jejich data mají tu výhodu, že jsou vůči sobě kalibrovaná a pokrývají různé geometrie planetky. Dávají tak informaci o změně jasnosti v závislosti na fázovém úhlu α (úhel Země–planetka–Slunce). Vzhledem k datům



Obrázek 2.1: Příklad pozorovaných dat a jejich výsledné zpracování. Vlevo: Snímek složený z několika desítek snímků planety (510) Mabella pořízených na Ondřejovské hvězdárně 2012-12-03. Na obrázku je vidět pohyb planety na hvězdném poli v rámci několika hodin. Vpravo: Zpracovaná fotometrická data z noci 2010-03-08 pro planetku (616) Elly. Jedná se o graf závislosti relativní magnitudy v průběhu jedné kompletní periody.[20]

z jiných přístrojů jsou však relativní a jejich velkou nevýhodou je vysoká nepřesnost.

2.1.2 Popis

Ze samotné světelné křivky 2.1 jsme schopni získat periodu rotace například jednoduchou Fourierovou analýzou. Jedna perioda planety má v důsledku protáhlého tvaru dvě maxima. Z amplitudy AMP světelných změn si můžeme udělat představu o zploštění planety použitím Pogsonovy rovnice:

$$AMP = -2,5 \log_{10} \frac{a}{b}, \quad (2.1)$$

kde a a b jsou velikosti hlavních poloos. Amplitudy světelných změn se nejčastěji pohybují kolem $AMP = 0,1$ až $0,3$ mag, čemuž odpovídá podíl poloos $a/b = 1,1$ až $1,3$.

Pro pozorovatele může vyvstat otázka, jestli je lepší pozorovat data relativně nebo absolutně. Tvar světelné křivky z jedné noci je závislý především na poloze pólu, rotační periodě a tvaru planety, přičemž veškeré tyto informace jsou součástí relativních dat. Relativní fotometrie však nepodává informace o geometrii soustavy a rozptylových vlastnostech v závislosti na fázovém úhlu α . Tyto informace podávají pouze kalibrované křivky z absolutní fotometrie. Obecně je relativní fotometrie pro pozorovatele jednodušší, často se pozorovatelé při pokusech o kalibrování snímků dopouštějí chyb, za některých světelných podmínek (blízkost měst) je absolutní fotometrie téměř nemožná. Na druhou stranu jsou z ní získané informace nenahraditelné.

Pokud je planeta zploštělá na pólech, tedy pro poloosy platí $(a \doteq b) > c$, nejsme bez absolutní fotometrie schopni nalézt tvar asteroidu. V ostatních případech, je-li k dispozici dostatečné množství relativních dat, jsou řešení získaná inverzní metodou s využitím pouze relativních měření ekvivalentní s řešením získaným pomocí absolutní fotometrie, jak píše Kaasaleinen a kol. (2001).

2.2 Modelování tvaru asteroidů

V následující kapitole popisují základy získávání tvaru asteroidů metodou inverze světelných křivek. Tvary planetek mohou být ovlivněny primárně existencí skvrn na jejich povrchu nebo nesférickým tvarem. Průkopnické práce tohoto oboru jsou bezesporu Cellino a kol. (1987), Magnusson a kol. (1989), Magnusson a kol. (1996), Kaasaleinen a kol. (2001) a Kaasaleinen a Torppa (2001), jejichž matematické metody jsou dnes nejcitovanějšími při získávání tvarů asteroidů. Tyto články tvoří základ následující kapitoly.

V práci se budu zabývat pouze hledáním konvexních tvarů. Pro nekonvexní tělesa se situace značně komplikuje stíněním okolního povrchu. Analytický výpočet tvaru pro nekonvexní tělesa není možný, o numerický popis se snaží ve své práci Kaasaleinen a Torppa (2001) pomocí tzv. *ray-tracing algoritmu*.

2.2.1 Inverzní metoda

Světelná křivka v časovém okamžiku t je ovlivněna mnoha parametry: orbitálními $O = O(a, e, I, \omega, \Omega, M)$; rotačními $R = R(P, \lambda, \beta)$; rozptylovými $S = S(\mu, \mu_0, \alpha)$; parametry popisujícími tvar T ; rozměrem D a albedem ϖ . Pokud známe všechny tyto parametry, můžeme vyjádřit jasnost planetky jako jejich funkci:

$$L = f(O; R; T; S; D; \varpi; t). \quad (2.2)$$

Mluvíme o tzv. přímém problému. Tímto způsobem můžeme z parametrů funkce f generovat světelné křivky a porovnávat je s reálně naměřenými daty. Orbitální parametry O jsou známé a do inverze světelných křivek vstupují jako konstanty.

Hledáním zbylých parametrů se budu věnovat v dalších podkapitolách. Obecně se snažíme minimalizovat výraz:

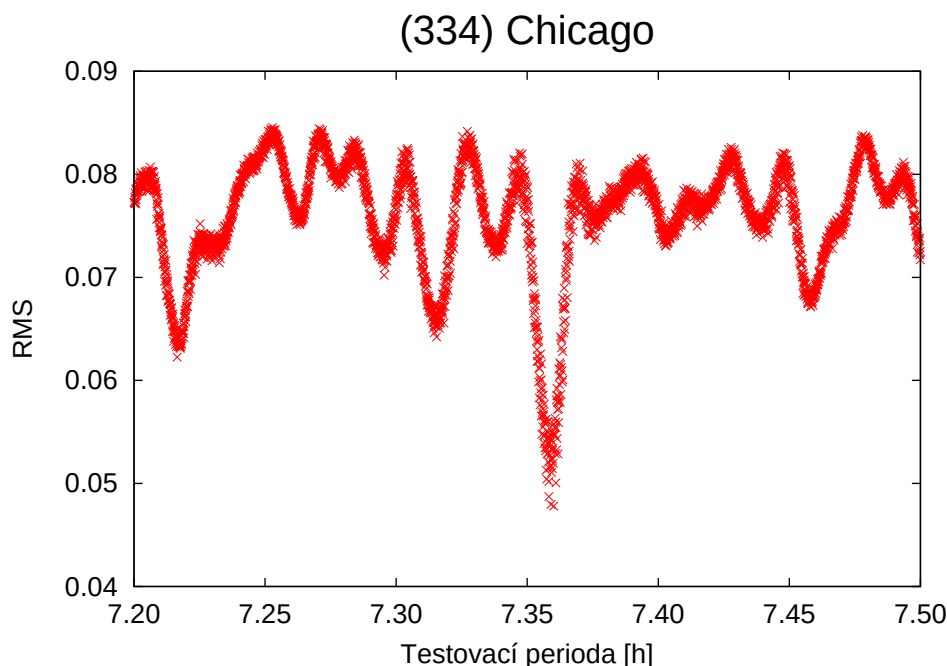
$$\chi^2(R; T; S; D; \varpi) = \sum_i^N \left\| \frac{L_i - f(R; T; S; D; \varpi; t_i)}{\sigma_i} \right\|^2, \quad (2.3)$$

ve kterém je L_i pozorovaná jasnost planetky, a funkce f značí jasnost vypočítanou na základě modelu. Sumace jde přes všechna napozorovaná data, jejichž celkový počet je N , a σ_i jsou chyby jednotlivých pozorování.

Protože je jasnost objektu závislá i na geometrii a fázovém úhlu, je třeba světelné křivky před samotným výpočtem normovat:

$$\chi_{\text{nor}}^2 = \sum_i \left\| \frac{\bar{L}_{\text{obs}}^{(i)} - f(\dots, t_i)}{\bar{L}_{\text{obs}}^{(i)}} \right\|^2, \quad (2.4)$$

kde $\bar{L}_{\text{obs}}^{(i)}$ reprezentuje střední jasnost každé i -té světelné křivky. Chybám v každé pozorované geometrii takto přiřazujeme stejnou váhu, křivky se dostávají na stejnou úroveň. Chyby udávané pozorovateli se proto ani neuvažují a křivky se později váhují vhodně zvoleným parametrem, který můžeme zvolit na základě rozptylu dat.



Obrázek 2.2: Příklad závislosti $\chi^2(P)$ získané inverzí světelných křivek s vzorkovací periodou $\Delta P = 0,0002$ h pro planetku (334) Chicago v okolí jejího předpokládaného minima.

2.2.2 Rotační stav

Pro popis rotačního stavu asteroidu potřebujeme znát periodu rotace P a orientaci rotační osy danou ekliptikálním polárním úhlem $\tilde{\beta}$ a délkou λ , jejich popis je v kapitole 1.1.

Odhad periody můžeme získat pohledem na světelnou křivku asteroidu, ve které nalezneme opakující se úsek. Přesnější hodnotu získáme použitím Fourierovy analýzy, můžeme ji však využít jen za předpokladu, že orbitální pohyb je pomalý v porovnání s rotačním pohybem. Pro hledání tvarů není její použití dostatečně přesné a speciálně pro data z několikaletého pozorovacího období je jedinou spolehlivou metodou určení periody přímé zahrnutí do optimalizovaných parametrů. Rovnice, která zahrne polohu pólu a periodu do inverzního problému, je rovnice (1.3).

V $\chi^2(P, \lambda, \tilde{\beta})$ prostoru, který reprezentuje závislost kvality fitu pozorovaných fotometrických dat pro jednotlivé periody a polohy pólu, nacházíme mnoho lokálních minim. Proto je třeba správně zvolit sérii počátečních hodnot, která konvergují ke svým lokálním minimům a z nich poté vybrat globální minimum. Obrázek 2.2 znázorňuje typickou závislost $\chi^2(P)$.

V případě pólu je problém jednodušší. Dostačující je rozdělit sféru na oktanty a z každého vybrat jeden směr. Takto by měly být pokryta všechna lokální minima, jak uvádí Kaasaleinen a kol. (2001). Další metody jsou popsány v pracích Magnussona a kol. (1996) a Magnussona a kol. (1989).

Pokud jsou data získána z mnohaletých pozorování, je $\chi^2(P)$ prostor pokryt mnoha lokálními minimy. Nejmenší vzdálenost ΔP mezi dvěma lokálními minimy lze popsat přibližným vztahem uvedeným v článku Kaasaleinen a kol. (2001):

$$\Delta P \approx \frac{1}{2} \frac{P^2}{\Delta t}, \quad (2.5)$$

kde Δt je časový úsek mezi prvním a posledním pozorováním planety. Vztah se odvozuje z vlastností rotace planetek: pokud se perioda P změní o ΔP , modelované světelné křivky se posunou v čase $t_0 \pm t$ o fázový posun π . Pro typické světelné křivky planetek, které mají v jedné periodě dvě maxima a dvě minima, pak budou tato maxima a minima na stejném místě. Mezery mezi pozorováními přidávají další modulace, jsou ale vždy delší, než je vzdálenost ΔP . Proto je při procházení zvoleného intervalu period adekvátní použít krok menší než je ΔP . Pokud je perioda P určená jednoznačně, její chyba se pohybuje v řádu $0,1 \Delta P$.

2.2.3 Variace albeda a parametrizace rozměru

Albedo a rozměr planety jsou spolu úzce spjaté a bez znalosti jednoho nejsme schopni určit druhé. Z fotometrických pozorování tyto veličiny nejsme schopni získat, protože i v případě absolutní fotometrie je absolutní hvězdná velikost planety funkcí obou těchto parametrů, viz. rovnice (1.6). Pokud tedy neurčíme rozměr jiným způsobem (ze zákrytů nebo z infračervených měření v kombinaci s absolutní fotometrií), není na konci optimalizace model škálován ve velikosti. Albedu se v průběhu optimalizace přiřazuje konstantní hodnota v rozptylové funkci (2.6) a neoptimalizuje se.

V reálných případech se nesetkáváme s tak velkou variací albeda, aby výrazně ovlivnila tvar světelných křivek planetek. Tato skutečnost byla ověřena i snímky z blízkých průletů kosmických sond. Abychom zjistili, jestli se na planetce objevuje větší variace albeda, sledujeme při optimalizaci výraz (2.13), který je popsán v kapitole níže. Chyby v datech způsobují nenulovost tohoto výrazu, který se proto kompenzuje tzv. temnou ploškou. Pokud je velikost temné plošky nepřiměřeně vysoká, většinou uvažujeme o více než jednom procentu z celkového povrchu, je snadou optimalizace tuto hodnotu v dalším kroku snížit. Pokud se i přes snahy optimalizace pohybují hodnoty temné plošky na vysoké úrovni, pravděpodobně se jedná právě o důsledek změn albeda na povrchu.

2.2.4 Odrazivost povrchu

Pro určení tvaru asteroidů potřebujeme vhodně matematicky popsat rozptylové vlastnosti jejich povrchu. V rozptylovém zákonu $S(\mu, \mu_0, \alpha)$ vystupují veličiny $\mu = \vec{E} \cdot \vec{n}$ a $\mu_0 = \vec{E}_0 \cdot \vec{n}$, kde $\vec{E}$ a $\vec{E}_0$ jsou jednotkové vektory směřující k pozorovateli a ke Slunci, $\vec{n}$ je jednotková normála k elementu povrchu. Rozptylový zákon je závislý i na fázovém úhlu α . Jeho přesný tvar není známý a je třeba jej parametrizovat a přidat do optimalizačních procesů inverzní metody.

Konvergence a stabilita inverzní metody, popisované níže, je zajištěna pouze při nízkém počtu optimalizovaných parametrů. U reálného fyzikálního popisu odrazivosti bývá počet parametrů často vysoký. Dalším problémem při určování rozptylových jevů bývají

také některé závislosti na fázovém úhlu. Známým příkladem je tzv. opoziční jev, tedy zjasnění ve chvíli, kdy se asteroid nalézá poblíž nulového fázového úhlu. Jev je způsobený zpětným rozptylem a vymizením stínění, protože paprsky jsou odražené ve stejném směru, v jakém na planetku dopadají, více tento jev popisuje Muinonen a kol. (2002). Absolutní fotometrie podává informaci o závislosti jasnosti na fázovém úhlu, často ale nemáme dostatek dat z celého fázového cyklu, abychom parametry správně určili a nemá smysl s nimi v inverzní metodě počítat.

Známe několik modelů, které se snaží popsat odrazivé vlastnosti asteroidů co nejrealističtěji, například Hapkeho (1982) nebo model Lummeho a Bowela (1989). Tyto modely, ačkoliv se snaží být fyzikálně věrné, obsahují příliš mnoho parametrů a ve výsledku optimalizace můžeme dostat více možných tvarů planetek. Celkově jejich používání vede k nestabilitě řešení a nerealistickým výsledkům. Ukazuje se, že taková přesnost není pro inverzní metodu nutná a dostatečným se ukázal být vztah, který ve své práci uvádí Kaasalainen a kol. (2001):

$$S(\mu, \mu_0, \alpha, \varpi) = f(\alpha)[S_{LS}(\mu, \mu_0) + cS_L(\mu, \mu_0)]\varpi, \quad (2.6)$$

kde ϖ je albedo povrchu, které se pro všechny plošky uvažuje stejné a vzhledem k neznámému rozměru planetky se uvažuje jako konstanta rovná 1. Funkce $S_{LS}(\mu, \mu_0)$ a $S_L(\mu, \mu_0)$ popisují Lommelův–Seeligerův model pro jednonásobný a Lambertův model pro vícenásobný rozptyl, který je váhovaný parametrem c . Platí pro ně:

$$S_{LS} = \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0}, \quad (2.7)$$

$$S_L = \mu\mu_0. \quad (2.8)$$

Vhodnou volbu fázové funkce $f(\alpha)$ popisuje ve svých pracích Kaasalainen a kol. (2001) a Muinonen (2002) jako lineárně–exponenciální model:

$$f(\alpha) = a \exp\left(-\frac{\alpha}{d}\right) + k\alpha + 1, \quad (2.9)$$

ve kterém jsou a amplituda a d škála délky opozičního jevu, parametr k udává celkový sklon fázové křivky. Celá rovnice se kombinací předešlých dá zapsat ve tvaru:

$$S(\mu, \mu_0, \alpha, \varpi) = \left[a \exp\left(-\frac{\alpha}{d}\right) + k\alpha + 1 \right] \cdot \left[\frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0} + c(\mu\mu_0) \right] \varpi. \quad (2.10)$$

a má jen čtyři parametry c, a, d, k . V případě relativní fotometrie nemáme informaci o závislosti jasnosti na fázovém úhlu a parametry a, d, k neoptimalizujeme. Parametr c má většinou pouze malý vliv na výsledné řešení a je možné jej také zafixovat nejlépe na hodnotě $c = 0, 1$.

Takto uvedený rozptylový zákon nereflektuje žádné fyzikální hypotézy a vypočtené rozptylové parametry je třeba brát vždy s rezervou.

2.2.5 Parametrizace tvaru

Matematický popis tvaru tělesa je blíže popsán v kapitole 1.2. Jasnost planetky se pomocí rozptylového zákona $S(\mu, \mu_0, \alpha)$ a gaussovské povrchové hustoty G vypočítá jako součet

všech příspěvků na povrchu tělesa:

$$L(\vec{E}, \vec{E}_0, S) = \int_{\Sigma} S(\mu, \mu_0, \alpha) G(\theta, \psi) d\sigma. \quad (2.11)$$

V rovnici integrujeme přes oblast Σ na jednotkové sféře normálových vektorů, kde $d\sigma$ je element povrchu této jednotkové sféry. Integrujeme pouze přes osvětlenou část asteroidu zároveň viditelnou pozorovatelem, platí tedy $\mu \geq 0$ a $\mu_0 \geq 0$. Problém se dá velmi snadno diskretizovat, nahradíme-li integrál sumou přes sféru hustě pokrytou malými ploškami představujícími element $d\sigma$. Jasnost pak v diskrétním případě zapíšeme jako:

$$L(\vec{E}, \vec{E}_0, S) = \sum_{j=1}^p S(\mu_j, \mu_{0j}, \alpha) G(\theta_j, \psi_j) \Delta\sigma_j, \quad (2.12)$$

kde $\Delta\sigma_j$ jsou plošky odpovídající normále (θ_j, ψ_j) .

V průběhu řešení musíme zachovat podmínku uzavřenosti povrchu. Vyjádřeno pomocí gaussovské povrchové hustoty G a vnější jednotkové normály $\vec{n}_j$ plošky j , jejichž počet je N :

$$\sum_N \vec{n}_j G_j = 0. \quad (2.13)$$

Tato podmínka je nutná a zároveň dostačující k popsání konvexního tvaru pomocí G .

Aby bylo řešení konvexní, musíme zároveň zajistit kladnost jednotlivých ploch G . Nej-jednodušší možností je vyjádřit jednotlivá G_j jako exponenciální výraz a dále optimalizujeme argument a_j :

$$G_j = \exp(a_j). \quad (2.14)$$

Touto rovnicí se bohužel připravujeme o linearitu problému, nicméně jednoznačnost řešení vzhledem k monotónnosti exponenciální funkce zůstává zachována.

Protože se díky podmínce (2.14) dostáváme do nelineárního problému a protože počet koeficientů a_{lm} pro řešení se pohybuje zhruba mezi 40–100 jak uvádí Kaasaleinen a Troppa (2001), je výhodné použít Levenbergovu–Marquardtovu optimalizační metodu popsanou v práci Cellino a kol. (1987).

Funkci G můžeme vyjádřit pomocí sférických harmonických funkcí jako:

$$G(\theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \psi), \quad (2.15)$$

kde (θ, ψ) představují sférické souřadnice normály k povrchu a a_{lm} jsou koeficienty sférických funkcí Y_l^m stupně l a řádu m . Tento popis funkce G se používá v celé optimalizaci a více o něm pojednává Kaasalainen a kol. (2001). Výhodou je rychlá konvergence ke správnému řešení a to i v případě špatně zvolených počátečních hodnot tvaru. Změníme-li také některé pevné parametry za volné, bude silná konvergence stále zachována.

Na začátku optimalizace definujeme tvar jako sféru nebo tříosý elipsoid. Spojením rovnic (2.15) pro popis tvaru pomocí sférických funkcí a podmínku pro konvexnost řešení (2.14) vyjádříme funkci G jako:

$$G(\theta, \psi) = \exp\left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \psi)\right), \quad (2.16)$$

Pro popis tělesa je možné vedle sférických funkcí použít také plošky konvexního mnohostěnu, které jsou určeny svými vnějšími normálami $\vec{n}_j$ a velikostí plochy. Celkovou jasnost takto vyjádříme opět jako:

$$L(\vec{E}, \vec{E}_0, S) = \sum_{j=1}^p S(\mu_j, \mu_{0j}, \alpha) G_j(\vec{n}_j) \Delta\sigma_j. \quad (2.17)$$

Ve vzorci označuje p celkový počet plošek, pro které opět platí, že $\mu_j \geq 0$ a $\mu_{0j} \geq 0$. Počet plošek se typicky volí řádu stovek až tisíce. Použitím tohoto vyjádření tvaru se při optimalizaci povrch planety vyhladí a výsledný tvar má jemnější rozlišení. V této práci jeho použití nebylo třeba.

Výsledky inverzní metody jsou stabilní a jednoznačné [15], díky tomu, že jsou uvažovány jen konvexní tvary. Používání exponenciálního formalismu je v tomto případě také oprávněné, neboť jde o monotónní funkci. Jeho užití bohužel převádí problém na nelineární. K minimalizaci χ^2 se využívá metoda sdružených gradientů [24].

2.2.6 Použití relativních dat

Předchozí rovnice pro řešení metody nejmenších čtverců počítáme se znalostí závislosti změny jasnosti na fázovém úhlu. Většinou se ale setkáváme s relativními daty a tudíž není možné závislost určit. V takovém případě přechází tvar rovnic na

$$\chi_{\text{rel}}^2 = \sum_i \left\| \frac{\vec{L}_{\text{obs}}^{(i)}}{\vec{L}_{\text{obs}}^{(i)}} - \frac{f^{(i)}(\dots, t_i)}{\langle f^{(i)}(\dots, t_i) \rangle} \right\|^2. \quad (2.18)$$

Pozorovaná jasnost $\vec{L}_{\text{obs}}^{(i)}$ i funkce f vyjadřující modelovanou jasnost jsou poděleny odpovídajícími středními hodnotami a oscilují kolem jedničky. Jde o metodu ekvivalentní s ponecháním škálovacích faktorů jako volných parametrů. Jak dokazují Kaasalainen a Torppa (2001), nečiní používání tohoto vztahu žádné problémy a výsledky jsou shodné s výsledky z optimalizace absolutních dat. Použitím relativních i absolutních dat můžeme také oddělit sady parametrů na ty, které jsou ovlivněny převážně tvarem, polohou pólu a dobou rotace – relativní, od rozptylových parametrů závislých na fázové křivce – absolutní.

2.2.7 Minkowského minimalizace

V předchozích výpočtech jsme počítali s konvexním mnohostěnem definovaným pomocí velikostí plošek a jejich normálových vektorů. Znalost tvaru plošek neovlivňovala výslednou jasnost a proto nebyla nutná. Minkowského minimalizace je procedura, která vytváří obecný mnohostěn o známém tvaru plošek. Plošky jsou obecné mnohoúhelníky definované počtem vrcholů a jejich souřadnicemi. Metodu blíže popisuje například Kaasalainen a Torppa (2001). Minkowského procedura je robustní a pro inverzní metodu představuje stabilizaci řešení.

Často se ještě povrch tvořený obecnými ploškami převádí na mnohostěn definovaný pouze ploškami trojúhelníkového tvaru.

2.2.8 Dvojznačnost výsledných řešení

Teorém o dvojznačnosti, jehož znění včetně důkazu lze nalézt v práci Kaasalainen a Lambert (2006), tvrdí, že pozorujeme-li těleso, které obíhá v rovině ekliptiky, není možné rozlišit jeho dvě různá natočení v prostoru. Tato dvě řešení odpovídají natočení ekliptikální délky pólu λ o 180° a převrácení kolem osy Z .

Většina planetek sice neobíhá přímo v rovině ekliptiky, v praxi se ale ukazuje, že metoda inverze světelných křivek podává dvě výše popsaná řešení i pro planetky s inklinací přes 20° . Důvodem je malé množství fotometrických dat v době, kdy jsou planetky vzdálené od roviny ekliptiky. Tehdy se samozřejmě odlišnost tvarů projevuje nejvíce.

Správné řešení je možné v některých případech rozlišit právě za pomoci zákrytů hvězd planetkami.

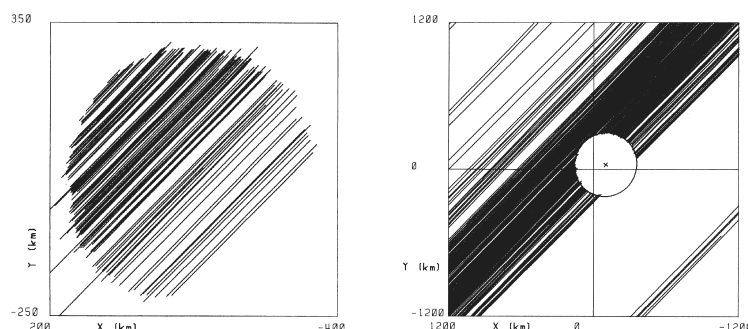
Kapitola 3

Zákryty hvězd planetkami

Asteroidy na svých drahách mohou protínat paprsky hvězd, které přicházejí v našem směru. Pokud je planetka v tu chvíli méně jasná než ona hvězda, pozorujeme na okamžik zmizení hvězdy. Pás viditelnosti takového úkazu je úzký jen několik desítek až stovek kilometrů a tak se třeba v České republice těšíme jen z několika zákrytů za měsíc.

V další kapitole se budu blíže věnovat vzniku tohoto jevu, jeho pozorování, následnému zpracování dat a konečně získání finálního profilu planetky, který z dostatku pozorování můžeme získat.

3.1 Popis zákrytu



Obrázek 3.1: Zákryt hvězdy 1 Vul planetkou (2) Pallas z roku 1983. Zákryt byl pozorovaný 141 lidmi v Severní Americe. Obrázky jsou z původního článku Dunhama a kol (1990).

Zákryt hvězdy může být způsoben jakoukoliv planetkou, která na své dráze kříží světelné paprsky přicházejí od hvězdy k pozorovateli. Délka trvání zákrytu je řádově sekundy až desítky sekund. Většinu hvězd lze kvůli jejich vzdálenosti považovat za bodové světelné zdroje. Planetky je zakrývají vždy po určitou dobu $\Delta t = D_i / \Delta v$, kde Δv je rozdíl rychlosti pohybu Země a rychlosti pohybu planetky, a D_i je délka kolmého průmětu té části planetky, která v průběhu zákrytu zastíní paprsek přicházející od hvězdy. Pozorujeme-li pouze jednu

sečnu, nejsme schopni říct, kterou část povrchu jsme pozorovali. Proto z jedné sečny neurčíme téměř nic, můžeme jen říct, že se jedná o minimální velikost planetky. Pro určení velikosti a tvaru projekce planetky potřebujeme napozorovaných dat co nejvíce.

Při samotném zákrytu se stín planetky pohybuje po povrchu Země v prvním přiblížení po přímce, jejíž směr je dán vektorem pohybu složeným z vektoru rychlosti Země a planetky. Abychom pozorovali co největší počet sečen, je potřeba rozprostřít pozorovatele po celé šířce pásu, kudy prochází stín planetky, tedy kolmo na průmět rychlosti planetky (nezávisí zde na poloze podél pásu, pouze napříč pásem). Pro pozorovatele je důležité co nej přesnější určení polohy pásu zákrytu. V minulosti byla jeho nepřesně určená poloha největším nepřítelem pozorovatelů (hned za počasím). Pokud se nám podaří pozorovat dostatek sečen, můžeme získat poměrně detailní obrázek průmětu planetky. Na obrázku 3.1 uvádím dosud nejlépe napozorovaný zákryt z roku 1983 planetky (2) Pallas přecházející před hvězdou 1 Vul (4,8 mag).

Ze zákrytu hvězd planetkami jsme schopni získat především informaci o velikosti planetek. Informaci o velikosti nejsme schopni získat běžnými pozemními dalekohledy, protože i trpasličí planeta Ceres má v opozici úhlový průměr pouhých 0,74 vteřin. Můžeme využít pouze Hubblova teleskopu nebo největších dalekohledů, disponujících adaptivní optikou. Velikost planetky je možné získat také z infračervených pozorování a následně pak albedo z fotometrických pozorování. Dnes se díky družici WISE podařilo určit velikosti planetek pro stovky tisíc planetek. Pokud známe hmotnost planetky, jsme díky známým rozměrům schopni určit její hustotu, která podává důležité informace o složení a původu planetek.

Ze zákrytů jsme vedle těchto základních informací schopni získat i vedlejší informace, například o přítomnosti satelitu asteroidu – proto jsou velmi důležitá i negativní pozorování v okolí zákrytu. Nedávným vzorovým případem bylo pozorování zákrytu planetkou (87) Sylvia v lednu roku 2013 na obrázku 3.2. Můžeme také získat informace o zakrývané hvězdě, často jde o upřesnění existence dvojhvězdy. Samozřejmým důsledkem je také zpřesnění dráhy asteroidu.

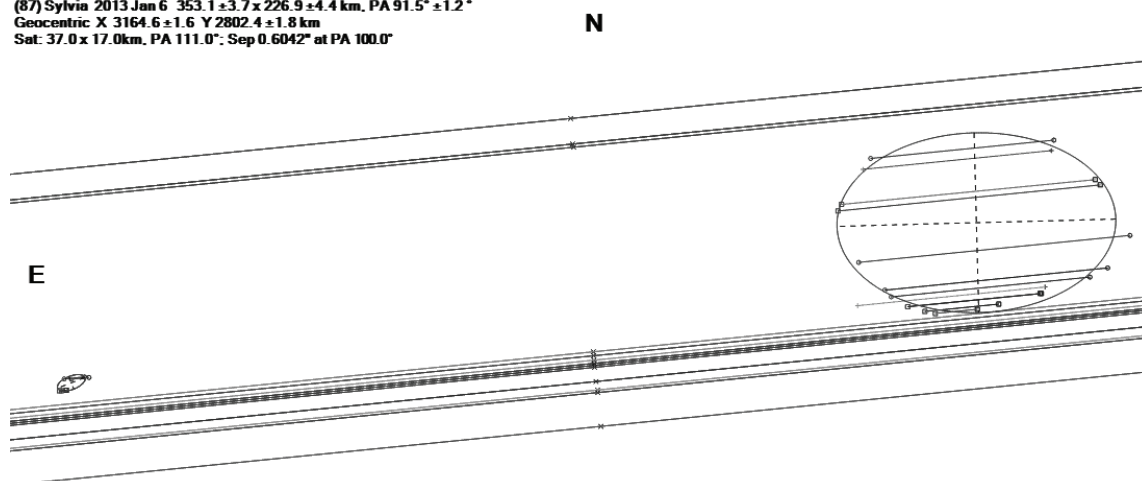
Pomocí zákrytů planetami byly učiněny některé velké objevy v planetární astronomii – prstence planety Uran nebo atmosféra bývalé planety Pluta.

3.2 Pozorování zákrytů

Pozorování zákrytů je mimořádně atraktivní úkol pro amatérské astronomy. Náročnost na základní přístrojové vybavení není velká a pozorování není nijak časově náročné. Jejich příspěvek, především kvůli mobilitě a množství, je svým významem nenahraditelný profesionálními astronomy. Amatérští pozorovatelé využívají možnosti rozprostření svých přístrojů po co největší šířce pásu stínu, který vytváří planetka. Ten je dán především velikostí planetky, pohybujeme se tedy v řádech desítek až stovek kilometrů. Jejich mobilita jim dává možnost vzájemně se domluvit na umístění a zároveň mohou hledat „díry v mracích“ v případě nepříznivého počasí.

Pozorovatelé mají zdánlivě jednoduchý úkol, určit přesný čas zmizení a znovuobjevení hvězdy a zapsat přesnou polohu pozorovacího stanoviště, jeho zeměpisnou délku, šířku a výšku. U většiny zákrytů není planetka viditelná a určení zmizení hvězdy je zřejmé. Pokud je vidět i planetka a přechází přes hvězdu, určení času zákrytu je náročnější. Ur-

(87) Sylvia 2013 Jan 6 353.1 $\pm$ 3.7 x 226.9 $\pm$ 4.4 km, PA 91.5° $\pm$ 1.2°
 Geocentric X 3164.6 $\pm$ 1.6 Y 2802.4 $\pm$ 1.8 km
 Sat: 37.0 x 17.0 km, PA 111.0°: Sep 0.6042° at PA 100.0°



Obrázek 3.2: Úspěšné amatérské pozorování zákrytu hvězdy TYC 1856-00745-1 planetkou (87) Sylvia dne 2013-06-01. Byl při něm úspěšně pozorován drobný satelit planetky. [38]

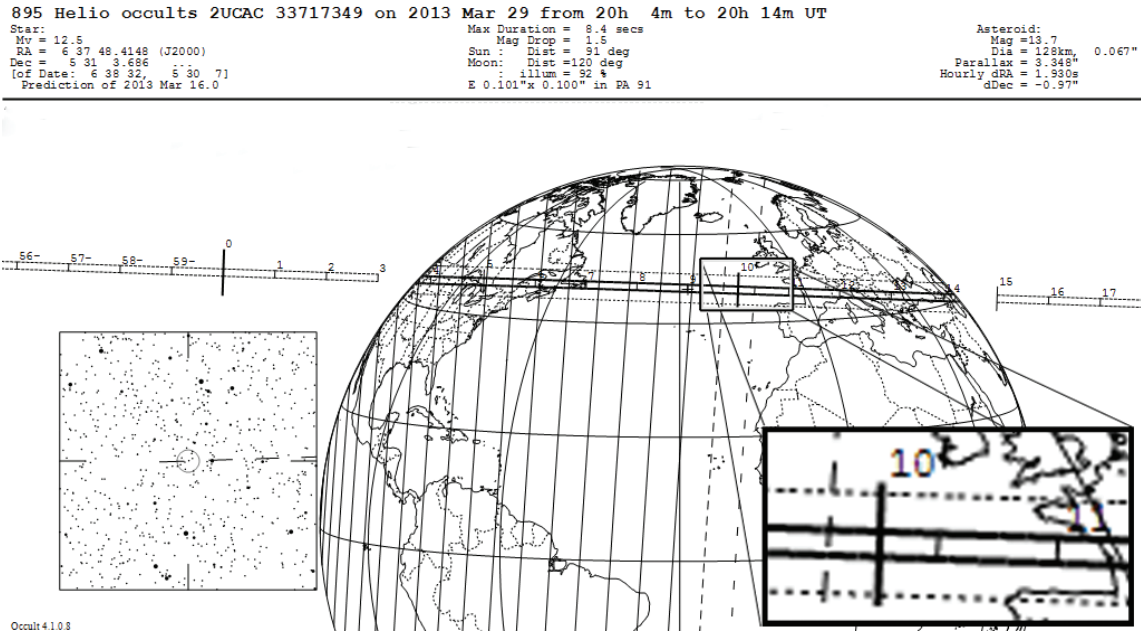
čení času bývá zatíženo chybami, jejich velikost se dá odhadnout z metody pozorování. Vizuální pozorování jsou nejjednodušší volbou, ale výsledný čas je zatížen reakční dobou pozorovatele. Pozorovatelé pro větší přesnost používají zvukový záznam, kam se zaznamenávají časové signály z rádia a poznámky pozorovatele. Vedle vizuálních se používají pozorování citlivými kamerami snímajícími krátké expozice za dalekohledem nebo CCD pozorování tzv. *driftovou metodou*, při které se vypne pohon dalekohledu a na snímku vidíme protáhlé dráhy hvězd, přičemž dráha zakrývané hvězdy je na okamžik přerušena.

Předpovědi zákrytů si komunita amatérských pozorovatelů počítá sama, je tedy soběstačnou skupinou vedle profesionálních astronomů. Nominální hodnoty se počítají z aktuálních hvězdných katalogů a elementů drah planetek. Pro celý svět je zveřejňuje Edwin Goffin a regionální pozorovatelé si výpočty dále optimalizují s aktuálními daty pro hvězdu i planetku. Nejvíce se zpřesňováním údajů o zákrytech v dnešní době zabývá Steve Preston [35], na mnoha stránkách dalších amatérů se pak předpovědi šíří. Z českých pozorovatelů je třeba uvést Jana Mánka a Lud'ka Vaštu [34].

Pozorovatelé využívají informace o nadcházejícím zákrytu nejčastěji ve formátu uvedeném na obrázku 3.3. Vedle informací o hvězdě a planetce v hlavičce je na obrázku vyznačena mapa se zakrývanou hvězdou a její okolí o velikosti 2x2 stupně. Na mapě zeměkoule je zobrazena dráha stínu planetky, která má plné hranice znázorňující šířku stínu planetky a šrafované hranice, které znázorňují místa s 68% pravděpodobností výskytu dráhy asteroidu. Pokud se zakrývaná hvězda nenachází v zenitu, je díky projekci šířka dráhy větší než šířka planetky. Na celé délce dráhy stínu jsou uvedeny časy středu zákrytu v daných místech.

O zveřejňování výsledků se starají regionální skupiny pozorovatelů, které centralizují a upravují výsledky místních pozorovatelů. Za Českou republiku je to Jan Mánek [34], za Evropu Eric Frappa [38] a například za Austrálii a Nový Zéland John Talbot [46].

Kompletní centralizaci výsledků v různých podobách zajišťuje Dave Herald. Ve své práci jsem využívala data z následujících zdrojů: jednak z databáze na stránkách Inter-



Obrázek 3.3: Popis typického obrázku předpovědi zákrytu. Obrázek je převzat z [35]

national Occultation Timing Association (IOTA) [44], která je pravidelně doplňována o nové zákryty, a jednak z podrobnější databáze ze stránek NASA Planetary Data System (Dunham a Herald [33]), která obsahuje veškeré zákryty až do února roku 2012.

Převážně jsem v práci používala výsledky z IOTA [44], kde jsou pro mou práci zásadní soubory OCCLIST.TAB a OCCTIMINGS.TAB. V prvním ze zmíněných se nacházejí obecné informace k jednotlivým zákrytům jako datum a čas zákrytu, informace o zakrývané hvězdě a planetce a výsledky z eliptického fitu napozorovaných sečen. Pořadové číslo zákrytu dále odkazuje na druhý ze zmíněných souborů, jehož obsahem jsou informace o jednotlivých pozorováních, tedy časy zmizení a znovuobjevení hvězdy, souřadnice pozorovacího stanoviště, pozorovací podmínky i podrobný popis aparatury a získávání přesného času.

3.3 Získání profilu planetky

Zaznamenané časy zmizení a znovuobjevení hvězdy definují okraj planetky. Abychom určili profil planetky ze zákrytu, musíme každý z těchto bodů promítnout do společné roviny. Definujeme proto tzv. *fundamentální rovinu*, která prochází středem Země a je neustále kolmá na směr spojující střed planetky a hvězdu (u které předpokládáme vzdálenost v nekonečnu). Souřadnicový systém fundamentální roviny definujeme jednotkovými vektory jako [7]

$$\begin{aligned}\hat{s}_\xi &= (-\sin \delta \cos \alpha, -\sin \delta \sin \alpha, \cos \delta), \\ \hat{s}_\eta &= (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0).\end{aligned}\tag{3.1}$$

V rovnici α a δ označují rektascenzi a deklinaci zakrývané hvězdy. Pro účely předpovědi zákrytu je důležité použít souřadnic určených k danému datu zákrytu, pro účely této práce

je možné používat souřadnic J2000.0.

Geocentrické souřadnice pozorovatele jsou projektovány na fundamentální rovinu jako [7]

$$(\xi, \eta) = [\hat{s}_\xi \cdot (\vec{x} + \Delta\vec{v}\Delta t), \hat{s}_\eta \cdot (\vec{x} + \Delta\vec{v}\Delta t)], \quad (3.2)$$

ve které $\vec{x}$ představuje rovníkové souřadnice pozorovacího stanoviště. Je možné je spočítat přímo jako $\vec{x} = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi)$, kde R je vzdálenost pozorovatele od středu Země, φ geocentrická zeměpisná šířka a θ je lokální hvězdný čas. Případně můžeme tyto hodnoty vygenerovat pomocí HORIZONS [39] či Miriade [45]. Vektor $\Delta\vec{v}$ představuje rozdíl rychlostí Země a planety vyjádřený v rovníkových souřadnicích $\vec{v}_{\text{zem}} - \vec{v}_{\text{ast}}$ a v průběhu zákrytu jej můžeme v rámci chyb brát jako konstantu. Čas Δt je čas zmiizení či objevení hvězdy počítaný od určité epochy. Nabízí se volit epochu jako střední čas zákrytu.

Preciznější určení podává kvadratická rovnice 3.3, jejíž použití nemělo v rámci této práce opodstatnění. Rovnice je převzata z práce Ďurech a kol. (2011). Zpřesnění výsledků při její implementaci je vůči jednodušší lineární rovnici pouhé $\sim 1\%$, jak je uvedeno ve stejné práci.

$$(\xi, \eta) = \left[\hat{s}_\xi \cdot \left(\vec{x} + \Delta\vec{v}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\dot{\vec{v}}(\Delta t)^2 \right), \hat{s}_\eta \cdot \left(\vec{x} + \Delta\vec{v}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\dot{\vec{v}}(\Delta t)^2 \right) \right]. \quad (3.3)$$

Kapitola 4

Kombinace modelovaných tvarů a zákrytů

Cílem práce je ukázat kombinaci dat získaných zákryty s modely planetek získaných metodou inverze světelných křivek. Porovnání těchto dvou výsledků nám může přinést nové informace nebo zpřesnit staré. Zákryt primárně velikostně škáluje získané modely, protože informaci o průměru planetky z vizuálních pozorování světelných křivek nejsme schopni získat. Zákryty zároveň pomáhají ke kontrole výsledků inverzní metody a také k výběru správného modelu asteroidu s určitou periodou a natočením pólu.

4.1 Projekce tvaru asteroidu

Abych v dalších částech práce mohla porovnávat data získaná ze zákrytů a ze světelných křivek, potřebovala jsem je mít v kompatibilním tvaru. Body zákrytů jsou projektovány do fundamentální roviny popsané v kapitole 3.3. Body, které popisují povrch modelu asteroidu, získaného metodou inverze světelných křivek, je třeba taktéž projektovat do fundamentální roviny v čase zákrytu a vytvořit konvexní obálku takto projektovaných bodů.

Model nechť je nyní definován jako konvexní mnohostěn, jehož povrch tvoří trojúhelníkové plošky s vrcholy definovanými rádius vektorem $\vec{r}$ v pravouhlé souřadnicové soustavě spojené s planetkou. Tyto souřadnice je třeba v první řadě převést na ekliptikální spojené se Zemí vztahem (1.3) a poté na rovníkové vztahem (1.4). Čas, ve kterém projektujeme model na fundamentální rovinu je vhodné zvolit jako střední čas zákrytu, který se nejsnáze spočítá jako průměrná hodnota všech pozorovaných časů zákrytu.

Porovnáváme-li zároveň vůči sobě data jednotlivých pozorovatelů, musíme mít jistotu, že se planetka příliš neotočila. V opačném případě bychom museli model na zákryt projektovat ve více časech, kdy se planetka mírně pootočila. Dostatečné se pro většinu planetek ukazuje, když časové odstupy jednotlivých pozorování delší než ~ 10 min. Planetky zkoumané v této práci mají siderické periody pohybující se okolo 10h a je proto oprávněné použít vztah (3.2).

Fundamentální rovina je definována vztahem (3.1). Projekce planetky je jednoduchým skalárním součinem jednotkových vektorů fundamentální roviny a rovníkových souřadnic povrchu planetky

$$(\xi_{\text{mod}}, \eta_{\text{mod}}) = (\hat{s}_{\xi} \cdot \vec{r}_{\text{ekv}}, \hat{s}_{\eta} \cdot \vec{r}_{\text{ekv}}) + (\xi_0, \eta_0), \quad (4.1)$$

kde (ξ_0, η_0) je posun v souřadnicích způsobený úhlovou vzdáleností mezi hvězdou a planetkou. Výsledná silueta planetky je konvexní obálkou projektovaných bodů.

4.2 Porovnávání a škálování

Dále pro body konvexní obálky používám index $\vec{R}_{\text{model}}$ a pro souřadnice zákrytu $\vec{R}_{\text{occ}}$. V průběhu porovnávání hledáme minimální vzdálenosti mezi body zákrytu a konvexní obálkou. Minimalizujeme proto χ^2 definované takto:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^N \frac{[(\xi_j, \eta_j)_{\text{occ}} - (\xi_j, \eta_j)_{\text{model}}]^2}{\sigma_j^2} = \sum \chi_A^2 + \sum \chi_B^2 + \dots, \quad (4.2)$$

kde $(\xi_j, \eta_j)_{\text{occ}}$ jsou projekce pozorovaných časů zákrytu na fundamentální rovinu, dále $(\xi_j, \eta_j)_{\text{model}}$ jsou body na konvexní obálce vymodelovaného tvaru projektovaného do fundamentální roviny a σ_j jsou chyby pozorovaného zákrytu $(\xi_j, \eta_j)_{\text{occ}}$. Body na konvexní obálce jsou definovány jako průniky konvexní obálky s přímkou, která prochází body $(\xi_j, \eta_j)_{\text{occ}}$, tedy protáhnutí tětív ve směru nebo proti směru pohybu planetky $\hat{s}_v$ na fundamentální rovině. Index j prochází jednotlivá pozorování zákrytu. Neznámé $\chi_{A_j}^2, \chi_{B_j}^2, \dots$ vystihují jednotlivé případy poloh zákrytu vůči konvexní obálce a popisuje je blíže následující odstavec.

Detailnější popis celé situace ilustruje obrázek 4.1. Pro jednotlivé případy hledáme χ^2 jako:

- A) Příklad, kdy sečna ani její prodloužení neprotíná konvexní obálku asteroidu. Minimalizujeme vzdálenost sečny od obálky asteroidu. Aby se započítala i vzdálenost sečny ve směru pohybu asteroidu, je výhodné minimalizovat ne kolmou vzdálenost sečny, ale vzdálenosti jejích krajních bodů vůči bodu na konvexní obálce, který je v kolmé vzdálenosti nejbližší sečně. Délka sečny zde také hraje kvantitativní roli, proto je do minimalizace započítávána a může být zároveň váhována parametrem λ :

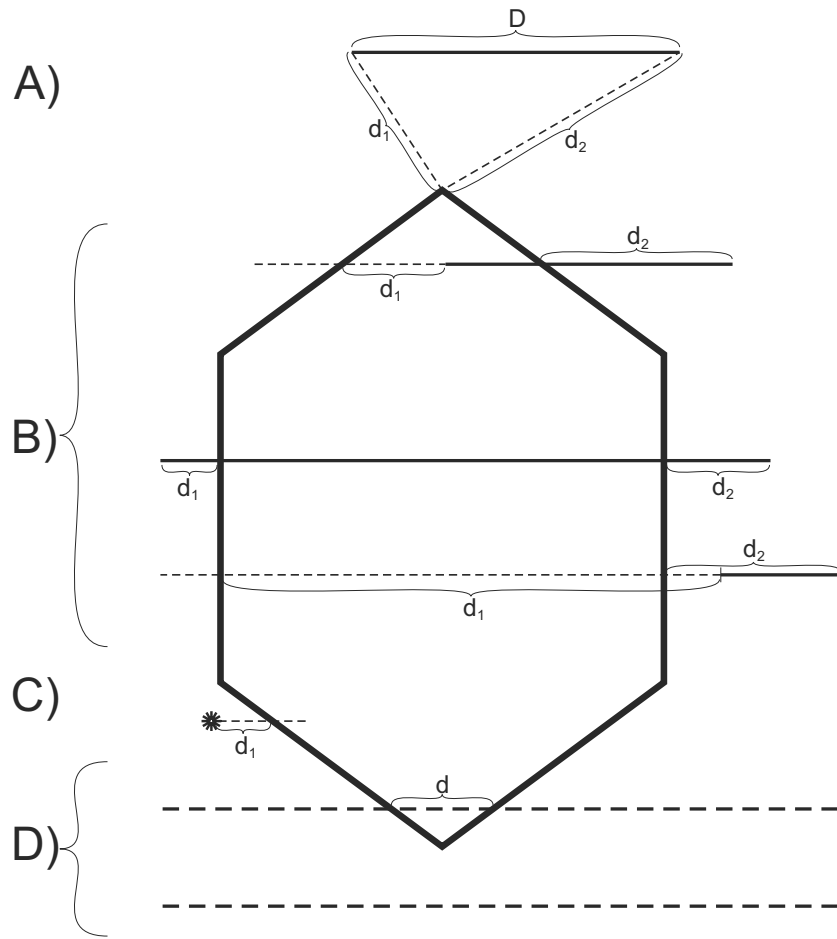
$$\chi_A^2 = \frac{d_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{d_2^2}{\sigma_2^2} + \lambda D^2.$$

- B) Příklad, kdy prodloužení sečny nebo sečna samotná z jedné, druhé, nebo obou stran protíná konvexní obálku asteroidu. Výraz χ^2 je v těchto případech vždy dán vzdáleností krajních bodů sečen a průniku prodloužení sečny s konvexní obálkou:

$$\chi_B^2 = \frac{d_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{d_2^2}{\sigma_2^2}.$$

- C) V případě, že pozorovatel zákrytu pozoruje jen jednu jeho část, minimalizuje se vzdálenost tohoto bodu na fundamentální rovině k průniku s konvexní obálkou ve směru pohybu stínu asteroidu vypočítaného v místě pozorovatele. Tento údaj lze získávat z HORIZONS [39] nebo Misiade [45], dostačující je také použít zprůměrovanou směrnici sečen ostatních pozorovatelů.

$$\chi_C^2 = \frac{d_1^2}{\sigma_1^2}.$$



Obrázek 4.1: Možné případy pozorování zákrytu (tětiv, bodů a negativních pozorování) vůči konvexní obálce asteroidu a určení minimalizujících vzdáleností pro tyto případy.

D) Pro případ, kdy stín zákrytu procházel mimo stanoviště pozorovatele, mohou nastat dvě situace. V prvním případě úsečka znázorňující směr pohybu asteroidu neprotíná konvexní obálku. Tehdy úsečka nijak nepřispívá do minimalizace. Druhou možností je protnutí úsečky a obálky asteroidu, přičemž χ^2 můžeme úměrně zvětšit velikostí tětivy protínající obálku asteroidu.

$$\begin{aligned} \text{MODEL} \cap \text{OCC} = \emptyset & : \chi_D^2 = 0 \\ \text{MODEL} \cap \text{OCC} \neq \emptyset & : \chi_D^2 = d^2 \end{aligned}$$

Volnými parametry při fitování zákrytu a konvexní obálky jsou pouze vektory posunutí $\vec{R}$ a koeficient škálující velikost modelu asteroidu c . Nabízí se posouvat sečny vůči konvexní obálce a ne konvexní obálku, protože ta je definována více body.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\text{OCC}} &= \vec{R}_{\text{OCC}} + \vec{R} \\ \vec{R}_{\text{MODEL}} &= c \cdot \vec{R}_{\text{MODEL}} \end{aligned}$$

Může se stát, že má planetka zákrytů více. Potom je třeba fitovat posunutí zákrytů zvlášť ale pro velikost planetky škálovat pro oba případy současně. Velikost hodnoty χ^2 kvantitativně popisuje kvalitu fitu. Koeficient c nám také udává správné škálování velikosti modelu, která není za pomoci inverze světelných křivek určena správně. Známe-li velikost, jsme také schopni přibližně učit albedo asteroidu.

Kapitola 5

Praktická část

Následující kapitola pojednává o praktické části mé práce. Kapitola podrobně rozepisuje jednotlivé kroky mé práce a následně shrnuje získané výsledky.

V práci kombinuji vlastní naměřená fotometrická data a dostupná fotometrická data dalších pozorovatelů, včetně řídkých dat z fotometrických přehlídek oblohy, vedle toho samozřejmě data ze zákrytů. Používám vlastních i již dříve napsaných programů. Pro získávání efemerid používám tradiční webový portál NASA JPL HORIZONS [39], zkouším také relativně nový francouzský webový portál *Miriade – The Virtual Observatory Solar System Object Ephemeris Generator* [45].

V první fázi práce jsem hledala vhodné kandidáty planetek, které jsem následně pozorovala v průběhu půl roku na hvězdárně v Ondřejově a tato data zpracovala. Veškerá dostupná data jsem sjednotila do stejného formátu, aby pak mohla být použita v programu pro výpočet tvaru asteroidu metodou inverze světelných křivek. Výsledky všech získaných tvarů jsem projektovala do fundamentální roviny právě v době jejich zákrytu. Dále jsem spočítala a vizualizovala zákryty hvězd planetkami. V poslední části jsem oba výsledky matematicky porovnála a z vymodelovaných tvarů vybrala ty, které se se zákrytem shodovaly nejvíce. Určila jsem také efektivní průměry planetek.

5.1 Výběr vhodných planetek

Vhodné planetky pro mou práci musely splňovat následující parametry týkající se:

- pozorování – planetka bude dobře pozorovatelná v následujících měsících,
- fotometrie – pro planetku již bylo pozorováno několik světelných křivek v různých opozicích,
- zákrytů – planetka má alespoň jeden dostatečně hustě pokrytý zákryt.

5.1.1 Parametry k pozorování

Nutným požadavkem pro pozorování objektů je samozřejmě jeho viditelnost po většinu části noci. To ale není jediný potřebný parametr pro kvalitní pozorování objektu.

Aby mělo pozorování smysl, musí být perioda planety smysluplná v porovnání s dobou, po kterou bude planeta pozorována. V průběhu jedné noci by se měla dát naměřit alespoň čtvrtina fázové křivky, pokud je perioda delší a z každé noci by byl získán jen velmi malý úsek fázové křivky, data by bylo třeba kalibrovat, aby mohla být navázána do světelné křivky. Ideální je perioda planety kratší než doba, po kterou je planeta v noci pozorovatelná. Vhodnost délky periody a pozorovatelnosti planety v průběhu noci jsem posuzovala individuálně pro konkrétní kandidáty. Vzhledem k nepřízní počasí v zimním období jsem nebrala v potaz planety s periodami delšími než 20 h. Spodní hranici pro délku periody by bylo třeba uvažovat v případě *rychlých rotátorů*, které jsou velmi malé. Protože cílem byly větší planety hlavního pásu asteroidů, nebylo třeba spodní hranici uvažovat.

Pokud se díváme na to, jestli je planeta pozorovatelná v danou noc, měli bychom čas pozorovatelnosti planety zkrátit o dobu, kdy se nachází níže než 20° nad horizontem. Čím níže se planeta k obzoru nachází, tím mohutnější vrstvou atmosféry prochází její světlo a tím je pozorování zatížené větší chybou. Pro konkrétní pozorovací noc se vyplatí nahlédnout i na úhlovou vzdálenost planety od Měsíce. Pokud je tato vzdálenost příliš malá, pozorování je zatížené velkou chybou, způsobenou velkým jasnem pozadí, a většinou nemá význam.

Vybírala jsem planety s rozpětím hvězdných velikostí 12–17 mag. Tento rozsah byl vybrán s ohledem na dosah pozorovacího přístroje a předpokládaný rozptyl dat. Zároveň jsem vybírala pouze planety s již dříve určenou amplitudou, která byla větší než 0,03 mag.

Pro informace o periodách a amplitudách asteroidů jsem použila zdroj NASA – Planetary Data System [40]. Informace o pozorovatelnosti planety v konkrétním období jsem získala z dat HORIZONS [39].

Na základě výše vyjmenovaných parametrů jsem si vytvořila vyhledávací program, jehož výstupem je seznam vhodných kandidátů pro každý měsíc s vypsanou vizuální hvězdnou velikostí v období opozice, periodou a amplitudou. Ve výsledku se objevovaly planety spíše s delšími periodami okolo deseti a více hodin.

5.1.2 Parametry k fotometrii

Obecně platí, čím více dat tím lepší výsledek. A čím více pozorování v různých opozicích, tím přesnější výstup. Kvalitu dříve pozorovaných světelných křivek a jejich množství jsem posuzovala individuálně. Většinu dat jsem získala na stránkách Uppsala Asteroid Photometric Catalogue [36], novější data byla získána mým vedoucím práce přímo od pozorovatelů. Pokud by se stalo, že by planeta na základě dřívějších fotometrických dat měla již určený tvar, šlo by jej pomocí zákrytu velikostně naškálovat a ověřit jeho správnost.

K vybraným kandidátům přibyla v této části informace o počtu fotometrických pozorování (vyjma řídkých dat).

5.1.3 Parametry k zákrytům

U zákrytů jde pouze o to, zda bylo pozorováno dostatečné množství tětív určující tvar průmětu asteroidu. Jako vstupní data jsem zvolila databázi [44], která v té době kompletovala veškeré zákryty včetně historicky prvního zákrytu Jupiterovým měsícem Ganyme-

dem z roku 1911 i prvního pozorování zákrytu hvězdy planetkou (3) Juno z roku 1958. Poslední zde uvedené zákryty byly z konce srpna roku 2010.

Jako nejjednodušší možné výběrové kritérium jsem vybrala počet pozorovaných záznamů. Z tohoto kritéria není jasné, zda šlo o záznam pozorované tětiny či o negativní pozorování. Pro jednoduchost jsem ale další kritéria nebrala v potaz, neboť bylo stejně nutné se na vybrané zákryty podívat a jejich vhodnost posoudit individuálně. Minimální počet pozorovaných záznamů jsem zvolila pět a kvalitu zákrytu pak poměřovala vizuálně.

V případě, že má planetka tvar blízký sféře, její zákryt nám k výběru toho nejlepšího tvaru nepomůže. Jistější je proto výběr zákrytů, které nejsou výrazně sférické a vylučují rovnou kulový tvar planetky. Hodnocení jsem prováděla individuálně. Pro širší aplikaci by bylo možné využít velikosti poloos určených z fitů zákrytu obecným elipsoidem.

Předchozí výběr planetek se takto zmenšil na planetky s kvalitně napozorovaným zákrytem. Bohužel kvalitních zákrytů, které by zároveň nebyly příliš sférické, není mnoho, a to se ukázalo jako značné omezení pro tuto práci. I tyto zákryty ale mohou pomoci k jistým výsledkům, především k určení velikosti planetky.

5.1.4 Výsledky sekce

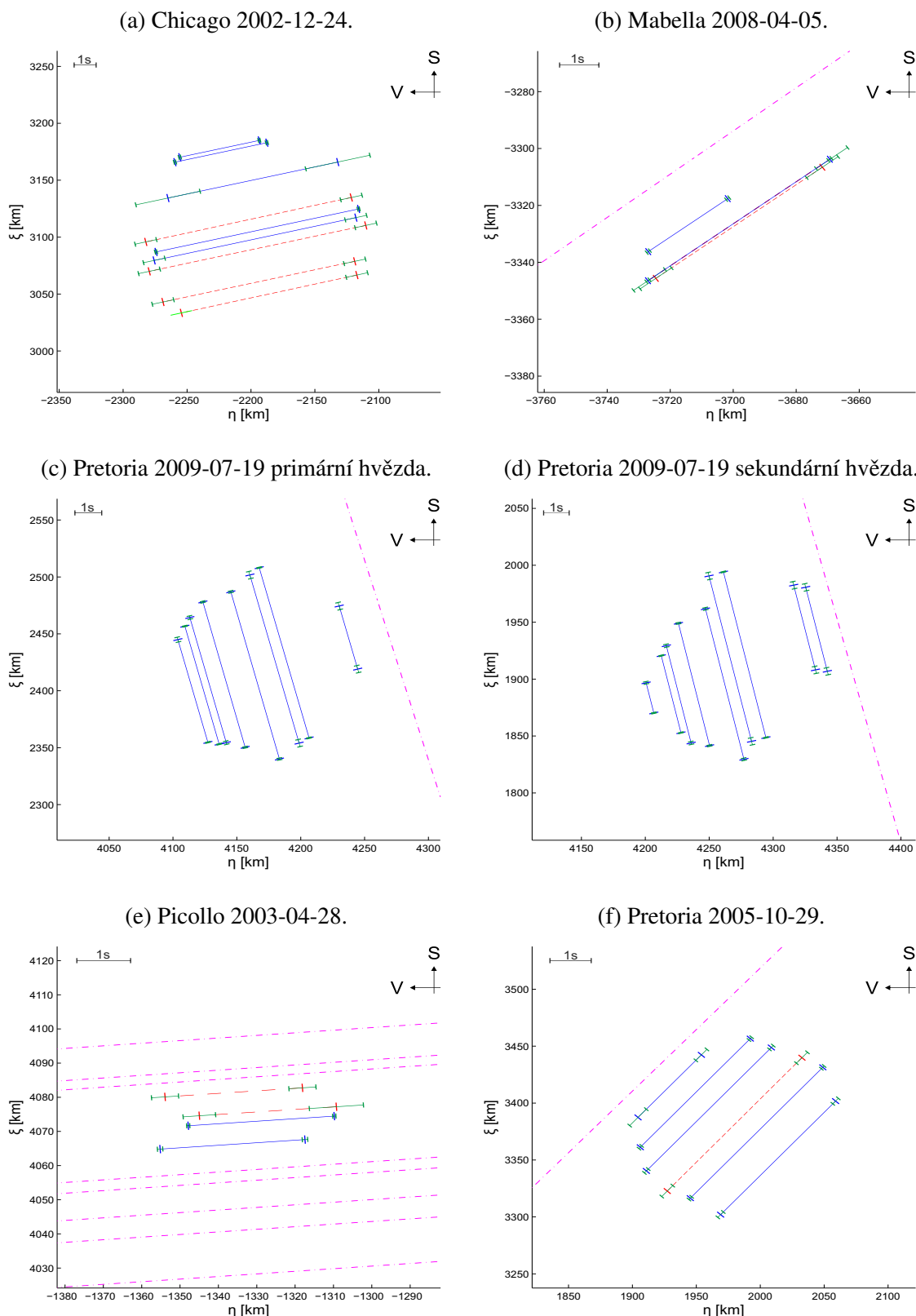
Pozorovatelných planetek v listopadu 2010 bylo mezi 500–800. Toto číslo se logicky zmenšovalo se zkracujícími se nocemi s nadcházejícím létem. Planetek s dostatkem fotometrických dat splňujících zároveň podmínku „dobře napozorovaného“ zákrytu bylo přes 200. Po porovnání těchto dvou seznamů se počet kandidátů zkrátil na 20–40 v závislosti na daném měsíci. Pro výběr nejvhodnějších planetek by se daly zpřísnit výše zmíněné parametry. Při bližším pohledu na data se reálný výběr zkrátil na pouhé jednotky. V následujících měsících jsem pozorovala planetky uvedené v tabulce 5.1, jejich zákryty uvádím na obrázku 5.1.

Asteroid	Perioda [h]	Amplituda [mag]	Datum zákrytu [dd. mm. rrrr]	Počet záznamů pro zákryt
(334) Chicago	7,35	0,15–0,67	24. 12. 2002	10
(510) Mabella	19,40	0,25	05. 04. 2008	9
(790) Pretoria	10,37	0,08–0,16	29. 10. 2005	7
			19. 07. 2009	22
(1366) Piccolo	16,57	0,33	28. 04. 2003	18

Tabulka 5.1: Tabulka planetek pozorovaných v této práci vybraných na základě výše probíraných kritérií. Údaje o periodě a amplitudě jsou z dat [40].

5.2 Pozorování asteroidů

Veškeré pozorování vybraných planetek bylo realizováno na Astronomickém ústavu AV ČR, v.v.i. v Ondřejově. Pozorování probíhala od listopadu roku 2010 do dubna roku 2011.



Obrázek 5.1: Zákryty hvězd planetkami vygenerované pomocí vlastního programu PROJEKCE_ZAKRYT_MIRIADE.m z dat Lunar-occultations [44]. Vizuální pozorování jsou znázorněna červeně, fotoelektrická měření, negativní magentou a chybové intervaly pozorování zeleně. Pro názornost je uvedena dráha uražená stínem asteroidem za 1 s.

Dohled nad pozorováním přebíral Kamil Hornoch. Některá data byla získána i v průběhu pozorovacího času Kamila Hornocha či Petera Kušniráka.

Planetka	Datum pozorování [dd mm rr]	Pozorovací čas [h]	Celkem [h]
(334) Chicago	29. 01. 11	0,8	22,8
	31. 01. 11	2,1	
	04. 03. 11	4,5	
	27. 03. 11	3,1	
	28. 03. 11	2,4	
	04. 04. 11	1,6	
	18. 04. 11	3,3	
	20. 04. 11	3,3	
	24. 04. 11	1,7	
(501) Mabella	14. 11. 10	4,2	36,8
	27. 11. 10	0,9	
	03. 12. 10	7,4	
	18. 12. 10	1,6	
	03. 01. 11	3,3	
	29. 01. 11	6,3	
	31. 01. 11	4,5	
	04. 03. 11	4,3	
	27. 03. 11	2,8	
	12. 04. 11	1,5	
(790) Pretoria	03. 01. 11	7,4	30,4
	04. 01. 11	2,7	
	29. 01. 11	6,3	
	31. 01. 11	5,3	
	04. 03. 11	2,9	
	05. 03. 11	1,6	
	27. 03. 11	2,0	
	28. 03. 11	1,0	
	12. 04. 11	1,2	
(1366) Piccolo	14. 11. 10	4,2	12,6
	03. 12. 10	6,2	
	16. 12. 10	2,2	

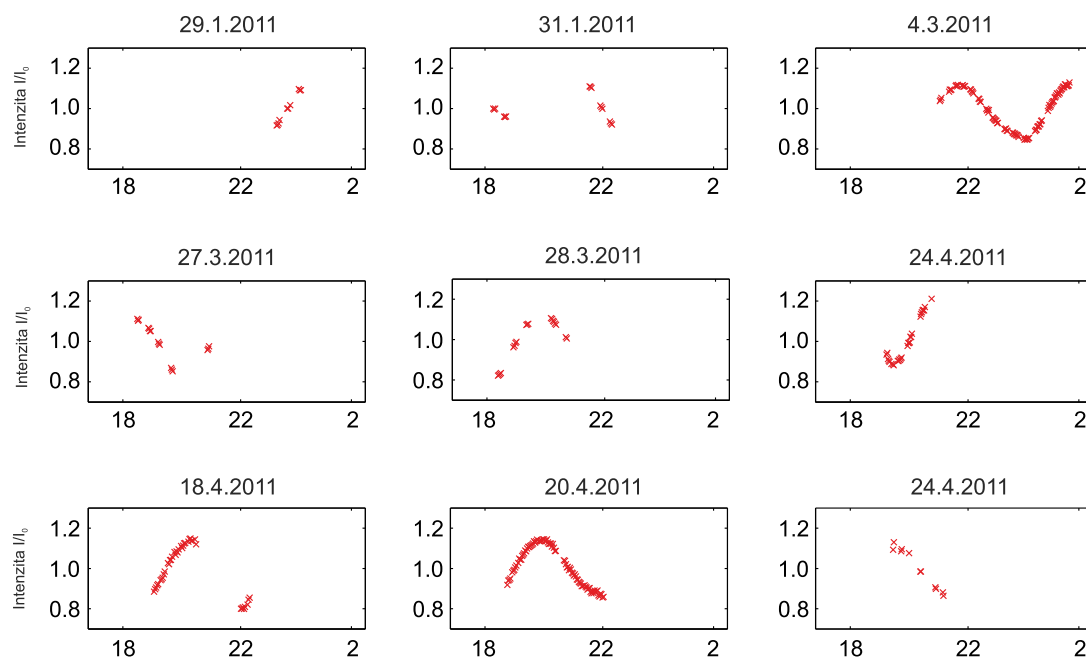
Tabulka 5.2: Tabulka pozorovacího času pro jednotlivé cíle. Nezahrnuje noci, kdy nebylo v důsledku počasí (oblačnost, vlhkost) možné pozorovat.

Dalekohled je zrcadlový o průměru 0,65 m a je vybaven kamerou typu G2-3200 umístěnou přímo v primárním ohnisku parabolického zrcadla o ohniskové vzdálenosti 234 cm. Kamera je osazena čipem KODAK KAF-3200ME, který dosahuje maximální kvantové účinnosti 85 % a jeho lineární rozměry jsou $14,9 \times 10$ mm. Je vybavena integrovaným fil-

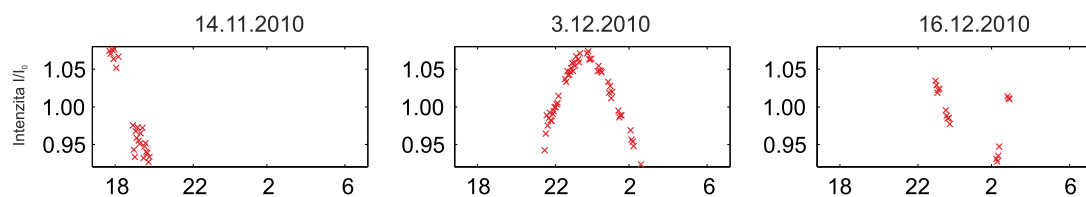
trovým kolem se standardními fotometrickými filtry BVRIN. Pozorování pobíhalo v R filtru. Primární zrcadlo má velkou světelnost $f/3,6$, která ovšem způsobuje značnou komu i relativně blízko optické osy. Proto je kamera G2-3200 doplněna korektorem komy, díky níž se většina komy na celé ploše použitého CCD čipu eliminuje. Použitý komakorektor prodlužuje efektivní ohniskovou vzdálenost soustavy na 268 cm.

Celkem jsem pozorovala více než 60 hodin v 18 pozorovacích nocích, jak podrobněji ukazuje tabulka 5.2. Zatažené a zčásti zatažené noci čítaly další dvě desítky nocí.

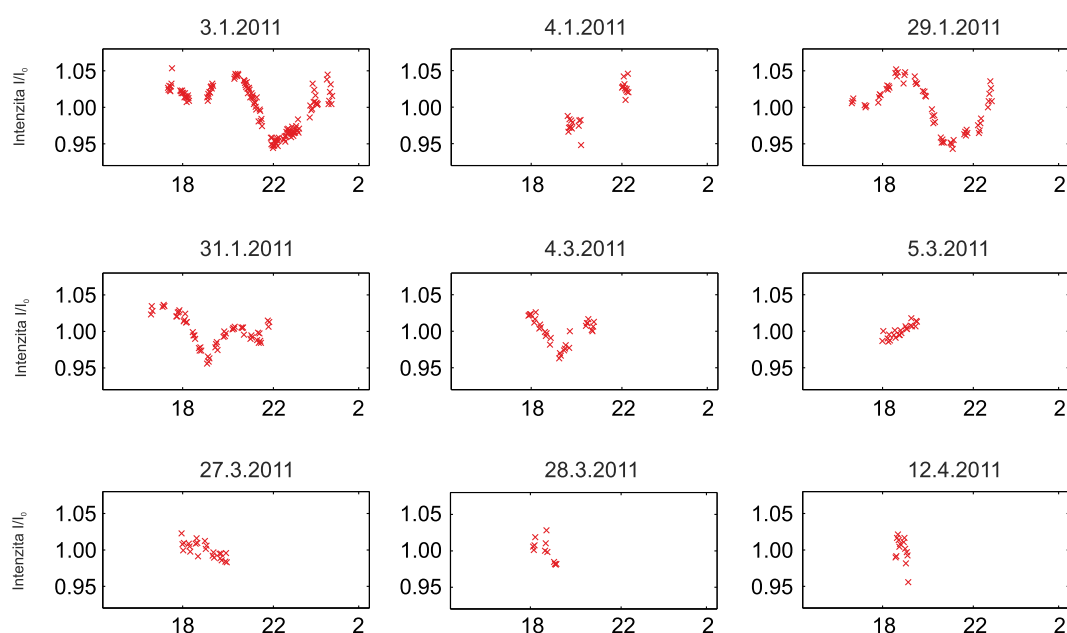
Data jsem standardně opravila o dark frame a flat field. Následně jsem pomocí aperturní fotometrie v programu APHOT (software kombinující aperturní fotometrii a astrometrii vyvinutý M. Velenem a P. Pravcem na hvězdárně v Ondřejově, Pravec a kol. (1994)) vypracovala nekalibrované fotometrické křivky. Jejich výběr uvádím na obrázcích 5.2, 5.4, 5.5 a 5.3.



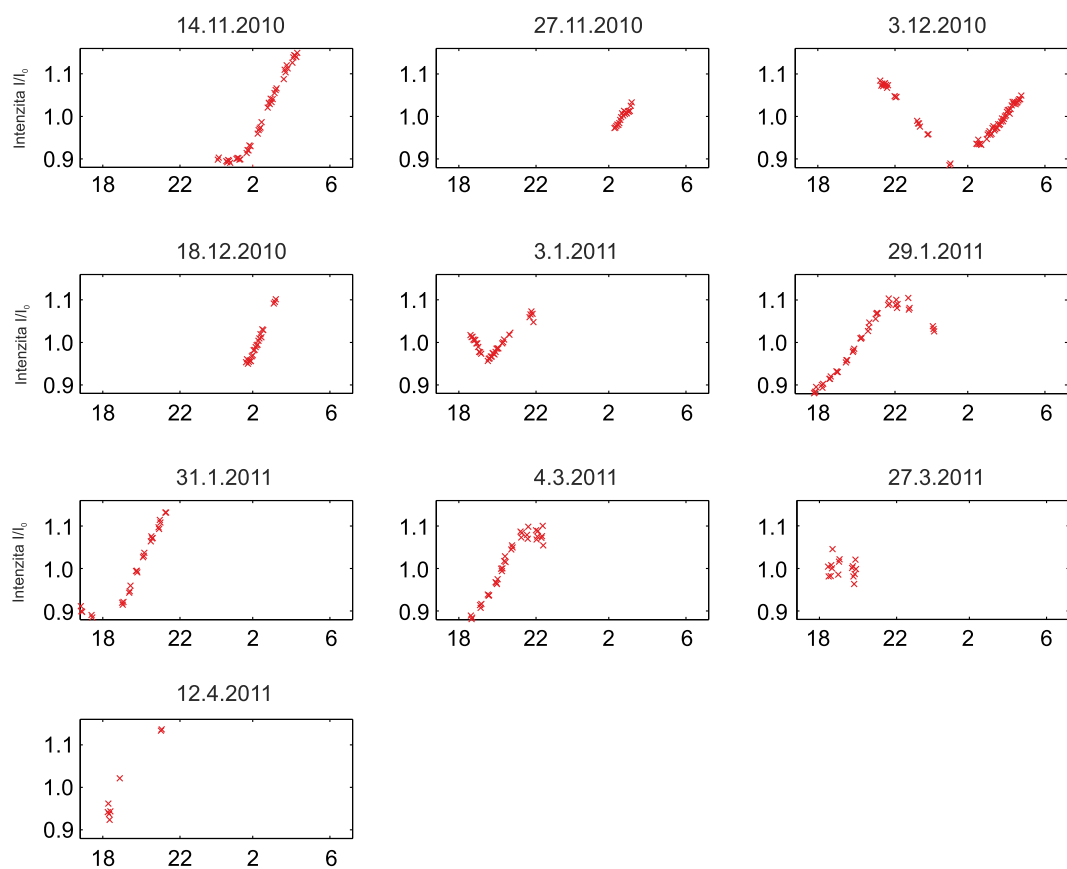
Obrázek 5.2: Naměřené fotometrické křivky pro planetku (334) Chicago. Vodorovná osa je v hodinách daného dne (UT).



Obrázek 5.3: Naměřené fotometrické křivky pro planetku (1366) Piccolo. Vodorovná osa je v hodinách daného dne (UT).



Obrázek 5.4: Naměřené fotometrické křivky pro planetku (790) Pretoria. Vodorovná osa je v hodinách daného dne (UT).



Obrázek 5.5: Naměřené fotometrické křivky pro planetku (510) Mabella. Vodorovná osa je v UT hodinách daného dne (UT).

5.3 Formátování dat

Výsledkem zpracovaných dat ze softwaru APHOT [23] jsou data ve formátu, který je uveden na ilustračním obrázku 5.6. Pro další zpracování jsou podstatné pouze první dva sloupce, po řadě modifikované Juliánské datum a naměřená hvězdná velikost v R filtru v jednotkách magnitud.

```
5528.10537 0.368 0.004 0.061 0.938 0.895 1.153 0.615 1.013 0.758 0.764 0.743 1.313 1.766 0.540
5528.10749 0.367 0.004 0.062 0.942 0.909 1.151 0.624 1.002 0.764 0.762 0.746 1.305 1.781 0.539
5528.10961 0.363 0.004 0.056 0.929 0.898 1.149 0.618 1.006 0.764 0.760 0.742 1.317 1.752 0.535
5528.11171 0.359 0.004 0.061 0.937 0.913 1.155 0.618 1.018 0.761 0.765 0.753 1.317 1.778 0.541
5528.11383 0.360 0.004 0.061 0.941 0.916 1.164 0.624 1.023 0.766 0.761 0.755 1.317 1.779 0.535
5528.11595 0.355 0.004 0.057 0.942 0.907 1.157 0.628 1.016 0.765 0.755 0.745 1.313 1.790 0.541
5528.11806 0.347 0.004 0.057 0.939 0.902 1.163 0.621 1.007 0.762 0.764 0.754 1.318 1.760 0.542
5528.12017 0.340 0.004 0.058 0.940 0.894 1.163 0.623 1.017 0.766 0.763 0.750 1.315 1.790 0.539
5528.12229 0.330 0.004 0.053 0.936 0.898 1.157 0.616 1.008 0.765 0.761 0.745 1.313 1.769 0.532
5528.12440 0.336 0.004 0.054 0.934 0.904 1.153 0.624 1.021 0.763 0.760 0.748 1.307 1.778 0.537
5528.12652 0.324 0.004 0.053 0.938 0.892 1.154 0.615 1.014 0.760 0.752 0.750 1.301 1.764 0.532
```

Obrázek 5.6: Výstupní formát dat z programu APHOT [23].

```
12
3 0
2455664.274430 0.989649 -0.471854 -3.805948 0.271040 -1.399311 -4.187874 0.270792
2455664.275840 0.991473 -0.471854 -3.805948 0.271040 -1.399301 -4.187886 0.270794
2455664.277259 1.016438 -0.471854 -3.805948 0.271040 -1.399291 -4.187898 0.270796
45 0
2455649.254984 1.005742 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.575115 -3.914445 0.227770
2455649.256414 1.001121 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.575108 -3.914459 0.227772
2455649.257854 1.007596 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.575101 -3.914472 0.227774
2455649.259284 1.018794 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.575094 -3.914486 0.227776
2455649.277453 1.000199 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.575008 -3.914657 0.227802
2455649.278893 1.010384 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.575001 -3.914670 0.227804
2455649.280323 1.028221 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.574994 -3.914684 0.227806
2455649.281753 0.998358 -0.584813 -3.782705 0.228117 -1.574987 -3.914697 0.227808
```

Obrázek 5.7: Vstupní formát dat pro program CONVEXINV uložený v souboru `astnum.lcg.all`.

Naměřené světelné křivky jsem dále využila v programu pro výpočet tvaru a rotačního stavu asteroidu CONVEXINV. Program byl napsán M. Kaasalainenem původně ve Fortranu, později byl J. Ďurechem přepsán do jazyka C¹. Metody, na kterých program funguje jsou popsány v článcích Kaasalainen a Troppa (2001) a Kaasalainen a kol. (2001) a jejich hlavní myšlenky shrnuji v kapitole 2. Vstupní formát dat pro program CONVEXINV je znázorněn na obrázku 5.7. První řádek dat udává celkový počet světelných křivek a za ním následují informace o jednotlivých pozorováních v oddělených blocích. Každá část má v prvním řádku údaj o počtu napozorovaných bodů a kód 0/1 pro relativní/kalibrovaná data. Každý fotometrický bod křivky je dán řádkem obsahujícím:

¹program je volně dostupný na stránkách DAMITu [8], které shrnují veškeré výsledky modelování asteroidů

- čas měření v Juliánském datu opravený o light-time efekt
- jasnost planety v jednotkách intenzity
- souřadnice x, y, z vektoru planeta–Slunce v ekliptikálních asteroidocentrických kartézských souřadnicích v astronomických jednotkách
- souřadnice x, y, z vektoru planeta–Země v ekliptikálních asteroidocentrických kartézských souřadnicích v astronomických jednotkách

Starší data jiných pozorovatelů jsem zpracovala individuálně (protože měla různé formáty) nebo jsem je získala již ve vhodném formátu z webových stránek DAMITu, Ďurech a kol. (2010). Ze stejného zdroje jsem získala i řidká data z fotometrických přehlídek oblohy USNO a CATALINA. Výsledkem je sjednocený formát všech dat – mých pozorování, starších napozorovaných křivek a řídkých dat z astronomických prohlídek oblohy. Souhrn užítých dat včetně referencí je v tabulce 5.3.

5.3.1 Formátování času

Modifikované Juliánské datum jsem převedla na Juliánské datum a opravila o light-time effect (*LTE*) podle vzorce (5.1). Informace o *LTE* jsem získala přímo z dat HORIZONS [39]. Hodnoty *LTE* pro jednotlivá data jsem vygenerovala stejným způsobem, jako vektory určující jednoznačnou geometrii těles, viz následující kapitola 5.3.2

$$JD = MJD + 2450000,5 - LTE. \quad (5.1)$$

5.3.2 Formátování intenzity

Hvězdnou velikost jsem upravovala s jednoduchým využitím Pogsonovy rovnice, umožňující převod hvězdné velikosti na intenzitu. Intenzitu jsem škálovala pomocí vhodně zvolené konstanty tak, aby se vždy pohybovala kolem jedné

$$m - m_0 = -2,5 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}. \quad (5.2)$$

Po vyjádření je intenzita rovna:

$$I = \text{konst} \cdot 10^{-\frac{m}{2,5}}. \quad (5.3)$$

5.3.3 Formátování geometrie

Pro nalezení vektorů Slunce–asteroid a Země–asteroid v ekliptikálních kartézských souřadnicích jsem opět využila HORIZONS [39]. Protože jsem nechtěla využívat možnosti získání dat skrz emailový formulář nebo pomocí služby telnet, vygenerovala jsem si přímo na webovém rozhraní vektory od prvního data pozorování po rok 2013 s krokem jedné šestiny dne. Interpolací dvou nejbližších časů k času pozorování jsem získala jak potřebné vektory, tak *LTE*.

Jednodušeji a přesněji lze stejnou proceduru udělat pomocí příjemného prostředí Miriade [45]. Důvodem je jednoduché vkládání hodnot přímo skrz webovou adresu a ukládání vygenerovaných dat automaticky do souboru v počítači. Díky tomuto snadnému přístupu využívám Miriade významným způsobem později.

Planetka	Číslo křivky	Reference
(334) Chicago	1–9	B. Mikulecká, K. Hornoch
	10–18	Weidenschilling a kol. (1990)
	19–24	Zappala a kol. (1989)
	25–28	Uliss
	24–26	689 USNO
	27–28	703 CATALINA
(510) Mabella	1–10	B. Mikulecká, K. Hornoch
	11–13	Harris a Young (1989)
	14–16	Piironen a kol. (1994)
	17	689 USNO
	18	703 CATALINA
(790) Pretoria	1–9	B. Mikulecká, K. Hornoch
	10–18	Warner (2005) a (2009)
	19–23	Schober a Stanzel (1979)
	24	689 USNO
	25	703 CATALINA
(1366) Piccolo	1–3	B. Mikulecká, K. Hornoch
	4–5	Binzel (1987)
	6–12	Behrend 2005web
	13	689 USNO
	14	703 CATALINA

Tabulka 5.3: Souhrn použitých světelných křivek. Data jsou také k dispozici na DAMITu Ďurech a kol. (2010).

5.4 Nalezení tvaru pomocí Inverze světelných křivek

Teorie k nalezení tvaru asteroidu pomocí světelných křivek užitá v rámci této práce je blíže popsána v kapitole 2. Hlavní výpočty jsou prováděné pomocí již zmíněného programu CONVEXINV. K nalezení výsledného modelu planetky je třeba několik oddělených kroků, které společně s výsledky popisují v následujících podkapitolách.

5.4.1 PERIOD_SEARCH

Pro úspěšné nalezení tvaru planetky je v první řadě potřeba nalézt co nejpřesněji její siderickou rotační periodu. V mém případě byly hodnoty period určeny z dřívějších po-

zorování pomocí Fourierovy analýzy s přesností na desetiny až setiny periody. Společně s mými daty jsem nejprve periodu potvrdila a upřesnila. K tomuto účelu slouží program `PERIOD_SEARCH.SH`.

Vstupními daty je již zmíněný soubor `astnum.log.all` obsahující všechny dostupné světelné křivky ve formátu znázorněném na obrázku 5.7. Protože v řadě případů neznáme chybu jednotlivých pozorování, nebo jsou tyto chyby podhodnocené, program s nimi nepracuje. Jako jakost jednotlivých křivek využívá program uživatelem zadaný koeficient w uložený v souboru `weights_astnum`, který udává váhu jednotlivým křivkám. V mém případě jsem pro běžná pozorování nechávala $w = 1$, pozorování, na kterých byl na první pohled patrný velký rozptyl dat jsem volila rozsah koeficientu mezi $w = (0,5-0,8)$ a pro řídka data $w = (0,1-0,3)$.

Program prozkoumává interval period a prostor pólů a pro tyto testovací hodnoty volá program `CONVEXINV`, který určí tvar asteroidu a vypočte příslušné χ^2_{rel} a střední kvadratickou odchylku RMS rovnou $\sqrt{\chi^2_{\text{rel}}/N}$. Hodnota χ^2_{rel} je definována jako:

$$\chi^2_{\text{rel}} = \sum_i \left\| \frac{(L_{\text{obs}}^{(i)} - L_{\text{mod}}^{(i)})^2}{\sigma_i^2} \right\|, \quad (5.4)$$

kde $L_{\text{obs}}^{(i)}$ a $L_{\text{mod}}^{(i)}$ jsou hodnoty jasnosti pozorované a modelované světelné křivky a σ je spjatá s již zmíněným váhovacím parametrem jako $\sigma = 1/w$.

Interval testovacích period jsem volila vždy vyšší než $\pm 0,2$ h v okolí dříve určené periody. Interval prozkoumávaných period uživatel zapíše do souboru `list_astnum`, kde je na jednom řádku vypsáno číslo planety, počáteční perioda P_i a konečná perioda P_f . Při prozkoumávání prostoru period jsem volila krok mezi prozkoumávanými periodami daný rovnicí (2.5) a vynásobený koeficientem $p = 0,8$. Tím se krok dostatečně zjemnil.

Prostor pólů je prohledáván šesti testovacími hodnotami, které se s příslušným χ^2 spočítají u každé testovací periody. Výsledky pro nejlépe vycházející pól se zapíší do řádku souboru `per_nwe_astnum` po řadě: perioda, RMS, χ^2 , počet iterací, procentuální zastoupení temné plošky, hodnoty pólu λ a β .

Časově je hledání periody pomocí výpočtu tvarů v intervalu zkušebních period nejnáročnější částí a může trvat podle délky zvoleného intervalu několik hodin i dnů. V praxi se orientačně hodí znát dobu trvání výpočtu. Můžeme si ji snadno spočítat jako celkový počet zkušebních period na námi zvoleném intervalu (P_i, P_f) vynásobený délkou trvání výpočtu pro jednu zkušební periodu. Počet zkušebních period vypočteme jako:

$$N_p = \frac{2\Delta t(P_f - P_i)}{P_i P_f} \frac{1}{P}. \quad (5.5)$$

Dále uvádím výsledné periodogramy (závislost periody na RMS) pro všechny čtyři planety. U planetek (334) Chicago, (510) Mabella a (790) Pretoria je zřejmé minimum v očekávané periodě určené z dřívějších pozorování (tabulka 5.4). Výsledná perioda pro asteroid (1366) Piccolo je nižší o téměř 0,4 h, než je udávaná hodnota v tabulce 5.1.

Výslednou unikátní siderickou periodu planety dále vyhledává program `SELECT_UNIQUE_PERIODS.SH`.

5.4.2 SELECT_UNIQUE_PERIODS

Z celé oblasti propočítaných period je nyní třeba vybrat tu nejlepší. Aby mohla být výsledná perioda považována za jednoznačné řešení, musí splňovat podmínku,

$$\forall \chi^2 : \chi_{\text{jedn}}^2 < \chi^2 \cdot 1,1 \chi_{\text{jedn}}^2. \quad (5.6)$$

Desetiprocentní hodnota je vybraná hlavně na základě zkušenosti, protože se zde nedá snadno využít statistických metod pro její určení. Tuto podmínku splňovaly pouze dvě ze čtyř planetek (1366) Piccolo a (510) Mabella, jejich výsledné periody jsou vypsány v tabulce 5.4.

Pro planetky (334) Chicago a (790) Pretoria nebyla splněna podmínka (5.6) a jejich data je třeba zpřesnit dalšími pozorováními. Periodogramy těchto planetek však naznačovaly dobře určené globální minimum viz obrázky 5.10, 5.8, 5.12 a 5.9. Rozhodla jsem se proto s daty pracovat dále a vzhledem k jasně konvergujícímu minimu pro obě planetky jsem určila dvě hodnoty periody pro planetku (790) Pretoria a čtyři periody pro planetku (334) Chicago. Názorné jsou detaily periodogramů těchto planetek na obrázcích 5.11 a 5.13. Celkové výsledky této části podává tabulka 5.4.

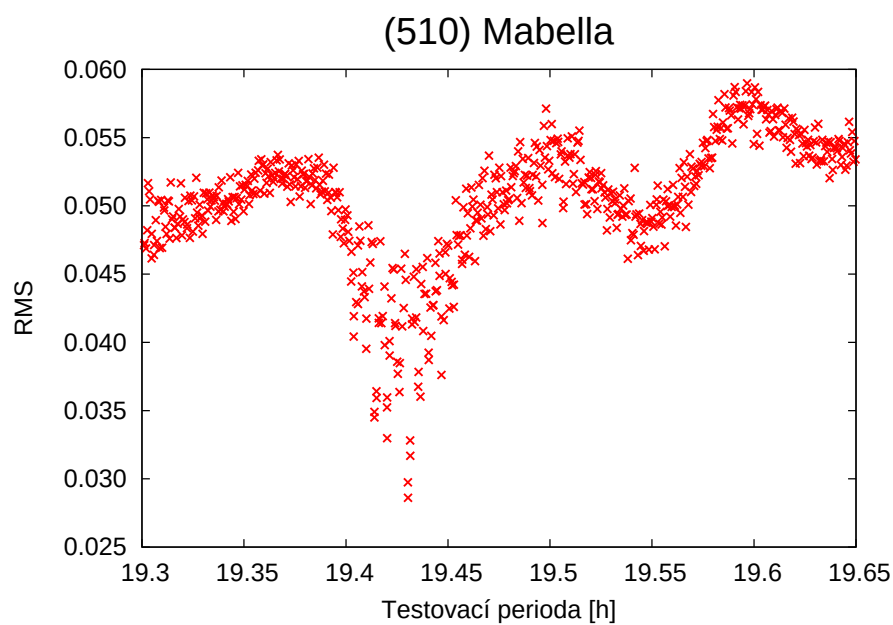
Asteroid	Perioda [h]	RMS	χ^2
(334) Chicago	7,3582	0,0487	2,1073
	7,3591	0,0479	2,1153
	7,3602	0,0478	2,1232
	7,3609	0,0493	2,2703
(510) Mabella	19,4304	0,0286	0,4243
(790) Pretoria	10,382	0,018	0,542
	10,384	0,019	0,568
(1366) Piccolo	16,1834	0,0324	0,7080

Tabulka 5.4: Tabulka výsledných period, získaných programem SEARCH_PERIODS.SH. Jednoznačná perioda byla nalezena pro planetky (1366) Piccolo a (510) Mabella.

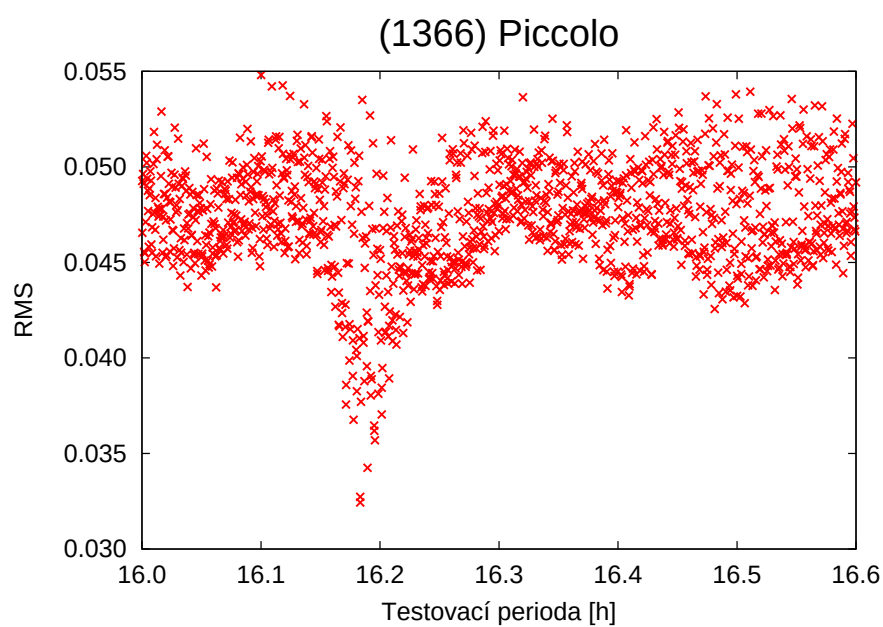
5.4.3 POLE_SEARCH

Pro vypočtenou siderickou periodu planetky se testuje prostor pólů opět pomocí programu CONVEXINV. Program postupně prochází hodnoty pólů rozložených na sféře a pro každý pól konverguje k lokálnímu minimu. Hodnoty χ^2 pro vypočtená minima z jednotlivých natočení pólů se zapisují a srovnávají podle velikosti.

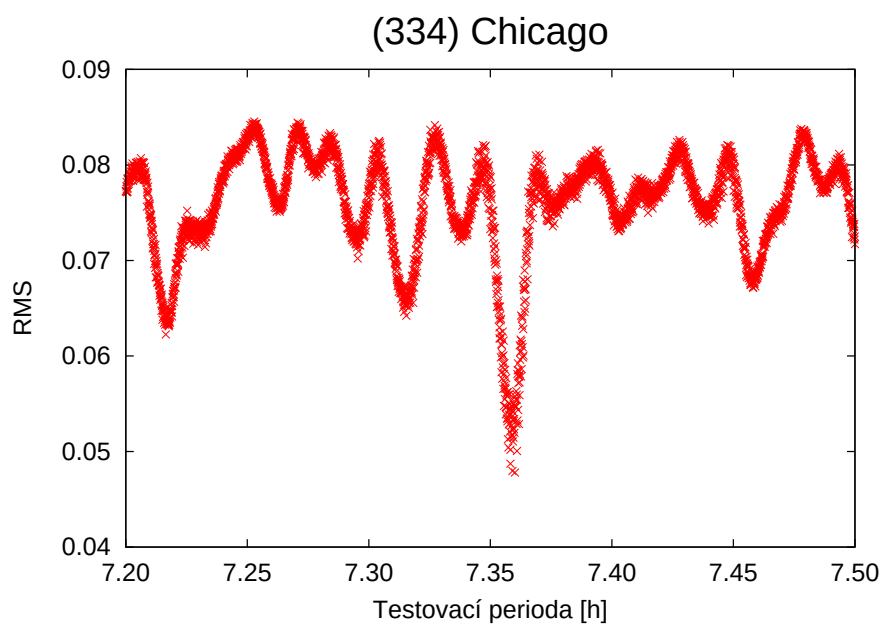
Je opět potřeba vybrat jednoznačné řešení. Program postupuje od nejnižší hodnoty χ^2 . Napřed se podívá, je-li následující hodnota pólu úhlově vzdálená alespoň o 30° . Pokud ne, můžeme říci, že se jedná o stejné řešení. Pokud je úhlová vzdálenost pólů vyšší, zkontroluje se podmínka (5.6) pro χ^2 . Takto program postupuje, dokud nejsou splněny obě zmíněné podmínky. Ve vstupním souboru input_pole_search je možné měnit různé parametry pro prohledávání pólů. Tento soubor obsahuje:



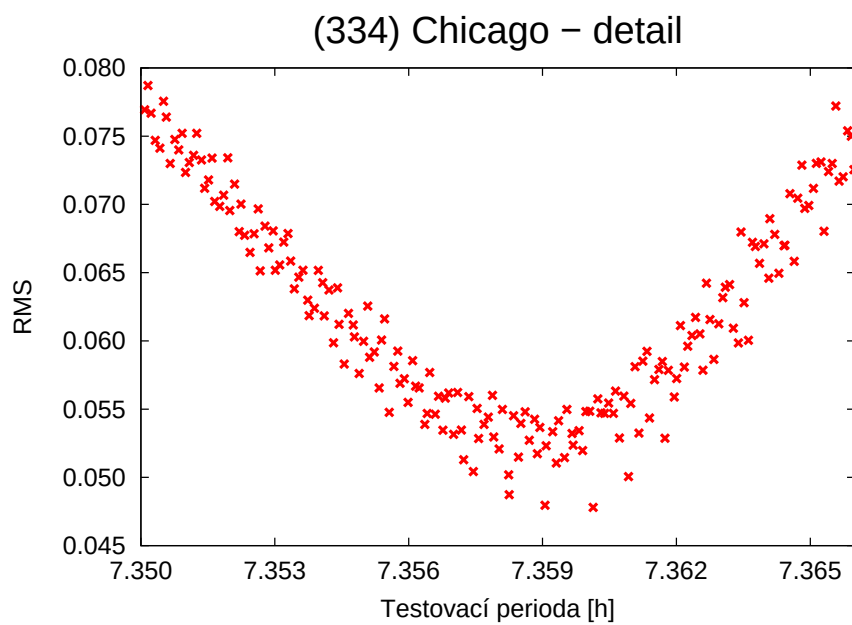
Obrázek 5.8: Prozkoumaná oblast period pro planetku (510) Mabella.



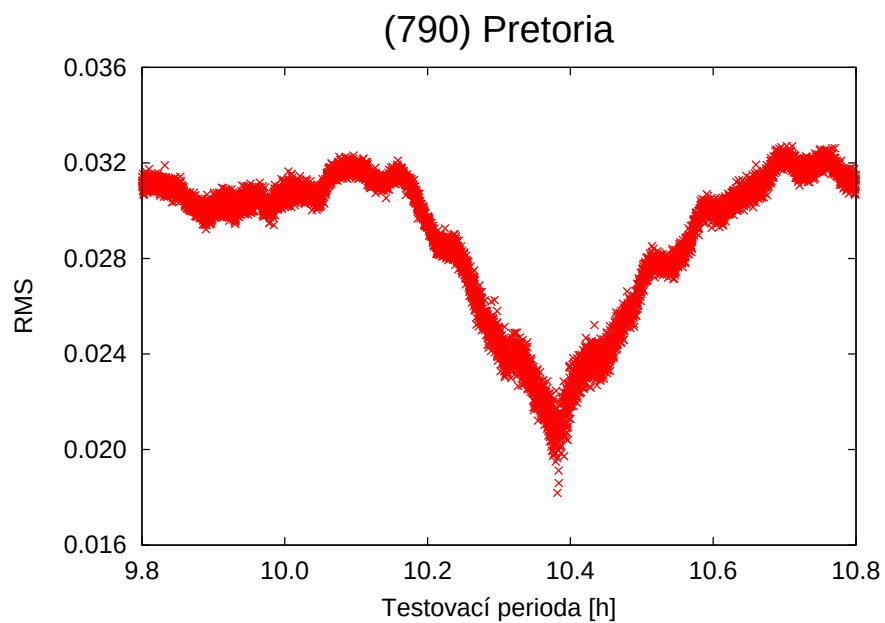
Obrázek 5.9: Prozkoumaná oblast period pro planetku (1366) Piccolo.



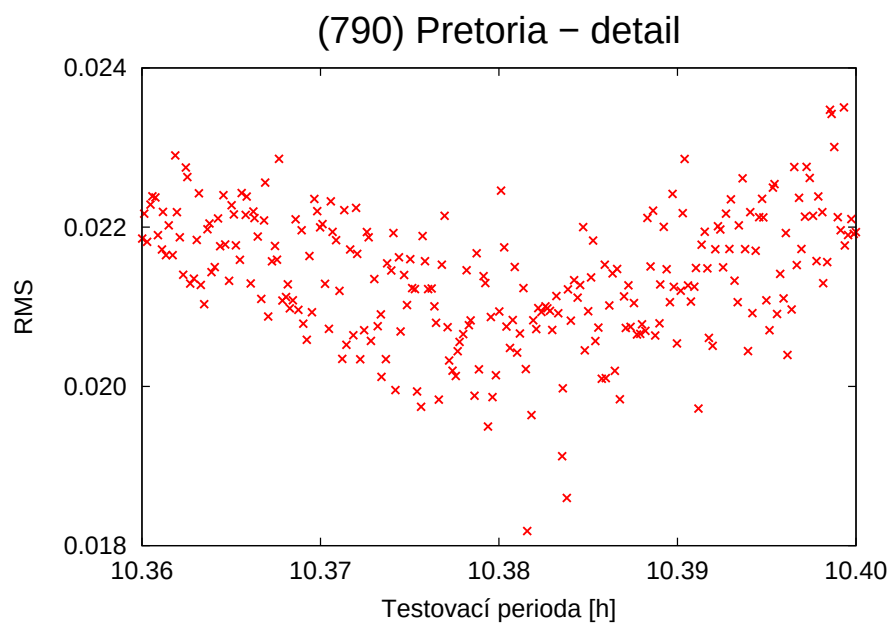
Obrázek 5.10: Prozkoumaná oblast period pro planetku (334) Chicago.



Obrázek 5.11: Detail prozkoumávané oblasti period v globálním minimu pro planetku (334) Chicago.



Obrázek 5.12: Prozkoumaná oblast period pro planetku (790) Pretoria.



Obrázek 5.13: Detail prozkoumávané oblasti period v globálním minimu pro planetku (790) Pretoria.

- Velikost kroku mezi hodnotami pólů (udává hustotu rozložení pólů) $\implies$ zvolená hodnota 30° .
- Minimální vzdálenost řešení ve stupních $\implies$ zvolená hodnota 30° ².
- Hodnota násobku minimální hodnoty χ^2 , která rozhodne o výsledném výběru pólů $\implies$ zvolená hodnota $1,1$ ².
- Počáteční epocha, rotační úhel a rozptylové podmínky $\implies$ shodné se vstupními parametry pro CONVEXINV, viz níže.

Výsledným souborem je `pole_astnum`, který obsahuje informace o χ^2 , RMS, směru pólu λ a β a siderické periodě P . Téměř vždy se setkáme s několika výsledky, minimálně dvou hodnot pólů lišících se v λ o $\pm 180^\circ$, které mají velmi blízké β . Z geometrických důvodů popsaných v kapitole 2.2.8 jsou tyto dva případy inverzí světelných křivek téměř nerozlišitelné.

Pokud jsme tedy našli jednoznačné řešení, v našem výsledku by se měl objevit jeden a více pólů. U planety (1366) Piccolo byly nalezeny dva hodnoty pólu, u planety (510) Mabella čtyři.

U planetek (334) Chicago a (790) Pretoria jsem pro každou našla řešení hodnot pólů zvlášť. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 5.5.

5.4.4 CONVEXINV

Program CONVEXINV je stěžejním prvkem celé procedury a je využíván téměř v každé její části. Metoda, kterou využívá je více popsána v kapitole 2. Program optimalizuje tvar a další volné parametry jako rotační stav nebo rozptylové parametry.

Program jako vstup používá fotometrické křivky `astnum.lcg.all` a jejich váhy `weights_astnum`. Dále také soubor s informacemi o vstupních parametrech `input_convexinv` včetně informace o tom, zda se mají optimalizovat. To určuje hodnota 1/0 za vstupním parametrem. Soubor popořadě obsahuje informace o:

- Rotačním stavu asteroidu $\implies$ rotační perioda P v hodinách, poloha pólu v ekliptikálních souřadnicích λ a β ve stupních.
- Nulové epoše t_0 v JD a počátečním rotačním úhlu Φ_0 ve stupních. Používají se v převodu ekliptikálních a asteroidocentrických souřadnic (rovnice (1.3)). Běžně se volí uživatelem hodnoty $t_0 = 0$ a $\Phi_0 = 0$. Pokud je nastaveno $t_0 = 0$, program zvolí jako t_0 nejstarší uvedené (zaokrouhlené) datum v datech.
- Váze konvexní regularizace γ . Aby byla splněna podmínka konvexnosti, zavádí se temná ploška pro splnění podmínky (2.13). Ve většině případů se volí $\gamma = 1,1$. Vyjde-li velikost temné plošky větší než 1% z celkového povrchu planety, můžeme ji změnou tohoto parametru zmenšit. Pokud se to ve výsledku nedaří, je tvar světelné křivky planety ovlivněn nejen tvarem ale i variací albeda na povrchu.

² hodnoty jsou opět určeny ze zkušenosti, která ukazuje, že chyba v pólu bývá kolem 10° . Zvolenou podmínkou zajistíme prozkoumání celé potřebné oblasti v dostatečném pokrytí.

Asteroid	Perioda [h]	λ [°]	β [°]	RMS	χ^2	Model
(334) Chicago	7,35825	195	3	0,0472	2,0776	1
		15	-7	0,0472	2,0809	2
	7,35906	276	-34	0,0477	2,1261	3
		-52	198	0,0473	2,0954	4
	7,36013	191	43	0,0473	2,0874	5
		13	35	0,0473	2,0877	6
	7,36094	190	2	0,0489	2,2297	7
		8	-26	0,0491	2,2487	8
(510) Mabella	19,43039	281	-45	0,0286	0,4239	1
		110	-75	0,0287	0,4263	2
		32	-60	0,0282	0,4111	3
		236	-49	0,0283	0,4147	4
(790) Pretoria	10,38374	112	-20	0,0194	0,6170	1
		271	28	0,0197	0,6391	2
	10,38159	294	3	0,0179	0,5271	3
		108	-29	0,0179	0,5285	4
(1366) Piccolo	16,18337	203	57	0,0322	0,6994	1
		354	50	0,0325	0,7097	2

Tabulka 5.5: Tabulka výsledných pólů, získaných programem POLE_SEARCH

- Stupni l a řádu m sférických harmonických funkcí $\implies$ při výpočtech periody jsem používala $m = l = 6$ v dalších výpočtech pak stupně vyšších řádů $m = l = 8$.
- Počtu sloupců n , který ve výsledku udává rozlišení tvaru. Je využíván v tzv. oktantové triangulaci, které se využívá při diskretizaci spojitého tvaru na tvar tvořený povrchovými ploškami. Při výpočtech periody jsem používala $n = 6$ dále pak $n = 8$.
- Parametrech rozptylového zákona, viz. kapitolu 2.2.4.
- Maximálním počtu iterací.

Výstupem programu CONVEXINV je několik souborů, které využívám v práci dále:

- `out_astnum`, který obsahuje vypočítané jasnosti pro model planetky ve stejných časech, ve kterých pro ni byla získána fotometrická data. Soubor obsahuje hodnoty jasu (v jednotkách intenzity) ve stejném pořadí, které je uvedené ve vstupních datech pro světelné křivky asteroidů. Porovnání naměřených a modelových fotometrických křivek výsledných modelů uvádím v kapitole s výsledky 5.8.
- `model_astnum`, který v sobě uchovává informace o tvaru planetky, rozděleném na plošky. Číslo na prvním řádku udává celkový počet plošek. Na každém dalším

řádku jsou vypsané informace o jednotlivých ploškách – ploše jejich povrchu a souřadnicích x , y , z vnější jednotkové normály. Na konci souboru se nalézají stejné informace pro tmavou plošku. Počet plošek udává uživatel v dříve uvedeném rozlišení n , celkem jich je $8n^2 + 1$. Počet plošek byl pro zvolené $n = 8$ 513. Tato data slouží jako vstupní soubor pro program MINKOWSKI.

- `param_astnum`, který obsahuje informace o periodě, směru osy rotace a rozptylových parametrech ve formátu:

$\lambda \ \beta \ P$

$t_0 \ \Phi_0$

$a \ d \ k$

c

5.4.5 MINKOWSKI+STANDARDTRI

Program vytváří konvexní mnohostěn z modelu popsaného pomocí obsahu plošek a jejich vnějších normál. Program vytvoří soubor s informacemi o počtu vrcholů a stěn mnohostěnu, pro každý vrchol jsou určeny souřadnice x , y , z a každá stěna je určena počtem vrcholů a jejich pořadovým číslem. Minkowského procedura je důležitá pro stabilizaci řešení, výstup z `CONVEXINV` udává při mírně odlišných počátečních parametrech rozdílná řešení, ale převod do konvexního mnohostěnu pak udává téměř shodná řešení.

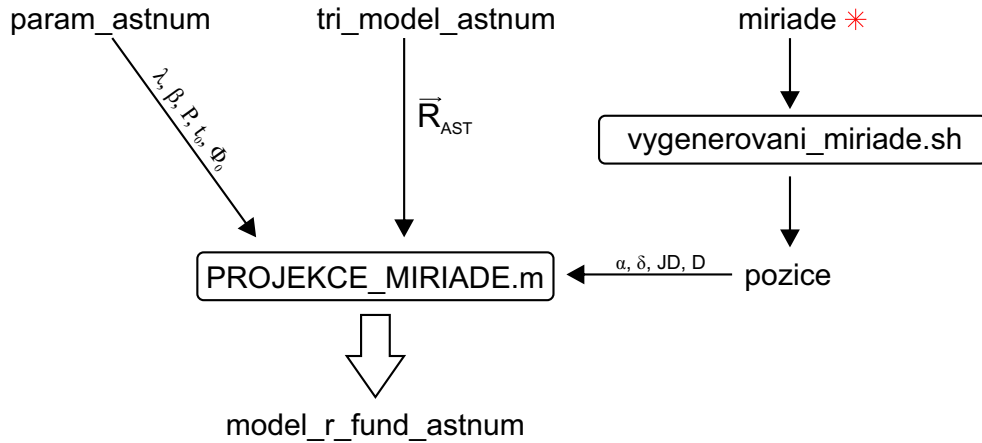
Procedura `STANDARDTRI`, která následuje, vytvoří z obecných mnohostěnnů trojúhelníkové plošky. Data jsou uložena v souboru `tri_model_astnum`, první řádek podává informaci o počtu vrcholů a počtu plošek, dále následuje skupina řádků udávající souřadnice jednotlivých vrcholů a další skupina řádků odkazuje na pořadová čísla vrcholů konkrétní plošky. Výsledný soubor se dále používá při projekci planety, její vizualizaci a škálování velikosti jejího modelu.

5.5 Projekce planety

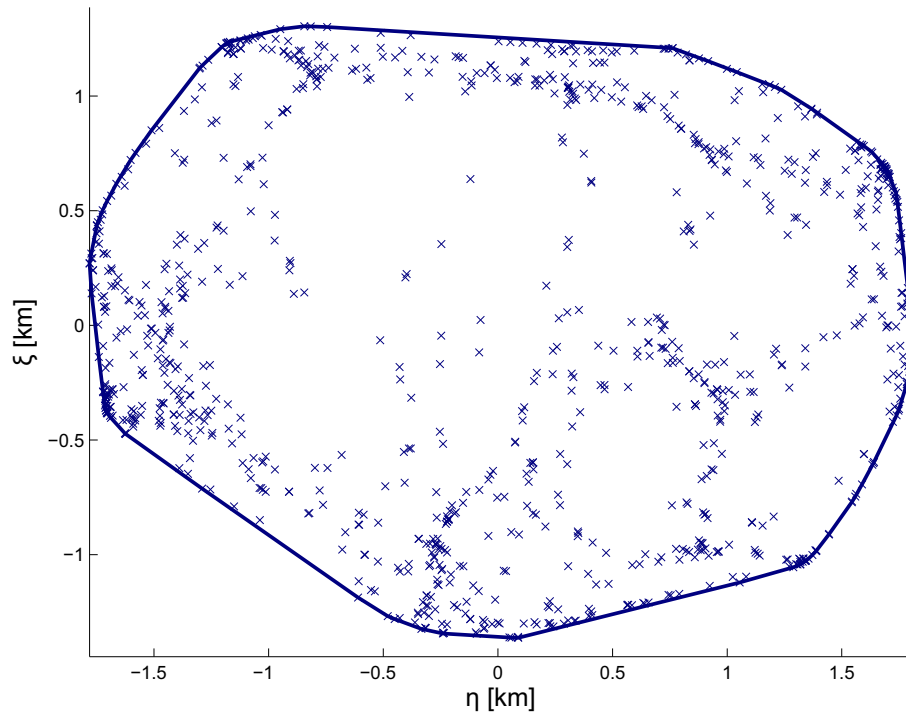
V předchozí části jsem určila několik možných tvarů pro každou pozorovanou planetku. Nyní je tyto tvary třeba porovnat s jejich zákryty. Pro tento účel jsem napsala program v Matlabu `PROJEKCE_MIRIADE.m`, jehož výsledkem je projekce planety na fundamentální rovinu v libovolné době v budoucnosti a minulosti. Obecný popis metody, na základě které program funguje, je součástí kapitoly 4.

Výhodou a inovací programu `PROJEKCE_MIRIADE.m` oproti programu mého vedoucího, použitím v Ďurech a kol. (2011), je jeho nezávislost na znalosti efemerid asteroidu a polohy Země a Slunce. Tyto informace si program bere z již zmíněné webové aplikace *Miriade* v podprogramu `vygenerovani_miriade.sh`. Uživatel zadá číslo planety a JD – Juliánské datum (časové rozpětí je dáno pouze možnostmi *Miriade* od 1.1.1000 12h do 1.1.3000 12h) ve kterém má být planeta projektována. Programy `PROJEKCE_MIRIADE.m` a `vygenerovani_miriade.sh` jsou součástí přiloženého média.

Vstupními soubory jsou přímé výsledky z předchozí části inverze světelných křivek. Jedná se o popis tvaru asteroidu `tri_model_astnum` a informace o jeho rotačním stavu $\lambda, \beta, P, t_0, \Phi_0$ zaznamenané v souboru `tri_model_astnum`. Výstupem je projekce bodů na fundamentální rovinu, tedy vektory $\vec{R}_{\text{FUND}}$ uložené v souboru `model_r_fund_astnum`. Vygenerován je také obrázek, ve kterém je zvýrazněná konvexní obálka asteroidu.



Obrázek 5.14: Myšlenková mapa postupu při projekci modelů planetek na fundamentální rovinu. Mapa ukazuje vstupní a výstupní soubory pro programy `VYGENEROVANI_MIRIADe.SH` a `PROJEKCE_MIRIADe.M`.



Obrázek 5.15: Příklad projekce prvního modelu planetky (1366) Piccolo v době jejího zákrytu 2003-04-28.

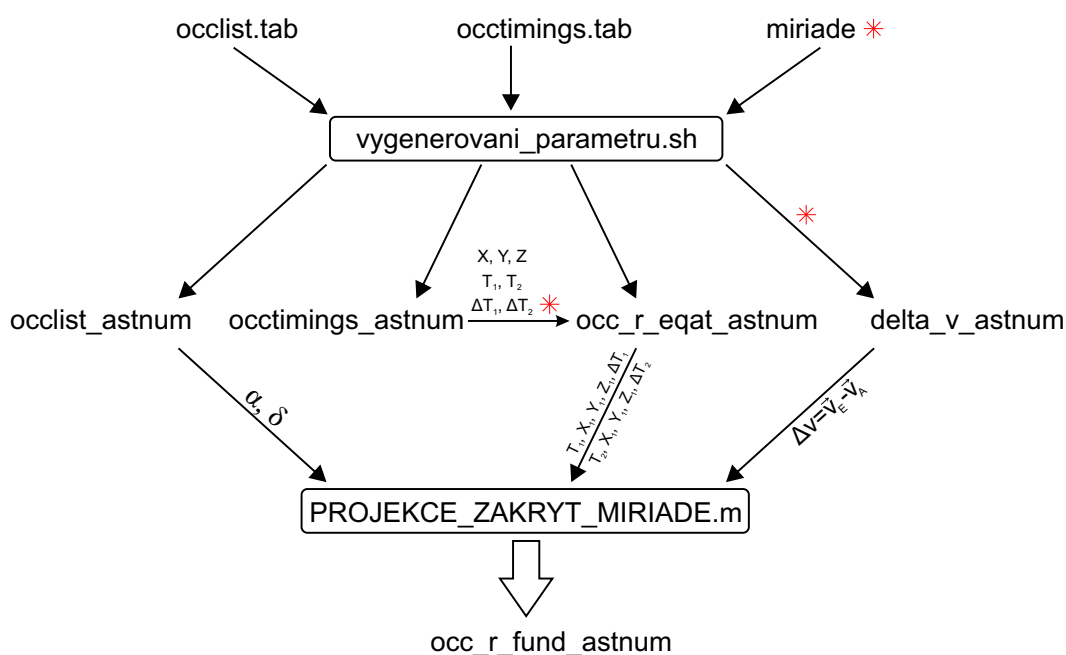
Myšlenková mapa programu je na obrázku 5.14. Ukázka výstupu programu je pak na obrázku 5.15. Výsledky pozorovaných planetek jsou společně se zákryty planetek na obrázcích v kapitole s výsledky 5.8.

Program má také variantu, která není závislá na přístupu k internetu a nebere si on-line data z webového prostředí Miriade. Pokud chceme projekci planetky pouze v době jejího zákrytu, jsou veškeré informace k dispozici v databázi zákrytů [44] v souborech `occlist.tab` a `occtimings.tab`.

Vedlejším výstupem práce je mnou napsaný skript `PROJEKCE.SH`, který slouží pro projekci planetky v libovolném čase. Byl napsán tak, aby pracoval samostatně a byl velmi snadno použitelný i pro jiné uživatele. Program bude sloužit k vizualizaci modelů na stránkách DAMITu Ďurech a kol. (2010).

5.6 Projekce zákrytů

Teorie zákrytů a jejich projekce je popsána v kapitole 3. Dále popisují vlastní praktický postup projektování dat ze zákrytů. V programu nepracují se zákryty sekundární hvězdy v případě, že zakrývaná hvězda byla dvojhvězdou. Mapa myšlenkové sítě programu je na obrázku 5.16.



Obrázek 5.16: Myšlenková mapa postupu při projekci pozorování zákrytů na fundamentální rovinu. Mapa ukazuje vstupní soubory a výstupní soubory pro programy `vygenerovani_parametru.sh` a `PROJEKCE_ZAKRYT_MIRIADE.m`.

Jako vstupní data pro projekci zákrytů hvězd používám soubory `OCCLIS.TAB` a `OCCTIMING.TAB`. Program dále využívá přístup k webové aplikaci Miriade. Pro výslednou projekci potřebuji následující data, která generuji programem `vygenerovani_parametru.sh`:

- Rektascenzi a deklinaci hvězdy α, δ – data z `OCCLIS.TAB`. Definují fundamentální rovinu.
- Rozdíl rychlostí Země a planety – počítá se z *Miriade* jako rychlost planety v rovníkové soustavě spojené se Zemí.
- Typ pozorování – jednopísmenný kód nesoucí informaci o tom, jestli byl zákryt pozorován (D,R), zda bylo zamračeno (C) nebo zda šlo o negativní pozorování (M). Data z `OCCTIMINGS.TAB`.
- Časy zákrytu – data z `OCCTIMINGS.TAB`.
- Chyby v časech – chyby často nejsou pozorovateli dodány, v tomto případě přiřazují chyby manuálně podle typu pozorování: vizuálním přiřazují chybu 0,5 s, ostatním metodám 0,05 s. Data z `OCCTIMINGS.TAB`.
- Souřadnice pozorovatele – z `OCCTIMINGS.TAB` získá program zeměpisnou délku a šířku pozorovatele a jeho výšku nad mořem (pokud není výška udána, přiřazují 0 m). Souřadnice jsou zadány do *Miriade* společně s časy zákrytu a ve výsledku dostáváme rovníkové pravoúhlé souřadnice pozorovatele v soustavě spojené se Zemí.

Tyto parametry jsou přímým vstupem pro program v Matlabu, který vytváří výslednou projekci zákrytu `PROJEKCE_ZAKRYT_MIRIADE.m`. Výsledné zákryty zkoumaných planetek uvádím na obrázcích 5.1. Programy `vygenerovani_parametru.sh` a `PROJEKCE_ZAKRYT_MIRIADE.m` jsou součástí přiloženého média.

5.7 Škálování modelu a zákrytu – minimalizace

V poslední části porovnávám projekci modelu planety a projekci zákrytu. Chyby pozorování ze zákrytu jsou do programu zahrnuty.

Program `MINIMALIZACE.m` psaný v Matlabu používá vstupní data získaná předchozími programy – projekce zákrytu `occ_r_fund_astnum` a konvexní obálku modelu `r_fund_conv Hull` projektovaného na fundamentální rovinu. Protože zákryt a konvexní obálka jsou vůči sobě posunuty a model nemá správnou velikost, program nejprve najde počáteční posun dat zákrytu a podle velikosti nejdelší tětivy zákrytu (případně podle vzdálenosti krajních tětív) škáluje konvexní obálku modelu.

Dále program minimalizuje vzdálenosti χ^2 podle popisu v kapitole 4. Použitá minimalizační funkce je volána Matlabem jako `fminunc`. Jedná se o nepodmíněnou nelineární optimalizaci, která využívá spádových směrů v kvazimewtonově algoritmu. V minimalizaci přímo nezadávám první derivaci celé funkce, vhodný směr hledá funkce sama za použití medium-scale algoritmu popsáno v dokumentaci Matlabu.

V základní verzi program optimalizuje parametr c , kterým je škálována velikost modelu, a parametry posunutí ξ, η , které udávají společné posunutí všech tětív ve vodorovné a svislé ose. U některých planetek je výhodné rozlišit pozorování časů zákrytu vizuálně a pomocí záznamových zařízení. Vizuální pozorování jsou zatížena větší chybou, která způsobuje hlavně posun dat vproti směru pohybu asteroidu. Proto jsem v případě planety (1366) *Piccolo*, u které to mělo vzhledem k zákrytu smysl, do programu zahrnu

další parametr, určující tento posun jednotlivých vizuálně pozorovaných tětív. V další kapitole 5.8 uvádím výsledné grafy pro všechny modely. V grafech jsou vypsány informace o rotačním stavu modelů z konečného modelování planety programem CONVEXINV.

Toto fitování modelu na zákryt výrazně přispívá k určení velikosti asteroidů. Rozměry planetek pro každý fitovaný model proto udávám u každého grafu. Velikosti efektivního průměru D jsou porovnávány s termálními měřeními družice IRAS [26] a AKARI [27], případně WISE [19] (pro vybrané planety je z WISE určená velikost pouze k jedné).

5.8 Výsledky

V následující kapitole uvádím výsledky pro všechny čtyři pozorované planety. Výsledky s preferovanými modely jsou shrnuty v závěru práce.

Výsledné chyby nelze určit přímočarým postupem, protože jsou zatíženy systematickými a modelovými chybami. Formální chyby zde vycházejí nesmyslně malé. Při jejich určování proto vycházíme z praxe, jemnými změnami vstupních dat sledujeme změny výstupních hodnot. Ukazuje se, že chyby výsledných period určených metodou inverze světelných křivek jsou zhruba desetinou až dvacetinou hodnoty ΔP vypočítané podle vzorce (2.5). Chyby výsledných směrů pólu se pohybují mezi $(10\text{--}20)^\circ$.

5.8.1 (334) Chicago

Pro planetku (334) Chicago jsem měla k dispozici nejvíce fotometrických dat. I přesto se nepodařilo nalézt jednoznačnou periodu. Na základě periodogramu planety jsem vybrala pro další postup čtyři periody s nejnižším RMS. Pro každou z těchto period jsem našla dvě řešení pro natočení pólů planety. Tyto periody nemusí být správným řešením a další výsledky jen ukazují možnosti porovnávání modelů se zákryty.

Zákryt planety ze dne 24. 12. 2002 je na obrázku 5.1a. Zákryt celkem dobře pokrývá celý průmět planety, téměř polovinu pozorování pak tvoří vizuálně pozorované tětivy, které mohou být mírně posunuté v/proti směru pohybu planety a jsou zatíženy většími chybami.

Výsledné fitování na obrázcích 5.18 nevypadá pro většinu modelů příliš přesvědčivě. Velikost χ^2 je v tomto případě ovlivňována především vzdáleností konvexní obálky od prvních dvou modrých tětív, které jsou podle pozorovatelů zatíženy nejmenšími chybami. Třetí modrá tětiva je naopak ohodnocena pozorovatelem velmi nepřesně a do výsledného fitování téměř nepřispívá. Spodní část planety byla v zákrytu pozorována vesměs vizuálně a proto je horní pro minimalizaci určující.

Zajímavé bylo podívat se na hodnoty χ^2 v případě, kdy všechny chyby ponecháme stejné a každá tětiva bude do minimalizace přispívat stejnou měrou. Výsledky jsou na obrázcích 5.19 a jsou věrnější tomu, co bychom z obrázků pocítově čekali.

Nejlépe zákryt fituje model 1, ale ani z pohledu na oba výsledky nelze určit jednoznačný model (nehledě na to, že ani jeden model v tomto případě nemusí být ten správný). Ukázku 3D tvaru pro model 1 uvádím na obrázku 5.17. Pokud porovnáme modelované křivky tohoto modelu s reálnými daty, jak je znázorněno na obrázcích 5.20, je vidět, že některá data nejsou modelem popsána věrně. Planeta by potřebovala ke správnému určení periody další fotometrická měření v budoucí opozici.

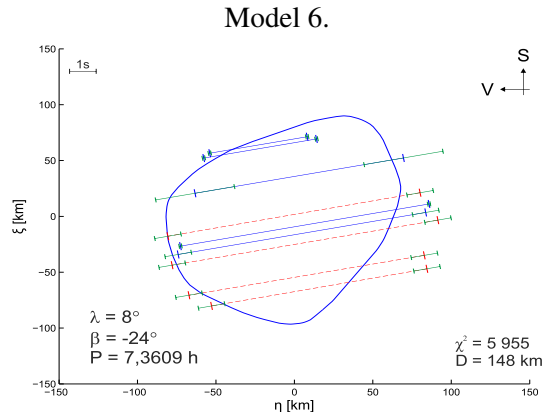
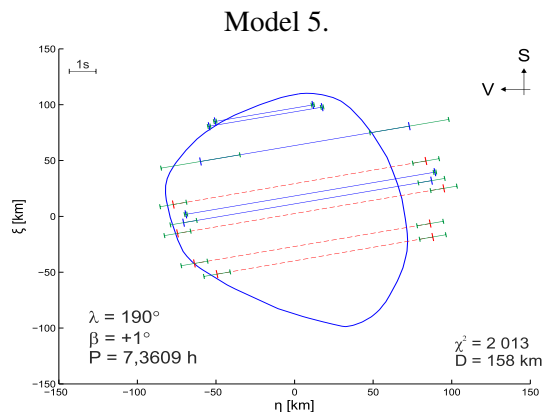
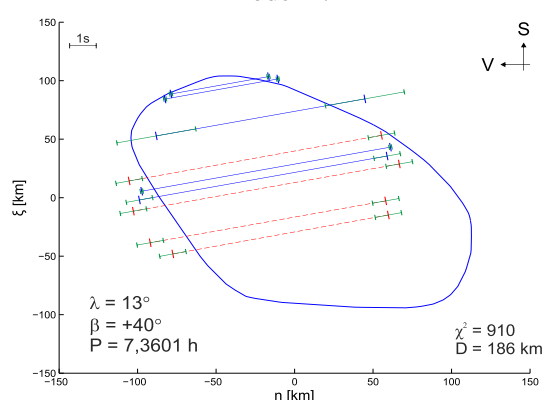
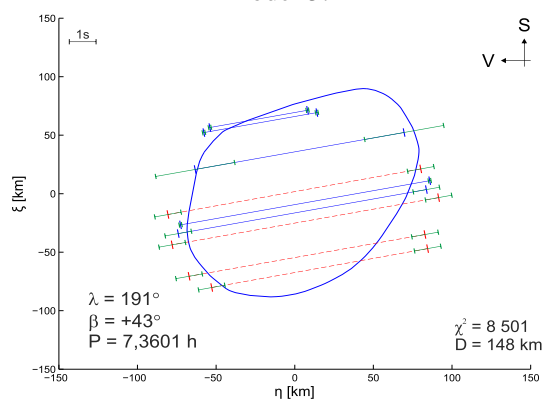
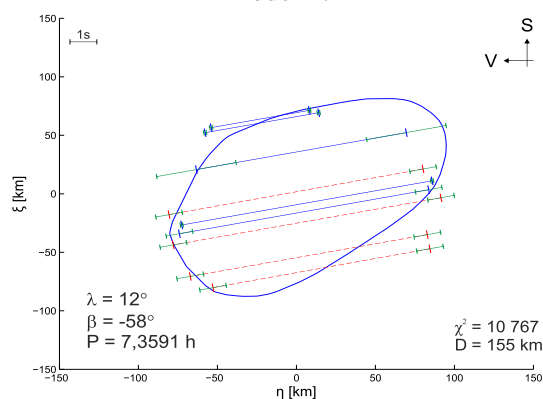
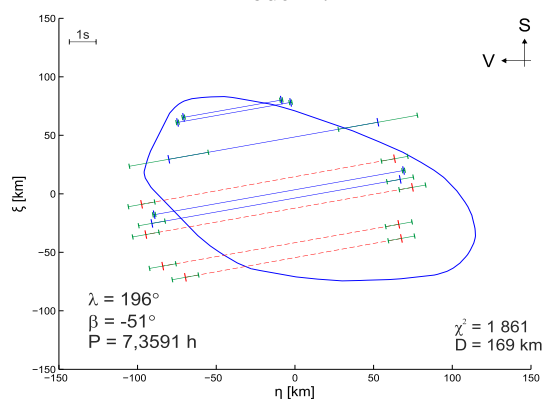
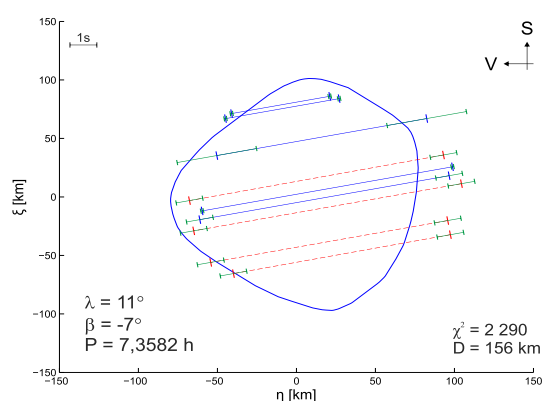
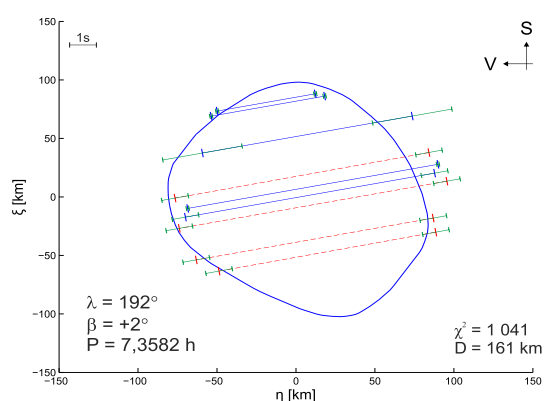
Na základě zákrytu a velikosti χ^2 můžeme zcela vyloučit modely 3, 4, 5, 6 a 8 jako nevhodné. Ze zbylých modelů se efektivní velikost planetky pohybuje v rozmezí 156–162 km což dobře koresponduje s velikostí určenou družicí IRAS $158,6 \pm 8,9$ km, o něco hůře s měřením družice AKARI $167,21 \pm 2,11$ km a WISE $174,100 \pm 12,788$ km.

(334) Chicago

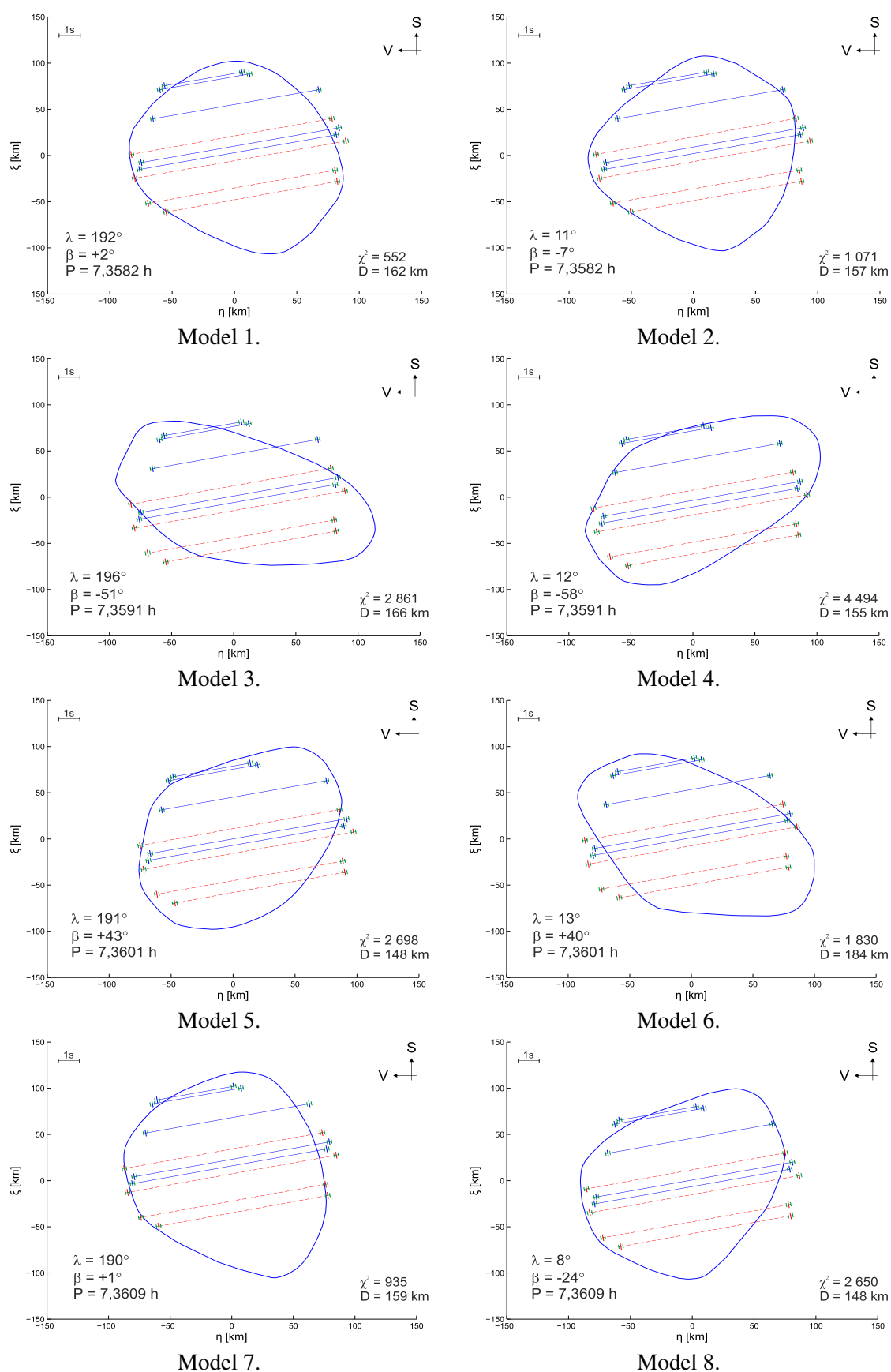


$\lambda = 192^\circ$
 $\beta = +2^\circ$
 $P = 7,3583 \text{ h} \pm 0,0001 \text{ h}$

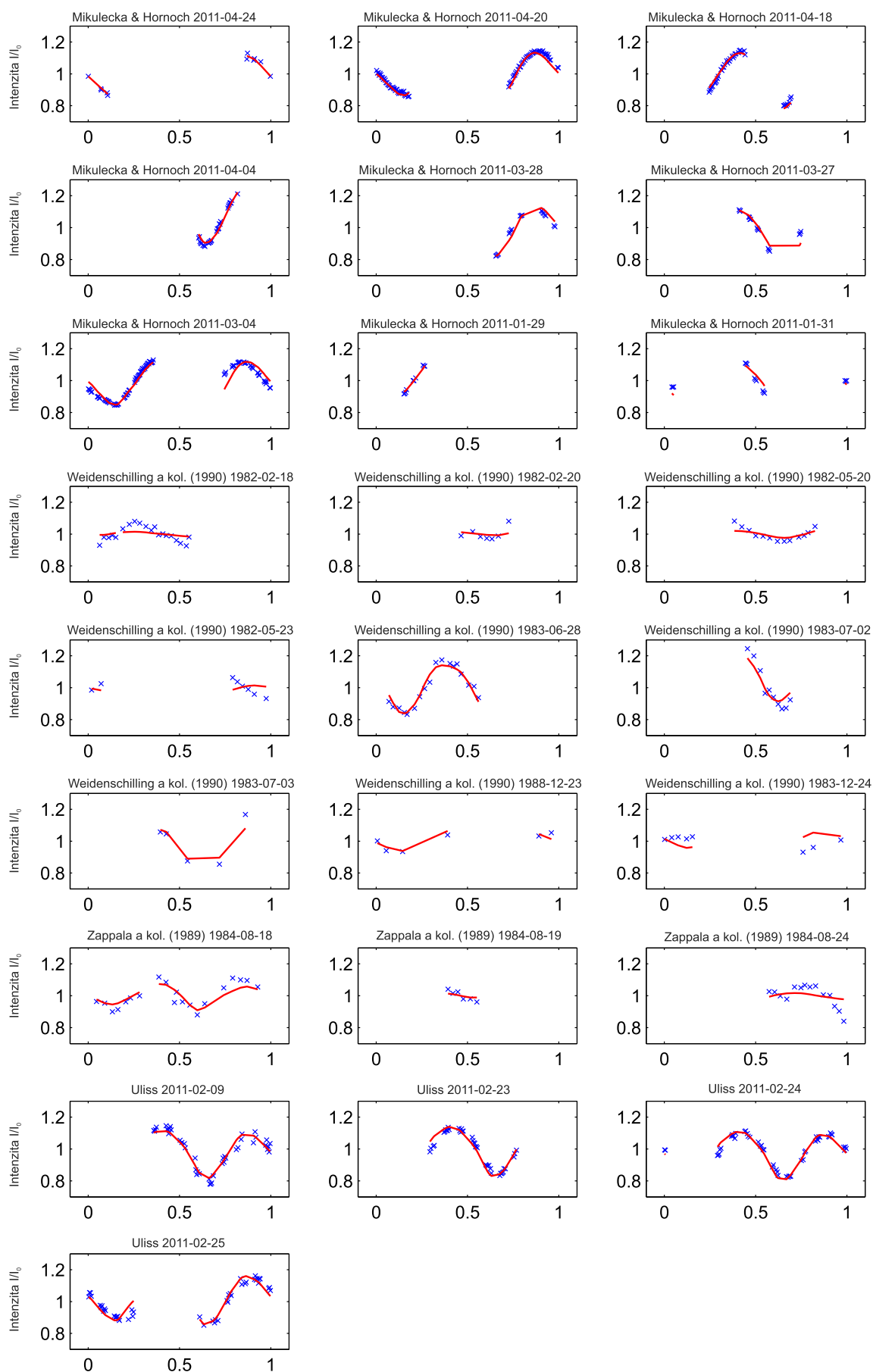
Obrázek 5.17: **(334) Chicago** Tvar planetky ze tří různých pohledů, zleva: dva pohledy kolmo na rovník vzájemně otočené o 90° , pohled na pól. Jde o model 1 s nejnižším χ^2 .



Obrázek 5.18: **(334) Chicago** Fitování osmi modelů na zákryt ze dne 24. 12. 2002 s chybovými intervaly, které udali pozorovatelé (zeleně). Měřítko v grafech je stejné. Vizuální pozorování jsou znázorněna červeně, fotoelektrická modře, negativní magentou.



Obrázek 5.19: **(334) Chicago** Fitování osmi modelů na zákryt ze dne 24. 12. 2002 s upravenými chybovými intervaly tak, aby byly stejné pro všechna data (zeleně). Měřítko užívané v grafech je stejné. Vizuální pozorování jsou znázorněna červeně, fotoelektrická modře, negativní magentou.



Obrázek 5.20: **(334) Chicago** Porovnání pozorovaných křivek (modře) a modelovaných křivek (červeně) pro model 1. Vodorovná osa odpovídá jedné periodě vynesené ve fázi.

5.8.2 (510) Mabella

Pro planetku (510) Mabella jsem určila jednoznačnou periodu a získala čtyři modely s rozdílně natočenými osami (z toho jsou dva a dva modely pro zrcadlící se póly). Pro planetku byl doposud získán jeden zákryt, uvedený na obrázku 5.1b. Zákryt planetky nebyl moc dobře pokrytý, zaujímá jen okrajovou část planetky.

Obrázky 5.22 ukazují fitování konvexní obálky všech čtyř modelů v čase tohoto zákrytu. Z obrázků 5.22 je zřejmé, že pokud planetku dostatečně zvětšíme, bude zákryt dobře fitovat všechny modely. Nejlépe zákryt fituje konvexní obálka modelu 2.

Fitováním se program snaží snížit hodnotu χ^2 , výsledné velikosti takto určených modelů ale nejsou reálné. Důvodem je právě špatné pokrytí zákrytu, které zabírá jen jednu část planetky. Velikost planetky tedy v tomto případě nelze reálně určit. Využila jsem proto pozorování z jiného typu dat, což dopomohlo ke správnému výběru modelu. Z termálních dat družice IRAS [26] byl určen průměr planetky na $57,4 \pm 2,8$ km a družicí AKARI 54,71 $\pm$ 0,81 km.

Při fitování modelů na zákryt jsem ponechala velikost modelů konstantní. Škálovací parametr modelů jsem zvolila z dat družice IRAS [26], tak aby objem modelu byl stejný, jaký by měla koule o průměru 57,4 km. Výsledky takto fitovaných modelů jsou v následujících obrázcích 5.23.

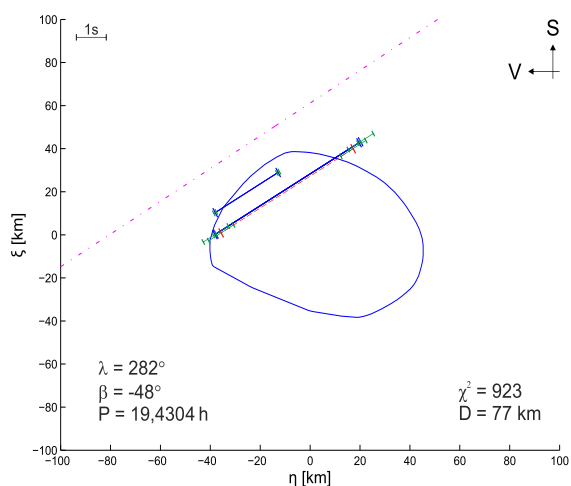
Podle velikosti χ^2 , zapsané u každého fitovaného modelu na obrázcích 5.23, i podle vizuálního odhadu je vidět, že nejlépe vyhovují modely 2 a 3, přičemž model 2 vychází nejlépe. Světelné křivky získané modelováním tohoto tvaru planetky dobře souhlasí s reálnými křivkami, jak ukazují grafy na obrázku 5.24. Jeho 3D tvar uvádím na obrázku 5.21.

U planetky se nepodařilo jednoznačně určit její model, ani některé z tvarů vyloučit. Byla takto alespoň zpřesněna perioda planetky a nalezena čtveřice možných modelů.

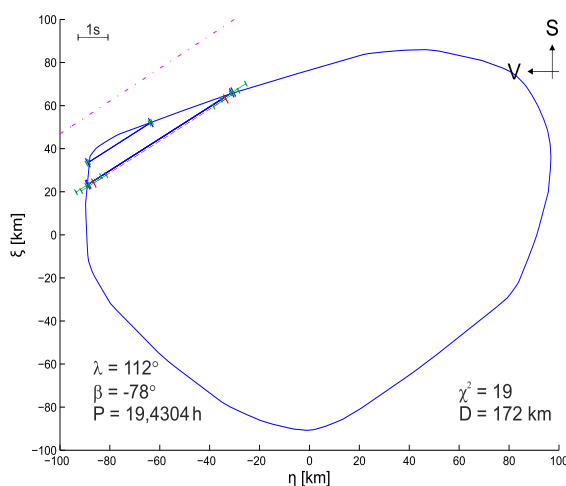
(510) Mabella



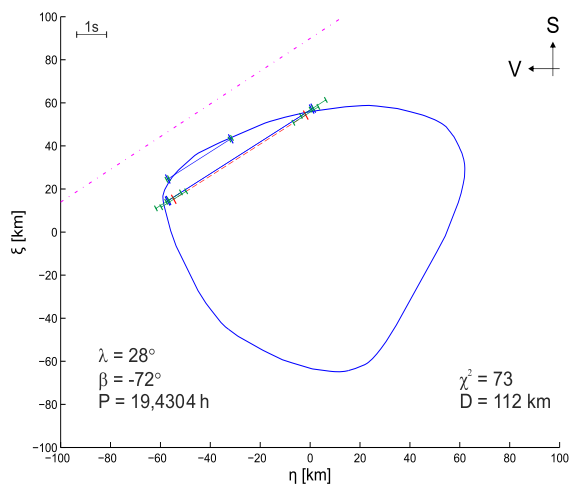
Obrázek 5.21: **(510) Mabella** Tvar planetky ze tří různých pohledů, zleva: dva pohledy kolmo na rovník vzájemně otočené o 90° , pohled na pól. Jedná se o model 2.



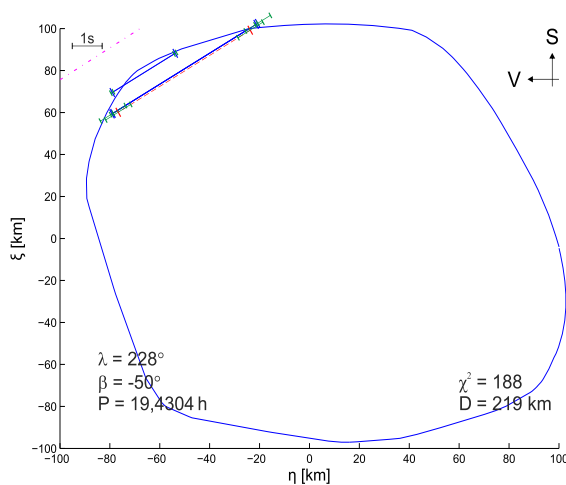
Model 1.



Model 2.

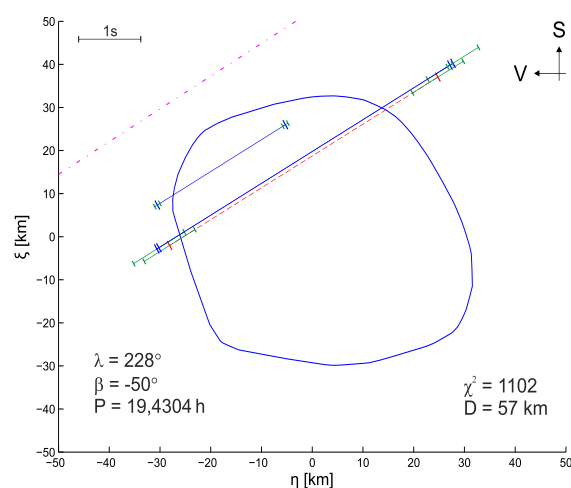
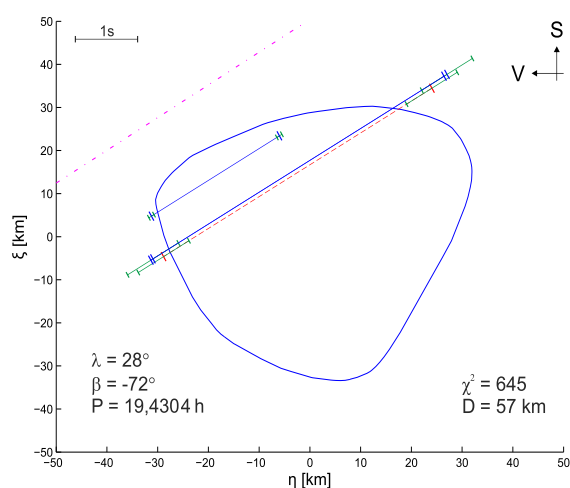
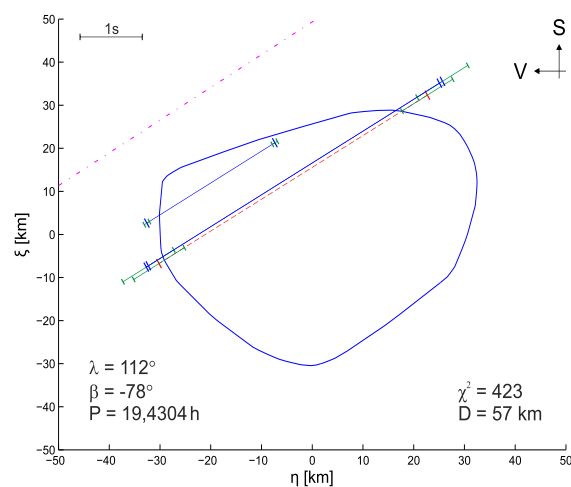
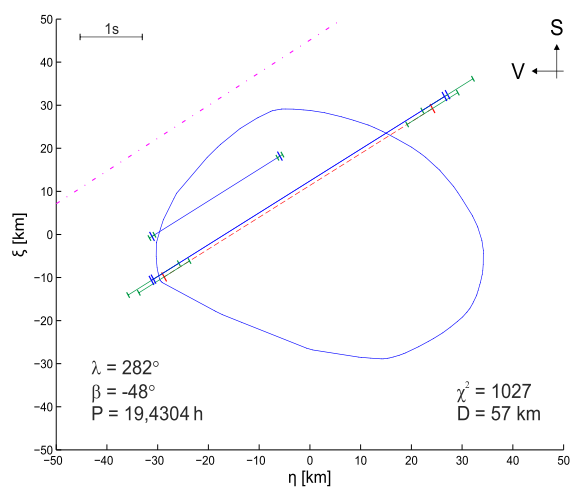


Model 3.

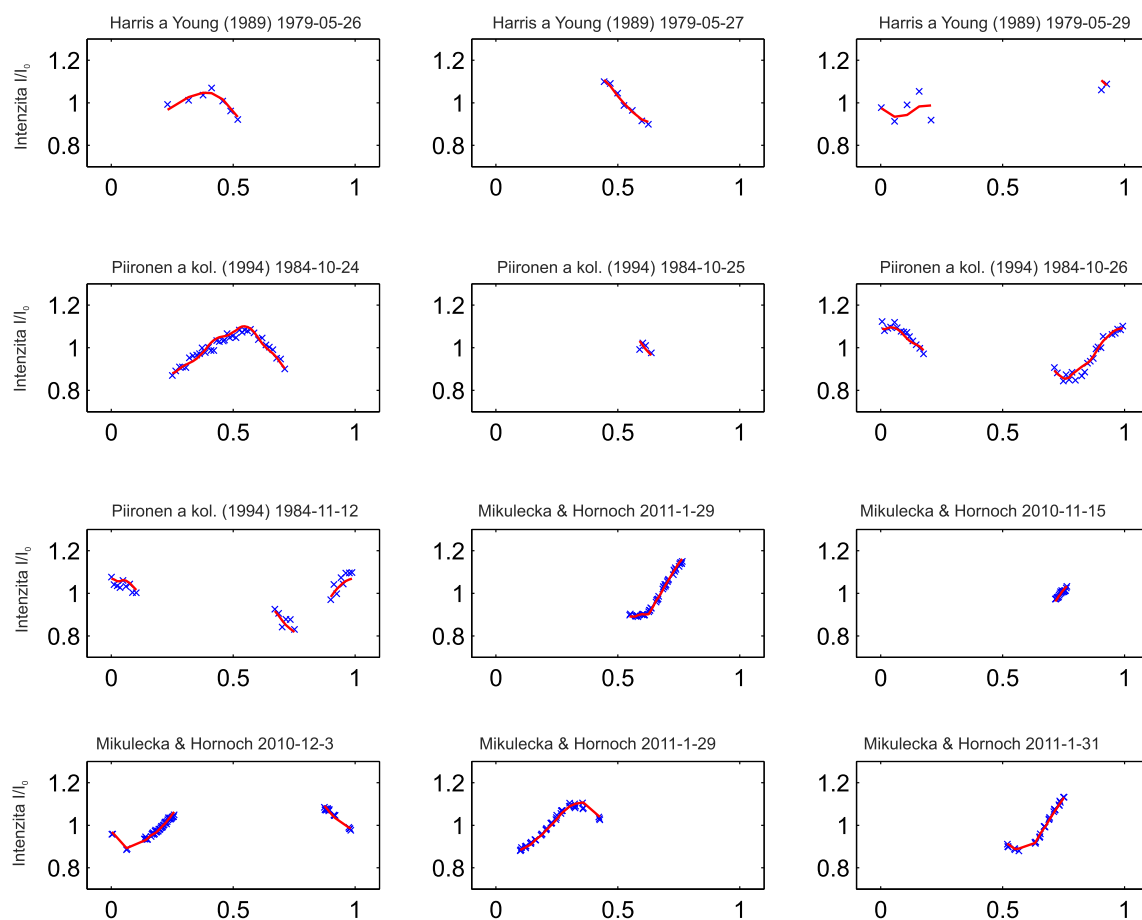


Model 4.

Obrázek 5.22: **(510) Mabella** Fitování čtyř modelů na zákryt ze dne 5. 4. 2008. Měřítko v grafech je stejné, model nebyl při fitování velikostně škálovaný. Vizuální pozorování jsou znázorněna červeně, fotoelektrická modře, negativní magentou. Zeleně jsou znázorněny chybové intervaly udávané pozorovateli.



Obrázek 5.23: **(510) Mabella** Fitování čtyř modelů na zákryt ze dne 5. 4. 2008. Měřítko v grafech je stejné, model nebyl při fitování velikostně škálovaný. Efektivní průměr všech modelů je konstantní $D = 57,4$ km. Vizualní pozorování jsou znázorněna červeně, fotoelektrická modře, negativní magentou. Zeleně jsou znázorněny chybové intervaly, udávané pozorovateli.



Obrázek 5.24: **(510) Mabella** Porovnání pozorovaných křivek (modře) a modelovaných křivek (červeně) pro model 2. Vodorovná osa odpovídá jedné periodě vynesené ve fázi.

(790) Pretoria



$$\lambda = 300^\circ$$

$$\beta = +5^\circ$$

$$P = 10,38158 \text{ h} \pm 0,00002 \text{ h}$$

Obrázek 5.25: **(790) Pretoria** Tvar planetky ze tří různých pohledů, zleva: dva pohledy kolmo na rovník vzájemně otočené o 90° , pohled na pól. Jde o model s nejnižším χ^2 získaný jako součet χ^2 obou zákrytů.

5.8.3 (790) Pretoria

U planetky (790) Pretoria se nepodařilo z fotometrických dat získat jednoznačné řešení pro periodu. Vybrala jsem proto dvě hodnoty periody s nejnižším RMS a pro každou periodu jsem našla dvě řešení s rozdílným natočením pólů, viz tabulka 5.5. Planetka má doposud zaznamenané dva kvalitní zákryty – obrázek 5.1f a obrázek zákrytu primární 5.1c a sekundární hvězdy 5.1d.

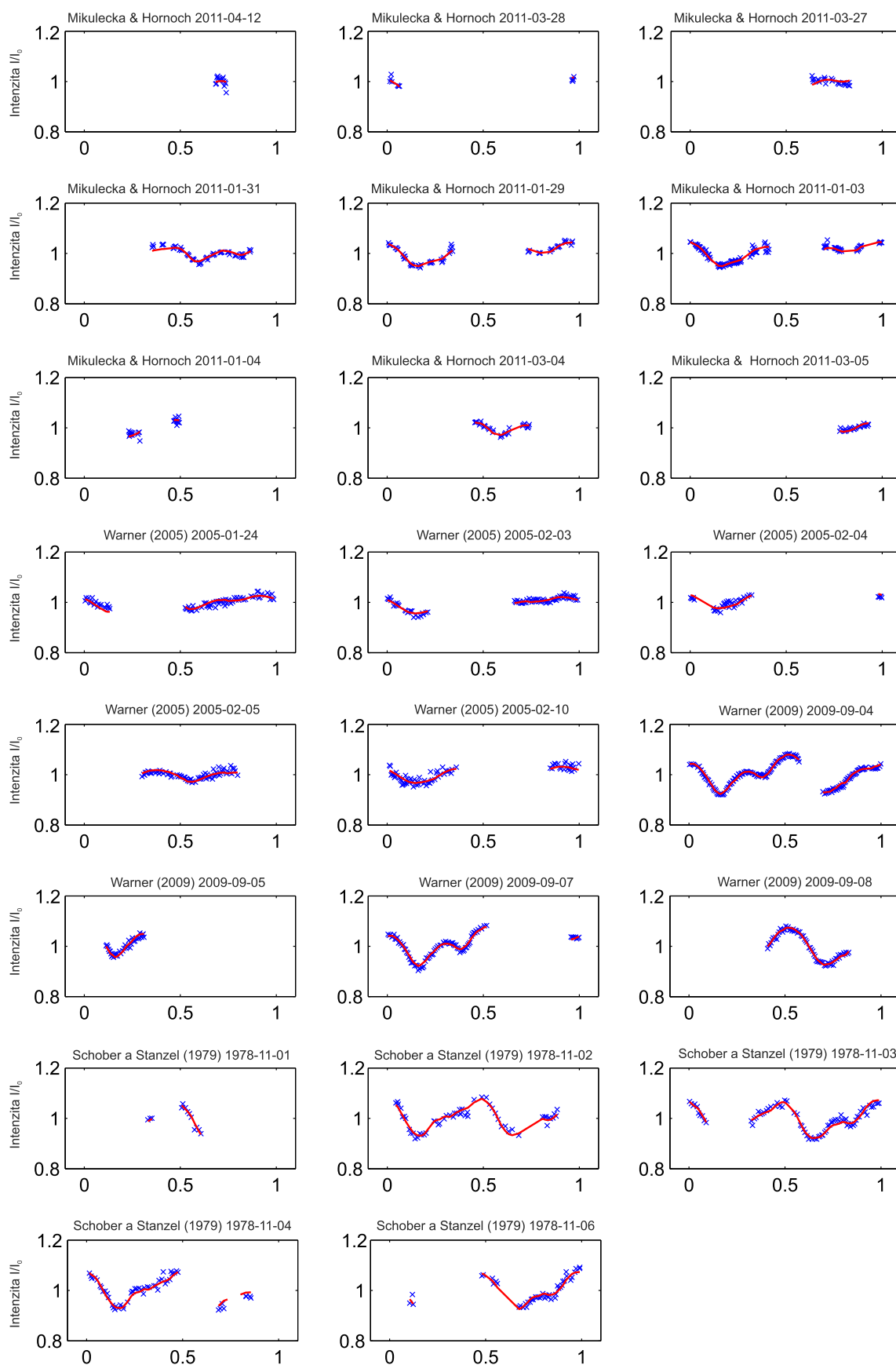
Všechny čtyři získané modely jsem fitovala na oba zákryty. V případě zákrytu z roku 2009 jsem využila jen dat z primární hvězdy. Postup fitování se v tomto případě lišil tím, že jsem oba zákryty fitovala zároveň, přičemž posun hodnot zákrytů se fitoval pro oba zvlášť, ale škálovací faktor se minimalizoval pro oba zákryty současně, aby byla velikost modelu při fitování pro oba zákryty stejná. Výsledkem jsou následující obrázky 5.26.

Na obrázcích je patrné, že ačkoliv jsou oba zákryty hustě pokryty, konvexní obálka každého z modelů je fitována relativně slušně. Podle vizuálního odhadu i podle hodnoty χ^2 , uvedené u každého modelu, se dá zřejmě vyloučit model 2. Mezi zbylými modely nelze bohužel touto metodou rozhodnout.

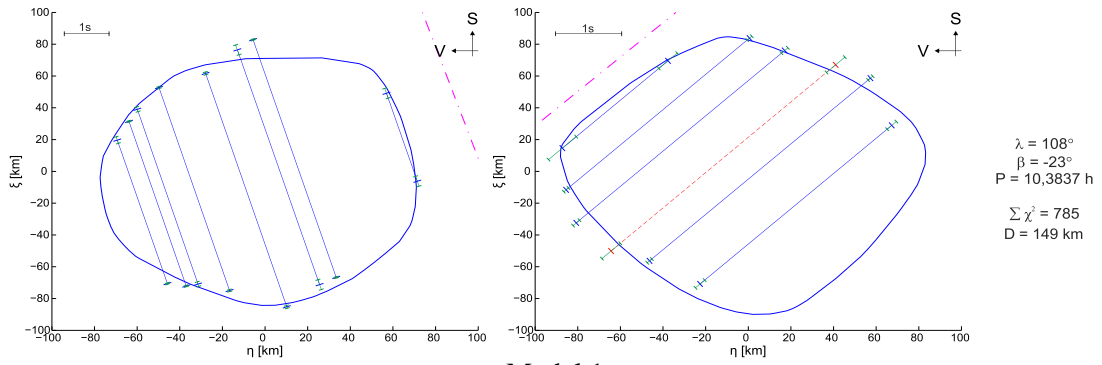
Vizualizaci planetky pro model 3, pro který vyšla hodnota χ^2 nejnižší z obou zákrytů, uvádím na obrázku 5.25. Stejně tak pro tento model přikládám porovnání pozorovaných fotometrických křivek s křivkami modelovanými 5.27. Z křivek je patrné, že model souhlasí se všemi křivkami velmi dobře.

Ekvivalentní průměr planetky udávaný družicí IRAS je $D = 170,37 \pm 2,6 \text{ km}$, družicí AKARI $D = 144,85 \pm 4,94 \text{ km}$. Z obou zákrytů vychází průměr planetky v rozmezí $D = 149\text{--}152 \text{ km}$.

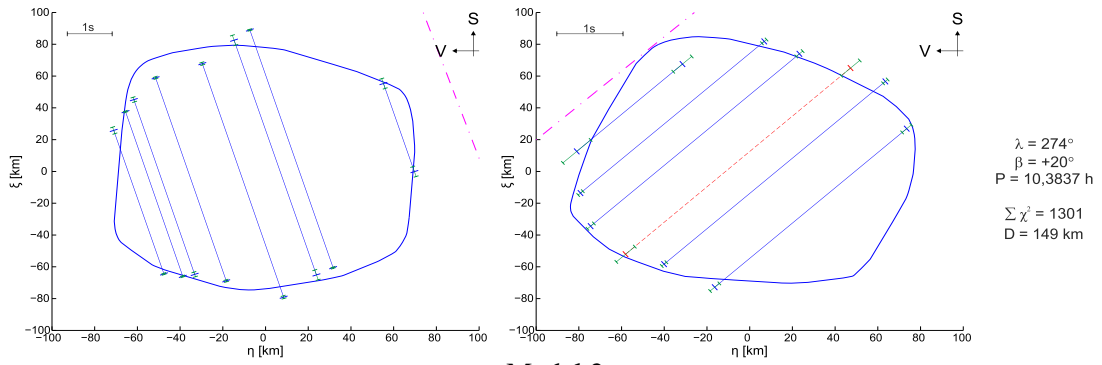
Jednoznačný model planetky se zde nalézt nepodařilo, upřesnil se ale průměr planetky na $D = 151 \pm 2 \text{ km}$.



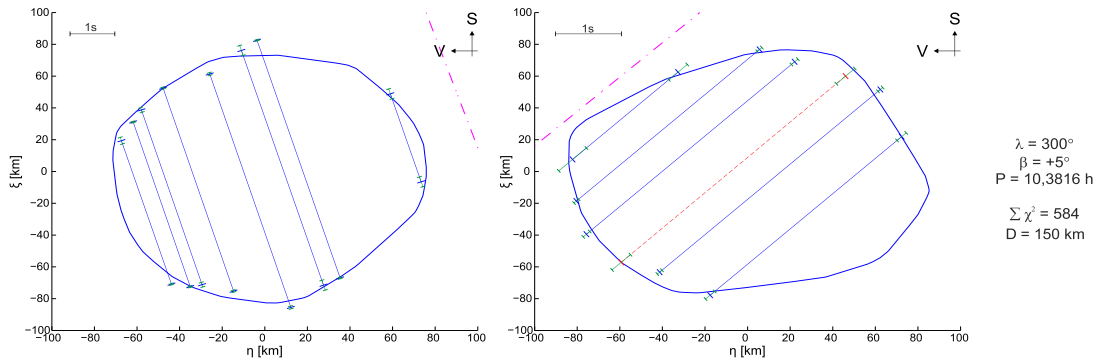
Obrázek 5.27: **(790) Pretoria** Porovnání pozorovaných křivek (modře) a modelovaných křivek (červeně) pro model 4. Vodorovná osa odpovídá jedné periodě vynesené ve fázi.



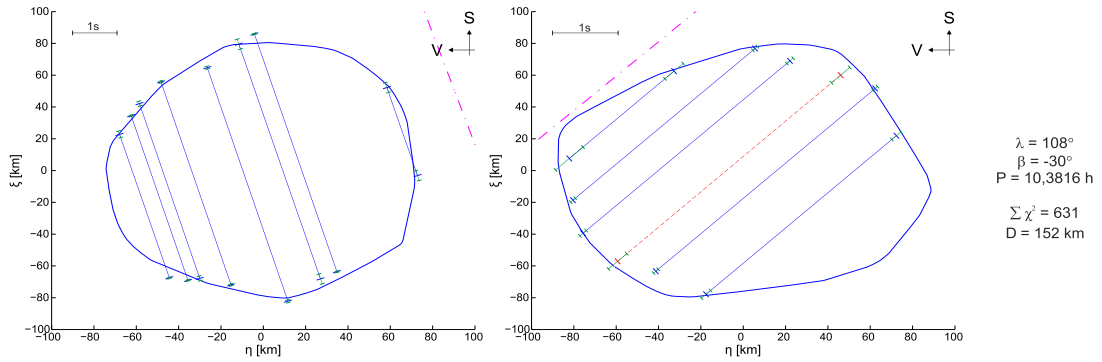
Model 1.



Model 2.



Model 3.



Model 4.

Obrázek 5.26: **(790) Pretoria** Výsledné fitování čtyř modelů planetky a jejích dvou zá-
 krytů. Levý sloupec ukazuje fitování zákrytu ze dne 19. 7. 2009, pravý ze dne 29. 10. 2005.
 Měřítka v grafech je pro všechny stejné. Vizuální pozorování jsou znázorněna červeně, fo-
 toelektrická modře, negativní magentou. Zeleně jsou znázorněny chybové intervaly udá-
 vané pozorovateli.

5.8.4 (1366) Piccolo

Pro planetku (1366) Piccolo jsem našla jednoznačnou periodu a pro kterou následně vyšly dvě zrcadlící se řešení polohy pólů. Zákryt planetky je na obrázku 5.1e. Na zákrytu je zřejmý zvláštní, patrně chybný, posun vnitřních tětív. Ačkoliv je pravděpodobné, že některé z tětív jsou zaznamenány nepřesně, bylo zde pozorováno mnoho negativních pozorování, které jsou určující při dalším rozhodování o tvaru planetky. U tomto zákrytu bychom intuitivně neměli věřit posunům tětív, ale jejich délky by měly být věrohodné.

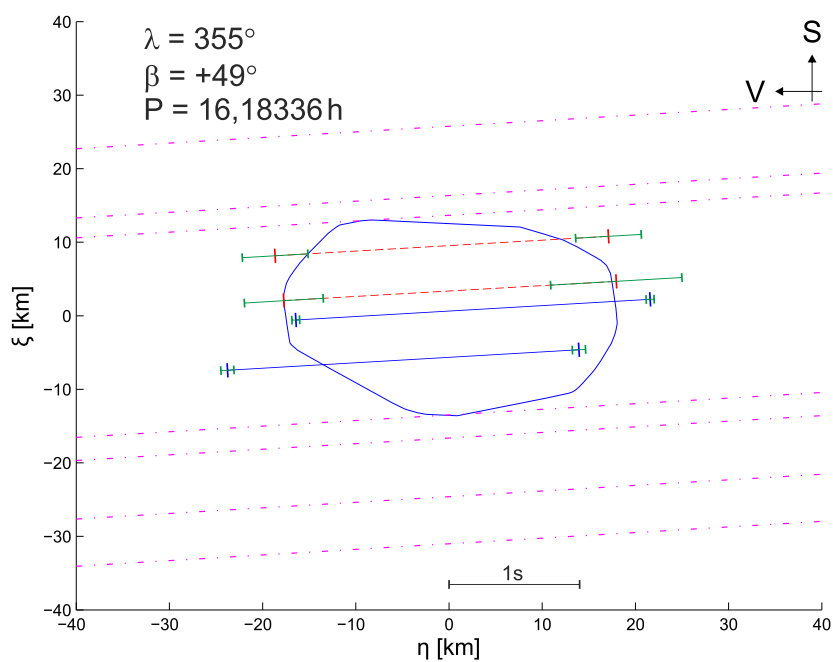
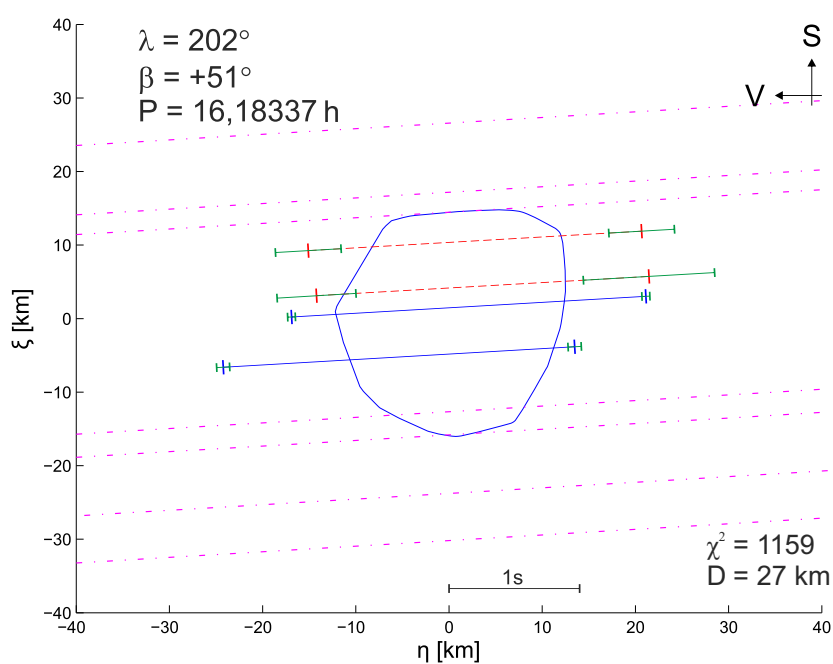
U vizuálních pozorování je častá nepřesnost v posunu tětív ve směru pohybu planetky. Protože v tomto případě byly hned dvě ze čtyř pozorovaných tětív sledovány vizuálně, rozhodla jsem se povolit posun vizuálně pozorovaných tětív s konstantní směrnici danou pohybem planetky. Fit by se takto měl zpřesnit. Pokud by byl posun nepřiměřeně veliký, je možné jej podle potřeby penalizovat vhodně zvoleným násobkem. V mém případě to nebylo třeba. Výsledky fitování jsou na obrázcích 5.28. Posun horní tětivy vyšel 3,6 km a spodní 4,1 km, přepočítáno na čas jde pouze o 0,25 s a 0,34 s. Je tedy vidět, že jde o posun v rámci chyby pozorování.

Hodnoty efektivních průměrů naškálovaných modelů jsou uvedeny na obrázcích 5.28. Z termálních měření družice IRAS [26] byl určen průměr planetky jako $D = (27,5 \pm 1,8)$ km, z družice AKARI $D = (26,92 \pm 1,03)$ km. Tyto hodnoty jsou sice shodné s modelem 1, ale tětivy zákrytu jasně napovídají větší velikosti planetky. U modelu 2 jsem vypočítala efektivní průměr planetky na $D = 31$ km. Neshoda s termálními měřeními zde může být způsobena „šišatostí“ planetky.

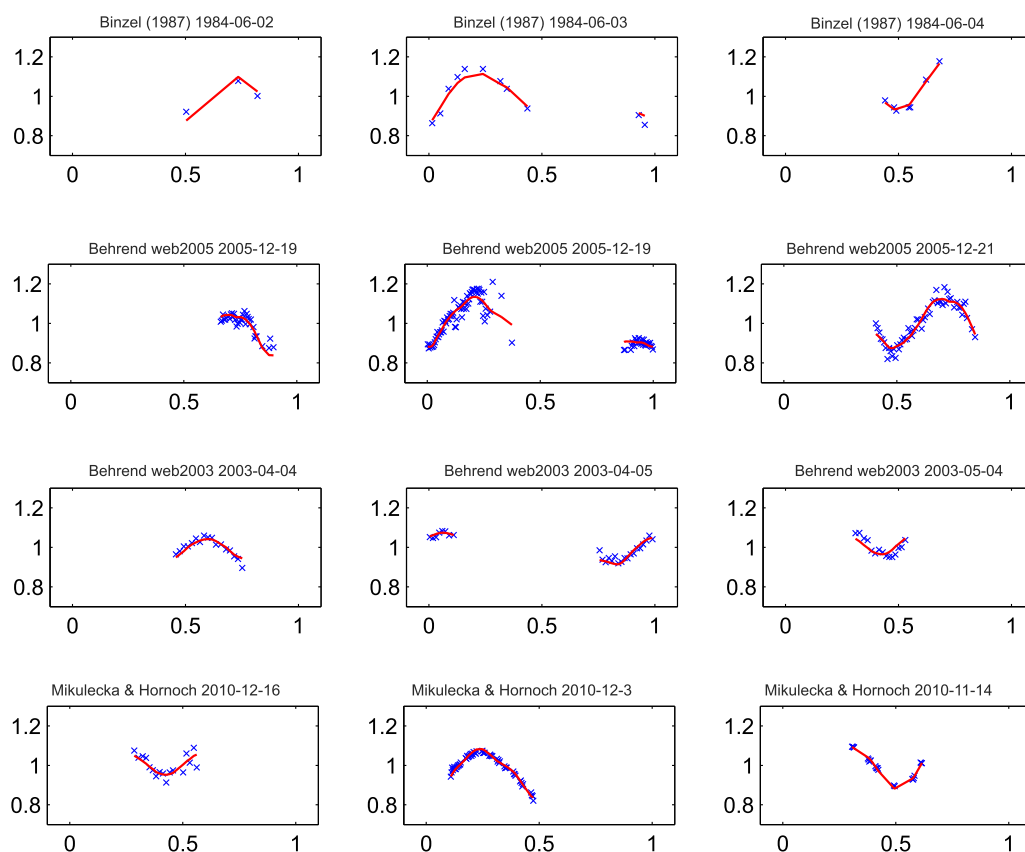
Fitování obou modelů na zákryt jednoznačně vylučují model 1. Negativní pozorování ohraničují velikost planetky ve svislém směru. Pokud podle těchto pozorování naškáluje model 1, délka pozorovaných tětív výrazně přesahuje model o několikanásobnou velikost chybových intervalů. Model 2 velmi dobře odpovídá délce tětív a zároveň nezasahuje do negativních pozorování.

Výsledný 3D tvar modelu 2 uvádím na obrázku 5.30. Porovnání reálných dat a modelovaných z obrázku 5.29 ukazuje, že model 2 vykresluje všechny světelné křivky věrně.

Byl nalezen jednoznačný model planetky (1366) Piccolo, jehož průměr určený z fitování na zákryt je $D = 31 \pm 3$ km. Chyba je zde pouze hrubým odhadem na základě změny kvality fitu zákrytu při změně průměru.



Obrázek 5.28: **(1366) Piccolo** Fitování modelů získaných pro planetku (1366) Piccolo na zákryt ze dne 28. 4. 2003. Měřítka v grafech na obrázcích je stejné. Škálovány byly také posuny vizuálně pozorovaných tětív ve/proti směru pohybu planetky. Vizuální pozorování jsou znázorněna červeně, fotoelektrická měření, negativní magentou. Zeleně jsou znázorněny chybové intervaly udávané pozorovateli.



Obrázek 5.29: **(1366) Piccolo** Porovnání pozorovaných křivek (modře) a modelovaných křivek (červeně) pro model 2. Vodorovná osa odpovídá jedné periodě vynesené ve fázi.

5.8.5 Porovnání velikostí

Termální měření podávají dobrou představu o velikosti asteroidů. Zanedbávají ale tvar planety a využívají dalších zjednodušení, viz kapitola 1.4. Kvalitní zákryty proto společně se znalostí tvaru asteroidu mohou podat možná méně přesný, ale zato důvěryhodnější odhad velikosti.

V následující tabulce 5.6 uvádím shrnující výsledky měření družice AKARI, IRAS, WISE a výsledky ze zákrytů pro preferující modely planetek z této práce. V tabulce jsou uvedeny efektivní průměry D v kilometrech.

Asteroid	IRAS	AKARI	WISE	tato práce
(334) Chicago	$158,55 \pm 8,9$	$167,21 \pm 2,11$	$175,100 \pm 12,788$	156–162
(510) Mabella	$57,44 \pm 2,8$	$54,71 \pm 0,81$	–	–
(790) Pretoria	$170,37 \pm 2,6$	$144,85 \pm 4,94$	–	146–154
(1366) Piccolo	$27,55 \pm 1,8$	$26,92 \pm 1,03$	–	31 ± 3

Tabulka 5.6: Shrnující porovnání ekvivalentních průměrů planetek měřených družicí IRAS [26], družicí AKARI [27] a družicí WISE [19]s výsledky této práce v kilometrech.

(1366) Piccolo



$$\lambda = 355^\circ$$

$$\beta = +49^\circ$$

$$P = 16,18336\text{h} \pm 0,00006\text{h}$$

Obrázek 5.30: **(1366) Piccolo** Tvar planetky ze tří různých pohledů, zleva: dva pohledy kolmo na rovník vzájemně otočené o 90° , pohled na pól. Jedná se o model 2.

Závěr

Shrnutí práce

V práci byly nejprve vybrány čtyři vhodné planety, u kterých se dala ukázat práce s fitováním modelů planetek získaných inverzí světelných křivek a jejich zákrytů. Tyto planety byly pozorovány téměř rok na ondřejovském 65 cm dalekohledu. Data byla zredukována a byly vytvořeny světelné křivky těchto planetek. Byla použita také dostupná data dalších pozorovatelů.

Pro planety bylo získáno několik možných tvarů metodou inverzí světelných křivek s pomocí programů Mikko Kaasaleinena [14] přepsaného do jazyka C Josefem Ďurechem. Byl napsán program, který tvar planety projektuje na fundamentální rovinu Země v libovolném čase a pro tento účel využívá efemerid získaných z online webové aplikace Miriade [45]. Vedle toho byl obdobným způsobem napsán program, který projektuje data z pozorování zákrytů.

Tyto výsledky byly porovnány třetím stěžejním programem této práce, který fituje konvexní obálku modelů projektovaných na fundamentální rovinu a data ze zákrytů. Program minimalizuje vzdálenosti konvexní obálky a zákrytu změnou parametrů posunutí zákrytu a škálování velikosti konvexní obálky modelu.

Byl získán jednoznačný tvar pro planetku (1366) Piccolo a čtyři možné tvary pro planetku (510) Mabella. U asteroidů (334) Chicago a (790) Pretoria byly některé z možných tvarů vyloučeny jako nevyhovující. Pro všechny planety byly zpřesněny jejich periody a získány reálné hodnoty velikostí, které jsou relevantnější, než data získaná z termálních měření.

V práci jsem využila zákrytů jako prostředku, který může dopomoci výběru správného modelu planety z tvarů, které jsou výsledkem modelování metodou inverze světelných křivek, a také přímému určení velikosti planetek. Nově jsem v tomto problému získávala efemeridy planetek online webovým prostředím Miriade [45]. Při psaní programů jsem v aplikaci Miriade objevila dvě chyby, týkající se převodu jednotek a přesnosti dat, které byly na základě této práce opraveny.

Shrnutí výsledků

(334) Chicago

Pro planetku nebyla nalezena jednoznačná perioda. Ze čtyř vybraných period s nejnižším χ^2 jsem získala osm modelů a na základě jejich porovnání se zákrytem jsem vyloučila několik tvarů – a tím i možných period. Z výsledné tabulky 5.7 je zřejmé, že byl určen pól planety blízký $\lambda = 180^\circ$ a $\beta = 0^\circ$ a jeho symetrické řešení. Ekvivalentní průměr

modelů $D = 159 \pm 4$ km odpovídá velikosti udávané družicí IRAS. V tabulce 5.7 shrnuji data pro získané modely, preferované modely jsou zvýrazněny tučně. V tabulce uvádím χ^2 vypočítané z fitování modelu, při kterém byly používány chyby uvedené pozorovateli.

Perioda [h]	λ [°]	β [°]	RMS	χ^2_{inverze}	χ^2_{zakryt}	Průměr [km]	Model
7,3582	192	2	0,0495	1,2498	1041	161	1
	11	-7	0,0499	1,2700	2 290	156	2
7,3591	196	-51	0,0490	1,2262	1861	169	3
	12	-58	0,0494	1,2433	10767	155	4
7,3601	191	43	0,0504	1,2940	8 501	148	5
	13	40	0,0504	1,2930	910	186	6
7,3609	190	1	0,0523	1,3974	2 013	158	7
	8	-24	0,0533	1,4493	5 955	148	8

Tabulka 5.7: **(334) Chicago** Tabulka výsledných modelů, získaných programem CONVEXINV. Preferované modely jsou zvýrazněny tučně.

(510) Mabella

Pro planetku jsem získala jednoznačnou periodu $P = (19,43039 \pm 0,00007)$ h a pro ni čtyři možná řešení pólů, které vypisuji v následující tabulce 5.8. Model se nepodařilo velikostně škálovat kvůli špatně pokrytému zákrytu. Výsledné hodnoty χ^2 fitu jsou určeny z konstantního ekvivalentního průměru planetky uvedené družicí IRAS $D = 57,4$ km. Nejlépe vyhovující se zdá být model 2, nelze to však říci jednoznačně.

Perioda [h]	λ [°]	β [°]	RMS	χ^2_{inverze}	χ^2_{zakryt}	Průměr [km]	Model
19,4304	282	-48	0,0144	0,0646	1027	57,4	1
	112	-78	0,0147	0,0679	423	57,4	2
	28	-72	0,0145	0,0656	645	57,4	3
	228	-50	0,0145	0,0660	1102	57,4	4

Tabulka 5.8: **(510) Mabella** Tabulka výsledných modelů, získaných programem CONVEXINV. Preferované modely jsou v tomto případě všechny.

(790) Pretoria

Pro planetku nebyla nalezena jednoznačná perioda. Pro vybrané dvě hodnoty periody s nejnižším χ^2 jsem našla čtyři modely. Na základě obou zákrytů, které byly pro planetku doposud pozorovány, jsem vyloučila model 2 jako špatně korespondující s tvarem zákrytu. Preferované modely jsou v tabulce 5.9 zvýrazněny tučně a udávané χ^2_{fit} je hodnota

z výsledného fitování z obou zákrytů současně. Z tabulky je vidět, že se podařilo nalézt dva možné póly – model 1 a model 4 mají v rámci chyby pól stejný. Upřesnila jsem velikost planety na $D = (150 \pm 3)$ km. Vzhledem ke kvalitě obou pozorovaných zákrytů je tato hodnota relevantnější, než hodnota 170 km udávaná družicí IRAS a potvrzuje pozorování družice AKARI.

Perioda [h]	λ [°]	β [°]	RMS	χ^2_{inverze}	χ^2_{zakryt}	Průměr [km]	Model
10,3838	108	−23	0,0103	0,1447	785	149	1
	274	20	0,0114	0,1766	1301	149	2
10,3816	300	5	0,0094	0,1197	584	150	3
	108	−30	0,0093	0,1188	631	152	4

Tabulka 5.9: **(790) Pretoria** Tabulka výsledných modelů, získaných programem CONVEXINV. Preferované modely jsou zvýrazněny tučně.

(1366) Piccolo

Pro planetku jsem určila jednoznačnou periodu $P = (16,18337 \pm 0,00006)$ h a k ní našla dva modely s různým natočením pólu. Na základě zákrytu jsem vybrala jednoznačné řešení tvaru pro tuto planetku, jedná se o model 2. Výsledné hodnoty rotačních parametrů ukazuje tabulka 5.10. Průměr modelu $D = (31 \pm 3)$ km se zdá být shodný v rámci chyby s výsledky družice IRAS.

Perioda [h]	λ [°]	β [°]	RMS	χ^2_{inverze}	χ^2_{zakryt}	Průměr [km]	Model
16,1834	355	49	0,0253	0,2364	1159	27	1
	202	51	0,0259	0,246	328	31	2

Tabulka 5.10: **(1366) Piccolo** Tabulka výsledných modelů, získaných programem CONVEXINV. Jednoznačně určený model je zvýrazněn tučně.

Příloha CD

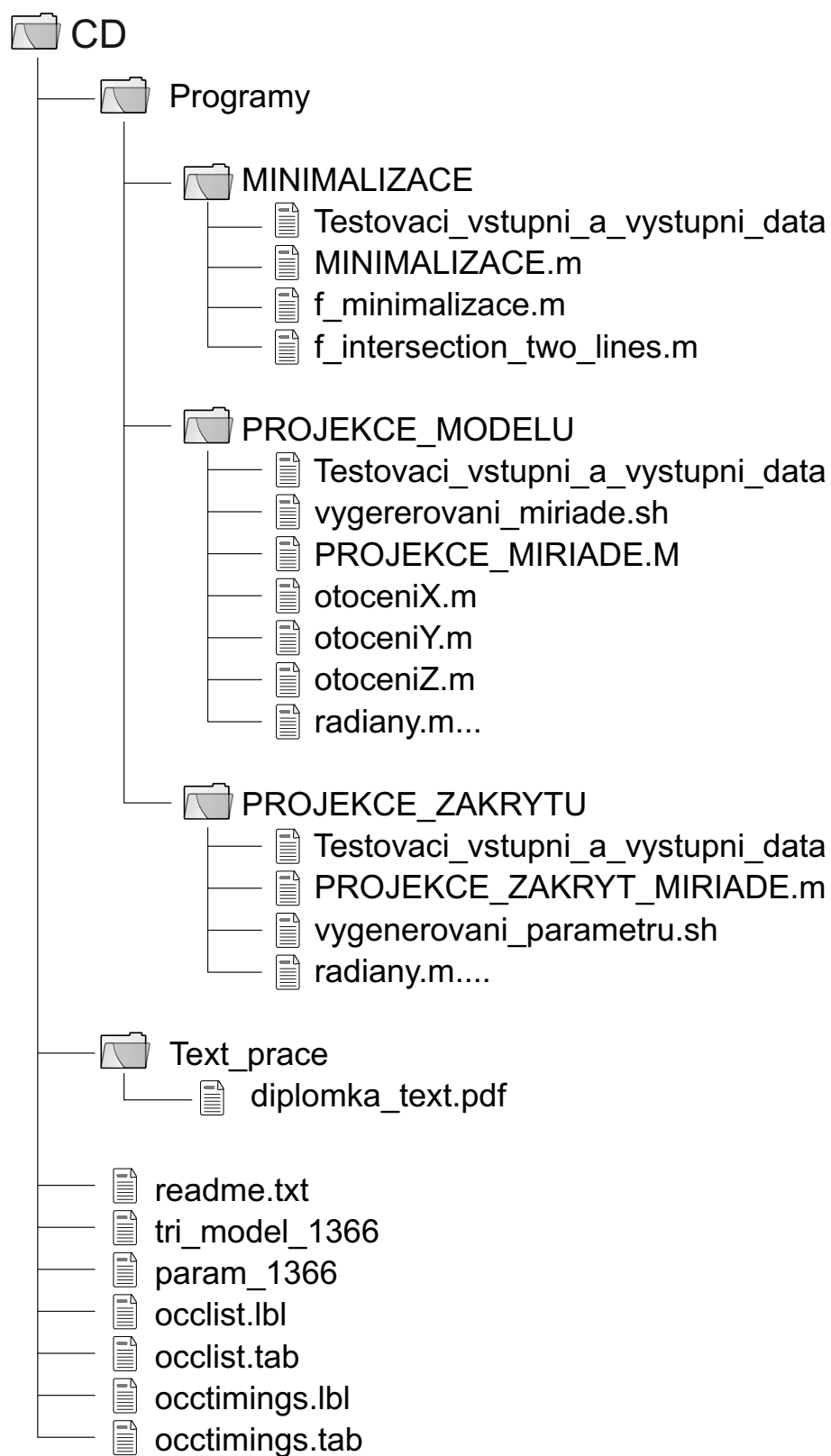
Příložené médium obsahuje text práce ve formátu PDF a stěžejní programy, které jsem pro práci napsala.

Programy jsou odzkoušené na verzi LINUX 2.6.32 a verzi MATLAB 7.12.0 . Programy jsou plně funkční pro všechny čtyři vybrané planety, při potížích nebo nefunkčnostech programů mě kontaktujte. Pro širší využití je možné programy upravit pro snazší užívání.

Následující obrázek 5.31 ilustruje obsah příloženého média. Před spuštěním programů čtete soubor `readme.txt`.

Program 1: Ukázkový program `VYGENEROVANI_MIRIADE.SH` který ukazuje práci s webovým portálem Miriade.

```
1 astnum=1366;
2 JD=2452757.71213368047; #pro pripad zakrytu lze vzit naprikad ze souboru
   delta_v_astnum v PROJEKCE_ZAKRYTU, kde je stredni cas vseh pozorovani
4 wget 'http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/ephemcc_query.php?--name=a:${astnum}
   }' &--type=aster&--ep='${JD}' &--mime=text&--output=--jd' ;
5 awk 'NR==14' ephemcc_query.php\?--name=a:${astnum}&--type=aster&--ep=${
   JD}&--mime=text&--output=--jd > pozice
6 rm ephemcc_query.php\?--name=a:${astnum}&--type=aster&--ep=${JD}&--
   mime=text&--output=--jd
```



Obrázek 5.31: Soubory obsažené v příloženém médiu.

Literatura

- [1] Bertotti, B., Farinella, P., Vokrouhlický, D. (2003). *Physics of the Solar System*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. ISBN 1402014287.
- [2] Binzel, R. P. (1987) A photoelectric survey of 130 asteroids. *Icarus*, vol. 72, p. 135–208.
- [3] Bowel, E., Hapke, B., Dominigue, D., Lumme, K., Peltoniemi, J., a Harris, A. W. (1989). Application of photometric models to asteroids. In Binzel, R. P., Gehrels, T., a Matthews, M. S., editoři, *Asteroids II*, p. 524–556.
- [4] Cellino, A., Zappala, V., di Martino, M., Farinella, P., a Paolicchi, P. (1987). Flattening, pole and albedo features of 4 Vesta from photometric data. *Icarus*, vol. 70, p. 46–565.
- [5] Dennis, J. E., Schnabel Jr. a R. B. (1983). Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. *Prentice-Hall Series in Computational Mathematics*.
- [6] Dunham, D. W., Dunham, J. B., Binzel, R. P., Evans, D. S., Freuh, M., Henry, G. W. (1990) The size and shape of (2) Pallas from the 1983 occultation of 1 Vulpeculae. *Astronomical Journal* (ISSN 0004-6256), vol. 99, May 1990, p. 1636–1662.
- [7] Ďurech, J., Kaasalainen, M., Herald, D., Dunham, D., Timerson, B., Hanuš, J., Frappa, E., Talbot, J., Hayamizu, T., Warner, B., D., Pilcher, F., Galád, A. (2011) Combining asteroid models derived by lightcurve inversion with asteroidal occultation silhouettes, *Icarus*, vol. 214, Issue 2, p. 652–670.
- [8] Ďurech, J. a Sidorin, V. a Kaasalainen, M. (2010) DAMIT: a database of asteroid models. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 513, p. A46.
- [9] Fowler, J. W. a Chillemi, J. R. (1992) IRAS asteroid data processing. *The IRAS Minor Planet Survey*, Phillips Laboratory, Hanscom Air Force Base, MA, p.17
- [10] Hapke, B. (1982) Effects of layering on reflectance and absorption band contrast. *NASA Technical Memo*, NASA TM-85127, edit. Holt, H. E., p. 323.
- [11] Harris, A. W. a Young, J. W. (1989) Asteroid lightcurve observations from 1979–1981. *Icarus*, vol. 81, p. 314–364.

- [12] Holsapple, K. (2005) Asteroid spin data: no evidence of rubble-pile structures. *36th Lunar and Planetary Science Conference*. League City, Texas.
- [13] Kaasalainen, M. a Lamberg, L. (2006). Inverse problems of generalized projection operators. *Inverse Problems*, vol. 22, p. 749–769.
- [14] Kaasalainen, M., Torppa, J. (2001). Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion. I. Shape Determination. *Icarus*, vol. 153, p. 24–36.
- [15] Kaasalainen, M., Troppa, J., Muinonen, K. (2001). Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion. II. The Complete Inverse Problem. *Icarus*, vol. 153, p. 37–51.
- [16] Lagerros, J. S. V. (1997). Thermal physics of asteroids. III. Irregular shapes and albedo variegations. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 325, p. 1226–1236.
- [17] Magnusson, P. and 46 colleagues (1996) Photometric observations and modeling of asteroid 1620 Geographos. *Icarus*, vol. 123, p. 227–244.
- [18] Magnusson P., Barucci M. A., Drummond J., Lumme K., Ostro S. J., Surdej J., Taylor R. C., and Zappala V. (1989) Determination of pole orientations and shapes of asteroids. *Asteroids II* (R. P. Binzel at al., eds.), Univ. of Arizona, Tucson, p. 67–97.
- [19] Masiero, J. R., Mainzer, A. K., Grav, T., Bauer, J. M., Cutri, R. M., Dailey, J., Eisenhardt, P. R. M., McMillan, R. S., Spahr, T. B., Skrutskie, M. F., Tholen, D., Walker, R. G., Wright, E. L., DeBaun, E., Elsbury, D., Gautier, IV, T., Gomillion, S., Wilkins, A. (2011) Main Belt Asteroids with WISE/NEOWISE. I. Preliminary Albedos and Diameters. *The Astrophysical Journal*, vol. 741, p. 68.
- [20] Mikulecká, B. (2010), *Fotometrické studium asteroidů*, Masarykova univerzita, Brno.
- [21] Muinonen, K., Piironen, J., Shkuratov, Y. G., Ovcharenko, A., a Clark, B. E. (2002). Asteroid Photometric and Polarimetric Phase Effects. *Asteroids III*, p. 123–138.
- [22] Piironen, J., Bowell, E., Erikson, A., Magnusson, P. (1994). Photometry of eleven asteroids at small phase angles. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, vol. 106, p. 587–595.
- [23] Pravec, P., Hudec, R., Soldán, J., Sommer, M., Schenkl, K. H. 1994, *Experimental Astronomy*, vol. 5, Issue 3-4, p. 375–388.
- [24] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. , a Vetterling, W. T. (1994). Numerical Recipes in Fortran. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.
- [25] Schober, H. J. a Stanzel, R. (1979) On the light variations of the C-type asteroids 140 Siwa and 790 Pretoria. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, vol. 38, 265–268.
- [26] Tedesco, E.F., P.V. Noah, M. Noah, and S.D. Price. (2004). IRAS Minor Planet Survey. IRAS-A-FPA-3-RDR-IMPS-V6.0. *NASA Planetary Data System*.

- [27] Usui F., Kuroda D., Mueller T.G., Hasegawa S., Ishiguro M., Ootsubo T., Ishihara D., Kataza H., Takita S., Oyabu S., Ueno M., Matsuhara H., Onaka T. (2011) The Asteroid catalog using AKARI (version 1) , *Publ. Astron. Soc. Jap.*, vol. 63, p. 1117–1138.
- [28] Usui, F., Kuroda, D. a Müller, T. G., Hasegawa, S., Ishiguro, M., Ootsubo, T., Ishihara, D., Kataza, H., Takita, S., Oyabu, S., Ueno, M., Matsuhara, H., Onaka, T. (2011) AKARI/IRC Mid-Infrared Asteroid Survey, *Earth and Planetary Astrophysics*, vol. 63, p. 1117–1138.
- [29] Warner, B. D. (2005) Asteroid lightcurve analysis at the Palmer Divide Observatory - winter 2004-2005. *Minor Planet Bulletin*, vol. 32, p. 54–58.
- [30] Warner, B. D. (2010) Asteroid Lightcurve Analysis at the Palmer Divide Observatory: 2009 June-September. *Minor Planet Bulletin*, vol. 37, p. 24–27.
- [31] Weidenschilling, S. J., Chapman, C. R., Davis, D. R., Greenberg, R., Levy, D. H. (1990). Photometric geodesy of main-belt asteroids. III - Additional lightcurves. *Icarus*, vol. 86, p. 402–447.
- [32] Zappala, V., di Martino, M., Cellino, A., de Sanctis, G. a Farinella, P. (1989) Rotational properties of outer belt asteroids. *Icarus*, vol. 82, p. 354–368.
- [33] *PDS Asteroid/Dust Archive Asteroid Data Sets*. [online]. Dunham, D.W., Herald, D., Frappa, E., Hayamizu, T., Talbot, J., and Timerson, B., Asteroid Occultations V10.0. EAR-A-3-RDR-OCCULTATIONS-V10.0. NASA Planetary Data System, 2012 [cit. 2013-02-18]. Dostupné z: <http://sbn.psi.edu/pds/resource/occ.html>.
- [34] *Asteroidal Occultations Europe, North Africa and Middle East* Asteroidal Occultations. Jan Mánek, Luděk Vašta [online]. 31.3.2013 [cit. 2013-04-02]. Dostupné z: <http://mpocc.astro.cz/>.
- [35] *Asteroid Occultation Updates*. Asteroid Occultation Predictions. Steve Preston [online]. 2013-03-31 [cit. 2013-04-02]. Dostupné z: <http://www.asteroidoccultation.com>.
- [36] *Asteroid Photometric Catalogue*. Asteroid Photometric Catalogue. Pieniluoma, Tuomo. [online]. 2011-02-31 [cit. 2013-02-16]. Dostupné z: <http://asteroid.astro.helsinki.fi/apc>.
- [37] Behrend, R. (2005) Observatoire de Geneve web site, [online] Dostupné z: http://obswww.unige.ch/~behrend/page_cou.html [cit. 2013-02-16]
- [38] *euraster.net - European Asteroidal Occultations* Eric Frappa [online]. 2013-03-31 [cit. 2013-04-02]. Dostupné z: <http://www.euraster.net/>.
- [39] *JPL Solar System Dynamics HORIZONS* Web-Interface. [online]. 2011-02-28 [cit. 2013-04-01]. Dostupné z: <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi> .

- [40] *JPL Solar System Dynamics HORIZONS Web-Interface*. [online]. 2011-02-28 [cit. 2013-02-16]. Dostupné z:
http://www.psi.edu/pds/asteroid/EAR_A_5_DDR_DERIVED_LIGHTCURVE_V10_0/data/lc_summary.tab.
- [41] *IAU Minor Planet Center*. IAU Minor Planet Center. Dr. Timothy B. Spahr [online]. 2013-04-31 [cit. 2013-04-01]. Dostupné z:
<http://www.minorplanetcenter.net>.
- [42] *International Occultation Timing Association European Section IOTA/ES e.V.* Bartold-Knaust-Str. 8 D-30459 Hannover Germany. [online]. 2013-04-31 [cit. 2013-04-01]. Dostupné z: <http://www.iota-es.de/>.
- [43] *Institute of Space and Astronautical Science*. Japan Aerospace Exploration Agency. [online]. [cit. 2013-03-21]. Dostupné z:
<http://www.isas.jaxa.jp/e/about/what/index.shtml>.
- [44] *Lunar-occultations.com* [online]. © 1995 [cit. 2013-02-16]. Dostupné z:
<http://www.lunar-occultations.com/occult4/asteroidobservations.zip>.
- [45] *Miriade - VO Solar System Portal* [online]. 2012-12-02 [cit. 2013-02-16]. Dostupné z: <http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?ephemcc>.
- [46] *RASNZ Occultation Section - Planetary Occultation Results* Graham Blow [online]. 2013-04-12 [cit. 2013-04-12]. Dostupné z:
<http://occsec.wellington.net.nz/planet/plnreslt.htm>.
- [47] *The Asteroid Lightcurve Database (LCDB)*. MinorPlanet.Info Gateway Lightcurve Database. Brian D. Warner [online]. 2013-04-31 [cit. 2013-04-01]. Dostupné z:
<http://www.minorplanet.info/lightcurvedatabase.html>.
- [48] USNO: US Naval Observatory, photometric data available at AstDyS, <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>

