

Masarykova univerzita v Brně  
Přírodovědecká fakulta

---

# Modelování spekter neradiálně pulzujících horkých hvězd

Diplomová práce

Vedoucí práce:  
RNDr. Pavel Koubský, CSc.

Martin Netolický

Brno 2004

Rád bych poděkoval lidem, kteří mi pomohli v řešení problémů spojených s diplomovou prací. V první řadě vedoucímu diplomové práce RNDr. Pavlovi Koubskému, CSc. za užitečné rady a odborné vedení při práci, dále Dr. Conny Aertsové za konzultace ohledně momentové metody a poskytnutí programu na výpočet diskriminantu, Dr. Thomasi Riviniusovi za poskytnutí profilů spektrálních čar pro vlastní modelování spekter, Dr. Richardu Townsendovi za užitečné tipy při psaní knihoven k programům BRUCE/KYLIE, prof. Jørgenovi Christensen-Dalsgaardovi za laskavé poskytnutí a svolení k použití některých obrázků a jazykové poradně Ústavu pro jazyk český Akademie věd ČR za radu, jak správně vyskládat jména v tomto poděkování.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

V Brně, dne 23. 5. 2004

.....

**Abstract**

Netolický, M: Modelling spectra of nonradial pulsating hot stars. Diploma thesis. Brno, 2004.

Diploma thesis is oriented to problems of modelling nonradial pulsating stars. It includes description of application software BRUCE/KYLIE written by Dr. Richard Townsend. Spectra computed by this software are proved by moment method for identification of pulsating modes.

**Abstrakt**

Netolický, M: Modelování spekter neradiálně pulzujících horkých hvězd. Diplomová práce. Brno, 2004.

Diplomová práce se zabývá problematikou modelování spekter neradiálně pulzujících hvězd. Je zde popsán způsob aplikace programového vybavení BRUCE/KYLIE Dr. Richarda Townsenda. Na syntetických spektrech je vyzkoušena momentová metoda identifikace pulzačních módů.

Jsou dva důvody, proč studovat hvězdné pulzace: prvním je pochopení proč a jak určité typy hvězd pulzují, druhým je poznání obecných vlastností těchto (a pravděpodobně i jiných) typů hvězd. (Dalsgaard, 2003)

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Spektrální čáry</b>	<b>8</b>
2.1	Rozšíření spektrálních čar . . . . .	8
2.2	Modely hvězdných atmosfér . . . . .	11
2.3	Popis hvězdných atmosfér . . . . .	12
2.4	Konstrukce modelu atmosféry . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Pulzace ve hvězdách</b>	<b>16</b>
3.1	Neradiální pulzace . . . . .	16
3.2	Popis neradiálních pulzací . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Identifikace módů pulzací</b>	<b>22</b>
4.1	Identifikace módu z fotometrických dat . . . . .	22
4.2	Identifikace módu ze spektroskopických dat . . . . .	23
4.2.1	Modelování profilů spektrální čáry . . . . .	23
4.2.2	Dopplerovo zobrazení . . . . .	23
4.2.3	Momentová metoda . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Modelování profilů spektrálních čar</b>	<b>27</b>
5.1	BRUCE/KYLIE . . . . .	27
5.2	Modelování profilů spektrálních čar nepulzujících hvězd . . . . .	29
5.3	Modelování spektrálních čar neradiálně pulzujících hvězd . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Identifikace módů neradiálně pulzujících hvězd pomocí momentové metody</b>	<b>38</b>
6.1	Výpočet momentů spektrálních čar . . . . .	38
6.2	Aplikace momentové metody na syntetická spektra . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Hvězda 6 Cep</b>	<b>46</b>
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>49</b>
<b>9</b>	<b>Reference</b>	<b>50</b>

# 1 Úvod

Výzkum horkých hvězd má v České republice (resp. v Československu) dlouholetou tradici, již několik desítek let patří k hlavním cílům stelární astronomie v Astronomickém ústavu Akademie věd České republiky v Ondřejově. Tato diplomová práce se zabývá zajímavým fenoménem pozorovaným u některých horkých hvězd: neradiálními pulzacemi a jejich spektroskopickými projevy.

Základní charakteristiky spektrálních čar a modelů hvězdných atmosfér nezbytných pro modelování profilů spektrálních čar popisuje druhá kapitola. V následující kapitole jsou uvedeny základní charakteristiky neradiálních pulzací a jejich matematický popis. V kapitole 4 následuje přehled metod užívaných k indentifikaci pulzačního módu. Těžiště práce se nachází v kapitole 5, kde je popsán programový balík BRUCE/KYLIE Dr. Richarda Townsenda. V šesté kapitole je aplikována jedna z metod identifikace pulzačních módů, momentová metoda, na spektra generovaná programem BRUCE/KYLIE. Sedmá kapitola stručně popisuje současný stav analýzy spekter 6 Cephei. Poslední kapitola potom stručně shrnuje získané závěry.

V této práci se snažím používat standardní soustavu jednotek SI. Programy BRUCE/KYLIE ovšem používají starší, v astrofyzice nicméně stále používanou soustavu jednotek CGS, proto jsou na některých místech použity nestandardní jednotky (vlnová délka  $\lambda$  — Å, gravitační zrychlení  $\log g$  — cgs dex).

## 2 Spektrální čáry

Intenzita záření, které k nám přichází od hvězd, je závislá na vlnové délce. Rozlišujeme dvě základní závislosti intenzity na vlnové délce: tzv. kontinuum a spektrální čáry. Kontinuem rozumíme pomalé změny intenzity s vlnovou délkou, které se projevují po celém intervalu vlnových délek, spektrální čarou naopak rychlou změnu intenzity, projevující se ovšem jen v řádu několika nanometrů. Zatímco kontinuum vzniká zejména při volně-volných přechodech, spektrální čáry jsou zapříčiněny vázaně-vázanými přechody.

Velmi často je užitečné napozorované spektrum upravit tak, aby v oblastech mimo spektrální čáry byla intenzita záření konstantní. Tomuto procesu se říká rektifikace spektra a provádí se podle vztahu

$$I_{\text{rect}}(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{I_{\text{kont}}(\lambda)}, \quad (1)$$

kde  $I_{\text{rect}}(\lambda)$  je intenzita rektifikovaného spektra na vlnové délce  $\lambda$ ,  $I(\lambda)$ , resp.  $I_{\text{kont}}(\lambda)$  je intenzita pozorovaného spektra, resp. intenzita kontinua na stejné vlnové délce  $\lambda$ . Intenzita rektifikovaného spektra je v místech mimo spektrální čáru rovna jedné, proto se takto upravené spektrum hodí pro analýzu spektrálních čar. Spektrální čáry, u kterých je intenzita rektifikovaného spektra menší než 1, označujeme jako absorpční spektrální čáry, spektrální čáry, u kterých je intenzita rektifikovaného spektra větší než jedna, jako emisní spektrální čáry.

V této práci se budu zabývat spektrálními projevy neradiálních pulzací. Ty lze pozorovat na periodických změnách profilů spektrálních čar.

### 2.1 Rozšíření spektrálních čar

Spektrální čáry objevil v roce 1802 William Wollaston. Ten si jako první všiml tmavých míst ve slunečním spektru. Dnes jsou známy jako Fraunhoferovy čáry po Josephu Fraunhoferovi, který v roce 1814 tyto čáry znovuobjevil a označil je písmeny.

Od té doby prodělala přístrojová technika v oblasti spektroskopie velký rozvoj a prohloubilo se i poznání procesů, které formují hvězdné spektrum, takže dnes jsme schopni vysvětlit nejen vlnové délky spektrálních čar, ale i jejich hloubku, šířku, profil, jako i závislost parametrů na prostředí, ve kterém vznikají.

Spektrální čáry vznikají ve hvězdných atmosférách při přechodech elektronů mezi různými hladinami v atomu. Tyto procesy označujeme jako vázaně-vázané procesy. V rámci atomové fyziky se zavádí tzv. Einsteinův koeficient  $A_{ul}$ , který udává pravděpodobnost přechodu elektronu z hladiny  $u$  na hladinu  $l$  za jednotku času. Tento proces doprovází emise nebo absorpce fotonu o energii, která odpovídá rozdílu energií hladin  $u$  a  $l$ . Koeficienty  $A_{ul}$  pro možné přechody určují tzv. útlumovou konstantu  $\Gamma^{\text{rad}}$

$$\Gamma^{\text{rad}} = \sum A_{ul}, \quad (2)$$

kde index  $^{\text{rad}}$  označuje, že jde o zářivé procesy. V případě dvouhladinového atomu se vztah (2) redukuje na

$$\Gamma^{\text{rad}} = A_{ul}. \quad (3)$$



Profil spektrální čáry vzniklé tímto procesem popisuje tzv. Lorentzův profil

$$\phi_L(\nu - \nu_0) = \frac{\Gamma}{4\pi^2[(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\Gamma}{4\pi})^2]}, \quad (4)$$

kde  $\nu_0$  je frekvence středu čáry,  $\Gamma = \Gamma^{\text{rad}}$  útlumová konstanta definovaná vztahem (2).

Další vliv, který určuje profil spektrální čáry je tzv. srážkové rozšíření, často též uváděné jako rozšíření vlivem tlaku. Je důsledkem přítomnosti ostatních částic v okolí atomu, ve kterém dochází k vázaně-vázanému přechodu. Důsledky tohoto působení je možné popsat dvěma způsoby. Prvním je tzv. impaktní aproximace, která předpokládá, že hladiny, mezi kterými dochází k přechodu, jsou ovlivněny pouze na velice krátkou dobu. V tom případě je možné popsat toto rozšíření pomocí útlumové konstanty  $\Gamma^{\text{col}}$  (kde index  $^{\text{col}}$  označuje srážkové (kolizní) procesy) a popis profilu je formálně shodný s popisem přirozeného rozšíření, popsaného rovnicí (4). V tomto případě se útlumová konstanta  $\Gamma$  skládá ze dvou částí: zářivé  $\Gamma^{\text{rad}}$  a srážkové  $\Gamma^{\text{col}}$ . Za předpokladu, že tyto procesy jsou nezávislé, je útlumová konstanta součtem obou příspěvků

$$\Gamma = \Gamma^{\text{rad}} + \Gamma^{\text{col}}. \quad (5)$$

Tento popis je možné aplikovat např. na volné elektrony, jejich rychlost je velká nebo na atomy neutrálního vodíku H I, jejich působení probíhá pouze na malou vzdálenost.

Druhým používaným popisem srážkového rozšíření je kvazistatická aproximace, která předpokládá, že sousední částice jsou téměř v klidu vůči atomu, ve kterém dochází k vázaně-vázanému přechodu. Pro výpočet je v tomto případě nutný statistický popis prostředí, ve kterém se atom nachází. Velmi často se problém zjednodušuje na jedinou interakci s částicí, která se nachází nejbliž. Výsledný profil se nazývá Holtsmarkův, ve svém středu ostře klesá a křídla tohoto profilu spektrální čáry jsou úměrná  $\sim \nu^{-5/2}$  (zatímco u Lorentzova profilu (4) je tato závislost  $\sim \nu^{-2}$ ).

Srážkové procesy jsou klasifikovány podle typu interakce, kterou je možné kvalifikovat vztahem

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{C_n}{r^n}, \quad (6)$$

kde  $C_n$  je konstanta odpovídající dané interakci,  $r$  je vzdálenost interagujících částic při největším přiblížení a  $n$  koeficient, udávající na jaké mocnině vzdálenosti nejbližší vzdálenosti částic interakce závisí. Nejvýznamnějšími interakcemi jsou lineární Starkův efekt pro  $n = 2$ , kvadratický Starkův efekt pro  $n = 4$  nebo van der Waalovo rozšíření, kde  $n = 6$ .

Dalším velice důležitým jevem, který má vliv na profil spektrální čáry, je rozšíření vlivem Dopplerova efektu. Tento jev popisuje vztah mezi změnou frekvence záření a radiální rychlostí zdroje vzhledem k pozorovateli. V nerelativistickém přiblížení, kdy  $v \ll c$  je tento efekt popsán vztahem

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}, \quad (7)$$

kde  $\nu$ , resp.  $\lambda$  je frekvence, resp. vlnová délka vyzářeného fotonu,  $\Delta\nu$ , resp.  $\Delta\lambda$  rozdíl frekvencí, resp. vlnových délek vyzářeného a pozorovaného fotonu,  $v$  radiální složka rychlosti zdroje světla vůči pozorovateli a  $c$  rychlost světla. Záření z přibližujícího se

zdroje je detekované s větší frekvencí (menší vlnovou délkou) než bylo vyzářeno a naopak, záření ze zdroje, který se od pozorovatele vzdaluje je detekováno s menší frekvencí (delší vlnovou délkou).

Chaotické pohyby částic, které jsou přítomny u všech těles, jejichž teplota je větší než 0 K, způsobují teplotní rozšíření spektrálních čar. Rozdělení rychlostí částic vlivem tepelného pohybu je popsáno Maxwellovým rozdělením

$$\frac{n(v)}{N} dv = \frac{1}{v_0 \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} dv, \quad (8)$$

kde  $n(v)$  je počet částic s rychlostí  $v$  v intervalu  $v, v + dv$  z celkového počtu  $N$  částic,  $v_0$  je nejpravděpodobnější rychlost, která závisí na teplotě  $T$  a hmotnosti  $m$  vztahem

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (9)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta.

Profil spektrální čáry pouze se započtením teplotního rozšíření je

$$\phi_T(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}, \quad (10)$$

kde  $\Delta\nu_D$  je tzv. Dopplerova šířka

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (11)$$

kde  $c$  je rychlost světla,  $k$  Boltzmannova konstanta,  $T$  termodynamická teplota a  $m$  hmotnost částice.

V případě, že lze použít impaktní aproximaci srážkového rozšíření a za předpokladu, že teplotní rozšíření jsou nezávislé procesy, je možné výsledný profil vyjádřit konvolucí profilů (4) a (10). Výsledný profil je tzv. Voigtův profil

$$\phi_V(\nu - \nu_0) = \frac{H(a, v)}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D}, \quad (12)$$

kde  $\Delta\nu_D$  je Doppelrova šířka definovaná vztahem (11) a  $H(a, v)$  je tzv. Voigtova funkce

$$H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v - y)^2 + a^2} dy, \quad (13)$$

kde parametry  $y, v$  a  $a$  jsou definovány následujícími vztahy

$$y = \frac{v - \nu_0}{c \nu_D}, \quad (14)$$

$$v = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}, \quad (15)$$

$$a = \frac{\Gamma}{4\pi \Delta\nu_D}, \quad (16)$$

kde  $\Delta\nu_D$  je Dopplerova šířka,  $\nu_0$  je frekvence záření a  $\Gamma$  útlumový koeficient.

U mnohých hvězd je nejsnáze pozorovatelné rozšíření vlivem rotace hvězdy. Je to opět projev Dopplerova efektu. Pokud si zavedeme kartézský souřadný systém  $(x, y, z)$  tak, že osa  $z$  bude spojnicí pozorovatele a středu hvězdy a osa  $x$  bude orientována paralelně se směrem rotace hvězdy a osa  $y$  bude na obě osy kolmá, potom je projekce rotační rychlosti do směru osy  $z$  rovna

$$v_z(x) = x\Omega \sin(i), \quad (17)$$

kde  $\Omega$  je úhlová rotační rychlost a  $i$  inklináční úhel. V pásu, kde  $x = 0$  je  $z$ -ová složka rotační rychlosti  $v_z$  také nulová, protože veškerý pohyb se děje kolmo na tuto osu. Naopak na okrajích hvězdy poblíž rovníku je velikost Dopplerova posunu největší

$$\Delta\lambda_R = \frac{\lambda}{c} R\Omega \sin(i), \quad (18)$$

kde  $R$  je poloměr hvězdy a  $\lambda$  vlnová délka záření. Vyjádření vlastního rotačního profilu spektrální čáry je dáno integrací přes viditelný povrch hvězdy. Tento krok je ale komplikován okrajovým ztemněním hvězdy, rotací a podobnými efekty, které deformují symetrii hvězdy.

Kromě těchto efektů ovlivňuje profil spektrálních čar i turbulentní pohyby atmosféry. Často, zejména u pomalu rotujících a chladných hvězd, se zavádí tzv. mikroturbulence, kterou se opraví vztah pro Dopplerovu šířku (11)

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{\text{micro}}^2}, \quad (19)$$

kde  $v_{\text{micro}}$  je velikost mikroturbulentní rychlosti, která se volí tak, aby popis hvězdy co nejlépe vyhovoval ostatním parametrům.

Výčet vlivů, které modelují profil spektrální čáry není úplný, dalšími efekty jsou například vliv různých izotopů, Zeemanovo rozšíření v magnetickém poli nebo vliv hyperjemné struktury atomů. Tyto efekty ovšem přesahují rámec této diplomové práce, proto se jimi dále nebudu zabývat.

## 2.2 Modely hvězdných atmosfér

Záření, které k nám přichází z hvězd, vzniká v hvězdných atmosférách. Ty sice tvoří pouze malou část objemu hvězdy, děje v nich jsou ale klíčové pro vysvětlení pozorovaných spekter. Protože se v hvězdných atmosférách (často velmi výrazně) mění fyzikální veličiny, které ovlivňují procesy formování čar i kontinua, bylo poznání hvězdných atmosfér důležitým úkolem astrofyziky. Výsledkem těchto snah je výpočet realistických modelů hvězdných atmosfér.

Základní veličinou pro studium hvězdných atmosfér je specifická intenzita záření  $I_\nu$ . Je definována vztahem

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, \vec{n}, t) dS d\nu dt d\Omega, \quad (20)$$

kde  $dE_\nu$  představuje množství energie prošlé plochou  $dS$  v místě s polohovým vektorem  $\vec{r}$ , normálou  $\vec{n}$  plochy  $dS$  v časovém intervalu  $t, t + dt$  ve frekvenčním intervalu  $\nu, \nu + d\nu$ .

Dalšími důležitými charakteristikami jsou střední intenzita  $J_\nu$ , která je definována jako střední hodnota specifické intenzity  $I_\nu$  přes všechny směry

$$J_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \, d\Omega, \quad (21)$$

a tok záření  $\mathcal{F}_\nu$ , definovaný vztahem

$$\mathcal{F}_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t) = \int I_\nu \cos \theta \, d\Omega. \quad (22)$$

Interakce mezi zářením a látkou, kterou toto záření prostupuje, je popsána dvěma základními parametry: emisivitou  $j_\nu$  a extinkcí  $\alpha_\nu$ . Emisivita  $j_\nu$  je definovaná vztahem

$$dI_\nu = j_\nu \, ds, \quad (23)$$

kde  $dI_\nu$  je přírůstek specifické intenzity záření po projití dráhy  $ds$ . Oproti tomu extinkce  $\alpha_\nu$  je definovaná vztahem

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu \, ds, \quad (24)$$

kde  $dI_\nu$  je úbytek specifické intenzity záření po projití dráhy  $ds$ . Extinkční koeficient tedy udává, jaká část záření je rozpýlena nebo pohlcena. S těmito dvěma koeficienty je úzce spjata další důležitá charakteristika: zdrojová funkce  $S_\nu$ , definovaná

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (25)$$

Důležitou vlastností zdrojové funkce je, že její rozměr je stejný jako rozměr specifické intenzity záření.

Výchozí rovnicí pro všechny modely hvězdných atmosfér je rovnice přenosu záření, která udává vztah mezi výše definovanými veličinami. Jeden z možných zápisů je

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (26)$$

### 2.3 Popis hvězdných atmosfér

Ve fyzice hvězdných atmosfér jsou používány dva základní přístupy. Jednodušším je předpoklad lokální termodynamické rovnováhy (LTE), druhým je model non-LTE (NLTE), používaný v případech, kdy předpoklady LTE nejsou splněny.

Základním předpokladem lokální termodynamické rovnováhy je rovnováha všech veličin: tedy platnost termodynamické rovnováhy při lokální teplotě. Jedním ze základních vztahů je Maxwellovo rozložení rychlostí částic

$$\left[ \frac{n(v)}{N} dv \right]_{\text{LTE}} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (27)$$

platné pro teplotu elektronů, kde  $N$  je celkový počet částic,  $n(v)$  počet částic s rychlostí v intervalu  $v, v+dv$ ,  $k$  Boltzmannova konstanta,  $T$  termodynamická teplota a  $m$  hmotnost částice. V tomto případě (LTE) je tato teplota rovna všem ostatním teplotám (excitační, ionizační, teplotě iontů) a tak je možné ztotožnit lokální teplotu s teplotou elektronů.

Rozdělení zastoupení elektronů na různých hladinách v atomu je v případě LTE dáno Boltzmannovým rozdělením

$$\left[ \frac{n_{r,s}}{n_{r,t}} \right]_{\text{LTE}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,t}} e^{-\frac{\chi_{r,s} - \chi_{r,t}}{kT}}, \quad (28)$$

kde  $n_{r,s}$ , resp.  $n_{r,t}$  je počet atomů na hladině  $s$ , resp.  $t$  v ionizačním stupni  $r$ ,  $g_{r,s}$ , resp.  $g_{r,t}$  statistická váha příslušného stavu,  $\chi_{r,s}$  excitační energie vzhledem k základnímu stavu atomu v ionizačním stupni  $r$ .

Rozdělení atomů v různých ionizačních stupních je popsáno Sahovou rovnicí

$$\left[ \frac{n_{r+1,1}}{n_{r,1}} \right]_{\text{LTE}} = \frac{1}{N_e} \frac{2g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_r}{kT}}, \quad (29)$$

kde  $N_e$  je hustota elektronů,  $m_e$  hmotnost elektronů,  $n_{r+1,1}$  a  $n_{r,1}$ , resp.  $n_{r+1,1}$  hustota atomů v základním stavu ionizačního stupně  $r$ , resp.  $r + 1$  a  $\chi_r$  ionizační energie  $r$ -tého stupně a  $g_{r+1,1}$ , resp.  $g_{r,1}$  statistické váhy základních stavů. Zdrojová funkce je při lokální termodynamické rovnováze rovna Planckově funkci

$$[S_\nu^l]_{\text{LTE}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = B_\nu(T). \quad (30)$$

V případě, že selže popis pomocí lokální termodynamické rovnováhy, je nutné se přiklonit k popisu pomocí NLTE. Předpokládá se zde zachování statistické rovnováhy, Maxwellovo rozložení rychlostí. Na rozdíl od popisu LTE zde nemusí platit Sahova a Boltzmanova rovnice.

Základní rovnicí je rovnice statistické rovnováhy

$$\frac{dn_i(\vec{r})}{dt} = \sum_{j \neq i}^N n_j(\vec{r}) P_{ji}(\vec{r}) - n_i(\vec{r}) \sum_{j \neq i}^N P_{ij}(\vec{r}) = 0, \quad (31)$$

kde  $n_i$  je obsazení  $i$ -té hladiny,  $N$  je počet všech hladin, které mohou ovlivňovat obsazení  $i$ -té hladiny a  $P_{ij}$  je pravděpodobnost přechodu z  $i$ -té na  $j$ -tou hladinu. Pravděpodobnost přechodu  $P_{ij}$  se skládá ze zářivé a kolizní složky

$$P_{ij} = R_{ij} + C_{ij}, \quad (32)$$

kde  $R_{ij}$  je zářivý rate a  $C_{ij}$  kolizní rate. Pro vázaně-vázané přechody je

$$R_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_\nu, \quad (33)$$

kde  $A_{ij}$  a  $B_{ij}$  jsou Einsteinovy koeficienty a  $\bar{J}_\nu$  střední intenzita záření.

Soustava rovnic statistické rovnováhy je lineárně závislá, proto je nutné ji doplnit další rovnicí. Tou může být například rovnice zachování počtu částic

$$\sum_{i,j,k} n_{ijk} = N - n_e, \quad (34)$$

kde  $n_e$  je hustota elektronů,  $N$  hustota částic a  $n_{ijk}$  je hustota atomů druhu  $k$  v ionizačním stupni  $j$ , excitovaným na hladinu  $i$ .

## 2.4 Konstrukce modelu atmosféry

Pokud jsme schopni popsat procesy, probíhající v atmosféře, jsme schopni vytvořit její model. Ten je řešením následujících rovnic

- rovnice zářivé rovnováhy

$$\mathcal{F} = \int \mathcal{F}_\nu d\nu = \text{konst} \quad (35)$$

určující teplotu  $T$

- rovnice hydrostatické rovnováhy; v případě planparalelní atmosféry

$$\frac{dp}{dz} = \rho \vec{g} \quad (36)$$

určující počet částic v jednotce objemu  $N$

- rovnice přenosu záření určující specifickou intenzitu záření  $I$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu$$

- Sahovy a Boltzmannovy rovnice v případě LTE

$$\left[ \frac{n_{r+1,1}}{n_{r,1}} \right]_{\text{LTE}} = \frac{1}{N_e} \frac{2g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_r}{kT}},$$

$$\left[ \frac{n_{r,s}}{n_{r,t}} \right]_{\text{LTE}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,t}} e^{-\frac{\chi_{r,s} - \chi_{r,t}}{kT}}$$

a rovnic statistické rovnováhy v případě non-LTE

$$\frac{dn_i(\vec{r})}{dt} = \sum_{j \neq i}^N n_j(\vec{r}) P_{ji}(\vec{r}) - n_i(\vec{r}) \sum_{j \neq i}^N P_{ij}(\vec{r}) = 0$$

určující obsazení jednotlivých energetických hladin v atomech  $n_i$

K řešení těchto rovnic se často používá metoda úplné linearizace autorů Auera a Mihalase, kdy se všechny nelineární rovnice nahradí lineárními a tato soustava se poté řeší iterativně.

Řešení rovnic, popisujících hvězdnou atmosféru je obtížnou úlohou, jejíž výsledkem je model atmosféry. V minulosti byla tato úloha několikrát řešena za různých předpokladů, přehled řešení je uveden v tabulce 1.

Tabulka 1: Přehled a základní charakteristiky jednotlivých modelů hvězdných atmosfér.

autor	název modelu reference	popis modelu URL
Kurucz	ATLAS (Kurucz, 1993)	LTE, line-blanketing <a href="http://kurucz.harvard.edu/">http://kurucz.harvard.edu/</a>
Hubeny	TLUSTY (Hubeny & Lanz, 1995)	NLTE, line-blanketing <a href="http://tlusty.gsfc.nasa.gov/">http://tlusty.gsfc.nasa.gov/</a>
Werner, Dreizler	TMAP (Werner, 1986)	NLTE, line-blanketing <a href="http://astro.uni-tuebingen.de/groups/stellar/tmap/">http://astro.uni-tuebingen.de/ /groups/stellar/tmap/</a>
Gustafsson	MARCS (Gustafsson, 1975)	LTE, line-blanketing, pro chladné hvězdy
Hauschildt, Allard	PHOENIX (Allard, 2001)	NLTE, pohybující se atmosféry <a href="http://phoenix.physast.uga.edu/">http://phoenix.physast.uga.edu/</a>
Hillier	CMFGEN (Hillier, 1990)	NLTE, pohybující se atmosféry <a href="http://kookaburra.physast.pitt.edu/hillier/web/CMFGEN.htm">http://kookaburra.physast.pitt.edu/ /hillier/web/CMFGEN.htm</a>

### 3 Pulzace ve hvězdách

Hvězdy nejsou statické objekty. Povrch každé hvězdy osciluje v mnoha módech, které se mohou v případě, že mají vhodné podmínky, projevit i v makroskopickém měřítku.

U hvězd rozlišujeme dva druhy hvězdných pulzací: radiální a neradiální. Radiálně pulzující hvězda se periodicky smršťuje a expanduje, hvězda si zachovává sférickou symetrii a všechny změny se dějí v radiálním směru. Oproti tomu je amplituda změn poloměru neradiálně pulzujících hvězd závislá na sférických souřadnicích spojených s tělesem hvězdy.

Na Hertzsprungově–Russelově diagramu na obr. 1 jsou znázorněny oblasti, ve kterých se pozorují hvězdy s radiálními nebo neradiálními pulzacemi. Významné místo zde zaujímá tzv. pás nestability (vyznačen čárkovaně), ve kterém se vyskytují radiálně pulzující hvězdy. Ty jsou rozděleny na klasické Cefeidy (Ceph), hvězdy typu RR Lyr,  $\delta$  Sct a pulzující bílé trpaslíky (DAV). Tyto hvězdy se od sebe liší nejen polohou na Hertzsprungově–Russelově diagramu, ale i periodami a amplitudami světelných změn. Pulzace těchto typů hvězd jsou způsobeny tzv.  $\kappa$  mechanismem atomů He II a He III, kdy se část energie při kontrakci využije na ionizaci atomů, která ve svém důsledku znamená ohřev těchto vrstev a jejich expanzi, chládnutí a následnou rekombinaci.

Podobný mechanismus se uplatňuje i u radiálně i neradiálně pulzujících hvězd typu  $\beta$  Cep s tím rozdílem, že hvězdné pulzace jsou způsobeny různě ionizovanými atomy skupiny železa. Kromě této skupiny je ještě v Hertzsprungově–Russelově diagramu vynesena skupina pomalu pulzujících horkých hvězd (SPB), u kterých byly prokázány neradiální pulzace, ale dosud není jisté uspokojivé vysvětlení příčin těchto pulzací.

Další skupinou pulzujících hvězd jsou miridy (Mira) a jim podobné nepravidelné nebo polopravidelné pulzující hvězdy (Irr). Zde k pulzacím dochází vlivem změn opacity při disociaci a rekombinaci molekul TiO.

#### 3.1 Neradiální pulzace

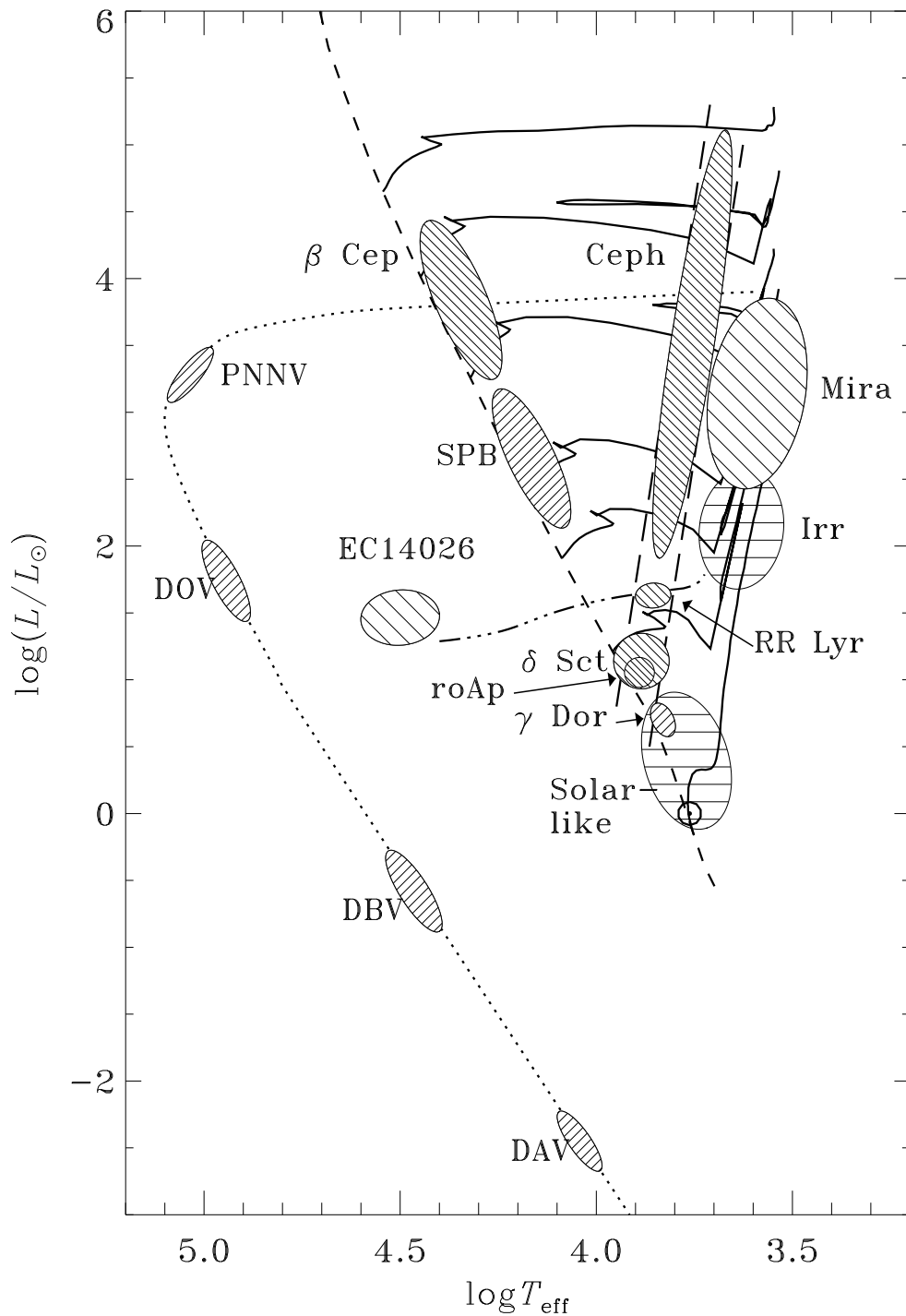
V případě, že se pohyb elementu povrchu hvězdy neděje pouze v radiálním směru, ale také podél povrchu hvězdy, mluvíme o neradiálních pulzacích. Neradiální pulzace už není možné popsat pouze jedním vlnovým číslem; mód neradiálních pulzací je popsán radiálním číslem  $n$ , sférickým indexem  $l$  a azimutálním číslem  $m$ . Pulzační čísla  $l$  a  $m$  odpovídají stupni a azimutálnímu číslu sférických funkcí  $Y_l^m(\theta, \phi)$ , které představují u hvězd, jejichž základní stav je sféricky symetrický, závislost pulzačního módu na úhlových proměnných  $\theta$  a  $\phi$ . Jediným rozdílem je zde použití kladných i záporných celých čísel z intervalu  $[-l; +l]$  pro azimutální číslo módu; kladné hodnoty azimutálního čísla odpovídají retrográdním módům, kdy se neradiální pulzace šíří v opačném směru než rotace hvězdy, záporné hodnoty odpovídají prográdním módům, kdy se pulzace šíří ve stejném směru jak hvězda rotuje.

Podle pulzačních čísel  $l$ ,  $m$  rozlišujeme několik druhů pulzačních módů. Pokud  $m = 0$ , mluvíme o zonálních módech, které jsou osově symetrické s osou symetrie totožnou s osou rotace. Módy s  $l = |m|$  označujeme jako sektorální módy, módy s  $0 < |m| < l$ , jako teresální módy.

U neradiálně pulzujících hvězd předpokládáme tři příčiny pulzací:

- stochasticky excitované (vynucené) pulzace: tato příčina pulzací se očekává u hvězd, u kterých přenos energie probíhá pomocí konvekce. Každý z mnoha módů je způsoben





Obrázek 1: Hertzsprungův–Russelův diagram s vyznačením významných skupin pulzujících hvězd. Hlavní posloupnost (z levého horního rohu k pravému dolnímu) je vyznačena přerušovanou čarou. Zkratky označují jednotlivé typy pulzujících hvězd. Obrázek laskavě poskytl prof. Jørgen Christensen-Dalsgaard, Univerzita Aarhus, Dánsko.

konvektivními buňkami. Tyto módy mají velmi malé amplitudy pulzačních rychlostí (řádově cm/s) a trvají dny až týdny.

- samovynucené pulzace: pulzace hvězd, které leží v tzv. pásu nestability, jsou způsobeny tzv.  $\kappa$  mechanismem. K tomu, aby se tento mechanismus mohl projevit, je nutná vrstva, uložená v určité hloubce, která je schopna účinně absorbovat záření přicházející z nitra hvězdy, aby poté co expanduje, absorbovanou energii vyžářila.
- vynucené pulzace: u velice těsných dvojhvězd jsou vzájemným slapovým působením zesíleny pulzace u obou složek. Tyto pulzační módy jsou charakteristické pulzačním číslem  $l = 2$ .

Těmito procesy se ale daří vysvětlit jen některé případy neradiálních pulzací. Uspokojivé vysvětlení procesů, které vedou k vzniku neradiálních pulzací u všech hvězd je stále předmětem zkoumání. Z tohoto důvodu není možné rozdělit neradiálně pulzující hvězdy do jednotlivých tříd tak, jak je to možné u jiných typů proměnných hvězd. Vyjímkou se zdají být hvězdy typu  $\beta$  Cep (poloha na Hertzsprungově–Russelově diagramu viz obr. 1), u kterých se podařilo ukázat, že neradiální pulzace jsou způsobeny  $\kappa$  mechanismem prvků skupiny železa.

### 3.2 Popis neradiálních pulzací

Základními zákony popisující izolovaný systém jsou zákony zachování. Vyjdeme ze zákona zachování hmotnosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (37)$$

a zákona zachování hybnosti

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla \right) \vec{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \quad (38)$$

kde  $\rho$  označuje hustotu,  $\vec{v}$  rychlost,  $p$  tlak a  $\Phi$  gravitační potenciál, který je s hustotou svázán vztahem

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\kappa\rho, \quad (39)$$

kde  $\kappa$  je gravitační konstanta.

Kontinuum je možné popsat dvěma modely: Eulerovým a Lagrangeovým. V Lagrangeově popisu je odchylka  $\delta f$  od hodnoty  $f$  popsána vztahem

$$\delta f(\vec{r}) = f(\vec{r}) - f_0(\vec{r}_0), \quad (40)$$

kde  $f_0$  je původní hodnota a  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_0$  jsou polohové vektory původního a vychýleného stavu vzhledem ke stejnému elementu kontinua. V Eulerově popisu je odchylka  $f'$  od hodnoty  $f$  popsána vztahem

$$f'(\vec{r}) = f(\vec{r}) - f_0(\vec{r}), \quad (41)$$

kde  $f_0$  je původní hodnota proměnné. Při tomto popisu zůstává polohový vektor  $\vec{r}$  stejný, různý je element objemu kontinua původního a vychýleného stavu. Lagrangeova a Eulerova odchylka jsou spolu při zanedbání členů druhých a vyšších řádů svázány vztahem

$$\delta f(\vec{r}, t) = f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \nabla f_0(\vec{r}), \quad (42)$$

kde  $\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{r}_0$ . Časové derivace v Eulerově a Lagrangeově pojetí jsou svázány vztahem

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla \quad (43)$$

a aplikací vztahu (43) lze rovnice (37) – (39) přepsat jako

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \nabla(\varrho\vec{v}) = 0, \quad (44)$$

$$\varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p' - \varrho' \nabla \Phi - \varrho \nabla \Phi', \quad (45)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi\kappa\varrho'. \quad (46)$$

Koeficienty v těchto rovnicích se vztahují k rovnovážnému stavu. Je užitečné separovat prostorovou a časovou složku podle vztahu

$$f'(\vec{r}, t) = f'(\vec{r})e^{i\sigma t}, \quad (47)$$

kde  $\sigma$  je frekvence pulzací a  $i$  imaginární jednotka.

Poté rovnice dostanou tvar

$$\varrho' + \nabla(\varrho\vec{\xi}) = 0, \quad (48)$$

$$-\varrho\sigma^2\vec{\xi} = -\nabla p' - \varrho' \nabla \Phi - \varrho \nabla \Phi', \quad (49)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi\kappa\varrho', \quad (50)$$

kde  $\vec{v} = i\sigma\vec{\xi}$ .

Tyto vztahy mohou být dále zjednodušeny rozdělením na radiální a horizontální složky a následným vyloučením horizontálních členů  $\vec{\xi}_h = (0, \xi_\theta, \xi_\phi)$ . Další zjednodušení je možné předpokladem adiabatického procesu

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta p}{p}, \quad (51)$$

kde

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \varrho} \right)_S, \quad (52)$$

který s vztahem (42) dají výraz

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{p'}{p} - A\xi_r, \quad (53)$$

kde  $\xi_r$  je radiální posunutí a  $A$  Schwarzschildův diskriminant

$$A = \frac{d \ln \varrho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr}. \quad (54)$$

Aplikací vztahu (53) je možné základní vztahy přepsat

$$\frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varrho g}{\Gamma_1 \varrho} \right) \varrho' - (\sigma^2 + gA)\xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = 0, \quad (55)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left( \frac{\varrho}{\Gamma_1 p} + \frac{\nabla_h^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\varrho} + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_h^2 \Phi' = 0, \quad (56)$$

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_h^2 \right) \Phi' - 4\pi\kappa\varrho \left( \frac{p'}{\Gamma_1 p} - A\xi_r \right) = 0, \quad (57)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení. Operátor  $r^2 \nabla_h^2$  je roven

$$r^2 \nabla_h^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (58)$$

a  $\nabla_h$  je horizontální složka  $\nabla$  ve sférických souřadnicích

$$\nabla_h = \left( 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (59)$$

Tyto vztahy popisují  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$  ve hvězdě.

Výše uvedené vztahy pro adiabatické, neradiální pulzace jsou parciální diferenciální rovnice. Rovnice (55) – (56) obsahují jediný operátor závislý na úhlových složkách  $r^2 \nabla_h^2$ . Úsledkem toho mají proměnné  $\vec{\xi}$ ,  $p'$ ,  $\Phi'$  stejnou úhlovou závislost  $Y(\theta, \phi)$ , která musí splňovat podmínku

$$(r^2 \nabla_h^2 + \chi) Y(\theta, \phi) = 0, \quad (60)$$

kde  $\chi$  je konstanta vzniklá při separaci proměnných. Řešením jsou sférické funkce  $Y_l^m$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi), \quad (61)$$

kde  $l$  a  $m$  jsou celočíselné indexy splňující podmínky  $l \geq 0$  a  $-l \geq m \geq l$  a  $P_l^m(\cos \theta)$  jsou Legendery polynomy. Vlastní hodnoty odpovídající vlastním funkcím  $Y_l^m$  splňují vztah

$$r^2 \nabla_h^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (62)$$

Výsledné vztahy pro odchylku posunutí oproti rovnovážnému stavu  $\vec{\xi} = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_\phi)$ , odchylku tlaku oproti rovnovážnému stavu  $p'$ , odchylku gravitačního potenciálu oproti rovnovážnému stavu  $\Phi'$  potom mají tvar

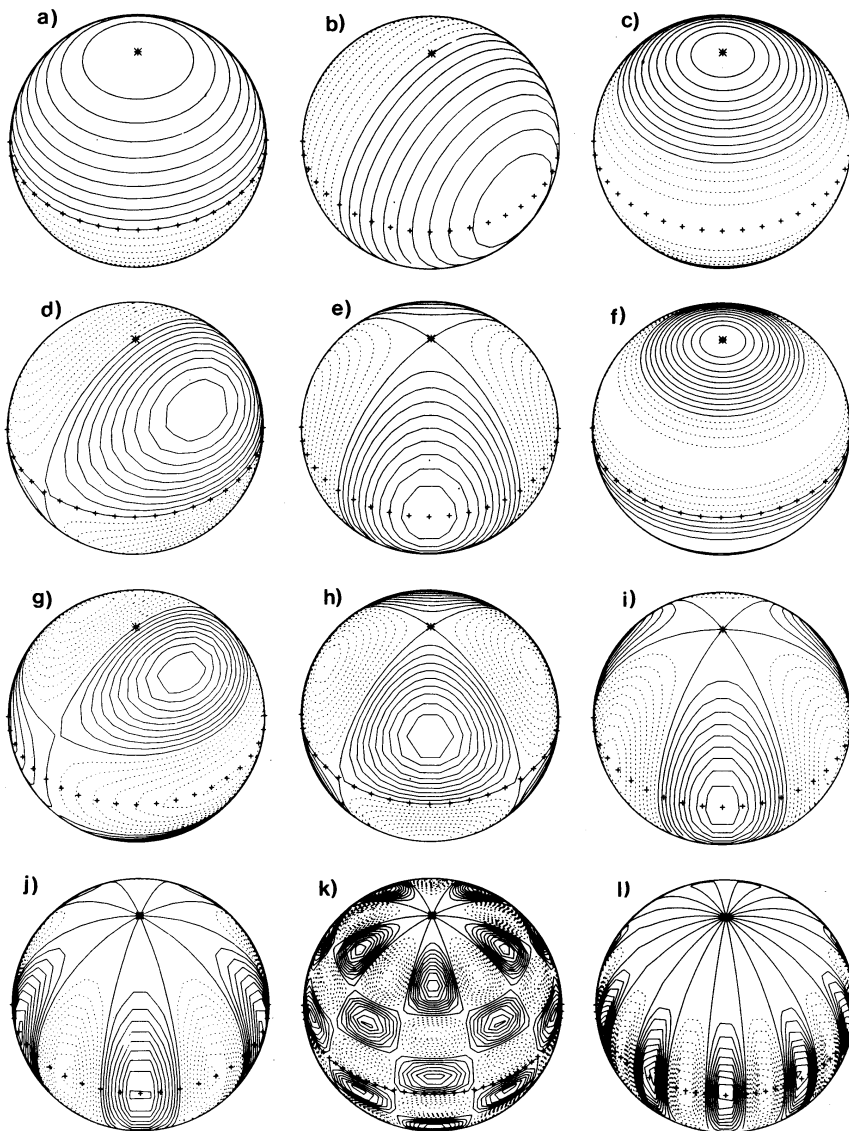
$$\xi_r(r, \theta, \phi, t) = \xi_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}, \quad (63)$$

$$\xi_\theta(r, \theta, \phi, t) = \xi_{\theta, \phi}(r) \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} e^{i\sigma t}, \quad (64)$$

$$\xi_\phi(r, \theta, \phi, t) = \xi_{\theta, \phi}(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} e^{i\sigma t}, \quad (65)$$

$$p'(r, \theta, \phi, t) = p'(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}, \quad (66)$$

$$\Phi'(r, \theta, \phi, t) = \Phi'(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t}. \quad (67)$$



Obrázek 2: Schématické znázornění neradiálních pulzací. Rovník hvězdy je znázorněn malými křížky, plnými čarami jsou vyznačeny expandující části hvězdy, tečkovanými částmi, které se smršťují. Zobrazené módy: a)  $l = 1, m = 0$ ; b)  $l = 1, m = 1$ ; c)  $l = 2, m = 0$ ; d)  $l = 2, m = 1$ , e)  $l = 2, m = 2$ ; f)  $l = 3, m = 0$ ; g)  $l = 3, m = 1$ ; h)  $l = 3, m = 2$ , i)  $l = 3, m = 3$ ; j)  $l = 5, m = 5$ ; k)  $l = 10, m = 5$ ; l)  $l = 10, m = 10$ . Obrázek laskavě poskytl prof. Jørgen Christensen-Dalsgaard, Univerzita Aarhus, Dánsko.

## 4 Identifikace módů pulzací

Identifikace módu, ve kterém hvězda pulzuje, je nejdůležitější částí analýzy hvězdných oscilací. Podle druhu dat, který k analýze použijeme, rozlišujeme fotometrické nebo spektroskopické metody identifikace pulzačních módů.

### 4.1 Identifikace módu z fotometrických dat

Fotometrické metody identifikace módů neradiálních pulzací se snaží určit pulzační mód ze změn jasnosti hvězdy v různých oblastech spektra. Zdrojovými daty jsou fotometrická data (závislost jasnosti hvězdy na čase) pořízená v několika, nejčastěji středněpásmových nebo úzkopásmových filtrech.

Základním předpokladem aplikace této metody je stejná frekvence světelných změn ve všech filtrech, ve kterých je prováděno měření. Světelné křivky v různých filtrech mohou být posunuty o určitý fázový posun, velmi často se tento jev zanedbává, ve většině případů je fázový posun mezi jednotlivými barvami blízký nule. Základem analýzy jsou amplitudy světelných změn v různých filtrech, které umožňují určit sférický index  $l$  pulzačního módu.

Garrido odvodil (viz (Aerts, 2003)) pro závislost amplitudy světelných změn na vlnové délce a sférickém indexu  $l$  závislost

$$A_{l,R}(\lambda) = Ab_{l,\lambda} \left\{ - (l-1)(l+2) + [l(l+1)K - 4 - K^{-1}] \right.$$

$$\left. \left[ R \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \left( \left( \frac{\partial \log F_\lambda^+}{\partial \log T} \right)_g + \left( \frac{\partial \log b_{l,\lambda}}{\partial \log T} \right)_g \right) + \left( \frac{\partial \log g}{\partial \log P} \right)_{\tau=1} \left( \left( \frac{\partial \log F_\lambda^+}{\partial \log g} \right)_T + \left( \frac{\partial \log b_{l,\lambda}}{\partial \log g} \right)_T \right) \right] \right\}, \quad (68)$$

kde  $F_\lambda^+$  je tok záření vycházející z hvězdy,  $g$  gravitační zrychlení,  $A$  funkce závislá na pulzačním módu a inklinacním úhlu,  $K = \frac{GM}{\Omega^2 R^3}$ ,  $R \in [0, 1]$  je parametr charakterizující adiabatičnost procesu ( $R = 1$  pro adiabatický proces) a  $\Gamma_2$  je třetí zobecněný adiabatický koeficient

$$\Gamma_2 = \frac{1}{1 - \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_S} \quad (69)$$

a funkce

$$b_{l,\lambda} = \int_0^1 h_\lambda \mu P_l(\mu) d\mu, \quad (70)$$

kde  $h_\lambda$  je zobecněná funkce okrajového ztemnění, v nejjednodušším případě

$$h_\lambda = 1 - u_\lambda + u_\lambda \cos \theta, \quad (71)$$

kde  $u_\lambda$  je koeficient okrajového ztemnění. Neznámý parametr  $R$ , jako i všechny potřebné logaritmické derivace, je možné získat z odpovídajících modelů atmosfér.

Funkce  $A$  v (68) nezávisí na vlnové délce, ale pouze na inklinacním úhlu a módu pulzace. Po spočtení rovnice (68) pro různé hodnoty  $l$ ,  $\lambda$ ,  $R$  a po jejich srovnání s naměřenými hodnotami je možné určit sférický index  $l$ . Při srovnávání se často porovnávají poměry amplitud světelných změn, které jsou nezávislé na funkci  $A$ .

Zde uvedený příklad je pouze jedním z mnoha možných přístupů k analýze fotometrických dat. Fotometrické metody mají velkou výhodu v jednoduchém zpracování

multiperiodických neradiálních pulzací. Oproti tomu nejsou schopny rozlišit pulzační módy s  $l > 3$ , kdy amplituda světelných změn téměř nezávisí na vlnové délce. Navíc metoda neposkytuje žádné informace o azimutálním indexu  $m$ , amplitudě pulzací a dalších parametrech.

## 4.2 Identifikace módu ze spektroskopických dat

Spektroskopické metody jsou postaveny na změnách profilů spektrálních čar, které jsou způsobeny různou radiální rychlostí jednotlivých částí povrchu hvězdy.

### 4.2.1 Modelování profilů spektrální čáry

Identifikace parametrů neradiálních pulzací pomocí srovnávání syntetických spekter s pozorovanými je jednou z nejnáročnějších metod. Hlavním kritériem je srovnání teoreticky spočtených (namodelovaných) a pozorovaných charakteristik, zejména pak profilů spektrálních čar.

Příklad použití této techniky je v práci (Rivinius, 2001). Původní velmi široký prostor možných parametrů byl za pomoci předběžné analýzy spekter a několika předpokladů zredukován na objem, ve kterém bylo možné pomocí programů BRUCE a KYLIE namodelovat všechny varianty. Pozorovaná spektra poté byla rozdělena podle fáze do osmi tříd. Syntetická spektra byla vypočítána pro 16 okamžiků rovnoměrně rozložených během periody, dvě po sobě následující syntetická spektra byla zprůměrována a tato sada byla porovnávána s naměřenými spektry. Samotné srovnání měřených a simulovaných spekter se v práci (Rivinius, 2001) děje pomocí  $\chi^2$  testu, při ztotožnění pozorovaných spekter s modelem o určitých parametrech se ale navíc berou v úvahu i fotometrické projevy neradiálních pulzací.

Na příkladu práce (Rivinius, 2001) je vidět, že tato metoda určování parametrů neradiálních pulzací neposkytuje univerzální postup použitelný ve všech případech. Postup řešení pro každou hvězdu se tak stává jedinečným a nepřenositelným (s výjimkou velmi podobných případů).

### 4.2.2 Dopplerovo zobrazení

Metoda Dopplerova zobrazování (Doppler imaging, DI) je vhodná v případě velmi rychle rotujících hvězd. Díky Dopplerově efektu je možné z profilů spektrální čáry rekonstruovat pole rychlostí na povrchu hvězdy. Poprvé byla tato metoda u hvězdy  $\epsilon$  Per v práci (Gies & Kullavanijaya, 1988).

Při aplikaci této metody se předpokládá sektortální pulzační mód ( $l = |m|$ ), velká rotační rychlost ( $v_\Omega \gg v_p$ ) a inklinací úhel blízký  $90^\circ$  (hvězda je k pozorovateli natočena rovníkem). Nevýhodou této metody je malá spolehlivost určení  $l$ , resp.  $|m|$  (chyba bývá horší než  $\pm 1$ ) a možné chybné výsledky, obzvláště pokud nejsou s dostatečnou přesností splněny výše uvedené předpoklady.

V následujícím popisu zavedeme na disku hvězdy souřadnicovou soustavu  $(x, y)$  s jednotkovou délkou poloměru hvězdy. Potom je možné okrajové ztemnění vyjádřit vztahem

$$b(x, y) = 1 - u_\lambda + u_\lambda \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad (72)$$

kde  $u_\lambda$  je koeficient okrajového ztemnění. Profil pozorované spektrální čáry je

$$p(v) = \int_S b(x, y) f(v - v_\Omega(x, y) - v_p(x, y)) dS, \quad (73)$$

kde  $f(v)$  je přirozený profil spektrální čáry a  $v_\Omega(x, y)$ , resp.  $v_p(x, y)$  velikost projekce rotační, resp. pulzační rychlosti do směru k pozorovateli.

Fourierovou transformací profilu spektrální čáry je

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(v) e^{-i\omega v} dv = \int_S b(x, y) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv \right] e^{-i\omega[v_\Omega(x, y) + v_p(x, y)]} dS. \quad (74)$$

Označíme-li

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv, \quad (75)$$

potom

$$P(\omega) = F(\omega) \int_S b(x, y) e^{-i\omega[v_\Omega(x, y) + v_p(x, y)]} dS. \quad (76)$$

Zvolíme-li si jako jednotku rychlost  $v_\Omega$  a předpokládáme-li, že  $v_\Omega \gg v_p$ , můžeme výraz pro  $P(\omega)$  přepsat jako

$$P(\omega) = F(\omega) \int_S b(x, y) [1 - i\omega v_p(x, y)] e^{-i\omega v_\Omega(x, y)} dS. \quad (77)$$

V tomto výrazu můžeme separovat část obsahující  $v_p$  a část obsahující  $v_\Omega$  na rotační a pulzační člen. Rotační člen můžeme psát jako

$$R(\omega) = \int_S b(x, y) e^{i\omega v_\Omega(x, y)} dS, \quad (78)$$

který je Fourierovou transformací rotačního profilu

$$r(x) = 2(1 - u_\lambda) \sqrt{(1 - x^2)} + \frac{\pi u_\lambda}{2} (1 - x^2), \quad (79)$$

který vznikne integrací

$$r(x) = \int_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1-x^2)}} b(x, y) dy. \quad (80)$$

Pulzační člen je potom možné vyjádřit jako

$$V(\omega) = \int_S b(x, y) v_p(x, y) e^{-i\omega v_p(x, y)} dS = \int_{-1}^1 [e^{-i\omega v_\Omega^* x} \int_{-\sqrt{(1-x^2)}}^{\sqrt{(1+x^2)}} b(x, y) v_p(x, y) dy] dx. \quad (81)$$



Pokud si označíme jako  $\overline{v_p(x)}$  výraz

$$\overline{v_p(x)} = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} b(x, y) v_p(x, y) dy, \quad (82)$$

potom můžeme pulzační člen jednoduše zapsat jako

$$V(\omega) = \int_{-1}^1 \overline{v_p(x)} e^{-i\omega x} dx. \quad (83)$$

Je zřejmé, že  $V(\omega)$  je Fourierovou transformací  $\overline{v_p(x)}$ .

Fourierovu transformaci profilu spektrální čáry je možné s využitím nově označených členů zapsat jako

$$P(\omega) = F(\omega)[R(\omega) - i\omega V(\omega)]. \quad (84)$$

Člen  $F(\omega)R(\omega)$  je Fourierovou transformací rotačního profilu  $f(x) \star r(x) = p^*(x)$ . Potom lze psát

$$\mathcal{F}[p(v) - p^*(v)] = -i\omega F(\omega)V(\omega) \quad (85)$$

a také

$$p(v) - p^*(v) = -i\mathcal{F}^{-1}[\omega] \star f(x) \star \overline{v_p(x)}, \quad (86)$$

kde  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$  jsou Fourierova, resp. inverzní Fourierova transformace. Ze znalosti přirozeného profilu spektrální čáry  $f(x)$  jsme schopni zjistit  $V(\omega)$ , resp.  $\overline{v_p(x)}$ .

### 4.2.3 Momentová metoda

Momentová metoda je založena na změně několika prvních (zpravidla tří) momentů spektrální čáry. Byla představena v práci (Balona, 1986a), poprvé ale byla na reálná data použita až v práci (Aerts, 1992). V další práci (Aerts, 1996) byla upraven vztah pro výpočet tzv. diskriminantu.

Momentová metoda předpokládá dosti silné omezení na vlastnosti hvězdy. Je odvozena za předpokladu, že hvězda je sféricky symetrická, že nepůsobí vnější síly (např. není složkou dvojhvězdy) a rotace je natolik pomalá, že nemá vliv na vlastní pulzace. Poslední podmínka je splněna, pokud doformace hvězdy vlivem odstředivé síly může být zanedbána, pokud poměr period pulzací a rotační periody je dostatečně malý (jako dostatečný se považuje poměr 0.1).

Momentová metoda předpokládá profil spektrální čáry  $p(v)$  jako konvoluci Gaussovského profilu  $g(v)$  s disperzí  $\sigma^2$  a funkce  $f(v)$ , odpovídající vlivu rychlostního pole, které je závislé na pulzačním módu.

$$p(v) = (f \star g)(v) \quad (87)$$

$n$ -tý normalizovaný moment spektrální čáry je definován jako

$$\langle v^n \rangle_{f \star g} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v^n p(v) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(v) dv} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v^n f(v) \star g(v) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \star g(v) dv}, \quad (88)$$

kde  $v$  je velikost radiální rychlosti. Takto je možno spektrální čáru vyjádřit jako součet řady momentů. Pro účely identifikace pulzačního módu stačí vyjádřit první tři momenty ( $n = 1, 2, 3$ ), kde první moment charakterizuje střed, druhý šířku a třetí asymetrii spektrální čáry.

Provedeme-li konvoluci profilu spektrální čáry  $p(v)$  a uvážíme-li, že pro Gaussovský profil jsou všechny liché momenty rovny nule a disperze je rovna  $\langle v^2 \rangle_g$ , potom můžeme první tři momenty přepsat ve tvaru

$$\langle v \rangle_{f \star g} = \langle v \rangle_f + \langle v \rangle_g = \langle v \rangle_f \quad (89)$$

$$\langle v^2 \rangle_{f \star g} = \langle v^2 \rangle_f + 2\langle v \rangle_f \langle v \rangle_g + \langle v^2 \rangle_g = \langle v^2 \rangle_f + \sigma^2 \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \langle v^3 \rangle_{f \star g} &= 3\langle v^3 \rangle_f + 3\langle v^2 \rangle_f \langle v \rangle_g + 3\langle v \rangle_f \langle v^2 \rangle_g + \langle v^3 \rangle_g = \\ &= \langle v^3 \rangle_f + 3\sigma^2 \langle v \rangle_f \end{aligned} \quad (91)$$

$$\langle v \rangle_{f \star g} = v_p A(l, m, i) \sin(\omega t + \psi), \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle_{f \star g} &= v_p^2 C(l, m, i) \sin\left(2\omega t + 2\psi + \frac{3\pi}{2}\right) + \\ &+ v_p v_\Omega D(l, m, i) \sin\left(\omega t + \psi + \frac{3\pi}{2}\right) + v_p^2 E(l, m, i) + \sigma^2 + b_2 v_\Omega^2, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \langle v^3 \rangle_{f \star g} &= v_p^3 F(l, m, i) \sin(2\omega t + 3\psi) + v_p^2 v_\Omega G(l, m, i) \sin\left(2\omega t + 2\psi + \frac{3\pi}{2}\right) + \\ &+ [v_p^3 R(l, m, i) + v_p v_\Omega^2 S(l, m, i) + v_p \sigma^2 T(l, m, i)] \sin(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (94)$$

kde  $i$  je úhel inklinace,  $l$ ,  $m$  čísla charakterizující pulzační mód,  $v_p$  amplituda pulzační rychlosti,  $v_\Omega$  velikost projekce rotační rychlosti do směru vůči pozorovateli,  $b_2$  konstanta závislejší na okrajovém ztemnění (71). Funkce  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  jsou závislé na pulzačních číslech, amplitudě pulzací a inklinacním úhlu a je v nich obsažena veškerá informace o pulzačním módu. Odvození těchto vztahů je v (Aerts, 1992).

Cílem momentové metody je určení parametrů neradiálních pulzací  $l$ ,  $m$ ,  $i$ ,  $v_p$ ,  $v_\Omega$ ,  $\sigma$ . K tomu se vypočítá tzv. diskriminant  $\Gamma_l^m$  definovaný vztahem

$$\begin{aligned} \Gamma_l^m(v_p, i, v_\Omega, \sigma) &= \\ &= \left[ \{AA - v_p |A(l, m, i)|f_{AA}\}^2 + \{\sqrt{|CC - v_p^2|C(l, m, i)|}f_{CC}\}^2 + \right. \\ &+ \{\sqrt{|DD - v_p v_\Omega|D(l, m, i)|}f_{DD}\}^2 + \{\sqrt{|EE - v_p^2|E(l, m, i)| - \sigma^2 - b_2 v_\Omega^2}f_{CC}\}^2 + \\ &+ \{\sqrt{|FF - v_p^3|F(l, m, i)|}f_{FF}\}^2 + \{\sqrt{|GG - v_p^2 v_\Omega|G(l, m, i)|}f_{GG}\}^2 + \\ &\left. + \{\sqrt{|RST - v_p^2 v_\Omega|R(l, m, i)| - v_p v_\Omega^2|S(l, m, i)| - v_p \sigma^2|T(l, m, i)|}f_{RST}\}^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (95)$$

kde funkce  $f_{AA}, \dots, f_{RST}$  jsou váhy dané spolehlivostí proložení momentů.

Kritériem určení parametrů pulzačního módu je minimum funkce  $\Gamma_l^m$

$$\gamma_l^m = \min_{v_p, i, v_\Omega, \sigma} \Gamma_l^m(v_p, i, v_\Omega, \sigma). \quad (96)$$

Podobně, kritériem určení pulzačního módu je minimum funkce  $\gamma_l^m$ .

## 5 Modelování profilů spektrálních čar

Hlavním cílem modelování profilů spektrálních čar je pochopení procesů, které se odehrávají na povrchu hvězdy. Těmi mohou být lokální změny povrchové teploty hvězdy, chemického složení nebo, jako je tomu v případě neradiálně pulzujících hvězd, různá radiální rychlost jednotlivých elementů povrchu hvězdy. Procesy, které se odehrávají pod povrchem hvězdy, jsou obsaženy v tzv. přirozeném profilu spektrální čáry nebo jsou aproximovány (např. když místo přirozeného profilu spektrální čáry použijeme přiblížení gaussovským profilem).

### 5.1 BRUCE/KYLIE

Dvojice programů BRUCE/KYLIE byla představena v (Townsend, 1997) a v současné době představuje nejpropracovanější nástroj pro modelování profilů spektrálních čar neradiálně pulzujících hvězd.

Cílem programu BRUCE je konstrukce modelu fotosféry neradiálně pulzující hvězdy. Prvním krokem je konstrukce atmosféry rotující hvězdy, která je poté zdeformována projevy neradiálních pulzací.

Povrch hvězdy bez započtení neradiálních pulzací je definován jako ekvipotenciální hladina gravitačního potenciálu  $\Phi_{\text{ef}}$

$$\Phi_{\text{ef}} = -\frac{GM}{R_\theta} - \frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2 \theta, \quad (97)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $M$  hmotnost hvězdy,  $\Omega$  úhlová rychlost a  $R_\theta$  poloměr hvězdy na šířce  $\theta$ .

Efektivní potenciál na pólu nezávisí na úhlové rychlosti

$$\Phi_{\text{ef}} = -\frac{GM}{R_p} = -g_p R_p, \quad (98)$$

kde  $R_p$  je polární poloměr hvězdy a  $g_p$  gravitační zrychlení na pólu hvězdy. Pomocí polárního gravitačního potenciálu definovaného vztahem (98) a závislosti gravitačního potenciálu na šířce (97) lze vyjádřit závislost poloměru hvězdy  $R_\theta$  na šířce  $\theta$

$$-g_p R_p = -\frac{g_p R_p^2}{R_\theta} - \frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2 \theta. \quad (99)$$

Úhlovou rychlost  $\Omega$ , vystupující ve vztazích (97) a (99) lze získat z vztahu

$$\Omega = \frac{v_\Omega}{R_{\text{eq}}}, \quad (100)$$

kde  $v_\Omega$  je rotační rychlost na rovníku a  $R_{\text{eq}}$  rovníkový poloměr hvězdy.

Gravitační zrychlení  $g_\theta$  lze vyjádřit pomocí gradientu gravitačního potenciálu

$$g_\theta = |\nabla \Phi_{\text{ef}}|, \quad (101)$$

a pomocí poměru gradientu gravitačního potenciálu a gravitačního zrychlení

$$\vec{n}_\theta = \frac{\nabla \Phi_{\text{ef}}}{g_\theta}. \quad (102)$$

Závislost teploty na šířce se vypočítá pomocí zákona gravitačního ztemnění

$$T_\theta = T_p \left( \frac{g_\theta}{g_p} \right)^\beta, \quad (103)$$

kde  $\beta$  je koeficient gravitačního ztemnění. Program BRUCE předpokládá  $\beta = 0.25$ , což je v souladu s modelem zářivé atmosféry horkých hvězd.

Nyní je připraven model rotující atmosféry, který je nutné opravit o vliv neradiálních pulzací. Prvním krokem je započtení pohybu jednotlivých elementů povrchu. Výsledná rychlost každého bodu  $v_t$  je dána pomocí součtu pulzační rychlosti  $v$  a rychlosti rotační  $|\vec{\Omega} \times \vec{R}|$ .

Vliv neradiálních pulzací na teplotu je dán vztahem

$$\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} = \Delta_T \nabla_{\text{ad}} \left[ \frac{\lambda_{l_j, m}}{\omega_c^2} - 4 - \omega_c^2 \right] \frac{\xi_r(\theta, \phi)}{r} \exp(i\psi), \quad (104)$$

odvozeném v práci (Lee & Saio, 1990), kde  $\delta T$  je vliv neradiálních pulzací na teplotu  $T$ ,  $\Delta_T$  a  $\psi$  popisují adiabatičnost procesu,  $\lambda_{l_j, m}$  je vlastní hodnota rovnice (62) opravená o vliv rotace (viz (Lee & Saio, 1990)) a  $\nabla_{\text{ad}}$  je adiabatický teplotní gradient definovaný vztahem

$$\nabla_{\text{ad}} = \left( \frac{d \ln T}{d \ln p} \right)_s. \quad (105)$$

Při své práci program BRUCE načte parametry ze vstupního souboru a vytvoří pro každý z definovaných okamžiků model povrchu hvězdy. Tím je matice, ve které je pro každý element viditelného povrchu hvězdy plocha, radiální rychlost, teplota, lokální tíhové zrychlení, úhel mezi normálou a směrem k pozorovateli. Tyto údaje se zapíše do výstupního souboru, který dále zpracovává program KYLIE. Vlastnosti hvězdy v jednotlivých fázích pulzace lze zjistit v logovacím souboru.

Poté, co je programem BRUCE vymodelována příslušná atmosféra hvězdy, je tato atmosféra dále zpracována programem KYLIE. Ten načte model povrchu hvězdy, parametry ze vstupního souboru a s použitím přirozeného profilu spektrálních čar vypočte spektrum každého elementu povrchu, která pro každou vlnovou délku sečte a výsledek zapíše do výstupního souboru. Při této činnosti uvažuje okrajové ztemnění definované vztahem (71) a Dopplerův posun podle vztahu (7).

Tento postup umožňuje zahrnout téměř všechny důsledky neradiálních pulzací, které mají vliv na výsledné spektrum.

Důležitou součástí programu KYLIE jsou knihovny, které slouží k načtení přirozeného spektra a zápisu výsledného spektra. Tyto knihovny jsem v rámci své diplomové práce sám naprogramoval.

Pro zápis pozorovaného spektra slouží knihovna `wrsdf1`. Pro svoji univerzálnost a snadné následné zpracování jsem zvolil výstup formou obyčejného textového souboru, kdy na prvním místě je vlnová délka a na druhém intenzita záření.

Další knihovna, `tgprof3`, slouží k načtení intenzity vstupního spektra požadované vlnové délky při určité teplotě a gravitačním zrychlení a předání této hodnoty hlavnímu programu. Konkrétní tvar knihovny závisí na formátu souboru, ve kterém jsou uložena vstupní spektra.

Velice důležitou aproximací je nahrazení vstupního profilu gaussovským profilem spektrální čáry. Ten je možné vyjádřit vztahem

$$I(\lambda) = 1 - d \exp \left[ - \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{2\sigma^2} \right)^2 \right], \quad (106)$$

kde  $d$  je hloubka čáry,  $\sigma$  šířka čáry a  $\lambda_0$  vlnová délka středu čáry. Díky této aproximaci může být knihovna `tgprof3` jednoduchá a její činnost oproti jiným variantám velice rychlá. Nevýhodou je nepříliš dobrá aproximace v křídlech čar (viz obr. 8), nezahrnutí teplotních efektů v hvězdné atmosféře a vliv ostatních čar v okolí modelované čáry. Přesto se jedná o důležitou aproximaci, mj. i proto, že za stejného předpokladu je odvozena momentová metoda, kterou se chci v další části diplomové práce podrobněji zabývat.

Nevýhody aproximace gaussovským profilem odstraňuje použití syntetických spekter vypočítaných na základě modelů atmosfér. Základní modely atmosfér jsou shrnuty v tabulce 1. Konkrétní řešení, použité v této diplomové práci, je založeno na syntetických profilech používaných na univerzitě v Heidelbergu Dr. Thomasem Riviniem.

Tyto modely vycházejí z Kuruczových LTE modelů ATLAS9, které, na rozdíl od lepších NLTE modelů, pokrývají širší spektrum teplot a gravitačních zrychlení a zahrnují i větší počet spektrálních čar různých atomů. Použité přirozené profily pokrývají rozsah teplot mezi 10000 K a 31000 K v kroku 1000 K a logaritmus gravitačního zrychlení  $\log g$  v intervalu 3.3 – 4.3 cgs dex. Je započteno 5967 spektrálních čar H I, He I, C II, N II, O I, O II, Ne I, Mg II, Al III, Si II, Si III, S II, Ca II, Fe II a Fe III pokrývajících rozsah vlnových délek od 390 nm do 670 nm. Hodnota mikroturbulence v těchto modelech je volena  $v_{\text{micro}} = 2$  km/s.

Vzhledem k tomu, že program BRUCE/KYLIE neumožňuje širší konfiguraci, je nutné každou změnu vstupních profilů promítnout do příslušných knihoven, poté program překompilovat. Architektura programů BRUCE/KYLIE a rozmanitost formátů přirozených profilů neumožňuje vytvořit nějaké univerzální, široce použitelné řešení.

Vstupní parametry programů BRUCE i KYLIE jsou uvedeny v textových souborech. Každý konfigurační soubor se skládá z několika sekcí, ve kterých jsou uvedeny jednotlivé parametry. Obecná syntaxe je

```
#sekce { parametr:hodnota
        přepínač
}
```

Výpis jednotlivých parametrů je uveden v tabulce 2 pro program BRUCE a v tabulce 3 pro program KYLIE.

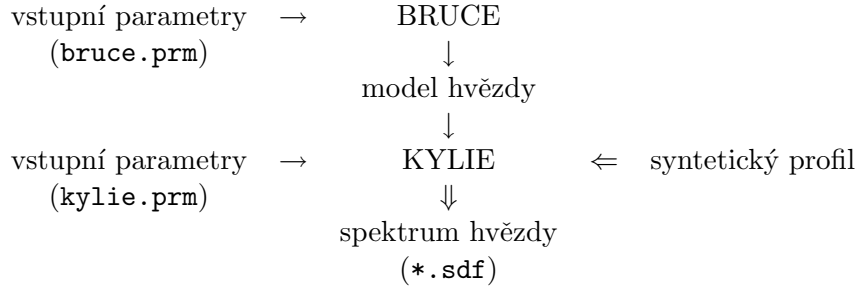
Oba procesy lze obsluhovat pomocí dávkového souboru, který může mít tvar

```
bruce <bruce.prm >bruce.out
kylie <kylie.prm >kylie.out
```

kde `bruce.prm` je konfigurační soubor pro program BRUCE, `kylie.prm` konfigurační soubor pro program KYLIE a výstup programu BRUCE je zapsán do souboru `bruce.out`, výstup programu KYLIE do souboru `kylie.prm`.

## 5.2 Modelování profilů spektrálních čar nepulzujících hvězd

Pokud v konfiguračním souboru programu BRUCE zvolíme amplitudu pulzací  $v_p = 0$  km · s<sup>-1</sup>, je možné pomocí programů BRUCE/KYLIE modelovat i spektra rotujících



Obrázek 3: Schéma programů BRUCE/KYLIE. Zdvojenými šipkami jsou označeny části, které jsem naprogramoval.

hvězd, u kterých se neradiální pulzace nevyskytují. Je možné tedy vyzkoušet techniku modelování profilů spektrálních čar na jednodušším případě, kdy se počet vlných parametrů zredukuje na teplotu hvězdy  $T$ , gravitační zrychlení  $\log g$ , rotační rychlost  $v_\Omega$  a inklinací úhel  $i$ . Protože v případě samostatné hvězdy je možné určit pouze průmět rotační rychlosti vzhledem k pozorovateli, poslední dva parametry se nahradí velikostí průmětu rotační rychlosti do směru k pozorovateli  $v = v_\Omega \sin i$ .

Testem schopností modelování profilů spektrálních čar nepulzujících hvězd byl pokus namodelovat spektrum hvězdy  $\eta$  UMa. Toto spektrum bylo pořízeno pomocí spektrografu HEROS na dvoumetrovém dalekohledu AV ČR v Ondřejově. Spektrum sp5211 bylo získáno 10. prosince 2002, doba expozice byla 3600 s. Zběžná prohlídka spektra ukazuje výrazné čáry H I a He I, je tedy možné odhadnout spektrální typ hvězdy a její povrchovou teplotu. Pomocí tohoto odhadu byla vygenerována spektra pro polární teplotu  $T_p = [14500, 15500, 16500, 17500, 18500]$ K,  $\log g = 4.1$  a  $v_\Omega \sin i = [20, 50, 80, 100, 130, 150, 180, 200, 230]$ km  $\cdot$  s $^{-1}$ , která byla srovnána s naměřeným, rektifikovaným spektrem. Jako nejlepší proložení bylo zvoleno takové, kde byl minimalizovaný součet  $b$

$$b = \sum_{\lambda_i} \left( I_{\text{sp}}(\lambda_i) - I_{\text{synt}}(\lambda_i) \right)^2, \quad (107)$$

kde  $I_{\text{sp}}(\lambda_i)$  je intenzita měřeného rektifikovaného spektra na vlnové délce  $\lambda_i$  a  $I_{\text{synt}}(\lambda_i)$  intenzita syntetického spektra na stejné vlnové délce. Součet je prováděn pro všechny vlnové délky  $\lambda_i$ , které jsou určeny vlnovými délkami měřeného spektra v rozmezí 407.0 – 413.5 nm, 430.0 – 440.0 nm, 445.0 – 450.0 nm a 666.5 – 666.8 nm. Pokud v syntetickém spektru chybí hodnota pro tuto vlnovou délku, je tato hodnota interpolována pomocí hodnot  $I_1 = I_{\text{synt}}(\lambda_1)$  a  $I_2 = I_{\text{synt}}(\lambda_2)$  vztahem

$$I_{\text{synt}}(\lambda_i) = I_1 + I_2 \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_i - \lambda_1} (\lambda_i - \lambda_1). \quad (108)$$

Minimum hodnoty  $b$ , definované vztahem (107) je pro parametry  $T_{\text{pol}} = 16500$  K a  $v = v_\Omega \sin i = 130$  km  $\cdot$  s $^{-1}$ . Hlavním parametrem, určujícím přesnost získaných hodnot je pokrytí vstupních syntetických profilů, které jsou spočítány v kroku  $\delta T = 1000$  K a  $\delta \log g = 0.1$  cgs dex, zatímco průmět rotační rychlosti může být měněn libovolně. Z této úvahy plynou i určené chyby výsledků:  $T = (16500 \pm 500)$  K,  $v = (130 \pm 15)$  km  $\cdot$  s $^{-1}$ .

Zajímavé je srovnání takto získaných výsledků s výsledky získanými různými metodami. (Gulati, 1989) odvodil z fotometrických pozorování  $T_{\text{ef}} = 16800$  K, (Sokolov,

1995) pomocí prokládání kontinua určil teplotu na  $T_{\text{ef}} = (17200 \pm 1000)$  K. Asi nejzajímavější je srovnání s prací (Adelman, 2002), ve které je určena povrchová teplota hvězdy  $\eta$  UMa ze spektroskopických pozorování čáry  $H_\gamma$  ( $T_{\text{ef}} = 16900$  K) i z fotometrických dat ( $T_{\text{ef}} = 17300$  K).

Mnou určená hodnota  $T_{\text{ef}}$  je v rámci chyb totožná s výsledky publikovanými v pracích (Gulati, 1989), (Sokolov, 1995) a s hodnotami získanými ze spektroskopických pozorování publikovaných v práci (Adelman, 2002). Rozdíl mezi výsledky jednotlivých metod je lze ilustrovat na případě práce (Adelman, 2002).

### 5.3 Modelování spektrálních čar neradiálně pulzujících hvězd

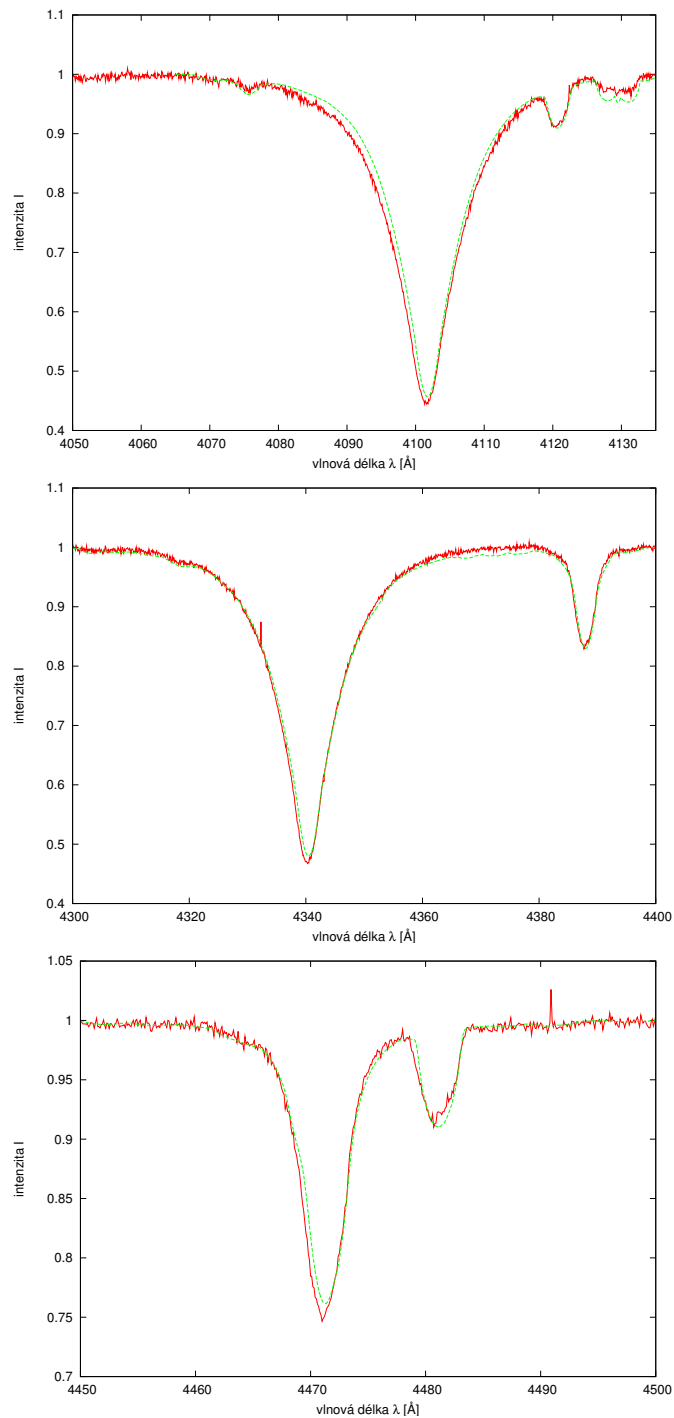
Dalším krokem v modelování profilů spektrálních čar je již samotné modelování neradiálních pulzací. Oproti modelům nepulzujících hvězd je zapotřebí definovat odpovídajícími příkazy parametry pulzačního módu. Proces zpracování se neliší od předchozího případu. Výstupem zde ale není pouze jedno spektrum, ale sada spekter odpovídajícím různým, předem definovaným fázím pulzačního módu. Pomocí programů BRUCE/KYLIE je možné namodelovat spektra ekvidistantně rozdělená během celé periody. Této vlastnosti je ve velké většině případů využito. Výsledek takovéto simulace je znázorněn na obr. 5.

Spektroskopické efekty neradiálních pulzací nejsou často na originálních spektrech snadno rozlišitelné. Změny profilů spektrálních čar se ale stanou nápadnými, pokud vytvoříme tzv. diferenční spektra, tj. rozdíl mezi pozorovaným spektrem a zprůměrovaným spektrem. Tento proces může být zapsán vztahem

$$I_{n,d}(\lambda) = I_n(\lambda) - \sum_{i=1}^N I_i(\lambda), \quad (109)$$

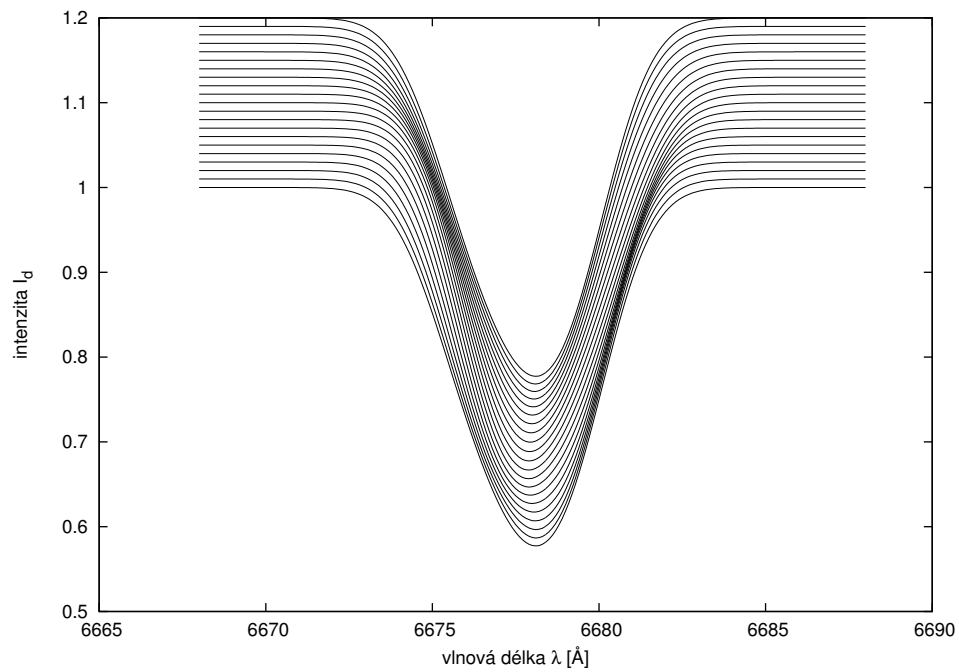
kde  $I_{n,d}(\lambda)$  je intenzita  $n$ -tého diferenčního spektra,  $I_n(\lambda)$  je intenzita  $n$ -tého originálního spektra a součet v posledním členu rovnice probíhá přes všechna změřená spektra. Při tomto postupu je nutné dohlédnout na to, aby měřená spektra byla rovnoměrně rozptýlena podél celé periody, což většinou bývá dobře splněno u hvězd, jejichž perioda není násobkem celého dne. Příklad namodelovaných diferenčních profilů je na obr. 6.

Vlastní modelování profilů spektrální čáry určité neradiálně pulzující hvězdy spočívá v určení paramterů modelu. Těmi jsou pulzační čísla  $l$  a  $m$ , amplituda pulzací  $v_p$  a perioda  $P$  a fyzické parametry hvězdy jako polární teplota  $T_p$ , rotační rychlost  $v_\Omega$ , inklinací úhel  $i$  a gravitační zrychlení  $g$ . Počet možných kombinací paramterů je vysoký a hledání správného řešení metodou pokus–omyl je velmi neefektivní. Z tohoto důvodu se v některých pracích (např. (Rivinius, 2001)) přidávají dodatečné předpoklady o pulzačních módech (např. omezení na prográdní nebo retrográdní módy, omezení na určité pulzační čísla), nebo se možné parametry určují pomocí dopplerovského zobrazování nebo momentové metody, kterou se budu zabývat v následující kapitole.



Obrázek 4: Srovnání pozorovaného a modelovaného spektra. Červenou čarou je vyneseno průběh spektra *sp5211* hvězdy  $\eta$  UMa, zelenou čarou modelované spektrum pro  $T_{\text{pol}} = 16500$  K,  $\log g = 4.1$ ,  $v_{\Omega} \sin i = 130 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . První graf (nahore) zachycuje čáry O II 407.5686 nm,  $H_{\delta}$  410.1737 nm, He I 412.0993 nm, Si II 412.8053 nm, Fe I 412.946 nm, O II 4129.34 nm a Si II 413.0884 nm, druhý graf (uprostřed) zachycuje čáry  $H_{\gamma}$  434.0468 nm a He I 4387.928 nm a třetí graf (dole) zachycuje čáry He I 446.992 nm, Mg II 448.1129 nm a Mg II 448.1327 nm.





Obrázek 5: Ukázka modelovaných spekter. V grafu je vyneseno 20 spekter pulzačního módu  $l = 2$ ,  $m = -2$  při  $v_p = 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_\Omega = 150 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Každé spektrum je pro přehlednost posunuto od předchozího na svislé ose o 1% intenzity kontinua výše.

Tabulka 2: Parametry konfiguračního souboru programu BRUCE. Polotučně jsou uvedeny názvy sekcí.

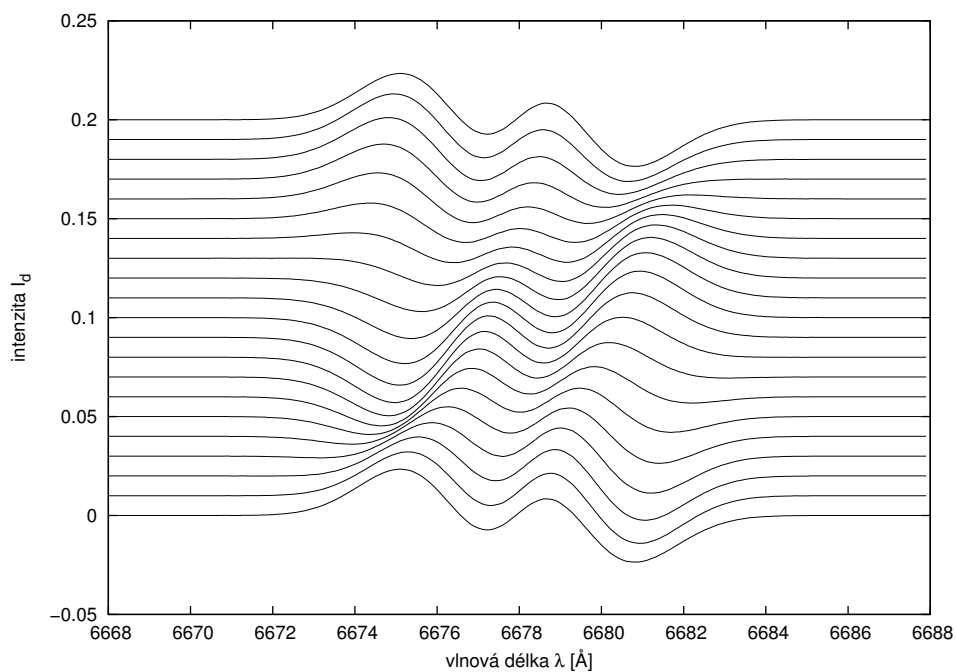
<b>stellar</b>	
polar_radius	polární poloměr hvězdy v jednotkách poloměru Slunce
polar_temperature	teplota na pólu hvězdy v Kelvinech
polar_log_gravity	logaritmus gravitačního zrychlení na pólu v cgs dex
stellar_mass	hmotnost hvězdy v jednotkách hmotnosti Slunce
equatoreal_velocity	rovníková rychlost hvězdy v km/s
polar_inclination	inklinační úhel (sklon osy rotace)
zeipel_beta	koeficient gravitačního ztemnění
<b>fields</b>	
number_of_fields	počet generovaných souborů
dump_filestub	společná část názvu souboru
matrix_dimension	rozměr matice použité pro výpočet
normal_fields	radiální rychlost elementu hvězdy je vztažena k povrchu hvězdy, nikoli k radiálnímu vektoru
temperature_effects	započte lokální změny povrchové teploty vlivem nrp
area_effects	započte změny plochy hvězdy vlivem nrp
normal_effects	započte změny normály k povrchu vlivem nrp
horizontal_velocity_fields	započte horizontální pohyb elementu povrchu
physical_amplitudes	amplituda rychlosti pulzace je brána jako fyzická amplituda, v opačném případě jako matematická amplituda
<b>mode</b>	
l_value	harmonický stupeň
m_value	azimutální číslo
velocity_amplitude	amplituda rychlosti pulzací
corotating_period	perioda pulzací v hodinách
observers_period	pozorovaná perioda pulzací v hodinách
period_from_nu	nastaví periodu vzhledem k frekvenci $\nu$
initial_phase	nastaví počáteční fázi
na_amplitude_shift	nadiabatický teplotní škálovací faktor
na_phase_shift	nadiabatický teplotní fázový posun
<b>timings</b>	
start_time	počáteční čas
finish_time	koncový čas
use_mode_parameter	nastaví počátek výpočtů na 0 hodin, konec na pozorovanou periodu $n$ -tého uvedeného módu

Tabulka 3: Parametry konfiguračního souboru programu KYLIE. Polotučně jsou uvedeny názvy sekcí.

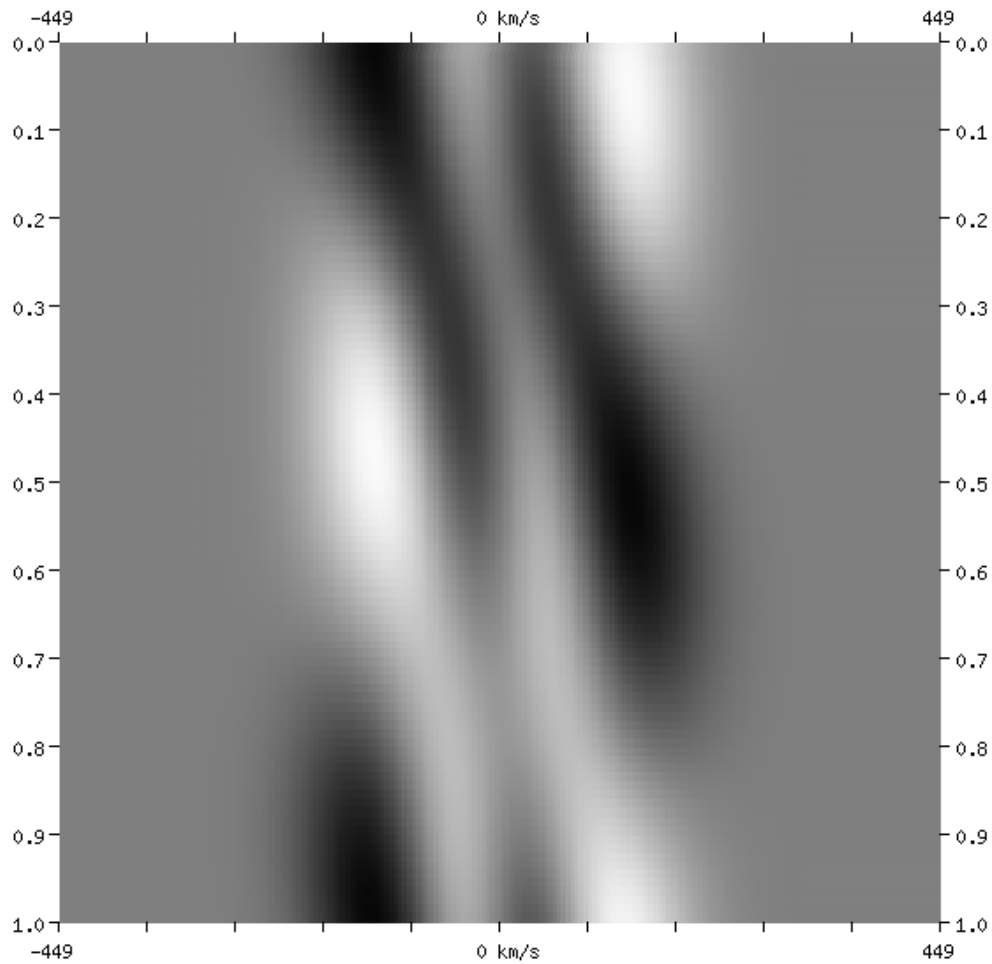
<b>fields</b>	
number_of_fields	počet generovaných souborů (musí souhlasit s počtem uvedeným v konfiguračním souboru programu BRUCE)
dump_filestub	společná část vstupního i výstupního souboru
limb_u_override	koefficient okrajového ztemnění
<b>waveband</b>	
start_wavelength	počáteční vlnová délka počítaného spektra v Å
finish_wavelength	koncová vlnová délka počítaného spektra v Å
wavelength_resolution	rozlišení počítaného spektra v Å
<b>wavepoint</b>	
wavelength	vlnová délka bodu počítaného spektra v Å

Tabulka 4: Hodnoty parametru  $b$  pro spektrum sp5211 hvězdy  $\eta$  UMa v závislosti na polární teplotě  $T_{\text{pol}}$  a průmětu rotační rychlosti do směru k pozorovateli  $v = v_{\Omega} \sin i$ . Minimum  $b$  udává nejlepší proložení a nejpravděpodobnější kombinaci parametrů.

$T_{\text{pol}}$	14500 K	15500 K	16500 K	17500 K
$v$				
20	2.62	2.00	2.02	2.50
50	1.56	0.95	0.98	1.43
80	1.33	0.76	0.65	1.20
100	1.02	0.40	0.37	0.77
130	0.96	0.32	0.28	0.65
150	0.97	0.34	0.29	0.64
180	1.05	0.43	0.37	0.71
200	1.12	0.51	0.45	0.78
230	1.71	0.74	0.57	0.77



Obrázek 6: Ukázka modelovaných diferenčních spekter. V grafu je vyneseno 20 diferenčních spekter pulzačního módu  $l = 2$ ,  $m = -2$  při  $v_p = 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_\Omega = 150 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Každé diferenční spektrum je pro přehlednost posunuto od předchozího o 1% intenzity kontinua výše.



Obrázek 7: Znázornění změn profilů spektrálních čar v šedé reprezentaci. Na svislé ose je vynesena fáze, na vodorovné ose rychlost vůči středu čáry, která je s vlnovou délkou svázána rovnicí (7). Tmavá místa na obrázku představují místa s vyšší intenzitou záření oproti spektru, vzniklému zprůměrováním všech spekter ve fázi. Znázorněný je pulzační mód  $l = 2$ ,  $m = +2$  s gaussovským vstupním profilem,  $v_p = 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_\Omega = 150 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 6 Identifikace módů neradiálně pulzujících hvězd pomocí momentové metody

Důležitým problémem asteroseismologie je identifikace módů neradiálně pulzujících hvězd. Programy BRUCE/KYLIE jsou ideálním nástrojem pro modelování spekter neradiálně pulzujících hvězd a jejich přímou aplikací jsou metody identifikace pulzačních módů postavené na prokládání profilů spektrálních čar tak, jak jsou popsány v čtvrté kapitole. Zajímavým úkolem je srovnání nástrojů, které používají různé metody identifikace módů, a proto jsem se rozhodl v další části analyzovat spektra generovaná programy BRUCE/KYLIE pomocí momentové metody.

### 6.1 Výpočet momentů spektrálních čar

Vstupními daty momentové metody jsou první tři momenty spektrální čáry, definované vztahem (92), (93), (94). Protože měření spektrální čáry nemá spojitý charakter, je nutné nahradit integraci sumací přes vhodný interval vlnových délek. V případě analýzy modelovaných profilů spektrálních čar, kdy vstupním profilem byl gaussovský profil, je určení vhodného intervalu jednoduché, postačí vzít symetrický interval kolem středu čáry, na jehož okraji je intenzita záření rektifikovaného spektra blízká jedné. V případě reálných dat a modelovaných spekter, kde byly použity teoreticky spočtené přirozené profily je situace složitější, protože kromě měřené čáry zde jsou často přítomny slabší spektrální čáry, které zasahují do měřené spektrální čáry. Protože většinou zasahují do křídel měřené spektrální čáry, je nutné tyto efekty ošetřit, protože jejich vliv není zejména u vyšších momentů zanedbatelný. Spektrální čára navíc může být posunuta (např. vlivem nenulové radiální složky rychlosti vlastního pohybu).

Pro výpočet momentů jsem proto použil postup uvedený v (Aerts, 2003). Nejdříve spočteme pomocné, malé nenormalizované momenty pomocí vztahu

$$m_0 = \sum (1 - I(\lambda_i)) \Delta v_i, \quad (110)$$

$$m_1 = \sum (1 - I(\lambda_i)) v_i \Delta v_i, \quad (111)$$

kde  $v_i$  je rychlost odpovídající vlnové délce  $\lambda_i$  a  $I(v_i)$  je intenzita na vlnové délce  $\lambda_i$  a  $\Delta v_i = v_i - v_{(i-1)}$  je rozdíl rychlostí dvou sousedních bodů spektra. Potom průměrná rychlost je rovna

$$V_0 = \frac{m_1}{m_0}. \quad (112)$$

Dále spočítáme velké nenormalizované momenty podle vztahu

$$M_0 = \sum (1 - (\lambda_i)) \Delta v_i, \quad (113)$$

$$M_1 = \sum (1 - (\lambda_i)) (v_i - V_0) \Delta v_i, \quad (114)$$

$$M_2 = \sum (1 - (\lambda_i)) (v_i - V_0)^2 \Delta v_i, \quad (115)$$

$$M_3 = \sum (1 - (\lambda_i)) (v_i - V_0)^3 \Delta v_i. \quad (116)$$

Vlastní momenty  $\langle v^j \rangle$  pro  $j = 1, 2, 3$  jsou rovny

$$\langle v^j \rangle = \frac{M_j}{M_0} \quad (117)$$

a jejich rozměr je  $(\text{km/s})^j$ .

## 6.2 Aplikace momentové metody na syntetická spektra

Vstupními daty pro test momentové metody jsou spektra programu BRUCE/KYLIE. Bylo vygenerováno několik sad ve dvou variantách; jedna s gaussovským vstupním profilem spektrální čáry a druhá se syntetickým vstupním profilem spektrální čáry, založeném na Kuruczově LTE modelu. Počet spekter v jedné sadě se lišil podle zvoleného vstupního modelu, pro gaussovský profil bylo v jedné sadě 100 spekter rovnoměrně rozložených během periody, pro syntetický profil bylo z důvodu delšího výpočetního času pouze 20 spekter.

Šířka i hloubka gaussovského vstupního profilu byla přizpůsobena přirozenému profilu odpovídající teploty a gravitačního zrychlení. Přesto je nutné počítat s tím, že gaussovský profil nevystihuje reálný profil spektrální čáry (viz obr. 8), a proto se mohou vypočtené momenty lišit. Rozdíl je patrný zejména v křídlech spektrální čáry, což se projeví zejména u druhého momentu spektrální čáry a tomu odpovídajícímu koeficientu  $EE$  definovaným vztahem (93).

Na výpočet momentů jednotlivých spekter jsem použil postup uvedený v předchozí kapitole pomocí vlastního programu `mkmoment`. Z takto určených momentů je poté možné přímo určit koeficienty  $AA$ , ...,  $RST$  definované (92), (93), (94), které již jsou přímým vstupem pro výpočet diskriminantu  $\Gamma_l^n$  (95) sloužícího k identifikaci módu. Kromě těchto koeficientů je třeba je třeba ještě určit frekvenci  $\omega$  a fázi  $\psi$ , které lze získat snadno proložením prvního momentu.

K vlastní identifikaci byl použit program `discriminant` autorky Conny Aertsové. Vstupní parametry programu `discriminant` odpovídaly vstupním parametrům modelů generovaných programy BRUCE/KYLIE. Hodnota diskriminantu byla pro každý model spočítána pro módy  $0 \leq l \leq 4$ ,  $-l \leq m \leq l$ , inklinací úhly  $20^\circ \leq i \leq 80^\circ$  v kroku po  $10^\circ$ , pulzační rychlosti  $2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_p \leq 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  v kroku  $2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a rotační rychlosti  $2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_\Omega \leq 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  v kroku  $2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Výsledky programu `discriminant` jsou v tabulce 7, ze které je vidět, že získané parametry neodpovídají vstupním parametrům modelů. Příčinu tohoto rozporu se nepodařilo nalézt, lze tedy pouze konstatovat, že postupy momentové metody a modelování profilů spektrálních čar pomocí programů BRUCE/KYLIE nejsou navzájem slučitelné.

Tabulka 5: Parametry jednotlivých modelů hvězd, použitých pro test momentové metody.

model	1	2	3
$T_{\text{pol}}$	16000 K	16000 K	16000 K
$\log g$	4.15 cgs dex	4.15 cgs dex	4.15 cgs dex
$v_{\text{eq}}$	6 km/s	6 km/s	10 km/s
$i$	$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$
$l$	2	2	1
$m$	2	2	1
$v$	10 km/s	10 km/s	10 km/s
$P$	5 hod	5 hod	5 hod

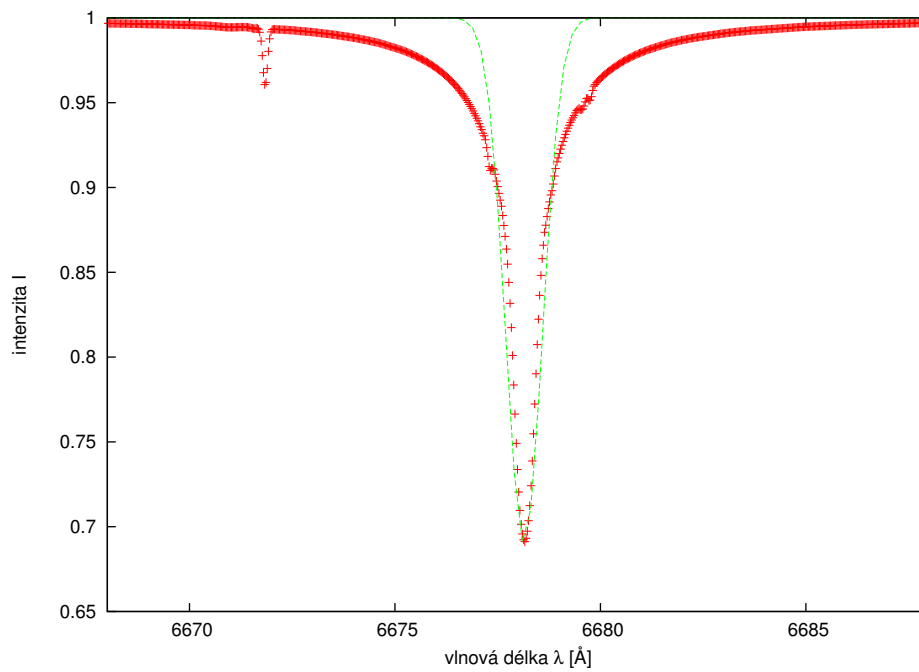
Tabulka 6: Parametry proložení jednotlivých modelů. Číslo v záhlaví tabulky označuje příslušný model, znak  $G$ , resp.  $S$  použitý vstupní profil (gaussovský, resp. syntetický).

model	1G	1S	2G	2S	3G	3S
$AA$	5.2400	4.636	4.0480	4.000	6.1078	-5.406
[km/s]	$\pm 0.0016$	$\pm 0.003$	$\pm 0.0012$	$\pm 0.003$	$\pm 0.0006$	$\pm 0.006$
$CC$	15.58	11	3.9	4	18.28	14
[km/s] <sup>2</sup>	$\pm 0.13$	$\pm 3$	$\pm 1.0$	$\pm 3$	$\pm 0.04$	$\pm 4$
$DD$	-11.51	-9	12.4	-14	-13.54	11
[km/s] <sup>2</sup>	$\pm 0.13$	$\pm 3$	$\pm 1.0$	$\pm 3$	$\pm 0.03$	$\pm 4$
$EE$	2784.89	4538	7681.0	4538	2797.22	4547
[km/s] <sup>2</sup>	$\pm 0.09$	$\pm 2$	$\pm 0.8$	$\pm 2$	$\pm 0.03$	$\pm 3$
$FF$	-60	0	0	0	-60	0
[km/s] <sup>3</sup>	$\pm 30$	$\pm 900$	$\pm 3000$	$\pm 900$	$\pm 20$	$\pm 900$
$GG$	0	0	0	0	0	0
[km/s] <sup>3</sup>	$\pm 30$	$\pm 900$	$\pm 3000$	$\pm 900$	$\pm 20$	$\pm 900$
$RST$	43560	40700	80000	35200	-50920	-47600
[km/s] <sup>3</sup>	$\pm 30$	$\pm 900$	$\pm 3000$	$\pm 900$	$\pm 20$	$\pm 900$

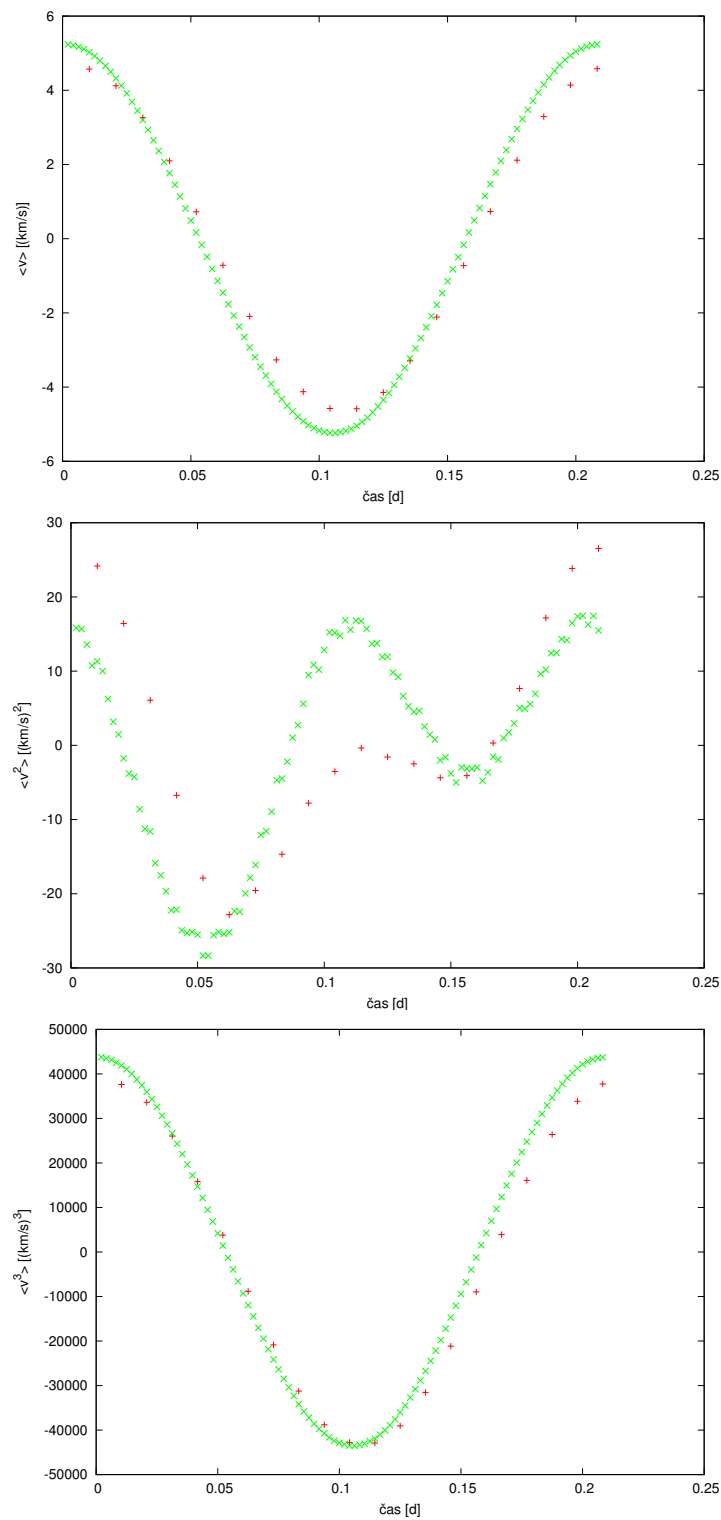


Tabulka 7: Výsledky momentové metody a jejich srovnání s vstupními parametry modelů. Jsou uvedeny tři nejmenší hodnoty diskriminantu  $\gamma_l^m$ . Vstupní parametry modelů jsou vyznačeny polotučným písmem.

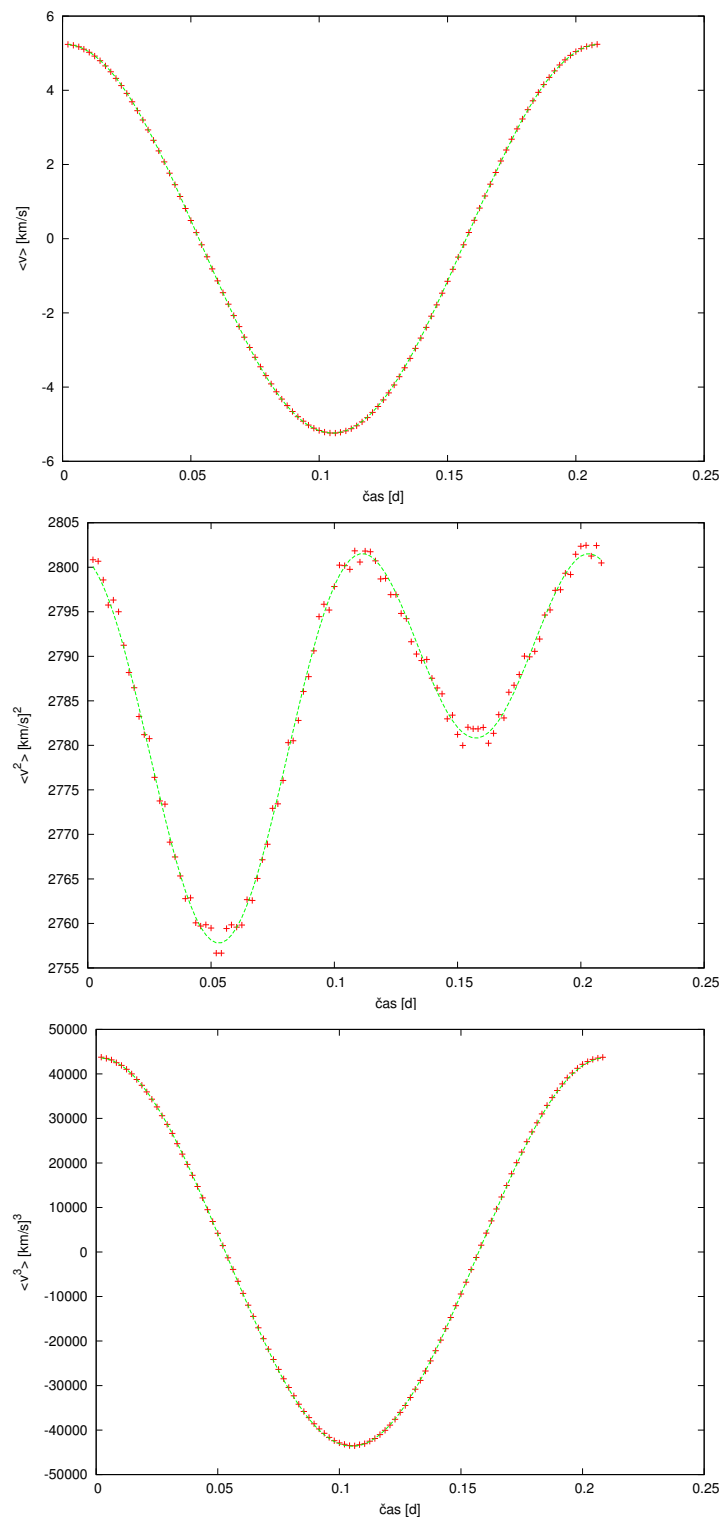
model	$l$	$m$	$\gamma_l^m$	$v_p$ [km/s]	$i$ [°]	$v_{eq}$ [km/s]
1G	<b>2</b>	<b>1</b>	—	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>6</b>
	3	1	1.02	18	10	2
	3	2	1.22	20	40	16
	3	3	1.41	80	12	50
1S	<b>2</b>	<b>1</b>	—	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>6</b>
	4	4	9.17	28	80	24
	4	1	9.28	30	30	20
	3	1	9.87	30	20	24
2G	<b>2</b>	<b>2</b>	—	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>6</b>
	1	1	15.45	2	20	2
	1	0	15.45	2	70	2
	2	2	15.45	2	10	2
2S	<b>2</b>	<b>2</b>	—	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>6</b>
	1	1	11.78	2	80	2
	2	1	11.80	2	50	2
	2	2	11.80	2	80	2
3G	<b>1</b>	<b>1</b>	—	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>10</b>
	4	3	1.01	17	50	20
	4	2	1.04	17	20	18
	4	1	1.05	15	15	14
3S	<b>1</b>	<b>1</b>	—	<b>10</b>	<b>60</b>	<b>10</b>
	4	2	7.55	19	20	14
	4	0	8.05	19	35	2
	3	0	8.08	19	40	20



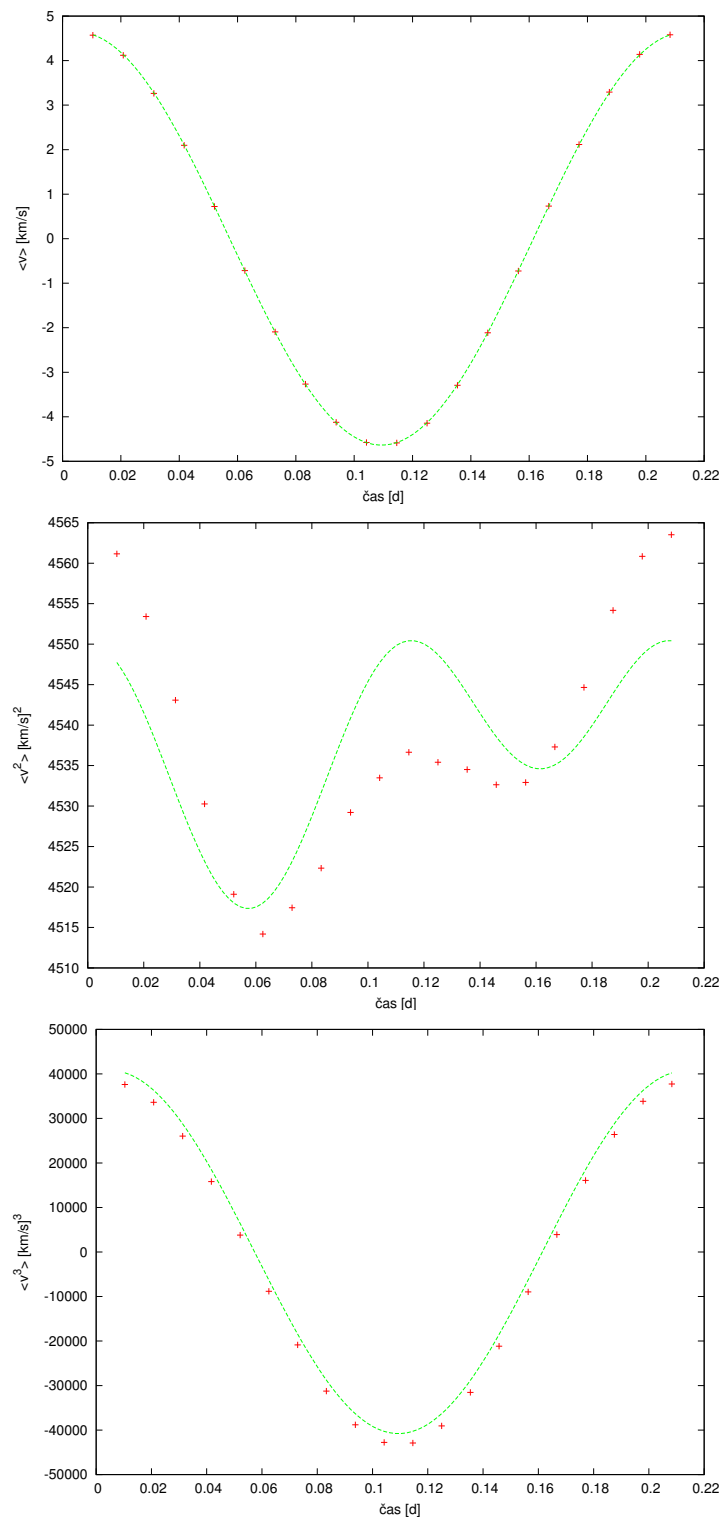
Obrázek 8: Srovnání vstupních profilů: červenými body je vyznačen syntetický profil vypočítaný na základě Kuruczova LTE modelu (viz. tabulka 1) pro  $T = 16000\text{K}$ , zelenou čarou gaussovský profil s parametry  $\sigma = 0.48$ ,  $d = 0.31$ .



Obrázek 9: Závislost prvního (nahore), druhého (uprostřed) a třetího (dole) momentu spektrální čáry He I 667.8 nm na čase pro model č. 1. Zelenými body jsou vyznačena data pro gaussovský vstupní profil, červenými body pro syntetický vstupní profil. Pro přehlednost byla u druhého momentu odečtena hodnota koeficientu  $EE$ .



Obrázek 10: Závislost prvního (nahore), druhého (uprostřed) a třetího (dole) momentu spektrální čáry He I 667.8 nm (gaussovský vstupní profil, model č. 1) na čase a proložení podle rovnic (92), (93), (94).



Obrázek 11: Závislost prvního (nahore), druhého (uprostřed) a třetího (dole) momentu spektrální čáry He I 667.8 nm (syntetický vstupní profil, model č. 1) na čase a proložení podle rovnic (92), (93), (94).

## 7 Hvězda 6 Cep

Hlavní motivací pro modelování neradiálních pulzací je jejich aplikace na reálná data. Vhodným kandidátem se zdá být hvězda 6 Cephei, u které byly nalezeny periodické změny profilů spektrální čáry. Přestože se během práce nepodařilo završit tuto práci identifikací módu neradiálních pulzací nebo důkazem, že pozorované změny nelze popsat aparátem neradiálních pulzací, uvádím zde současný stav analýzy napozorovaných spekter.

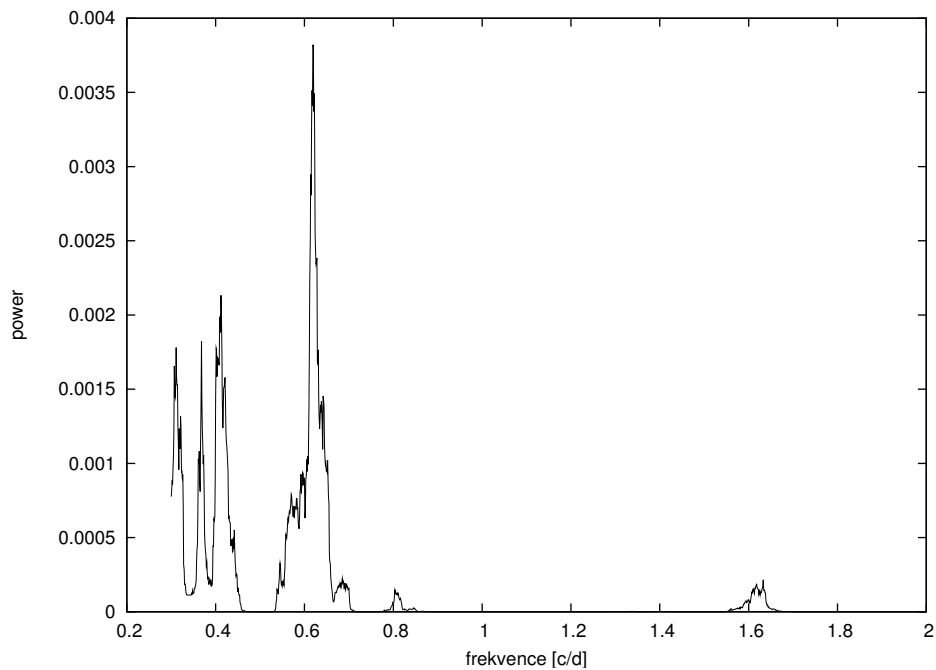
Tabulka 8: Základní údaje o hvězdě 6 Cep (zdroj: databáze SIMBAD).

identifikace	6 Cep (HR 8171, HD 203467)
$\alpha$ (J2000.0)	22 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 22.22 <sup>s</sup> (J2000.0)
$\delta$ (J2000.0)	+69° 52' 18.6''
spektrální typ	B1Ve
$M_V$	5.181 mag

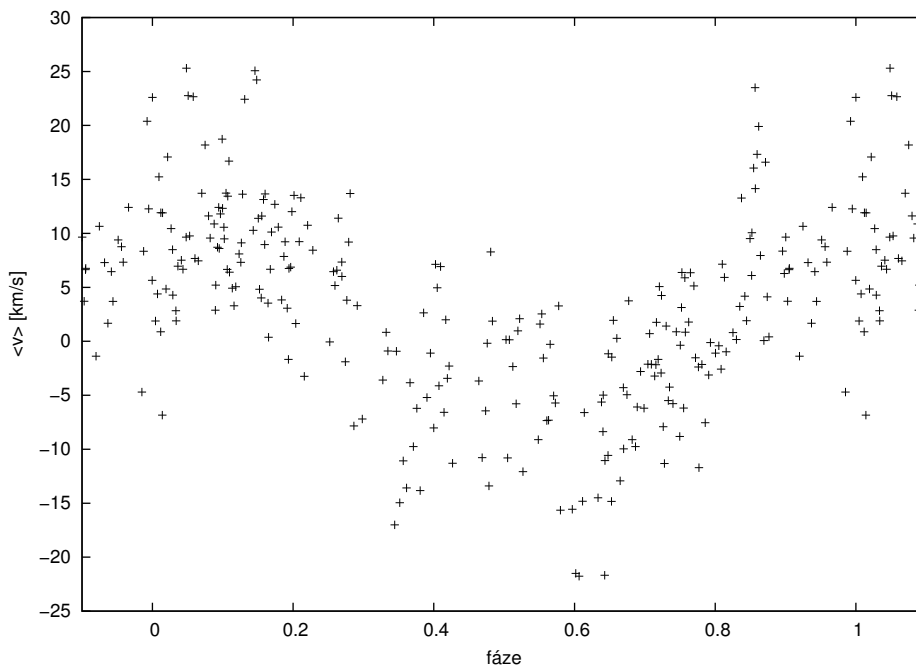
Soubor napozorovaných dat tvoří 256 spekter získaných během srpna 2001 pomocí 1.2metrového dalekohledu DAO ve Victorii v Kanadě. Tato spektra zachycují oblast 616 — 676 nm s disperzí 0.015 nm/px. V tomto intervalu vlnových délek se nacházejí dvě významné čáry:  $H_\alpha$  na se středem na vlnové délce 656.2 nm a He I na vlnové délce 667.8 nm. Vodíková čára je emisní, což svědčí o obálce v okolí hvězdy, heliová čára je absorpční.

Při hledání periodicity změn spektrálních čar byl použit první moment spektrální čáry He I 667.8 nm, definovaný vztahem (114). Analýza dat pomocí programu LANCELOT (viz obr. 12, 13) ukázala na změnu profilů spektrální čáry s periodou  $P = 1.62$  dne. Diferenční profily spektrálních čar v šedé reprezentaci složené s touto periodou jsou znázorněny na obrázku 14.

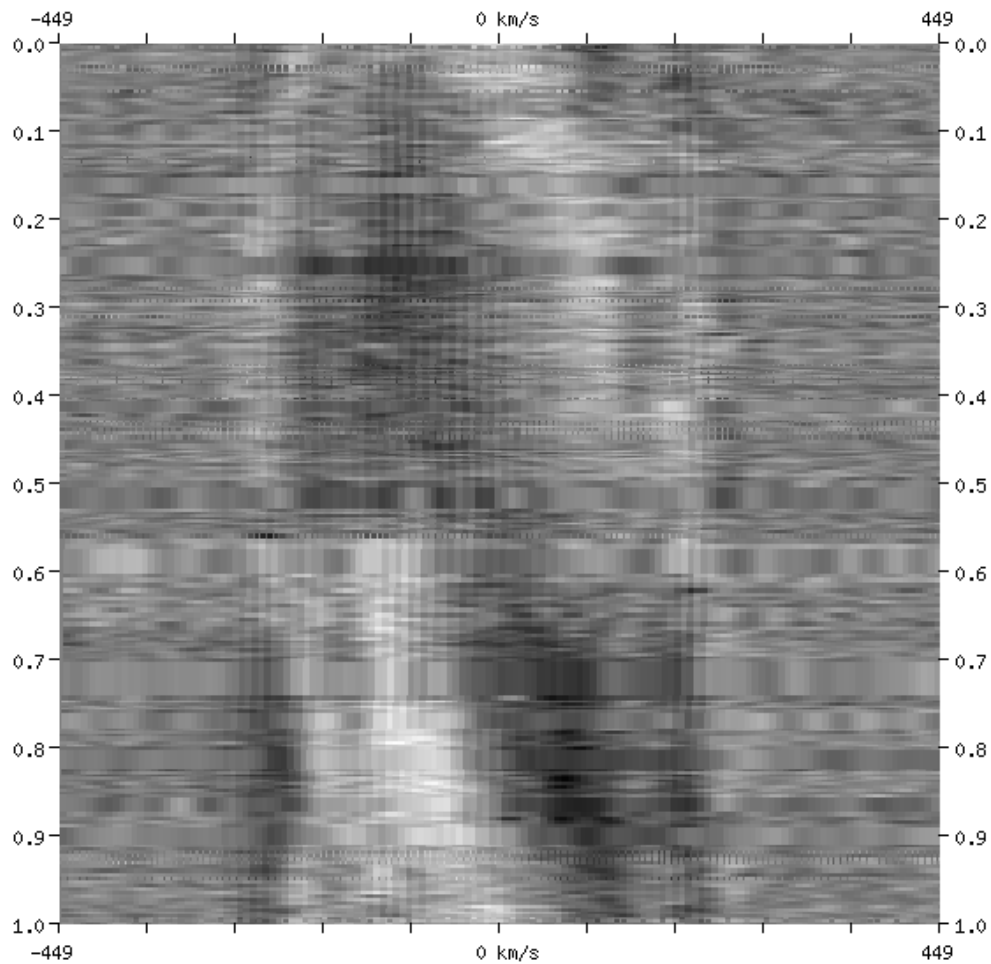
Nalezená perioda, jako i charakter změn profilů spektrálních čar nevylučují možnost, že se jedná o projevy neradiálních pulzací. Bohužel, výsledky prezentované v předchozí kapitole neopravňují k aplikaci momentové metody na naměřená spektra hvězdy 6 Cep a jejímu následnému ověření pomocí modelů programů BRUCE/KYLIE. Proto se v pokračování této práce pokusím aplikovat na pozorovaná data metodu prokládání profilů spektrálních čar popsanou např. v (Rivinius, 2001).



Obrázek 12: Power–spektrum prvního momentu spektrální čáry He I 667.8 nm hvězdy 6 Cep. Nejsilnější signál odpovídá frekvenci  $f = 0.619$  c/d, což odpovídá periodě  $P = 1.62$  dne.



Obrázek 13: Závislost prvního momentu spektrální čáry He I 667.8 nm hvězdy 6 Cep na fázi. Jednotlivá měření jsou složena s periodou  $P = 1.62$  dne. Vynesené hodnoty jsou opraveny o radiální rychlost  $v_r = 12.0$  km  $\cdot$  s $^{-1}$ .



Obrázek 14: Změny profilu spektrální čáry He I 667.8 nm hvězdy 6 Cep. Od 256 spekter byl odečten průměrný profil spektrální čáry. Výsledná diferenční spektra jsou vynesena v šedé reprezentaci v závislosti na fázi. Tmavé odstíny představují místa s vyšší intenzitou záření než má průměrné spektrum na téže vlnové délce, světlé odstíny místa s nižší intenzitou záření než má průměrné spektrum.



## 8 Závěr

Hlavním cílem diplomové práce bylo zprovoznění programového vybavení BRUCE/KYLIE a získání praktických zkušeností s modelováním profilů spektrálních čar neradiálně pulzujících hvězd. Tento úkol byl splněn a to jak pro gaussovský vstupní profil spektrální čáry, tak pro vstupní profil založený na Kuruczově modelu atmosféry (Kurucz, 1993).

Možnosti modelování profilů spektrálních čar byly vyzkoušeny na spektru nepulzující hvězdy  $\eta$  UMa. Jako nejvíce vyhovující se ukázaly být modely spektrálních čar při polární teplotě  $T_p = 16500$  K a  $v_\Omega \sin i = 130$  km  $\cdot$  s $^{-1}$ . Srovnání spekter neradiálně pulzujících hvězd a modelů programů BRUCE/KYLIE nebylo vyzkoušeno kvůli velkému množství volných parametrů a pro časovou náročnost výpočtu.

V další části diplomové práce jsem se zabýval metodami určení parametrů neradiálních pulzací z pozorovaných spekter. Hlavní pozornost jsem věnoval asi nejpropracovanější, tzv. momentové metodě odvozené v (Balona, 1986a), (Aerts, 1992). Ukázalo se, že u spekter generovaných programem BRUCE/KYLIE není schopna momentová metoda správně určit parametry neradiálních pulzací. Pro spektra modelovaná za předpokladu gaussovského vstupního profilu spektrální čáry odpovídá závislost jednotlivých módů na fázi teoreticky odvozeným závislostem, pro vstupní profil odvozený od Kuruczových LTE modelů se již spočtené závislosti liší od teoretických, a to zejména v případě druhého momentu. Toto chování odpovídá nedokonalé aproximaci skutečného profilu spektrální čáry gaussovským. Vzhledem k tomu, že oba profily jsou symetrické podle středu čáry, projeví se odchylky zejména u závislosti sudých momentů. Výsledky momentové metody ovšem ani v případě gaussovského vstupního profilu neodpovídají vstupním parametrům testovaných modelů. Příčinu tohoto nesouhlasu se i přes intenzivní komunikaci s autorkou metody nepodařilo nalézt.

Pro neúspěch momentové metody a časovou náročnost metody prokládání profilu spektrální čáry nebyla modelovaná spektra porovnána s naměřenými daty, konkrétně se spektry hvězdy 6 Cephei. Současný stav analýzy je zachycen v předposlední kapitole, kde je ukázána závislost změn profilu spektrální čáry na fázi pro nejpravděpodobnější periodu  $P = 1.62$  dne.

## 9 Reference

- ADELMAN, S. J. et al. *On the effective temperature and surface gravities of superficially normal main sequence band B and A stars.* 2002, A&A 392, 1031 – 1037.
- AERTS, C. et al. *Mode identification of pulsating stars from line profile variations with the moment method. An example  $\beta$  Cephei star  $\delta$  Ceti.* 1992, A&A 266, 294 – 306.
- AERTS, C. *Mode identification of pulsating stars from line profile variations with the moment method: a more accurate discriminant.* 1996, A&A 314, 115 – 122.
- AERTS, C. *Asteroseismology.* 2003, lecture notes, Catholic University Leuven.
- AERTS, C., 2004, soukromá korespondence.
- ALLARD, F. et al. *The limiting effects of dust in brown dwarf model atmospheres.* 2001, ApJ, 556, 357 – 372.
- BALONA, L. A. *Mode identification from line profile variations.* 1986a, MNRAS, 219, 111 – 129.
- BALONA, L. A. *Mode identification from line profile variations – II. A quantitative least squares algorithm.* 1986b, MNRAS, 220, 647 – 656.
- BOLDIŠ, P. *Bibliografické citace dokumentů podle ČSN ISO 690 a ČSN ISO 690 – 2 (01 0197). Část 1. Citace: metodika a obecná pravidla.* 2002, verze 3.2 .
- BOLDIŠ, P. *Bibliografické citace dokumentů podle ČSN ISO 690 a ČSN ISO 690 – 2 (01 0197). Část 2. Modely a příklady citací u jednotlivých typů dokumentů.* 2002, verze 2.5 .
- COLUZZI, R. *A revised version of the ILLSS Catalogue.* 1993, BICDS, 43, 7.
- CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. *Stellar Oscillations.* 2003, lecture notes, Aarhus University, 5th edition.
- CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. 2004, soukromá korespondence.
- GIES, D. R., KULLAVANIJAYA, A. *The line profile variations of epsilon Persei. I. Evidence for multimode nonradial pulsation.* 1988, ApJ, 326, 813 – 831.
- GULATI, R. K. et al. *Empirical temperature calibrations for early type stars.* 1989, A&ASS 80, 73 – 88.
- GUSTAFSSON, B. et al. *A grid of Model Atmospheres for Metal-deficient Giant Stars I.* 1975, A&A, 42, 407 – 432.
- HAO, J. *Line Profile Analysis of Nonradial Pulsation Modes Based on Doppler Imaging.* 1998, ApJ, 500, 440 – 448.
- HILLIER, D. J. *An iterative method for the solution of the statistical and radiative equilibrium equations in expanding atmospheres.* 1990, A&A, 231, 116 – 124.
- HUBENY, I., LANZ, T. *NLTE line blanketed model atmospheres of hot stars. I. Hybrid Complete Linearization / Accelerated Lambda Iteration Method.* 1995, ApJ, 439, 875 – 904.
- KUBÁT, J. *Fyzika hvězdných atmosfér.* 2003, přednáška, Masarykova Univerzita Brno.
- KURUCZ, R. L. *ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2 km/s grid.* 1993, Cambridge, SAO, CD-ROM.
- LEE, U., SAIO, H. *Line profile variations caused by low-frequency nonradial pulsations of rapidly rotating stars* 1990, ApJ, 349, 570 – 579.
- MIKULÁŠEK, Z. *Úvod do fyziky hvězd a hvězdných soustav.* 2000, skripta, Masarykova univerzita Brno.

- MIKULÁŠEK, Z., KRTIČKA, J. *Fyzika horkých hvězd*. 2003, skripta, Masarykova univerzita Brno.
- NETOLICKÝ, M., 2001, Masarykova univerzita Brno, ročníková práce.
- RIVINIUS, T. et al. *Stellar and circumstellar activity of the Be star  $\mu$  Centauri. III. Multiline nonradial pulsation modelling*. 2001, A&A, 369, 1058 – 1077.
- RIVINIUS, T., 2002, soukromá korespondence.
- RUTTEN, R. J. *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*. 2000, lecture notes, Utrecht University, 7th edition.
- SOKOLOV, N. A. *The determination of  $T_{\text{eff}}$  of B, A and F main sequence stars from the continuum between 3200 Å and 3600 Å*. 1995, A&ASS 110, 553 – 564.
- TOWNSEND, R. H. D. *Non-Radial Pulsation in Early-Type Stars*. 1997, UCL London, Ph. D. thesis.
- TOWNSEND, R. H. D., 2003, soukromá korespondence.
- WERNER, K. *Construction of non-LTE model atmospheres using approximate lambda operators*. 1986, A&A, 161, 177 – 182.