MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Diplomová práce

BRNO 2016 STANISLAV PALÁČEK

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Počátek historie řešení problému tří těles

Diplomová práce

Stanislav Paláček

Vedoucí práce: doc. RNDr. Vladimír Štefl, CSc. **Brno 2016**

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Stanislav Paláček Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce:	Počátek historie řešení problému tří těles
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Teoretická fyzika a astrofyzika
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Vladimír Štefl, CSc.
Akademický rok:	2015/2016
Počet stran:	IX + 78
Klíčová slova:	problém tří těles; nebeská mechanika; elementy dráhy; planety; Měsíc

Bibliographic Entry

Author:	Bc. Stanislav Paláček Faculty of Science, Masaryk University Department of Physics and Astrophysics
Title of Thesis:	Beginning of history of problem three bodies
Degree Programme:	Physics
Field of Study:	Theoretical Physics and Astrophysics
Supervisor:	doc. RNDr. Vladimír Štefl, CSc.
Academic Year:	2015/2016
Number of Pages:	IX + 78
Keywords:	three-body problem; celestial mechanics; orbital elements; planets; Moon

Abstrakt

Tato diplomová práce se věnuje způsobům řešení problému tří těles vyvinutých Newtonem, Eulerem, Lagrangem a Laplacem pro nalezení pohybu významných těles Sluneční soustavy. Vychází z původních prací a také jejich studií. Newton určil síly působící v systému tří těles a popsal jejich účinek na oběžné dráhy. Významnější pokrok v řešení problému přišel s rozvojem matematiky. Leonhard Euler začal využívat rozvoje do trigonometrických řad a naznačil metodu změn dráhových parametrů. Lagrange tuto metodu rozpracoval, zavedl poruchovou funkci a odvodil zákony zachování. Laplace s využitím Lagrangeovy poruchové funkce dokázal stabilitu systému a vysvětlil pozorované nerovnosti v pohybu Jupiteru a Saturnu.

Abstract

This diploma thesis deals with manners of solving three-body problem formed by Newton, Euler, Lagrange and Laplace for finding motions of solar system bodies. Text of this thesis is based on the original publications, papers and their studies. Newton determined the forces acting on the system of three bodies and described their effects on the orbit. More significant progress in solving the problem came with the development of mathematics. Leonhard Euler started to use trigonometric series development and suggested method of the variation of orbital elements. Lagrange developed this method, introduced perturbing function and derived conservation laws. Laplace with using of perturbing function proved stability of the solar system and explained the inequalities in the motions of Jupiter and Saturn.

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student	**: Bc. Stanislav Paláček, učo 379185**
Studijní program	**: Fyzika**
Studijní obor	**: Teoretická fyzika a astrofyzika**

Ředitel Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Počátek historie řešení problému tří těles

Beginning of history solution of problem three bodies

Zásady pro vypracování: Určování pohybů tří těles, které vykonávají pod vlivem gravitačního působení, je jedním z hlavních úkolů nebeské mechaniky. Tento problém měl v historii astronomie zcela zásadní roli, byl použit při řešení soustav Země - Měsíc - Slunce jakož i Jupiter - Saturn - Slunce. Cílem diplomové práce je historické mapování prvních kroků s ohledem na použité matematické metody v tomto směru v 17. a 18. století. Přitom bude vycházeno jak z původních prací tak ze studií o nich.

Jazyk závěrečné práce	: český, anglický nebo slovenský
Vedoucí diplomové práce	: doc. RNDr. Vladimír Štefl, CSc.
Datum zadání diplomové práce	: prosinec 2015
Datum odevzdání diplomové práce	: dle harmonogramu ak. roku 2015/2016

V Brně prosinec 2015

von Unge

Rikard von Unge

ředitel ÚTFA

Zadání diplomové práce převzal dne: 16. 12. 2015

Podpis studenta

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Vladimíru Šteflovi za trpělivé vedení během mého vypracovávání této práce. Děkuji rodině, která mě podporuje v mém studiu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 12. května 2016

. . . .
Stanislav Paláček

Obsah

Úvod

Problém tří těles spočívá v nalezení pohybu těles, které se vzájemně přitahují vlivem gravitační síly. Ke každému tělesu lze napsat tři diferenciální rovnice druhého řádu, někdy nazývané jako pohybové rovnice. Jejich analytické řešení lze nalézt pouze ve tvaru nekonečných řad. S rozvojem moderní výpočetní techniky lze řešení snadno hledat pomocí některé z numerických metod. V případě, že hmotnost jednoho ze tří těles je zanedbatelná, takže neovlivňuje pohyb zbývajících dvou těles, hovoříme o omezeném problému tří těles. Z něho vyplývají známé Lagrangeovy librační body.O mnoho let později se Poincarého studium omezeného problému tří těles stalo základem pro teorii chaosu.

První se problému tří těles věnoval Isaac Newton, další jeho následovníci byli Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, Jacobi, Poincaré atd. V této práci se zabývám spipsy prvních čtyř uvedených. Hlavní motivací bylo zdokonalení efemerid kosmických těles pozorovaných na obloze. S tím souvisí přesné určení místního času a také polohy na Zemi z astronomického pozorování, které mělo sloužit zejména při lodní navigaci. Dále dokázat platnost Newtonova gravitačního zákona a zjistit, zda je Sluneční soustava stabilní.

Prvním pozorovaným jevem, který zpochybňoval platnost gravitačního zákona byl pohyb přímky apsid dráhy měsíce (stáčení perihelia), který byl větší než původně nalezl Newton. Druhým bylo sekulární zrychlení středního pohybu Měsíce, které objevil v roce 1695 Edmund Halley porovnáním s pozorováním uvedené v Almagestu. Třetí jev byl objeven v roce 1718 opět z porovnání s antickými daty a to zrychlení středního pohybu Jupiteru a zpomalení středního pohybu Saturnu.

Newtonem používaná matematika je v podstatě syntetická geometrie. Při svých výpočtech využíval složité geometrické konstrukce, které vedly pouze ke středním hodnotám změn. Výraznější pokrok v předpovědích přišel s rozvojem matematické analýzy. Významným pokrokem bylo Eulerovo zavedení rozvojů iracionálních funkcí do trigonometrických řad. Metoda řešení diferenciálních rovnic použitá Eulerem spočívá ve vyřešení bezporuchového problému a následně předpokládá, že toto řešení podléhá vlivem působení dalšího tělesa malým změnám. Lagrange později navázal na Eulera a vylepšil metodu variace konstant pro řešení diferenciálních rovnic s konkrétním použitím na pohyb Jupiteru a Saturnu.

Kapitola 1

Isaac Newton

Studiu problému tří těles se jako první začal věnovat Isaac Newton ve své knize *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, která byla poprvé publikovaná v roce 1687 a další revidovaná vydání vyšla v letech 1713 a 1726. Rovněž vyšla v mnoha překladech. Následný text vychází z anglického překladu [1]. Hlavní motivací Newtonova studia problému tří těles byla předpověď pohybů Měsíce pod vlivem působení Země a Slunce.

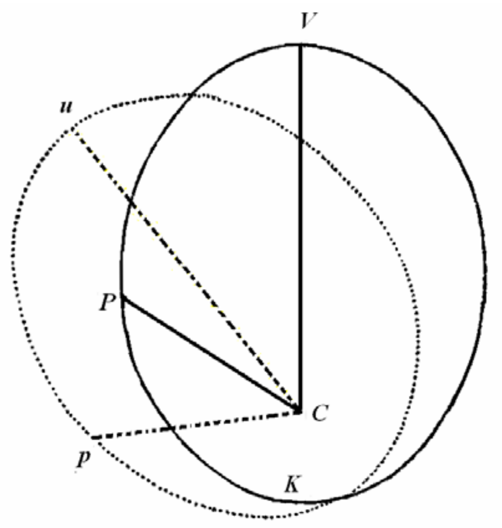
Newtonovy principie začínají úvodními kapitolami nazvané „Definice“ a „Axiómy“, nebo „Zákony Pohybu“. Dále pokračují třemi knihami, z nichž první dvě jsou nazvány „O pohybu těles“ a třetí kniha je nazvána „O systému světa“. Problém tří těles se poprvé objevil ve tvrzeních 43 až 45 knihy I, kde Newton začal s diskuzí Keplerovy elipsy rotující konstantní úhlovou rychlostí kolem centra sil. Další Newtonova důležitá část řešení problému tří těles je tvrzení 66 na konci knihy I. Toto tvrzení je stěžejní pro teorii Měsíce. V knize III v tvrzeních 13 a 14 Newton diskutoval pohyb planet Sluneční soustavy [1] a jejich vzájemné ovlivňování. Teorii pohybu Měsíce se Newton poté plně věnoval v knize III v tvrzeních 22 až 35.

1.1 Pohyb tělesa po rotující elipse

Oddíl 9 knihy I Newtonových Principií nese podtitul *„Pohyb těles po pohyblivé oběžné dráze a pohyb apsid“*. Oddíl 9 začíná tvrzením 43 problémem 30 podle kterého: *„Je třeba nalézt sílu, která umožňuje tělesu se pohybovat po jakékoli trajektorii otáčející se kolem centra sil stejným způsobem, jako jiné těleso obíhající v téže trajektorii v klidu.“*

Situace je znázorněná na obrázku 1.1. Těleso P obíhá po dráze VPK, která je v klidu. Konstrukce pohyblivé elipsy probíhá tak, že se postupně kreslí body p, přičemž $|Cp| = |CP|$ a současně je $\sphericalangle VCp = konst \cdot \sphericalangle VCP$, kde $konst$ je konstanta. Newton dále argumentoval tím, že poměry ploch S_{Cp} a S_{CP} opsané průvodiči Cp a CP budou rovny poměrům rychlostí v_{Cp} respektive v_{CP} daných průvodičů. Poměr rychlostí průvodičů je roven poměru úhlů opsaných průvodiči. Můžeme tedy napsat $\frac{S_{Cp}}{S_{CP}} = \frac{v_{Cp}}{v_{CP}} = \frac{\sphericalangle VCp}{\sphericalangle VCP} = k$. Z toho odvodíme, že $S_{Cp} = konst \cdot S_{CP}$. Protože plocha opsaná průvodičem CP je úměrná času, plocha opsaná průvodičem Cp v nepohyblivé rovině je také úměrná času. Z toho je zjevné, že těleso může obíhat společně s bodem p po právě popsané dráze působením pouze dostředivé síly o

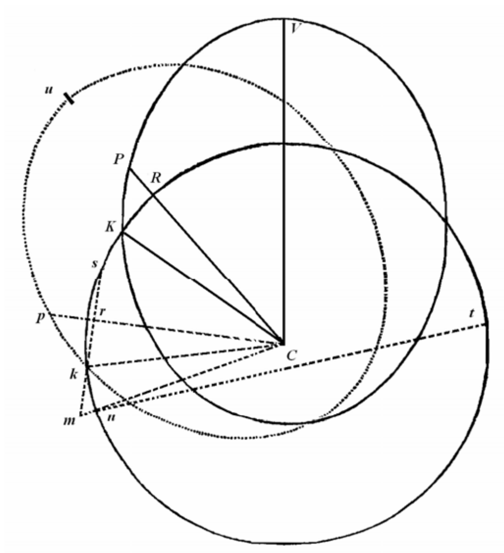
[1] Podle pravidel českého pravopisu by se mělo psát malé „s“. Mnoho astronomů dnes ale píše Sluneční soustava s velkým „S“ z důvodu, existence cizích slunečních soustav s exoplanetami.



Obrázek 1.1:

správné velikosti. Newton dále na základě rovnosti oblouku VP a rotujícího oblouku up poukazoval, že doba t_p pohybu tělesa v rotující elipse do bodu p je rovná době t_P pohybu tělesa do bodu P na stacionární elipse. Velikost dostředivé síly Newton v tomto tvrzení přímo neurčil, tomu se věnoval v následujícím tvrzení, ale odkazuje se zde na tvrzení 6 problému 5, podle kterého lze tuto dostředivou sílu určit.

Newtonovo tvrzení 44 poučka 14 nám sděluje: *„Rozdíl mezi silami, jejichž působením jsou dvě tělesa schopné se pohybovat stejně, jedno po oběžné dráze v klidu a druhé po identické oběžné dráze která rovnoměrně rotuje, je nepřímo úměrný třetí mocnině jejich společné výšky.“* Newtonovo odvození tohoto tvrzení ilustruje obrázek 1.2. Nechť části up



Obrázek 1.2:

a pk rotující oběžné dráhy jsou stejně velké, jako části VP a PK stacionární oběžné dráhy a vzdálenost mezi body P a K je infinitezimálně malá. Newton rozložil pohyby těles v bodech P a p do dvou složek, z nichž jedna složka pohybu směřuje k centru, nebo podél přímek PC, nebo pC a druhá složka pohybu má příčný směr podél přímky kolmé k PC, nebo pC. Newton nejprve předpokládal, že složky pohybu těles v radiálním směru jsou stejné a tím i síly působící na tyto tělesa v tomto směru. Proto, když se těleso P dostane za dobu Δt pomocí svých dvou složek pohybu do bodu K, těleso p bude po této době v radiálním směru ve stejné vzdálenosti jako těleso P, to znamená někde na přímce kr, která je kolmá k pC. Poměr příčných složek pohybů těles p a P je roven poměru úhlových pohybů příměk pC a PC a tento poměr je roven poměru úhlů $\sphericalangle VCp$ a $\sphericalangle VCP$. Bod m je nová poloha bodu p po uplynutí doby Δt, potom příčný pohyb bodu p je charakterizován úsečkou $|mr|$. Příčný pohyb bodu P je charakterizován úsečkou $|kr|$. Pak bod m nalezneme tak, že $\frac{|mr|}{|kr|} = \frac{\sphericalangle VCp}{\sphericalangle VCP}$.

Skutečná poloha bodu p po uplynutí doby Δt bude v bodě n, který nalezneme další rotací elipsy upk způsobem uvedeným v tvrzení 43. Bod n nalezneme tak, že $\frac{\sphericalangle pCn}{\sphericalangle pCk} = \frac{\sphericalangle VCp}{\sphericalangle VCP}$ a $|nC| = |kC|$. Proto na těleso p působí větší síla, než na těleso P za předpokladu, že úhel $\sphericalangle nCp > \sphericalangle kCp$. Tak tomu je, pokud se oběžná dráha upk pohybuje buď prográdně, nebo retrográdně s rychlostí větší než dvojnásobek rychlosti, se kterou se průvodič CP pohybuje retrográdně. A působí na něj menší síla, jestliže se oběžná dráha pohybuje retrográdně pomaleji, než je dvojnásobek rychlosti průvodiče CP. Rozdíl mezi těmito silami je dán vzdáleností mn, o kterou musí být těleso p tímto působením posunuto za daný časový interval Δt.

Na obrázku 1.2 se kružnice se středem C a poloměrem Cn protíná s přímkou mr v bodě s a s přímkou mn v bodě t. Z mocnosti bodu m ke kružnici můžeme napsat, že $|mn| \cdot |mt| = |mk| \cdot |ms|$. A proto $|mn| = \frac{|mk|\cdot|ms|}{|mt|}$. Protože obsahy ploch trojúhelníků pCk a pCn jsou úměrné času, velikosti úseček kr a mr a také jejich rozdíl mk a součet ms jsou nepřímo úměrné výšce pC. Velikost mt je úměrná výšce pC. Takže $\frac{|mk|\cdot|ms|}{|mt|} \sim \frac{1}{|pC|^3}$. Rozdíl mezi silami v bodech P a p daný velikostí úsečky mn je tedy nepřímo úměrný třetí mocnině pC.

V důsledku 1 dává Newton do poměru rozdíl sil F_{mn} v bodech P a p, nebo K a k úměrný velikosti úsečky $|mn|$ se silou, pomocí které je těleso schopné projít kruhovým pohybem z bodu R do bodu K za dobu Δt, to je doba pohybu tělesa v nepohyblivé elipse po oblouku PK. Tato druhá síla je úměrná velikosti úsečky $|rz|$. Pro tuto úsečku můžeme napsat $|rz| = |Ck| \cdot (1 - \cos\phi)$, kde $\phi = \sphericalangle RCK$. Dále použijeme přibližný vztah $\cos\phi \simeq 1 - \frac{\sin^2\phi}{2}$, proto $|rz| = \frac{|rk|^2}{2|Ck|}$. Poměr uvedených sil je potom $\frac{|mn|}{|rz|} = \frac{|mk|\cdot|ms|}{|mt|} : \frac{|rk|^2}{2|Ck|} \simeq \frac{|mk|\cdot|ms|}{|rk|^2} = \frac{(|mr|-|rk|)(|mr|+|rk|)}{|rk|^2} = \frac{|mr|^2-|rk|^2}{|rk|^2} = \frac{G^2-F^2}{F^2}$, kde veličiny F a G jsou takové, že $\frac{F}{G} = \frac{\sphericalangle VCP}{\sphericalangle VCp} = \frac{|rk|}{|mr|}$. Uvažujme kruhovou výseč popsanou jakýmkoli poloměrem CP nebo Cp, jejíž plocha je v libovolném čase stejná, jako plocha VPC popsaná průvodičem tělesa P obíhajícího po stacionární dráze. Potom poměr rozdílu sil, působících na těleso P ve stacionární dráze a těleso p v pohyblivé dráze, a síly umožňující pohybovat se tělesu po popsané kruhové výseči je rovno $\frac{G^2-F^2}{F^2}$. Poměr ploch popsané výseče a plochy pCk je roven poměrům dob, za které jsou tyto plochy opsané příslušnými průvodiči.

V důsledku 2 Newton zavedl sílu, díky níž těleso obíhá po rotující elipse, vztahem

$\frac{F^2}{A^2}+\frac{R(G^2-F^2)}{A^3}$. Kde $2R$ je latus rectum [2] elipsy a A je označení pro výšku PC, nebo pC. Newton tento vztah odvodil následovně. Síla působící na těleso pohybující se po elipse je reprezentovaná veličinou $\frac{F^2}{A^2}$. [3] Nechť F_{CV} je síla, díky které těleso obíhá po kruhu ve vzdálenosti CV rychlostí, kterou má těleso obíhající po elipse v bodě V a $F_{Ve}=\frac{F^2}{A^2}$ je síla působící na těleso obíhající po elipse v bodě V. Pro poměr těchto sil platí $\frac{F_{CV}}{F_{Ve}}=\frac{R}{|CV|}$ a proto $F_{CV}=\frac{R\cdot F^2}{|CV|^3}$. Podle důsledku 1 je $\frac{F_{mn}}{F_{CV}}=\frac{G^2-F^2}{F^2}$, takže $F_{mn}=\frac{R(G^2-F^2)}{|CV|^3}$. Tento rozdíl sil lze zobecnit na jakoukoli výšku A, proto přidáním tohoto rozdílu k síle umožňující tělesu se pohybovat po stacionární elipse VPK dostaneme sílu umožňující tělesu se pohybovat stejně za stejné časy po rotující elipse upk.

V důsledku 3 Newton uvedl, že stejným způsobem lze zjistit poměr síly, která působí na těleso obhající po elipse s centrem sil ve středu elipsy a síly, která působí na těleso obíhající stejně v této trajektorii rotující konstantní úhlovou rychlostí kolem centra sil. Tento poměr je dán jako $\frac{F^2A}{T^3}:(\frac{F^2A}{T^3}+\frac{R(G^2-F^2)}{A^3})$, kde $2T$ je hlavní osa elipsy.

V důsledku 4 Newton přešel k obecnější dráze. Dostředivá síla umožňující tělesu se pohybovat po libovolné trajektorii VPK v libovolném bodě P je úměrná $\frac{F^2}{RA^2}$, kde R je poloměr křivosti dráhy VPK v libovolném bodě P. Síla umožňující tělesu se pohybovat po trajektorii upk, která je podobná trajektorii VPK, rotující kolem centra sil bude $\frac{1}{R}[\frac{F^2}{A^2}+\frac{R(G^2-F^2)}{A^3}]$. [4] Tvrzení 5 rekapituluje, že pokud máme pohyb tělesa v jakékoli nepohyblivé oběžné dráze kolem centra sil a úhlovou rychlost zvětšíme, nebo zmenšíme v daném poměru, můžeme nalézt novou stacionární oběžnou dráhu po které těleso obíhá působením nové dostředivé síly.

Tvrzení 45 problém 31 se zabývá nalezením *pohybu apsid oběžných drah, které se jen velmi málo odlišují od kružnic.* Newton problém řešil ve třech příkladech. Příkladem 1 tvrzení 45 se zde nebudeme zabývat, protože jde o speciální případ příkladu 2 tohoto tvrzení. Uvažujme dráhu vykreslenou v nepohyblivé rovině tělesem obíhajícím po rotující elipse jako v tvrzení 44. Nechť V je apoapsida a největší výška $|CV|=T$. Libovolná jiná výška $|CP|=|Cp|=A$ a dále zavedeme veličinu $X=|CV|-|Cp|$ danou rozdílem výšek. Síla, díky které se těleso pohybuje po této dráze, je podle důsledku 2 tvrzení 44 $F_d=\frac{F^2}{A^2}+\frac{RG^2-RF^2}{A^3}=\frac{F^2A+RG^2-RF^2}{A^3}$. Dosazením za $A=T-X$ dostaneme $F_d=\frac{RG^2-RF^2+TF^2-F^2X}{A^3}$. Dále uvažujme dostředivou sílu ve tvaru $F'_d=\frac{A^n}{A^3}$, kde $n\in\mathbb{R}$. Dosazením do čitatele za $A=T-X$ máme $F'_d=\frac{(T-X)^n}{A^3}\simeq\frac{T^n-nT^{n-1}X}{A^3}$. Rovnost $F_d=F'_d$ platí, pokud je současně $RG^2-RF^2+TF^2=T^n$ a $-F^2=-nT^{n-1}$. Protože předpokládáme téměř kruhové trajektorie, je $R\simeq T$. Potom dostaneme $G^2=T^{n-1}$ a $F^2=nT^{n-1}$. Po vydělení těchto dvou rovnic a odmocnění dostaneme poměr $\frac{G}{F}=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Protože $\frac{G}{F}=\frac{\sphericalangle VCp}{\sphericalangle VCP}$, když těleso projde úhel $\sphericalangle VCP=180^\circ$ z apoapsidy do periapsidy, úhel opsaný tělesem, které se pohybuje v téměř

[2] Tětiva elipsy kolmá na její hlavní poloosu a procházející jedním z jejích ohnisek.

[3] Ve skutečnosti je síla působící na těleso pohybující se po stacionární elipse úměrná $\frac{F^2}{RA^2}$. Newton nejspíš zahrnul faktor $1/R$ do konstanty úměrnosti. Tento vztah lze odvodit, pokud si uvědomíme, že radiální zrychlení je dáno vztahem $a_r=\ddot{r}-r\dot{\phi}^2$. Dále uvažujme vyjádření elipsy ve tvaru $\frac{R}{r}=1+e\cos\phi$ a podle druhého Keplerova zákona je $r^2\dot{\phi}=h=F=\frac{dS}{dt}$. Použitím těchto vztahů lze snadno ukázat, že $a_r=\frac{F^2}{Rr^2}$.

[4] Toto tvrzení má v Principiích poněkud matoucí značení. Síla působící na těleso ve stacionární trajektorii v bodě V je v nich označena $\frac{VF^2}{T^2}$, kde $T=|VC|$.

kruhové trajektorii pod působením dostředivé síly úměrné A^{n-3} při průchodu z apoapsidy do periapsidy, je $\sphericalangle VCp = \frac{180°}{\sqrt{n}}$.

V příkladu 3 Newton uvažoval dostředivou sílu ve tvaru $F_d' = \frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, kde m, n jsou libovolné indexy a b, c jsou libovolné konstanty. Když položíme $b = 0$ a $c = 1$, dostaneme dostředivou sílu z příkladu 2. Analogickým postupem jako v předchozím příkladu dostaneme $\frac{G}{F} = \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Úhel mezi horní a dolní apsidou je potom $180° \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$.

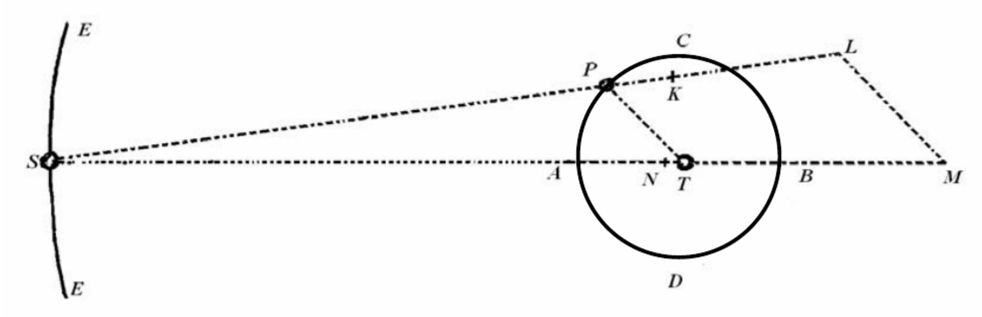
Důsledek 1. Když je dostředivá síla úměrná mocnině výšky A^{n-3}, lze tuto mocninu nalézt z pohybu apsid a naopak. Podle příkladu 2 je úhel mezi dvěma apoapsidami $\alpha = \frac{360°}{\sqrt{n}}$, takže $n = (\frac{360°}{\alpha})^2 > 0$. Síla při vzdalování od středu proto nemůže být nepřímo úměrná více, než s třetí mocninou výšky. Pokud by těleso obíhalo pod působením takové síly a začalo sestupovat, nebo vzestupovat, nikdy by nedosáhlo periapsidy, nebo apoapsidy, ale sestoupilo by až k centru, nebo se bude neustále vzdalovat. Pokud by síla při vzdalování od centra byla nepřímo úměrná méně než s třetí mocninou výšky nebo úměrná jakékoli mocnině výšky, těleso při sestupu v určitém čase dosáhne periapsidy, nebo těleso střídavě sestupuje a stoupá od apsidy k apsidě a také nikdy nedosáhne centra.

Důsledek 2. Těleso obíhající po elipse pod působením dostředivé síly nepřímo úměrné druhé mocnině výšky a k této síle je přičtena, nebo odečtena libovolná jiná síla. Pak lze určit pohyb apsid vzniklý v důsledku této přidané síly, a naopak z pohybu apsid určit tuto sílu pomocí výsledku z příkladu 3. Například síla, jejímž působením těleso obíhá po elipse, je úměrná $1/A^2$ a od ní se odečítá síla úměrná cA, celková dostředivá síla bude úměrná $\frac{A-cA^4}{A^3}$. Vidíme, že $b = 1$, $m = 1$ a $n = 4$ a úhel mezi apsidami bude $180° \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$.

1.2 Systém tří těles

Oddíl 11 knihy I se nazývá *„O pohybu těles vzájemně se přitahující dostředivými silami.“* Z tohoto oddílu je pro nás stěžejní tvrzení 66 poučka 26. *„Mějme tři vzájemě se přitahující tělesa a nechť urychlující přitažlivosti kterýchkoli dvou těles směrem ke třetímu jsou nepřímo úměrná čtvercům jejich vzdáleností a dvě menší tělesa obíhají kolem největšího. Tvrdím, že pokud se největší těleso vlivem těchto urychlujících přitažlivostí pohybuje, vnitřní ze dvou obíhajících těles bude při oběhu kolem největšího tělesa svými průvodiči opisovat plochy úměrnější časům a trajektorie se bude více blížit elipse, než kdyby největší těleso bylo v klidu, nebo by na něj působilo mnohem menší, nebo mnohem větší zrychlení, nebo kdyby urychlovalo okolní tělesa mnohem více, nebo méně. “*

Newton rozdělil demonstraci tohoto tvrzení do dvou případů. V prvním uvažoval menší tělesa P a S obíhající kolem tělesa T ve stejné rovině. Situace je na obrázku 1.3. Některé úsečky zde představují geometrické vzdálenosti a jiné představují síly, nebo urychlující přitažlivosti a některé obojí. Pro lepší přehlednost označuji úsečky představující síly nadtržítkem. Úsečka SK je střední vzdálenost mezi tělesy P a S a také $\overline{SK}$ představuje urychlující přitažlivost tělesa P vůči S ve vzdálenosti SK. Urychlující přitažlivost tělesa P vůči S v libovolné vzdálenosti P je daná úsečkou $\overline{SL}$, proto $\frac{|\overline{SL}|}{|\overline{SK}|} = \frac{|SK|^2}{|SP|^2}$. Pokud je $|SP| = |SK|$, pak $|\overline{SL}| = |\overline{SK}|$. Pokud $|SP| < |SK|$, pak $|\overline{SL}| > |\overline{SK}|$ a když $|SP| > |SK|$ pak $|\overline{SL}| < |\overline{SK}|$. Síla $\overline{SL}$ se rozloží na sílu ve směru PT, jejíž velikost je daná úsečkou $\overline{LM}$ a na sílu rovnoběžnou



Obrázek 1.3: Tělesa P a S obíhající kolem tělesa T po drahách PAB a ESE.

se směrem ST, která je daná úsečkou $\overline{SM}$. Ve směru PT na těleso P působí také síla F_T způsobená tělesem T, která je nepřímo úměrná $|PT|^2$. Působením součtu těchto sil bude těleso P svým průvodičem opisovat plochu úměrnou času. Ale protože síla $\overline{LM}$ nezávisí nepřímo úměrně na $|PT|^2$, bude se tentou součet sil odchylovat od nepřímé úměry na $|PT|^2$ a dráha PAB se bude odchylovat od eliptického tvaru. A to tím víc, čím větší bude poměr sil $\overline{LM}$ a F_T.

Těleso S působí ve směru rovnoběžném s ST urychlující přitažlivostí $\overline{SM}$ na těleso P a současně urychlující přitažlivostí $\overline{SN}$ na těleso T. Účinek tělesa S na pohyb tělesa P kolem T je proto dán rozdílem $\overline{SM}$ a $\overline{SN}$, který dává výslednou urychlující přitažlivost $\overline{NM}$. Tato síla $\overline{NM}$ způsobuje, že dráha PAB se odchyluje od eliptického tvaru. Čím bude $\overline{NM}$ menší, tím bude plocha opsaná průvodičem více úměrná času. Velikost $\overline{NM}$ bude nejmenší, když urychlující přitažlivosti těles P a T k tělesu S se budou co nejvíce rovnat. Jinak, když $\overline{SN}$ není ani nulová ani o moc větší, nebo o moc menší, než přitažlivost $\overline{SK}$.

Dále Newton uvažoval, že tělesa P a S obíhají kolem tělesa T v různých rovinách. Síla $\overline{LM}$ leží v rovině dráhy PAB a proto bude mít stejný účinek jako v předchozím případě. Síla $\overline{NM}$ rovnoběžná s ST pak navíc způsobuje poruchy v příčném směru. Ty jsou přímo úměrné síle $\overline{NM}$ a proto je nejmenší, když je nejmenší $\overline{NM}$.

V následujících tvrzeních se Newton většinou omezoval na případ, kdy nerušená oběžná dráha tělesa P je kruhová a těleso S je velmi vzdálené, tedy $|PK|/|ST| \ll 1$. Podle důsledku 1 je v systému menších těles $P, S, R, \ldots$ obíhajících kolem největšího tělesa T, pohyb nejbližšího tělesa P působením ostatních těles nejméně porušen.

V důsledku 2 máme situaci z obrázku 1.3. Těleso P popisuje svým průvodičem v blízkosti konjunkce A a opozice B plochu rychleji, než v kvadraturách C a D. Rychlost tělesa P kolem T je urychlována, nebo zpomalována silou $\overline{MN}$, podle toho, zda má stejný, nebo opačný směr. Během průchodu tělesa P z C do A síla $\overline{MN}$ urychluje pohyb, poté z A do D jej zpomaluje, dále do B urychluje, a nakonec do C opět zpomaluje. Proto se těleso P v syzygiích pohybuje rychleji, než v kvadraturách. Podle důsledku 4 je dráha PAB za jinak stejných podmínek v kvadraturách zakřivenější, než v syzygiích, protože rychlejší tělesa jsou méně vychylována z přímé dráhy a navíc síla $\overline{KL}$ [5] působí v syzygiích v opačném směru než F_T a tím tuto sílu zmenšuje. V důsledku 5 pak na základě předchozího důsledku

[5] Nechť se těleso P nachází v okolí bodu A, pak $SL \parallel SM$. Proto $|TM| = |PL|$ a $|LM| = |PT|$, čímž $P \equiv A$ a $K \equiv T$. Potom $|KL| = |MN| - |LM|$. Síla $\overline{MN}$ působí na těleso P směrem k S a síla $\overline{LM}$ působí opačným směrem. Proto poruchová síla působící na P v blízkosti A směrem k S je dána přibližně silou $\overline{KL}$.

Newton tvrdí, že v syzygiích je P blíže k T, než v kvadraturách. Pokud je nerušená dráha excentrická, s apsidami v syzygiích, její výstřednost ještě vzroste a když těleso P dosáhne apoapsidy, bude v syzygiích dál, než v kvadraturách.

V kvadraturách je centrální síla F_T zesilována silou $\overline{LM}$ a v syzygiích je zeslabována silou $\overline{KL}$. Pro dostředivou sílu můžeme napsat $F_c \propto \frac{|TP|}{t^2}$, kde t je označení pro periodu oběhu tělesa P. Za předpokladu konstantní vzdálenosti TP, je $t \propto \frac{1}{\sqrt{F_c}}$. Při změně vzdálenosti TP je $F_c \propto 1/|TP|^2$ a proto $t \propto |TP|^{3/2}$. Podle důsledku 6 se proto periody oběhu zvětšují, nebo zmenšují v poměru složeném z $3/2$-té mocniny poměru poloměrů a druhé odmocniny poměru, v jakém je dostředivá síla centrálního tělesa T zmenšena, nebo zvětšena působením vzdáleného tělesa S.

Z důvodu střídavého zesilování a zeslabování centrální síly dochází k pohybu přímky apsid, elipsy opisované tělesem P, střídavě prográdně a retrográdně. Tomu se detailně věnují důsledky 7 a 8. V kvadraturách se centrální síla skládá ze síly $F_T \propto 1/|PT|^2$ a síly $\overline{LM} \propto |PT|$. Výsledná síla F_c proto klesá méně, než se čtvercem vzdálenosti a to způsobuje zpětný pohyb apsid. V syzygiích je F_c daná rozdílem sil F_T a $KL \propto |PT|$, F_c zde klesá více než se čtvercem vzdálenosti a proto se apsidy pohybují prográdně. Mezi syzygiemi a kvadraturami závisí pohyb apsid na obou silách. Může se pohybovat prográdně i retrográdně. Protože síla KL je v syzygiích větší, než síla LM v kvadraturách, převládá prográdní pohyb. Navíc, když jsou apsidy v syzygiích, prográdní pohyb přímky apsid je, při průchodu tělesa syzygiemi, rychlejší a při průchodu kvadraturami je retrográdní pohyb pomalejší.

V důsledku 9 Newton uvažoval těleso obíhající po elipse pod působením síly F_T nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti. Pak při sestupu tělesa z apoapsidy uvažoval, že F_T je neustále zvětšována. Těleso se bude během oběhu odklánět více k centru síly, dosáhne periapsidy níže a výstřednost elipsy se zvětší. Když pak během pohybu z periapsidy do apoapsidy má výsledná síla na těleso stejnou závislost na vzdálenosti, dosáhne apoapsidy ve výchozí výšce. Pokud výsledná síla klesá se vzdáleností rychleji, těleso dosáhne apoapsidy ve větší výšce a výstřednost se opět zvětší. Proto, když poměr celkového nárůstu a úbytku dostředivé síly při každém oběhu roste, zvětšuje se i výstřednost a naopak.

V systému těles T, P, S, když jsou apsidy dráhy tělesa P v kvadraturách, je tento poměr celkového zvětšení a zmenšení centrální síly během oběhu tělesa minimální a když jsou apsidy v syzygiích, je maximální. Podle důsledku 9 proto při průchodu přímky apsid z kvadratur do syzygií poměr zmenšování a zvětšování centrální síly roste a dochází ke zvětšování výstřednosti a při průchodu ze syzygií do kvadratur tento poměr klesá a výstřednost se zmenšuje.

V důsledku 10 Newton diskutoval změny sklonu dráhy. Předpokládejme, že rovina oběžné dráhy ESE je v klidu a oběžná dráha PAB je k ní skloněna o úhel i. Síla $\overline{LM}$ působí v rovině PAB, změny v i jsou proto způsobené pouze silou $\overline{NM}$. Když jsou uzly v kvadraturách, při průchodu tělesa P z kvadratur do syzygií je silou $\overline{NM}$ vychylováno ze své roviny a i se snižuje a při průchodu ze syzygií do kvadratur se stejně zvyšuje. Takže když se P nachází v syzygiích, je i nejmenší a když je P poblíž následujícího uzlu, vrátí se téměř na původní velikost. Když jsou ale uzly v oktanech CA a DB, pak při průchodu P z libovolného uzlu o 90° se sklon roviny zmenšuje, pak do vstupu do dalšího kvadrantu se zvětšuje a nakonec se před dosažením následujícího uzlu opět zvětšuje. Sklon se tak spíše zmenší a v následujícím uzlu je proto menší, než v předchozím. Podobným způsobem dochází k obecnému zvětšování sklonu, když jsou uzly v oktanech AD, a BC. Při průchodu uzlů ze syzygií do kvadratur se i při každém průchodu tělesa uzlem zmenšuje a když uzly dosáhnou kvadratur, je nejmenší, poté roste stejnou rychlostí s jakou se před tím zmenšovala a v syzygiích se její hodnota vrátí na původní hodnotu.

Důsledek 11 se zabývá pohybem uzlů. Když se uzly nacházejí v kvadraturách, je těleso P při přechodu z uzlu v C přes konjunkci A do bodu D neustále vychylováno ze své původní roviny směrem k S a při průchodu z D do C přes opozici B je vychylováno v opačném směru. Potom je zřejmé, že při přechodu z uzlu C dosáhne těleso P příštího uzlu blíže k S. Podobně bude ustupovat i následující uzel dosažený průchodem opozicí B. V syzygiích, kdy není příčný pohyb narušován, jsou uzly v klidu. Proto uzly během oběhu tělesa P ustupují.

V důsledku 12 Newton uvedl, že všechny doposud popsané poruchy jsou v konjunkci těles P a S větší než při jejich opozici. To je proto, že síly $\overline{NM}$ a $\overline{LM}$ jsou v konjunkci větší.

Důsledek 13 říká, že všechny popsané nerovnosti budou platit i pro soustavu Země T a Měsíce P, které obíhají kolem vzdáleného Slunce S s velkou hmotností.

V důsledku 14 Newton poskytl závislosti sil $\overline{MN}$ a $\overline{LM}$. Když je těleso S velmi vzdálené, pak $\frac{\overline{ML}}{\overline{SK}} \simeq \frac{|PT|}{|ST|}$ a proto $\overline{ML} \simeq \frac{\overline{SK}\cdot|PT|}{|ST|}$. Protože $\overline{SK} = \frac{GM}{|ST|^2}$, je $\overline{ML} \simeq \frac{GM|PT|}{|ST|^3}$, kde G je gravitační konstanta a M je hmotnost tělesa S. Newton dnešní vyjádření GM označoval jako absolutní síla tělesa S. A podle tohoto důsledku jsou proto síly $\overline{MN}$ a $\overline{LM}$, při známé vzdálenosti PT přímo úměrné absolutní síle tělesa S a nepřímo úměrné třetí mocnině vzdálenosti ST. Dále Newton uvažoval, že pokud tělesa T a P obíhají kolem vzdáleného tělesa S, je $\overline{SK} \propto |ST|/t_T^2$, kde t_T je perioda oběhu T kolem S, potom je $\overline{MN} \propto \overline{LM} \propto 1/t_T^2$. V důsledku 15 Newton uvažoval změnu poloměru PT při neměnné vzdálenosti ST. Potom lineární poruchy budou úměrné poloměru PT, ale úhlové poruchy budou na něm nezávislé. Dále periody lineárních a stejných úhlových poruch musí být úměrné periodě t oběžné dráhy tělesa P. V důsledku 16 Newton odvodil, že pohyby apsid a uzlů, což jsou úhlové poruchy, jsou stejné až na znaménko a jsou přímo úměrné oběžné době tělesa P a nepřímo úměrné druhé mocnině oběžné doby tělesa T. Změny ve výstřednosti a sklonu dráhy PAB netvoří znatelné změny v pohynu apsid a uzlů, jedině, že by byly příliš velké.

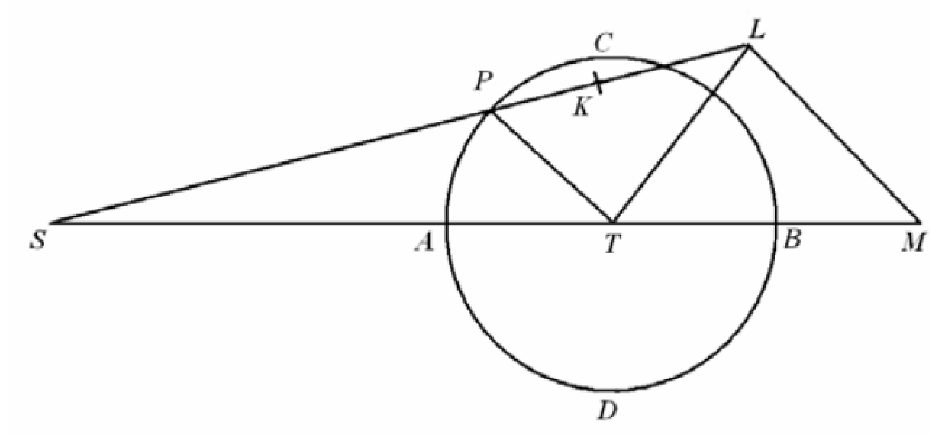
Důsledek 17. Střední hodnota síly $\overline{LM}$ může být dána úsečkou PT. Střední sílu $\overline{SK} \simeq \overline{ST}$ je také možné vyjádřit úsečkou ST. Pak můžeme napsat $\frac{|\overline{LM}|}{|\overline{ST}|} = \frac{|PT|}{|ST|}$. Síla $|\overline{ST}| \propto \frac{|ST|}{t_T^2}$ udržuje těleso T na jeho oběžné dráze kolem tělesa S a síla $|\overline{PT}| \propto \frac{|PT|}{t^2}$ udržuje těleso T na oběžné dráze PAB kolem T. Potom $\frac{|\overline{ST}|}{|\overline{PT}|} \propto \frac{|ST|}{|PT|}(\frac{t}{t_T})^2$. Tím můžeme vyjádřit střední sílu $\overline{LM}$ jako $\overline{LM} \propto \overline{PT}(\frac{t}{t_T})^2$. Když jsou dány oběžné doby společně se vzdáleností PT, je dána i střední síla $\overline{LM}$ a s ní i přibližně síla $\overline{MN}$.

Zbývající důsledky tohoto tvrzení se zabývají účinky působení tělesa S na rotující kulové těleso T, Newton v nich vysvětluje například slapové síly, přílivy a odlivy nebo precesi zemské osy.

1.3 Teorie pohybu Měsíce

Konkrétně pohybem Měsíce kolem Země se Newton věnoval v knize III. Ve tvrzení 25 problém 6 se zabýval nalezením sil, které ruší pohyb Měsíce. Nechť S označuje Slunce, T

zemi, P Měsíc a $CADB$ je oběžná dráha Měsíce, jak je naznačeno na obrázku 1.4. Úsečka

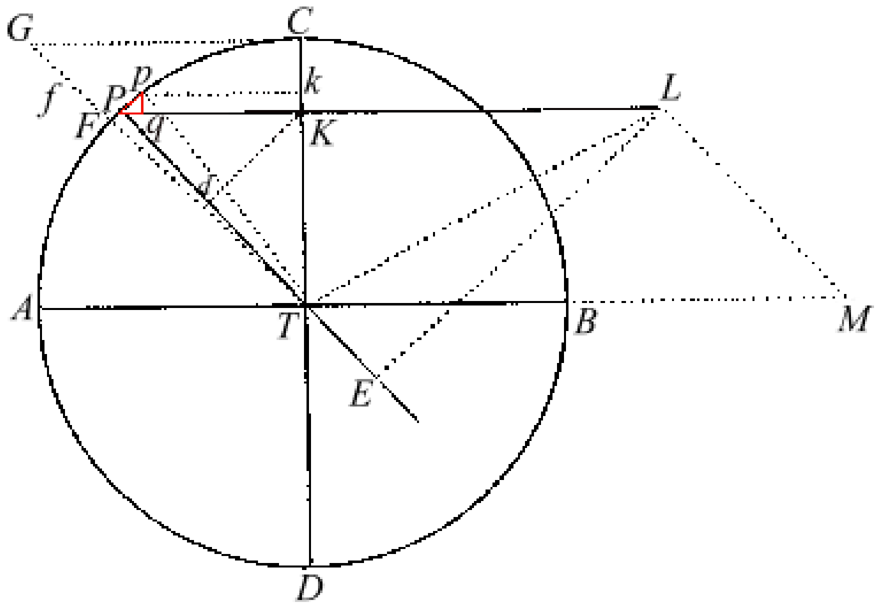


Obrázek 1.4: Měsíc P obíhající kolem Země T společně obíhají kolem Slunce S.

$|SK| = |ST|$ je střední vzdálenost Měsíce od Zěmě a současně tato úsečka vyjadřuje urychlující přitažlivost Země směrem ke Slunci a úsečka SL vyjadřuje urychlující přitažlivost Měsíce ke Slunci. Urychlující přitažlivost $\overline{SL}$ je složena z přitažlivostí $\overline{SM}$ a $\overline{LM}$. Pohyb Měsíce je rušen urychlujícími přitažlivostmi $\overline{LM}$ a $\overline{TM}$. Jak Měsíc a Země obíhají kolem společného centra gravitace, pohyb Země kolem tohoto centra je také rušen zcela podobnými silami, ale můžeme ztotožnit součet sil a pohybů s Měsícem a reprezentovat součet sil úsečkami TM a ML. Jak bylo ukázáno v důsledku 17 tvrzení 66, je $\frac{<\overline{ML}>}{\overline{PT}} = (\frac{t}{t_T})^2$, kde $< \overline{ML} >$ je střední střední hodnota síly $\overline{ML}$, $\overline{PT}$ je urychlující přitažlivost Země ve vzdálenosti $|PT|$ a $t = 27d7h43m$ je oběžná doba Měsíce kolem Země a $t_T = 365d6h9m$ je oběžná doba Země kolem Slunce. Po dosazení je $\frac{<\overline{ML}>}{\overline{PT}} = \frac{1000}{178725}$. Podle Newtona je $|PT| = 60.5R_z$, kde R_z je poloměr Země. Síla $\overline{PT} = F_{60.5}$ působící ve vzdálenosti $60.5R_z$. Newton nejprve uvažoval těleso obíhající ve vzdálenosti $60R_z$ s periodou oběhu stejnou, jako má těleso ve vzdálenosti $60.5R_z$, potom $\frac{F_{60.5}}{F_{60}} = \frac{60.5}{60}$. Dále vyjádřil poměr síly F_{60} ve vzdálenosti $60R_z$ a síly na povrchu Země F_{R_z} jako $\frac{F_{60}}{F_{R_z}} = \frac{1}{60^2}$. Potom je střední síla $< \overline{ML} >= \frac{60.5}{60} \cdot \frac{1}{60^2} \cdot \frac{1000}{178725} F_{R_z} = \frac{1}{638092.6} F_{R_z}$. Z úměrnosti úseček TM a ML je také dána síla $\overline{TM}$.

Vlivem působení Slunce je při pohybu Měsíce kolem Země narušen zákon ploch. Tímto se zabývá tvrzení 26 problém 7. *„Nalezení hodinového nárůstu plochy, kterou Měsíc svým průvodičem vedeným k Zemi opíše na kruhové dráze.“* Newton pro jednoduchost předpokládal kruhovou dráhu Měsíce a ignoroval všechny ostatní nerovnosti pramenící z eliptické dráhy. Dále pro velkou vzdálenost Slunce předpokládal vzájemnou rovnoběžnost přímek SP a ST. Díky tomu je síla $\overline{LM} = TP$ a $\overline{TM} = 3|PK|$. [6] Síly $\overline{LM}$ a $\overline{TM}$ se skládají na

[6] Když uvážíme konstantní vzdálenost $|ST| = |SP| + |PK|$, potom $|ST|^3 - |SP|^3 = (ST - SP)(|ST|^2 + |ST| \cdot |SP| + |SP|^2) = |PK|(|SP|^2 + 2|SP| \cdot |PK| + |PK|^2 + |ST| \cdot |SP| + |SP|^2) \simeq 3|SP|^2 \cdot |PK| + 2|SP| \cdot |PK|^2 + |PK|^3$. Dále platí vztah $\frac{|\overline{SL}|}{|\overline{ST}|} = \frac{|ST|^2}{|SP|^2}$ a protože jsou síly $\overline{SL}$ a $\overline{ST}$ reprezentovány úsečkami SL a ST, je $|SL| = \frac{|ST|^3}{|SP|^2}$. Potom je výraz $|ST|^3 - |SP|^3 = |SL| \cdot |SP|^2 - |SP|^3 = |SP|^2(|LS| - |SP|) = |SP|^2 \cdot |PL|$ a tím pádem je $PL \simeq 3|PK|(1 + \frac{2|PK|}{3|SP|} + \frac{|PK|^2}{3|SP|^2})$. A protože $|PK| \ll |SP|$, je $|PL| \simeq 3|PK|$.



Obrázek 1.5: Měsíc P obíhající kolem Země T společně obíhají kolem Slunce S.

sílu $\overline{LT}$, jak je vidět na obrázku 1.5. Tato síla je rozložena na složky $\overline{TE}$ a $\overline{LE}$. Síla $\overline{LE}$ působí vždy ve směru kolmém na průvodič Měsíce a proto buď urychluje, nebo zpomaluje pohyb Měsíce a opis plochy tímto průvodičem. Z podobnosti trojúhelníků PKT a PEL dostaneme vztah pro sílu $|\overline{EL}| = \frac{3|PK|\cdot|TK|}{|TP|}$. Čas je reprezentován středním pohybem Měsíce nebo úhlem CTP či obloukem CP. Porucha způsobená Sluncem je tak malá, že oblouk nebo úhel může být brán jako úměrný času. Úsečka CG je kolmá k CT a $|CG| = |CT|$. Oblouk AC je rozdělen na nespočetné množství stejných částí $Pp, \ldots$, kterými může být reprezentováno stejné nespočetné množství stejných délek času. Kolmice $pk \perp CT$ a $PK \perp CT$ se protínají s úsečkou TG v bodech F a f a $|FK| = |TK|$. Uvažujme trojúhelník $\triangle Ppq$, na obrázku 1.5 znázorněn červeně, kde $q \in PK$ a $pq \parallel kK$. Protože $\triangle Ppq \sim \triangle PTK$, je $\frac{|Kk|}{|PK|} = \frac{|Pp|}{|TP|}$. Proto je plocha $FKkf = |FK| \cdot |Kk| = |Pp| \cdot \frac{|TK|\cdot|PK|}{|TP|} = \frac{|Pp|}{3} \cdot |\overline{EL}|$. Jinými slovy, infinitezimální plocha $FKkf$ opsaná za infinitezimální čas Pp je úměrná síle $\overline{EL}$. Sečtením přírůstků dostaneme plochu $GCKF$ úměrnou součtu všech sil $\overline{EL}$ působících na Měsíc za celkový čas CP, a tím také úměrnou nárůstu rychlosti Měsíce δv_{CP} za čas CP. Dále uvažujme sílu, díky které se Měsíc pohybuje za periodu t kolem stacionární Země ve vzdálenosti TP. Potom těleso pod působením této síly po dobu $|CT|$ projde dráhu $1/2|CT|$ a zároveň za tuto dobu dosáhne oběžné rychlosti. [7] Dále spustíme kolmici $Kd \perp PT$ a $|Kd| = \frac{1}{3}|EL|$ a když je Měsíc v oktanech, je $|Kd| = \frac{1}{2}|TP| = \frac{1}{2} < \overline{ML} >$, proto je v oktanech síla $|\overline{EL}| = \frac{3}{2} < \overline{ML} >= \frac{100}{11915}\overline{PT}$ a dosahuje zde největší hodnoty. Za dobu CT tato síla urychlí těleso o rychlost $\delta v_{CT}^{max} = \frac{100}{11915}\bar{v}$, kde $\bar{v}$ je střední rychlost Měsíce. V čase CPA

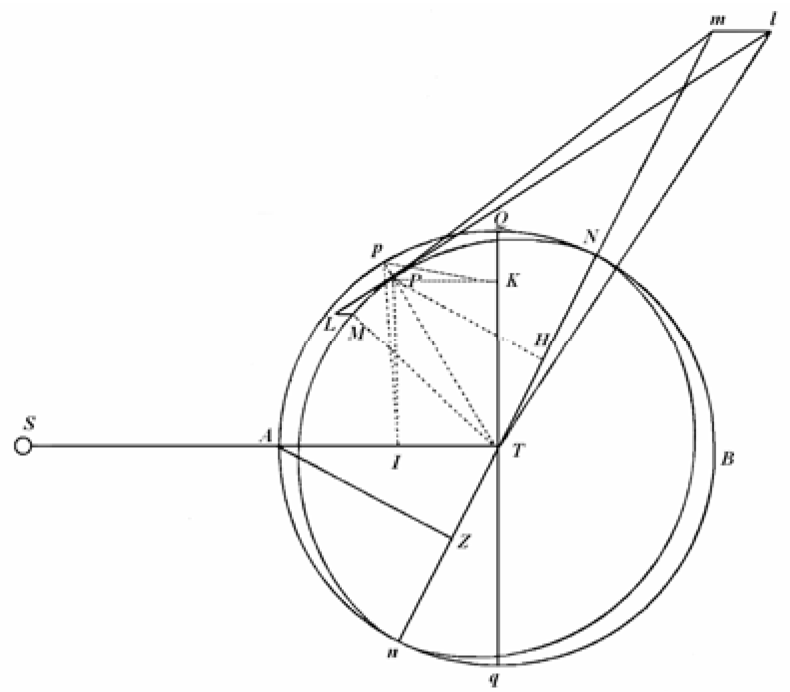
[7] Protože zrychlení $g = \frac{v^2}{|CT|} = \frac{4\pi^2|CT|}{t^2}$, kde $v = \frac{2\pi|CT|}{t}$ je kruhová rychlost. Protože zde čas reprezentujeme délkou oblouku, je perioda oběhu $t = 2\pi|CT|$ a potom $g = \frac{1}{|CT|}$. Potom za dobu $|CT|$ projde těleso dráhu $s = 1/2|CT|$ a jeho rychlost bude $v = g|CT| = \frac{4\pi^2|CT|^2}{t^2} = \frac{2\pi|CT|}{t} = v$.

daném velikostí oblouku $|\widehat{CA}|$, bude $\delta v_{CPA}^{max} = \frac{|\widehat{CA}|}{|CT|}\delta v_{CT}^{max}$. Když je Měsíc v oktanech, je síla $\overline{EL}$ největší a je reprezentovaná plochou $|FK|\cdot|Kk| = 1/2|TP|\cdot|Pp|$.[8]. Rychlost $\delta v_{\widehat{CP}}^{max}$, na kterou tato největší síla $|\overline{EL}|$ urychlí Měsíc za dobu CPA je $\delta v_{CPA}^{max} = 1/2|TP|\cdot|\widehat{CA}|$. Skutečná rychlost, o kterou se Měsíc urychlí δv_{CPA} za dobu CPA působením proměnlivé síly $|\overline{EL}|$, je daná obsahem trojúhelníku TCG. Proto je $\frac{\delta v_{CPA}^{max}}{\delta v_{CPA}} = \frac{1/2|TP|\cdot|\widehat{CA}|}{1/2|TP|^2} = \frac{|\widehat{CA}|}{|TP|}$. Potom rychlost, o kterou je Měsíc urychlen za dobu CPA, je $\delta v_{CPA} = \delta v_{CT}^{max} = \frac{100}{11915}\overline{v}$. Rychlost Měsíce se při přechodu z kvadratury do syzygie mění v rozmezí $\overline{v} - \frac{\delta v_{CPA}}{2}$ až $\overline{v} + \frac{\delta v_{CPA}}{2}$.

Newton poté přechází k rychlosti opisování ploch průvodičem, neboli momentu plochy, který je přímo úměrný rychlosti. Střední moment plochy $\overline{M}$ charakterizuje číslem 11915. Moment plochy v syzygii A je potom $M_A = 11965$ a v kvadratuře C je $M_C = 11865$. Moment plochy v libovolném bodě P pak získáme ze vztahů $M_P = M_C + \delta M$ a $\frac{\delta M}{M_A - M_C} = \frac{S_{FKCG}}{S_{TCG}} = \frac{|PK|^2}{|TP|^2} = \frac{|Pd|}{|TP|}$. Kde S_{FKCG} je plocha čtyřúhelníku $FKCG$ a S_{TCG} je plocha trojúhelníku TCG.

Podle původních předpokladů jsou Slunce a Země v klidu a Měsíc má synodickou oběžnou dobu $27d7h43m$. Ve skutečnosti je Měsíční synodická oběžná doba $29d12h44m$ a přírůstek rychlosti by se měl zvětšit v poměru těchto časů. Potom je $\delta v_{CPA} = \frac{100}{11023}\overline{v}$.

Ve tvrzení 30 problému 11 se Newton věnoval nalezení hodinového pohybu uzlů na kruhové oběžné dráze. Řešení je znázorněno na obrázku 1.6. NPn značí oběžnou dráhu Měsíce a Npn je její projekce do roviny ekliptiky a body N a n jsou uzly. PI a PK jsou kolmice k přímkám ST a Qq a Pp je kolmá k rovině ekliptiky. A a B jsou syzygie Měsíce



Obrázek 1.6: Pohyb uzlů Měsíce na kruhové oběžné dráze.

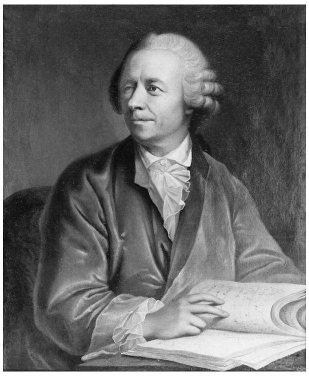
[8]Zde by mělo být správně $|FK|\cdot|Kk| = 1/\sqrt{2}|TP|\cdot|Pp|$, protože když je Měsíc v oktanech, je $|FK| = |TP|$ a protože je trojúhelníček Ppq rovnoramenný, je $|Kk| = 1/\sqrt{2}|Pp|$. Použijeme však vztah, který Newton použil v Principiích [1]

v rovině ekliptiky, AZ je kolmá k přímce uzlů Nn, Q a q jsou kvadratury Měsíce v rovině ekliptiky a pK je kolmice k přímce Qq. Síla Slunce působící na Měsíc se dá rozložit na dvě složky. První působí ve směru k Zemi a druhá ve směru rovnoběžném s ST. První z nich působí v rovině měsíční dráhy, a proto nemění její sklon. Druhá síla narušuje rovinu dráhy Měsíce a má velikost $3|PK|$ nebo $3|IT|$.

Nechť PM reprezentuje oblouk, který Měsíc projde v infinitezimálně malém čase a ML je dráhový element, který Měsíc projde za tento čas působením síly $3|IT|$. Přímky PL a MP protínají rovinu ekliptiky v bodech m a l a k Tm vyneseme kolmici PH. Přímky $ML \parallel ml$ a proto jsou trojúhelníky LMP a lmP podobné. Protože je přímka MPm v rovině dráhy, ve které se Měsíc pohybuje v bodě P, bod $m \in Nn$. Pokud uvážíme, že síla $3|IT|$ generující dráhový element LM působí v bodě P, způsobí pohyb Měsíce po oblouku, jehož tětiva je LP a tím přesune Měsíc z roviny $MPmT$ do roviny $LPlT$. Úhlový pohyb uzlů vytvářený touto silou je roven úhlu mTl. Z podobnosti trojúhelníků LPM a lPm vyplývá $|ml| = \frac{|ML|\cdot|mP|}{|MP|}$. Když je zadán element času, je známá i $|MP|$ a protože $|ML| \propto 3|IT|$, je $|ml| \propto |IT|\cdot|mP|$. Pokud je úhel $\sphericalangle Tml$ pravý, úhel $\sphericalangle mTl \approx \frac{|ml|}{|Tm|} \propto \frac{|IT|\cdot|PH|}{|TP|} \propto |IT|\cdot|PH|$. Ale jak se úhel $\sphericalangle Tml = \sphericalangle STN$ více odlišuje od pravého úhlu, úhel $\sphericalangle mTl$ je stále menší, úměrný $\sin(\sphericalangle STN) = \frac{|AZ|}{|AT|}$. Rychlost uzlů je proto úměrná součinu $|IT|\cdot|PH|\cdot|AZ|$, nebo také součinu sinů úhlů $\sphericalangle TPI, \sphericalangle PTN$ a $\sphericalangle STN$.

Při poloze uzlů v kvadraturách a Měsíce v syzygiích se dráhový element ml vzdálí do nekonečna a potom $\sphericalangle mTl = \sphericalangle mPl = \sphericalangle LPM$, kde $\sphericalangle LPM$ je úhel, o který je Měsíc vychýlen ze své přímočaré dráhy pouze působením síly o velikosti $3|IT|$. O úhel $\sphericalangle PTM$ je Měsíc vychýlen ze svého přímočarého pohybu působením síly, která jej drží na kruhové dráze. Tyto úhly jsou přímo úměrné těmto silám, proto je poměr $\frac{\sphericalangle LPM}{\sphericalangle PTM}$ úhlů roven poměru příslušných sil, který je podle Newtona $\frac{1}{59575}$. Jestliže je střední hodinový pohyb Měsíce vzhledem ke hvězdám $32'56''27'''12.5^{IV}$, hodinový pohyb uzlů je v daném uspořádání $33''10'''33^{IV}12^{V}$. Hodinový pohyb uzlů v jiném uspořádání pak získáme vynásobením získaného čísla siny úhlů $\sphericalangle TPI, \sphericalangle PTN$ a $\sphericalangle STN$(úhlová vzdálenost Měsíce od kvadratury a od uzlu a uzlu od Slunce). Podle výsledného znaménka dochází k prográdnímu, nebo retrográdnímu pohybu uzlů. První případ nastává, když je Měsíc mezi kvadraturou a uzlem, který je k ní nejbíž. Při každém oběhu Měsíce dochází k přebytku retrográdnoho pohybu uzlů nad prográdním.

Newtonovi se podařilo kvalitativně objasnit pohyb uzlů měsíční dráhy a periodické změny jejího sklonu k ekliptice. Vysvětlil hlavní nerovnost v šířce, tak zvanou evekci. Také nalezl poruchovou sílu způsobenou Sluncem, která vyvolává poruchy pohybu Měsíce. Newton při hledání poruchového pohybu Měsíce uvažoval dráhy blízké kruhovým. Všechny otázky ale uspokojivě nevyřešil. V textu *Theoria Lunae* [2], který byl vydán po Newtonově smrti, konstatoval, že střední pohyb přímky apsid dráhy Měsíce neobdržel s dostatečnou přesností. Při každém oběhu se posouvá ve směru pohybu Měsíce o $3°4'8''$. Newtonův výpočet dával hodnotu přibližně dvakrát menší.



Kapitola 2

Leonhard Euler

K výraznějšímu rozvoji v řešení problémů nebeské mechaniky přispěl matematik a fyzik Leonhard Euler, jehož průkopnické metody byly poté využity a doplněny Lagrangem a Laplacem. Jednou z matematických inovací Eulera bylo zavedení goniometrické funkce ve smyslu veličiny vyjádřené vzorcem a vyčíslení její hodnoty v libovolném bodě pomocí nekonečných řad. Do té doby existovaly pouze trigonometrické tabulky s numericky určenými hodnotami. Tím dospěl k oddělení analýzy od geometrie. Euler jako první zachází s goniometrickými funkcemi systematicky jako s poměry, nebo bezrozměrnými veličinami a stanovil pro ně i dnes používané označení. Dále vytvořil vzorce mezi mocninami goniometrických funkcí a funkcí násobných úhlů. Další jeho velkou inovací je použití trigonometrické řady k aproximaci iracionálních funkcí. V neposlední řadě také zavedl metodu variace konstant, v jeho práci spíše známou jako variace dráhových elementů, k řešení nehomogenních diferenciálních rovnic.

2.1 První teorie pohybu Měsíce

V první Eulerově práci na téma pohybu Měsíce [3], šlo hlavně o ověření závislosti Newtonova gravitačního zákona prostřednictvím přesného odvození pohybu přímky apsid. Podle Eulera, pokud by se síly působící na Měsíc nepatrně lišily od newtonovské teorie, rozdíly mezi pozorovanými a vypočítanými pohyby by byly sotva pozorovatelné. Naopak u pohybu apogea by mohl být rozdíl i několik stupňů.

Euler nejprve formuloval tři pohybové diferenciální rovnice, které později použil také na řešení pohybu Jupiteru a Saturnu. Nejprve uvažoval pravoúhlý souřadný systém s počátkem v centru hlavního tělesa, t.j. Země v tomto případě a Slunce u problému Jupiteru a Saturnu. Rovina dráhy Měsíce je mírně nakloněna k rovině xy tak, že z-tová souřadnice obíhajícího Měsíce je poměrně malá. Nechť projekce radiálního vektoru do roviny xy je označena r. Velikost samotného radiálního vektoru je $\sqrt{r^2+z^2}$. Euler zavedl polární souřadnice $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$. Dále předpokládal, že Měsíc podléhá třem silám. První síla P směřuje ve směru přímky spojující projekci hmotného bodu do roviny xy s počátkem. Druhá síla Q je ve stejné rovině a směřuje ve směru opačném, než je pohyb Měsíce. Poslední síla R je kolmá k rovině xy a směřuje k počátku. Eulerovy pohybové rovnice jsou následující:

$$d^2r - rd\phi^2 = -\frac{1}{2}Pdt^2 \tag{2.1}$$

$$2drd\phi + rd^2\phi = -\frac{1}{2}Qdt^2 \tag{2.2}$$

$$d^2z = -\frac{1}{2}Rdt^2. \tag{2.3}$$

Faktor $1/2$ na pravé straně rovnic vyplývá z toho, že Euler položil $2g = 1$. Zákon volného pádu mohl napsat ve tvaru $v^2 = h$, místo $v^2 = 2gh$. Uvažujme rovnici $2\frac{d^2h}{dt^2} = 2g = 1$. Její integrací, za předpokladu $dh/dt = 0$ v čase $t = 0$, obdržíme vztah $\frac{dh}{dt} = \frac{t}{2}$. Další integrací, za předpokladu $h = 0$ v čase $t = 0$, dostaneme $h = \frac{t^2}{4}$. Z posledních rovnic vidíme, že opravdu $v^2 = (\frac{dh}{dt})^2 = \frac{t^2}{4} = h$.

Dále Euler nahradil 2.3 dvěma rovnicemi prvního řádu s novými proměnnými. Těmi jsou sklon dráhy i a délka vzestupného uzlu Ω. Nejprve z jednoduché geometrie odvodil, že

$$z = r\sin(\phi - \Omega)\tan i.$$

Diferenciál této rovnice je

$$dz = dr\sin(\phi - \Omega)\tan i + r(d\phi - d\Omega)\cos(\phi - \Omega)\tan i + \frac{rdi\sin(\phi - \Omega)}{\cos^2 i}, \tag{2.4}$$

kde r, ϕ, Ω a i jsou vzaty jako proměnné. Parametry Ω a i se ale mění mnohem pomaleji, než r a ϕ. Proto, když Měsíc projde vzdálenost $\sqrt{dr^2 + r^2d^2\phi}$ můžeme Ω a i považovat za konstanty a potom

$$dz = dr\sin(\phi - \Omega)\tan i + rd\phi\cos(\phi - \Omega)\tan i. \tag{2.5}$$

Porovnáním rovnic 2.4 a 2.5 a vyjádřením di obdržel

$$di = \frac{d\Omega\sin i\cos i}{\tan(\phi - \Omega)}. \tag{2.6}$$

Vyjádřením diferenciálu $\tan i$ a použitím rovnice 2.6, získal

$$d(\tan i) = \frac{di}{\cos^2 i} = \frac{d\Omega\tan i}{\tan(\phi - \Omega)}. \tag{2.7}$$

Výpočtem d^2z z rovnice 2.4 a po úpravách stanovil

$$\begin{aligned} d^2z &= \tan i\left[(d^2r - rd\phi^2)\sin(\phi - \Omega) + \frac{rd\phi d\Omega}{\sin(\phi - \Omega)} + (2drd\phi + rd^2\phi)\cos(\phi - \Omega)\right] \\ &= \tan i\left[-\frac{1}{2}Pdt^2\sin(\phi - \Omega) - \frac{1}{2}Qdt^2\cos(\phi - \Omega) + \frac{rd\phi d\Omega}{\sin(\phi - \Omega)}\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Po dosazení 2.3 do rovnice 2.8 Euler vyjádřil vztah pro $d\Omega$:

$$d\Omega = \frac{dt^2\sin(\phi - \Omega)}{2rd\phi}\left[P\sin(\phi - \Omega) + Q\cos(\phi - \Omega) - \frac{R}{\tan i}\right]. \tag{2.9}$$

A díky rovnici 2.7, je

$$d[\ln(\tan i)] = \frac{d(\tan i)}{\tan i} = \frac{d\Omega}{\tan(\phi - \Omega)},$$

a proto

$$d[\ln(\tan i)] = \frac{dt^2 \cos(\phi - \Omega)}{2rd\phi} \left[P\sin(\phi - \Omega) + Q\cos(\phi - \Omega) - \frac{R}{\tan i} \right]. \tag{2.10}$$

Rovnice 2.9 a 2.10 představují Eulerův první krok směrem k metodě variace dráhových parametrů. Euler uvažoval Měsíc, nebo planetu, která se pohybuje v momentálně stálé oběžné dráze se sklonem k ekliptice, na druhou stranu také uvažoval oběžnou dráhu která se pomalu pohybuje. Tento pohyb je dán změnami dráhového sklonu i a polohy výstupního uzlu Ω popsané rovnicemi 2.9 a 2.10. Pokud uvažujeme těleso přitahované pouze centrálním tělesem, pohybuje se toto těleso po elipse s centrálním tělesem v jednom ohnisku. Zavedením poruchových sil se oběžná dráha začne pohybovat a měnit tvar. Ale protože jsou poruchové síly relativně malé, elementy drah podléhají pomalým změnám.

V dalším kroku Euler určil síly v konkrétním případě měsíční dráhy. Rovinu ekliptiky určil jako projekční rovinu. Ve vyjádření přitažlivosti Země na Měsíc zavedl konstantu h, kterou případně modifikoval Newtonův gravitační zákon. Písmeny S, T a L označil hmotnosti Slunce (Soleil), Země (Terre) a Měsíce (Lune). V prostoru jsou pak jejich středy označeny O, C a M. Pravoúhlá projekce M do roviny ekliptiky je m. Euler pak zavedl značení

$$\sphericalangle mCO = \eta \tag{2.11}$$
$$mC = r \tag{2.12}$$
$$OC = r' \tag{2.13}$$
$$OM = \Delta \tag{2.14}$$
$$\sphericalangle MCm = \psi \tag{2.15}$$

Pro síly P, Q a R potom získal následující vztahy:

$$P = (T+L)\cos^3\psi \left(\tfrac{1}{r^2} - \tfrac{1}{h^2}\right) + S\left[\tfrac{r}{\Delta^3} - \left(\tfrac{r'}{\Delta^3} - \tfrac{1}{r'^2}\right)\cos\eta\right] \tag{2.16}$$
$$Q = S\left(\tfrac{r'}{\Delta^3} - \tfrac{1}{r'^2}\right)\sin\eta \tag{2.17}$$
$$R = (T+L)\cos^2\psi\sin\psi\left(\tfrac{1}{r^2} - \tfrac{1}{h^2}\right) + S\tfrac{r\tan\psi}{\Delta^3} \tag{2.18}$$

Vzdálenost Měsíce od Země je dána vztahem

$$\Delta = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\eta + \frac{r^2}{\cos^2\psi}}$$

Euler tento vztah pro Δ nahradil řadou, ve které se omezil pouze na první čtyři členy rozvoje. Následně vzdálenost Země od Slunce vyjádřil vztahem

$$r' = \frac{c(1-e^2)}{1-e\cos p},$$

kde c je hlavní poloosa elipsy, po které obíhá Země, e je její výstřednost a p je pravá anomálie Země. Podobnou substituci použil pro proměnnou r:

$$r = \frac{a(1-k^2)\mu}{1-k\cos q},$$

kde a je hlavní poloosa oběžné dráhy Měsíce, k je její výstřednost a q je pravá anomálie Měsíce označená jako nezávisle proměnná. Parametr $\mu = 1+\nu$ charakterizuje pohyb elipsy. Integrací rovnice 2.2 a použitím výše uvedených substitucí Euler získal výraz

$$d\phi = \frac{dq}{\mu^2}\left(C - \frac{1}{n^2}\int B dq\right), \tag{2.19}$$

kde n je poměr středních pohybů a

$$B = \frac{3}{2}\frac{(1-k^2)^3(1-e\cos p)^3}{(1-e^2)^3(1-k\cos q)^4}\mu^2 \sin 2\eta + \ldots$$

a C je integrační konstanta.

Euler nakonec s využitím rovnice 2.19 a po sérii dalších výpočtů transformoval rovnici 2.1 na novou diferenciální rovnici:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\nu}{dq^2} =& C\left(n^2 - 3\nu + \frac{6\nu^2}{n^2}\right) - 2C\int B dq + \frac{1}{n^2}\left(\int B dq\right)^2 \\ &+ \frac{3m\tan^2 i}{4}\left[1-\cos 2(\phi-\Omega)\right](1+k\cos q+\ldots) \\ &+ 3k\cos(2\eta - q) - \frac{9}{4}e\cos(2\eta - p) + \ldots,\end{aligned} \tag{2.20}$$

kde m je poměr hmotností dělených druhou mocninou středních vzdáleností. Podobné rovnice Euler dostal i pro $d\Omega$ a $d[\ln(\tan i)]$. Euler nejprve zvolil

$$\int B dq = A\cos 2\eta + B\cos 4\eta + C\nu\cos\eta + D\nu\cos 3\nu \tag{2.21}$$

$$\nu = A'\cos 2\eta + B'\cos 4\eta + C'\nu\cos\eta + D'\nu\cos 3\eta. \tag{2.22}$$

V tomto prvním přiblížení Euler předpokládal nulové výstřednosti a sklon oběžné dráhy, aby získal nerovnosti nezávislé na výstřednosti. Dosazením těchto vztahů do diferencální rovnice 2.20 obdržel nové rovnice určující neznámé konstanty $A, A', B, B', \ldots$.

V dalším kroku Euler hledal nerovnosti Měsíce, které závisí na první mocnině výstřednosti k jeho oběžné dráhy. Pro jejich nalezení aplikoval stejnou metodu, jako v předchozím případě. Proto za $\int B dq$ dosadil výraz složený ze dvou prvních členů 2.21 a součtu funkcí, které jsou k násobkem kosinů úhlů $q, 2\eta - q, 2\eta + q, \ldots$ násobené novými neznámými koeficienty. Výraz pro ν vytvořil podobně a opět dosazením do 2.21 získal neznámé koeficienty. Euler dále podobným způsobem hledal nerovnosti v pohybu Měsíce závisející na druhé mocnině jeho výstřednosti. Dále se snažil komplikovanými výpočty ještě více zdokonalit již nalezené nerovnosti a usiloval o nejpřesnější určení výrazu pro $\frac{d\phi}{dq}$, který následně integroval a tím získal rozvoj pro ϕ, jehož neperiodickou část lze podle Eulera určit pozorováním. Zapojením pozorování do svých výpočtů Euler zjistil, že není třeba uvažovat jiné síly, než ty, které jsou nepřímo úměrné druhé mocnině vzdálenosti.

Euler dále pokračoval zvažováním dalších možných nerovností pocházející z před tím zanedbaných jevů. Také se věnoval pohybu uzlů a změnám sklonu. Výsledkem Eulerova snažení bylo vyjádření skutečné délky Měsíce ϕ a nakonec vztah pro pravou anomálii Měsíce q v závislosti na jeho střední anomálii $\bar{q}$ a výstřednosti k

$$q = \bar{q} - 2k\left(1 - \frac{1}{8}k^2\right)\sin\bar{q} + \frac{5}{4}k^2\sin 2\bar{q} - \frac{13}{12}k^3\sin 3\bar{q} + \ldots,$$

na jehož základě pak zkonstruoval tabulky.

Protože sám Euler považoval svou teorii za komplikovanou s mnoha nevýhodami, na konec svého textu přidal dodatek, ve kterém ukázal novou metodu výpočtu. Právě tento přístup o několik let později rozvíjeli Lagrange a Laplace. Hlavní myšlenkou tohoto přístupu je vztažení nulové anomálie k perigeu. Potom dr nezávisí na elongaci η a v apogeu a perigeu je $dr = 0$. Euler označil střední vzdálenost Slunce od Země a a střední úhlový pohyb Slunce ω. Potom obdržel

$$\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3 d\omega^2}{p}$$

a první dvě rovnice pohybu

$$2dr d\phi + r d^2\phi = -M d\omega^2 \tag{2.23}$$

$$d^2 r - r d\phi^2 = -\left(\frac{A}{r^2} + N\right) d\omega^2. \tag{2.24}$$

M a N jsou poruchové síly, které mají tvar:

$$M = a'^2\left(\frac{r'}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^2}\right)\sin\eta \tag{2.25}$$

$$N = a'^3\left(\frac{r - r'\cos\eta}{\Delta^3} + \frac{\cos\eta}{r'^2}\right) \tag{2.26}$$

$$A = \frac{M}{M'}a'^3, \tag{2.27}$$

kde r' je vzdálenost Země od Slunce, r je projekce vzdálenosti Měsíce od Země a Δ je vzdálenost Měsíce od Slunce a η je rozdíl délek Měsíce a Slunce. Pro a' také platí vztah

$$M' = n'^2 a'^3$$

a navíc

$$\delta = \sqrt{\frac{r^2}{\cos^2\psi} + r'^2 - 2rr'\cos\eta},$$

kde ψ je šířka Měsíce.

Euler vynásobil rovnici 2.23 $2r^3 d\phi$ a po integraci dostal:

$$d\phi = \frac{d\omega}{r^2}\sqrt{2K} \tag{2.28}$$

$$K = -\int M r^3 d\phi. \tag{2.29}$$

Rovnici 2.24 vynásobil $2rd\phi$ a sečetl s rovnicí 2.23, integroval a za $r^2d\phi$ dosadil podle vztahu 2.28 a získal

$$dr = \pm d\omega\sqrt{2\left(L + \frac{A}{r} - \frac{K}{r^2}\right)} \tag{2.30}$$

$$L = -\int(Mrd\phi + Ndr) \tag{2.31}$$

Dále Euler použil polární rovnici elipsy

$$r = \frac{u}{1 - k\cos q},$$

kde u je parametr elipsy, k je výstřednost a q je pravá anomálie Měsíce. Tuto rovnici pro r dosadil do rovnic 2.30 a 2.28 a pro zjednodušení navíc předpokládal, že

$$2K - Au = 0 \tag{2.32}$$

$$Lu^2 + Au - K = Kk^2 \tag{2.33}$$

a obdržel

$$dr = \pm\frac{kd\omega\sin q}{u}\sqrt{2P} \tag{2.34}$$

$$d\phi = \frac{d\omega}{r^2}\sqrt{Au} = \frac{d\omega(1-k\cos q)^2}{u^2}\sqrt{Au} \tag{2.35}$$

Pohyb apogea pak bude

$$d\phi - dq = \frac{d\omega}{k}\left[\frac{M}{A}\left(2\sin q + \frac{k\sin q\cos q}{1-k\cos q}\right) - \frac{N}{A}\cos q\right]\sqrt{Au}$$

zároveň dostal pro $d\eta$

$$d\eta = f\omega\left(\frac{1-k\cos q}{u^2}\sqrt{Au} - \frac{(1-e\cos p)^2}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}\right)$$

Tyto poslední dvě rovnice Euler použil jako základní vzorce nového řešení.

Poté Euler vytvořil rozvoje do řad pro M a N, při čemž použil

$$p = p_0(1+\xi).$$

S tím také vytvořil rozvoj

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r'^3} + \frac{3r}{r'^4}\cos\eta + \frac{3r^2}{4r'^5}(3 + 5\cos^2\eta) + \ldots, \tag{2.36}$$

který využil ve vyjádření poruchových sil, derivace ξ a také ostatních dráhových elementů podle ω. Podobným způsobem vytvořil vzorce popisující pohyb Měsíce v šířce a zavedl vzorce pro $d\Omega/d\omega$ a $d[\ln(\tan i)]/d\omega$.

Poté Euler nejprve určil nerovnosti v pohybu Měsíce nezávislé na sklonu jeho dráhy a výstřednosti Slunce e. Poté pokračoval metodou neurčitých koeficientů a při použití rovnic pro poruchy dostal výrazy pro derivace dráhových elementů podle ω.

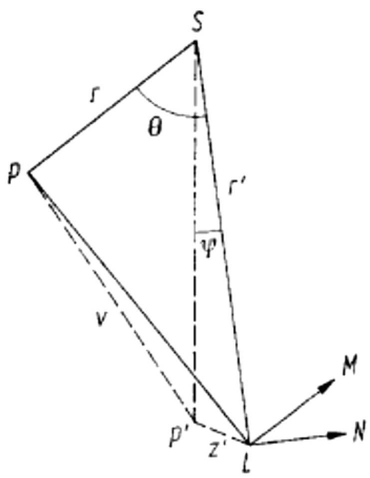
Tato první Eulerova teorie Měsíce přinesla hlavně potvrzení platnosti Newtonova gravitačního zákona, o jehož platnosti si Euler nebyl do té doby jistý. Euler však poté zastával názor, že samotný Newtonův gravitační zákon není dostačující k vysvětlení pohybu nebeských těles. Utvrzoval ho v tom problém tzv. sekulární akcelerace Měsíce, což je zrychlování středního úhlového pohybu Měsíce. Sekulární akceleraci objevil již v roce 1693 Halley. Ve druhé Eulerově teorii Měsíce z roku 1772 byl použit nový přístup řešení, ale nedosáhla přílišného úspěchu. Sekulární akcelerace pomocí ní nebyla vysvětlena a dokonce nedosáhla lepší přesnosti. Sekulární akcelerace byla vysvětlena až v roce 1787 Laplacem, který nalezl její příčinu ve změně výstřednosti zemské dráhy.

2.2 Teorie pohybu Jupiteru a Saturnu

Euler ve své první práci [4] na téma pohybu Jupiteru a Saturnu využil pohybové rovnice 2.1, 2.2,2.9 a 2.10, které již využil také v případě své první teorie pohybu Měsíce. Nejprve vyjádřil síly P, Q a R. Nechť písmena bez čárky označují proměnné a konstanty týkající se Jupiteru a čárkované Saturnu. Hmotnost Slunce je označena S, Jupiteru p a Saturnu p'. Euler se omezil pouze na výpočet poruch Saturnu způsobené Jupiterem. Proto položil rovinu Jupiteru (r, θ) nerušenou a bral ji jako referenční rovinu. Saturn má šířku ψ' danou vztahem $\psi' = \frac{z'}{r'}$, jak je vidět na obrázku 2.1. Vzdálenost mezi Jupiterem a Saturnem je daná vztahem

$$v = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\theta + \frac{r'^2}{\cos^2\psi'}},$$

kde θ je rozdíl heliocentrických délek planet v oběžné dráze Jupiteru.



Obrázek 2.1: Slunce S, kolem kterého obíhají Jupiter p a Saturn p'

Na Saturn působí jednak síla směřující ke Slunci o velikosti $\frac{S}{r'^2+z'^2} = \frac{S\cos^2\psi'}{r'^2}$ a také síla směřující k Jupiteru o velikosti $\frac{p}{v^2}$. Protože na Slunce, o kterém předpokládáme, že je nehybné, působí síly Jupiteru a Saturnu, musíme tyto síly převést na Saturn s opačným směrem. Proto k těmto silám působícím na Saturn přidáváme ještě sílu o velikosti $\frac{p}{r^2}$, směřující ve směru přímky LM, a sílu o velikosti $\frac{p' \cos^2 \psi}{r'}$ směřující ve směru $p'S$. Tyto čtyři síly lze rozložit do složek ve směrech LS, LN a $p'L$:

$$P = \frac{(S+p')\cos^3\psi'}{r'^2} + p\left[\frac{r'}{v^3} - \left(\frac{r}{v^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\right] \tag{2.37}$$

$$Q = p\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{v^3}\right)\sin\theta \tag{2.38}$$

$$R = \frac{(S+p')\cos^2\psi' sin\psi'}{r'^2} + \frac{pr'\tan\psi'}{v^3}. \tag{2.39}$$

K nahrazení faktoru $\frac{dt^2}{2}$, Euler využil rovnici 2.1. Představil si Jupiter pohybující se rovnoměrně po kruhu ve střední vzdálenosti a od Slunce a střední úhlový pohyb Jupiteru označil M. Potom je $dr = 0$ a z rovnice 2.1 obdržel

$$\frac{dt^2}{2} = \frac{a(dM)^2}{S/a^2} = \frac{a^3(dM)^2}{S}.$$

Po dosazení do rovnic 2.1, 2.2,2.9 a 2.10 pro Saturn, vyjádření pro $P, Q, R, dt^2/2$ a navíc označil poměr hmotností Saturnu a Slunce $\mu' = \frac{p'}{S}$ a získal:

$$d^2r' - r'(d\phi')^2 = -a^3(dM)^2\left[\frac{(1+\mu')\cos^3\psi'}{r'^2} + \frac{\mu r'}{v^3} + \frac{\mu\cos\theta}{r^2} - \frac{\mu r\cos\theta}{v^3}\right], \tag{2.40}$$

$$2dr'd\phi' + r'd^2\phi' = -\mu a^3(dM)^2\sin\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{v^3}\right), \tag{2.41}$$

$$d\Omega = \frac{\mu a^3(dM)^2\sin(\phi'-\Omega)\sin(\theta-\Omega)}{r'd\phi'}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{v^3}\right], \tag{2.42}$$

$$d[\ln(\tan i)] = \frac{\mu a^3(dM)^2\cos(\phi'-\Omega)\sin(\theta-\Omega)}{r'd\phi'}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{v^3}\right). \tag{2.43}$$

Tyto rovnice jsou přímým důsledkem Newtonova gravitačního zákona. Euler se nepokusil o žádné jejich formální řešení, ale zavedl aproximace, kterými tyto rovnice zjednodušil. Nové rovnice pak řešil metodou neurčitých koeficientů. Postupně vytvořil čtyři různé varianty aproximací.

(1) Nejprve předpokládal nulový sklon Saturnovy dráhy, proto je také $\psi' = 0$, a dále výstřednosti obou drah jsou nulové. Proto $r = a$ a $r' = a'(1+nx')$, kde a' je střední vzdálenost Saturnu od Slunce a $\mu x'$ vyjadřuje poruchy radiálního vektoru vyvolané Jupiterem a jsou tak malé, že jejich čtverec lze zanedbat. Dále Euler zavedl $d\phi' = m(dM) + ndy'$, kde m je poměr Saturnova středního pohybu k Jupiterovu a ndy' je opět velmi malá porucha, jejíž čtverec lze zanedbat. Dosazením těchto substitucí do rovnic 2.40 a 2.41 nalezl diferenciální rovnice v x' a y', které vyřešil zavedením výrazu s neurčitými koeficienty pro radiální vektor a jeho dosazením do diferenciálních rovnic a určením koeficientů každého sinu nebo kosinu. Tím získáme poruchy Saturnu v radiálním vektoru a délce vzniklých na základě uvedených předpokladů.

(2) Dále Euler zavedl výstřednost Saturnovy dráhy, zatímco ostatní předpoklady zůstaly stejné. Radiální vektor Saturnu má tvar

$$r' = a'(1 + e'\cos E' + nx'),$$

kde e' je výstřednost Saturnovy dráhy, E' je Saturnova excentrická anomálie, která souvisí se střední anomálií $M' = E' + e'\sin E'$.Výraz nx' opět vyjadřuje poruchu v radiálním vektoru způsobenou Jupiterem. U bezporuchové elipsy je skutečná anomálie daná vztahem $d\phi' = \frac{dE'(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}{1+e'\cos E'}$ anomálie Saturnu při pohybu po rušené elipse je daná vztahem

$$d\phi' = \frac{kdE'(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}{1+e'\cos E'} + ndy',$$

kde k se s ohledem na pohyb afélia mírně liší od 1. Po dosazení těchto výrazů pro r' a $d\phi'$ do rovnic 2.40 a 2.41 Euler zanedbal členy obsahující druhé a vyšší mocniny výstřednosti e' a odvodil znovu diferenciální rovnice pro x' a y'. Tyto rovnice vyřešil stejně jako předtím a tím získal obě poruchy získané v (1) a taky poruchy závisející na e'.

(3) Ve třetí variantě zjednodušujících předpokladů zavedl Euler eliptickou oběžnou dráhu pro Jupiter s radiálním vektorem $r = a(1 + e\cos E)$ a pro jeho pravou anomálii platí

$$d\phi = \frac{dE(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1+e\cos E}.$$

Naopak pro Saturn předpokládal kruhovou oběžnou dráhu rušenou působením Jupiteru a pro jeho radiální vektor platí

$$r' = a'(1 + nx')$$

a pro délku

$$d\phi' = m(dM) + ndx'.$$

Řešení diferenciálních rovnic vzniklých z těchto substitucí dává poruchy úměrné e.

(4) Na konec za účelem využití rovnic 2.42 a 2.43 Euler předpokládal obě dráhy kruhové a pohyby v délce identické se středními pohyby. Integrace potřebné k získání změny sklonu a pohybu přímky uzlů se pak ukážou být přímočaré, když na pravé straně rovnic jsou pouze ϕ, θ a v proměnné. Euler zjistil, že sklon je až na drobné odchylky konstantní a přímka uzlů koná zpětný pohyb s malými sinusoidálními výkyvy.

V druhé práci o pohybu Jupiteru a Saturnu [5] z roku 1752, Euler neřešil problém pohybu v šířce. K řešení použil pouze pohybové rovnice 2.1 a 2.2, které aplikoval na Jupiter a Saturn:

$$d^2r - r(d\phi)^2 = -a^3(dM)^2\left(\frac{1+\mu}{r^2} + \frac{\mu'\cos\theta}{r'^2} + \frac{\mu'(r - r'\cos\theta)}{v^3}\right), \tag{2.44}$$

$$2drd\phi + rd^2\phi = -\mu' a^3(dM)^2\sin\theta\left(-\frac{1}{r'^2} + \frac{r}{v^3}\right), \tag{2.45}$$

$$d^2r' - r'(d\phi')^2 = -a^3(dM)^2\left(\frac{1+\mu'}{r'^2} + \frac{\mu\cos\theta}{r^2} + \frac{\mu(r' - r\cos\theta)}{v^3}\right), \tag{2.46}$$

$$2dr'd\phi + r'd^2\phi' = -\mu a^3(dM)^2\sin\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{v^3}\right). \tag{2.47}$$

V dalším kroku Euler vynásobil rovnice 2.45 a 2.47 r, respektive r' a jejich následnou integrací získal rovnice

$$r^2 d\phi = dM\left(f + \mu' a^3 \int \frac{rdM\sin\theta}{r'^2} - \mu' a^3 \int \frac{rr'dM\sin\theta}{v^3}\right), \tag{2.48}$$

$$r'^2 d\phi' = dM\left(g - \mu a^3 \int \frac{r'dM\sin\theta}{r^2} + \mu a^3 \int \frac{rr'dM\sin\theta}{v^3}\right), \tag{2.49}$$

kde f a g jsou integrační konstanty. Zavedením substitucí

$$\int \frac{rdM\sin\theta}{r'^2} = X, \quad \int \frac{r'dM\sin\theta}{r^2} = Y, \quad \int \frac{rr'dM\sin\theta}{v^3} = Z,$$

a položením $a = 1$, dostal rovnice

$$d\phi = \frac{dM}{r^2}[f + \mu'(X - Z)], \tag{2.50}$$

$$d\phi' = \frac{dM}{r'^2}[g - \mu(Y - Z)], \tag{2.51}$$

které dosadil do rovnic 2.44 a 2.46. Dále Euler pro zjednodušení výpočtů zvolil $d\theta$ konstantní, neboli $\theta = \phi - \phi'$ uvažoval jako nezávislou proměnnou, i přes skutečnost, že se θ mění v čase nerovnoměrně. Euler položil $dM = \tau d\theta$ a $dM' = n'\tau d\theta$, kde τ je proměnná a n' je poměr Saturnova středního pohybu k Jupiterovu. Protože keplerovské úhly anomálie nemají žádný vztah k nezávislé proměnné θ, navrhl zavést nový anomalistický úhel $d\sigma = \kappa d\theta$ pro Jupiter a $d\sigma' = \kappa' d\theta$ pro Saturn, kde κ a κ' jsou konstanty.

Zavedením substitucí

$$r = a(1 + u), \tag{2.52}$$

$$r' = a'(1 + v) \tag{2.53}$$

a jejich dosazením do rovnic 2.44 a 2.46 získal dvě diferenciální rovnice pro proměnné u a v. Ty obsahovaly pouze oscilační členy, nebo sekulární členy úměrné θ. Při řešení těchto rovnic Euler psal výrazy pro u a v obsahující kosinové členy s neurčitými koeficienty a jejich dosazením do diferenciálních rovnic tyto koeficienty určil. Tento postup opět provedl několikrát, kdy postupně bral v úvahu pouze výstřednost Jupiterovy dráhy, poté pouze výstřednost Saturnovy dráhy a nakonec uvažoval obě výstřednosti současně.

Třetí Eulerova práce o planetárních poruchách [6] je z roku 1756. Na jejím začátku Euler znovu odvodil rovnice 2.1,2.2, 2.9 a 2.10 . Při dalším řešení vynásobil rovnici 2.2 integračním faktorem $r^3 d\phi$ a následnou integrací získal

$$r^4 d\phi^2 = dt^2(A - \int Qr^3 d\phi),$$

jednoduchou úpravou dostal

$$rd\phi^2 = \frac{dt^2}{r^3}(A - \int Qr^3 d\phi).$$

Dosazením této rovnice do 2.1 obdržel

$$d^2r = dt^2\left(\frac{A}{r^3} - \frac{1}{r^3}\int Qr^3 d\phi - \frac{P}{2}\right).$$

Poslední rovnici po vynásobení $2dr$ integroval:

$$(dr)^2 = dt^2\left(B - \frac{A}{r^2} - 2\int \frac{dr}{r^3}\int Qr^3 d\phi - \int Pdr\right).$$

V této rovnici třetí člen v závorce na pravé straně částečně integroval a obdržel

$$(dr)^2 = dt^2\left(B - \frac{A}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int Qr^3 d\phi - \int Qrd\phi - \int Pdr\right),$$

odkud nalezl

$$dr = -\frac{dt}{r}\left[Br^2 - A + \int Qr^3 d\phi - r^2\left(\int Qrd\phi + \int Pdr\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.54}$$

záporné znaménko zvolil, protože vztahoval pohyb planet k aféliu, kde je vzdálenost od Slunce největší.

Do rovnice 2.54 Euler dosadil rovnici elipsy v polárních souřadnicích $r = \frac{p}{1-q\cos v}$, kde p je parametr elipsy, q je výstřenost a v je anomálie. Po provedení většího počtu aproximací Euler uvedl výsledek:

$$dr = -\frac{dt}{p}\left[Bp^2 + f^2p - A + \int Qr^3 d\phi - p^2\left(\int Qrd\phi + \int Pdr\right) - f^2pq\cos v\right.$$
$$\left. +2Aq\cos v - 2q\cos v\int Qr^3 d\phi - Aq^2\cos^2 v + q^2\cos^2 v\int Qr^3 d\phi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pro stacionární elipsu je dr úměrné $\sin v$. Euler použil představu, že oběžná dráha je pohybující se elipsa a proto musí být výraz pod odmocninou úměrný $1-\cos^2 v$. Z této podmínky obdržel

$$p = \frac{2A - 2\int Qr^3 d\phi}{f^2}, \tag{2.55}$$

$$q^2 = \frac{f^2 + 2Bp - 2p(\int Qrd\phi + \int Pdr)}{f^2}. \tag{2.56}$$

Přítomnosti proměnných poruchových sil P a Q ukazují na proměnnost parametrů elipsy p a q. Euler nalezl jejich diferenciály vyjádřené pomocí diferenciálů času dt. Také určil pohyb afélia z rozdílu $d\phi - dv$, kde ϕ je délka a v je pravá anomálie. Pohyb uzlu a změny sklonu spočítal stejně, jako v práci [4] z roku 1748.

2.3 Rozklady do trigonometrických řad

Jak už bylo řečeno, velmi důležité pro vyšetřování vzájemných poruch planet bylo Eulerovo zavedení trigonometrických řad ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

použité pro aproximace jiných funkcí. Bez těchto řad by nebeská mechanika Lagrange a Laplace byla nemyslitelná. Zatímco prostorová geometrie oběhu Měsíce kolem Země umožňovala použití už jen několika prvních členů Taylorova rozvoje, v případě oběhu planet kolem Slunce se vzdálenosti mezi nimi v různých obdobích diametrálně odlišují a použité řady konvergují mnohem hůře.

Diferenciální rovnice popisující pohyb planety kolem Slunce připouští dobře známé řešení dané eliptickou drahou a zákonem ploch. Pokud do systému vložíme další planetu, v pohybových rovnicích se objeví nové členy způsobené přitažlivostí této nové planety a rovnice pak lze vyřešit pouze zavedením aproximací. Síla, kterou působí tato nová rušící planeta na původní rušenou planetu, je nepřímo úměrná čtverci jejich vzájemné vzdálenosti

$$v^{-2} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{-1}.$$

Tato síla po rozložení do souřadnicových směrů, aby mohla být použita v pohybových rovnicích, má jednotlivé složky nepřímo úměrné třetí mocnině vzdálenosti

$$v^{-3} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Hlavní problém, který Euler řešil ve své práci [4] z roku 1748, bylo určení integrálu obsahující tento faktor. Východiskem je aproximovat vzdálenost mezi planetami nějakým dostatečně přesným racionálním vyjádřením, který se dá přímo integrovat.

Euler nejprve zanedbal výstřednosti drah, r a r' jsou proto konstantní a zavedením $\alpha = r/r'$ a $g = 2\alpha/(1+\alpha^2)$ dostal

$$v^{-3} = r'^{-3}(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} = r'^{-3}(1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}(1 - g\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Dále Euler vytvořil pouze rozvoj obecnější funkce $(1 - g\cos\theta)^{-s}$. V [4] konkrétně [7, II,25,60] Euler uvedl:

„*Při řešení diferenciálních rovnic, způsobuje největší nesnáze iracionální formule* $(1 - g\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}$, *která nemůže být rozložena do konvergující řady, protože hodnota g je přibližně* $4/5$. *Tato okolnost mě přesvědčuje, že je absolutně nutné tento iracionální vzorec ve výpočtech zachovat, ale to by řešení učinilo téměř neproveditelné, protože by se musely hledat hodnoty integrálů měřením plochy pod křivkou, což by přineslo pracné a ne moc přesné aproximace.* “

Taylorův rozvoj $(1 - g\cos\theta)^{-s}$, dává

$$1 + sg\cos\theta + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2} g^2 \cos^2\theta + \frac{s(s+1)(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3} g^3 \cos^3\theta + \ldots$$

Mocniny $\cos\theta$ nejde integrovat přímo, Euler proto vyjádřil mocniny kosinů pomocí kosinů vícenásobných úhlů, např.:

$$2\cos^2\theta = \cos 2\theta + 1, \tag{2.57}$$
$$4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta, \tag{2.58}$$

a rozvoj dostal tvar

$$(1 - g\cos\theta)^{-s} = A + B\cos\theta + C\cos 2\theta + \ldots,$$

kde

$$A = 1 + \frac{2}{4}\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}g^2 + \frac{4\cdot 3}{4\cdot 8}\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}g^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 16}\frac{(s+5)!}{6!(s-1)!}g^6 + \ldots \tag{2.59}$$
$$B = sg + \frac{s(s+1)(s+2)}{2\cdot 4}g^3 + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}g^5 + \ldots \tag{2.60}$$

podobné řady lze nalézt pro $C, D, \ldots$. Nová řada pro $(1 - g\cos\theta)^{-s}$ je snadno integrovatelná a její integrál konverguje rychleji, protože dvojitá integrace každého členu $k\cos n\theta$ dává $-\frac{k}{n^2}\cos n\theta$.

Jakýkoli koeficient nové řady, mimo prvních dvou, lze spočítat pomocí předchozích dvou. Nechť

$$q = A + B\cos\theta + C\cos 2\theta + \ldots = (1 - g\cos\theta)^{-s}.$$

Potom vztah

$$\ln q = -s\ln(1 - g\cos\theta)$$

jehož derivací a úpravou dostaneme

$$\frac{dq}{d\theta}(1 - g\cos\theta) + sgq\sin\theta = 0. \tag{2.61}$$

Dosazením za q a $\frac{dq}{d\theta}$ z definice řady q a použitím rovnic

$$\sin n\theta\cos\theta = \frac{1}{2}[\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta] \tag{2.62}$$
$$\cos n\theta\sin\theta = \frac{1}{2}[\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta], \tag{2.63}$$

se zbavil součinů sinů a kosinů. Součet členů obsahující sinus stejného argumentu je roven nule, aby byla splněna rovnice 2.61 a tím získal rovnice mezi koeficienty $A, B, C, \ldots$:

$$C = \frac{2B - 2sgA}{(2-s)g},\ D = \frac{4C - (s+1)gB}{(3-s)g},\ E = \frac{6D - (s+2)gC}{(4-s)g},\ \ldots$$

K určení koeficientů Aa B Euler uvedl dvě metody. První vychází z poznatku, že A, nebo $\frac{B}{2}$ mohou být zapsány ve tvaru

$$M + N(1 + Pg^2 + PQg^4 + PQRg^6 + PQRSg^8 + \ldots),$$

kde M je součet určitého počtu počátečních členů, například 10, a N je následující člen, vypočtené ze vztahů 2.59 a 2.60. Faktory $P, Q, R, \dots$ se potom stejnoměrně blíží 1, a o řadě je potom možné uvažovat jako o rozvoji zlomku ve tvaru

$$\frac{1+ag^2+bg^4}{1-cg^2-dg^4},$$

kde koeficienty a, b, c, d mohou být určeny z hodnot $P, Q, R, \dots$.

Druhou metodu uvedl bez vysvětlení odvození. Jde ale o přibližný výpočet Fourierových koeficientů. Jde o výpočet následujících sum

$$A \approx \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\left(1-g\cos\frac{(2j-1)\pi}{4n}\right)^{-s} \tag{2.64}$$

$$B \approx \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\cos\frac{(2j-1)\pi}{4n}\cdot\left(1-g\cos\frac{(2j-1)\pi}{4n}\right)^{-s}. \tag{2.65}$$

Při zavedení výstředností Euler nejprve uvažoval dráhu Satrurnu výstřední a Jupiterovu kruhovou a poté naopak. V prvním případě Euler nalezl vztah

$$v^{-3} = a'^{-3}(1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}(1-g\cos\theta+e'g(\alpha^{-1}-\cos\theta)\cos q')^{-\frac{3}{2}}.$$

Kde e' je výstřednost Saturnovy dráhy a q' je excentrická anomálie Saturnu související s jeho pravou anomálií vztahem $d\phi' = \frac{dq'(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+e'\cos q')}$. Výraz $(1-g\cos\theta+e'g(\alpha^{-1}-\cos\theta)\cos q'))^{-\frac{3}{2}}$ Euler rozepsal do řady a použil první dva členy:

$$v^{-3} = a'^{-3}(1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(1-g\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3e'g(\alpha^{-1}-\cos\theta)\cos q'}{2(1-g\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}\right).$$

V případě, kdy Euler určoval poruchy vyplývající z výstřednosti Jupiterovy dráhy při zanedbání výstřednosti Saturnu, odvodil podobnou rovnici

$$v^{-3} = a'^{-3}(1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{(1-g\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3eg(\alpha^{-1}-\cos\theta)\cos q}{2(1-g\cos\theta)^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Poslední dvě rovnice vyžadují kromě rozvoje $(1-g\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}$ ještě rozvoj výrazu $(1-g\cos\theta)^{-\frac{5}{2}}$.

2.4 Problém „arcs de cercle“

Při obyčejném řešení diferenciálních rovnic metodou postupných aproximací vznikají v řešení členy, ve kterých se úhel rostoucí s časem, tzv. „arc de cercle“[1], objeví mimo argument sinu nebo kosinu. Takový člen se s narůstajícím časem neustále zvětšuje a

[1] V doslovném překladu „úhel oblouku kruhu“

znehodnocuje řešení. Euler poprvé nalezl „arc de cercle“ ve třetí části práce [4], ve které hledal poruchy dráhy Saturnu způsobené výstředností Jupiterovy dráhy.

Ve třetí části [4] Euler předpokládal oběžné dráhy Jupiteru a Saturnu v jedné rovině, dráha Jupiteru je excentrická s výstředností e a Saturnova dráha je kruhová. Jak už bylo řečeno, Euler pro Jupiter použil vzorce keplerovského pohybu po elipse

$$r = a(1 + e\cos E), \tag{2.66}$$

$$d\phi = \frac{dE(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1+e\cos E} \approx dE(1 - e\cos E). \tag{2.67}$$

Rušenou kruhovou dráhu Saturnu vyjádřil vztahy

$$r' = a'(1 + nx') \tag{2.68}$$

$$d\phi' = mdM + ndy', \tag{2.69}$$

kde n je velmi malý koeficient, x'a y' jsou nové proměnné a $m = \frac{M'}{M}$ je poměr střední Saturnovy a Jupiterovy anomálie. Ke zjednodušení výpočtů Euler předpokládal, že odchylky Saturnu od kruhové dráhy a rovnoměrného pohybu jsou způsobené pouze Jupiterem a protože $d\theta = d\phi - d\phi'$. S určitým stupněm přiblížení odvodil

$$d\theta = (1-m)dE - (1+m)edE\cos E. \tag{2.70}$$

Euler použil excentrickou anomálii Jupiteru E jako nezávislou proměnnou ($dE = 0$).

Použitím zjednodušujících podmínek na pohybové rovnice odvodil Euler rovnice pro x' a y':

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d^2x'}{dE^2}(1-e\cos E) + e\frac{dx'}{dE}\sin E - \frac{2\lambda A - B}{2h}e\cos E - 3m^2x'(1+e\cos E) \\ & - 2m\frac{dy'}{dE} + \frac{\cos\theta}{\lambda}(1-e\cos E) + \frac{a^3}{\lambda v^3}(\lambda - \cos\theta + \lambda e\cos E - 2e\cos\theta\cdot\cos E), \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d^2y'}{dE^2}(1-e\cos E) + e\frac{dy'}{dE}\sin E + 2m\frac{dx'}{dE} + \frac{\sin\theta}{\lambda}(1-e\cos E) \\ & - \frac{a^3}{\lambda v^3}(1+2e\cos E)\sin\theta, \end{aligned} \tag{2.72}$$

kde A, B, h jsou konstanty a $\lambda = a'/a$. Dále za v^{-3} dosadil prvních pět členů trigonometrické řady a integroval rovnici 2.72. Při integraci $\int dE\sin\theta$ a $\int dE\sin 2\theta$ Euler využil vztah 2.70 ve tvaru

$$dE = \frac{d\theta}{1-m} + \frac{1+m}{1-m}edE\cos\theta,$$

a tím získal

$$\begin{aligned} \int dE\sin\theta =& -\frac{1}{1-m}\cos\theta + \frac{(1+m)e}{2(1-m)}\int dE\sin(\theta+E) \\ & + \frac{(1+m)e}{2(1-m)}\int dE\sin(\theta-E), \end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} \int dE\sin 2\theta =& -\frac{1}{2(1-m)}\cos 2\theta + \frac{(1+m)e}{2(1-m)}\int dE\sin(2\theta+E) \\ & + \frac{(1+m)e}{2(1-m)}\int dE\sin(2\theta-E). \end{aligned} \tag{2.74}$$

Pro výpočet integrálů na pravé straně těchto rovnic, protože jsou vynásobeny malým číslem e, použil Euler méně přesnější vztah $d\theta = (1-m)dE$ a nalezl

$$\int sin(\theta + E) = -\frac{1}{2-m}\cos(\theta + E), \tag{2.75}$$

$$\int sin(2\theta + E) = -\frac{1}{3-2m}\cos(2\theta + E), \tag{2.76}$$

$$\int sin(\theta - E) = -\frac{1}{m}\cos(\theta - E), \tag{2.77}$$

$$\int sin(2\theta - E) = -\frac{1}{1-2m}\cos(2\theta - E). \tag{2.78}$$

Dosazením vzorce pro dy'/dE nalezené řešením rovnice 2.72 do rovnice 2.71 získal

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d^2x'}{dE^2}(1-2e\cos E) + e\frac{dx'}{dE}\sin E + m^2x' - M'e\cos E \\ &+ 2(m\underline{A}' + B')\cos\theta + (2n\underline{B}' + C')\cos 2\theta \\ &- \left(\frac{2m\underline{P}'}{2-m} + Q'\right)e\cos(\theta + E) + 2(\underline{P}' - Q')e\cos(\theta - E) \\ &- \left(\frac{2mQ'}{3-2m} + R'\right)e\cos(2\theta + E) - \left(\frac{2m\underline{Q}'}{1-2m} + R'\right)e\cos(2\theta - E). \end{aligned} \tag{2.79}$$

Euler použil pro vyřešení této rovnice metodu neurčitých koeficientů a navrhl řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} x' =& M''e\cos E + B''\cos\theta + C''\cos 2\theta + Q''e\cos(\theta + E) \\ &+ R''e\cos(2\theta + E) + \underline{Q}''e\cos(\theta - E) + \underline{R}''e\cos(2\theta - E). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Dosazením jeho příslušných derivací do rovnice 2.79 a položením výsledných koeficientů u kosinů příslušných argumentů rovných nule určil hodnoty neznámých koeficientů u 2.80. Pro Q'' nalezl

$$\underline{Q}'' = \frac{2m\underline{A}' + B' + 2\underline{P}' - Q'}{m^2 - m^2}.$$

Ale jmenovatel je rovný nule a takový výsledek nedává smysl. Nekonečný koeficient Q'' podle Eulera ukazuje na to, že v rovnici pro x' musí být ještě další člen obsahující absolutní úhel a tento výraz má tvar $\underline{T}''eE\sin(\theta - E)$. V $\frac{dx'}{dE}$ potom bude navíc vystupovat dvojčlen $\underline{T}''e\sin(\theta - E) - m\underline{T}''eE\cos(\theta - R)$ a v $\frac{d^2x'}{dE^2}$ dvojčlen $-2m\underline{T}''e\cos(\theta - E) - m^2\underline{T}''eE\sin(\theta - E)$. Výsledný koeficient u $e\cos\theta - E$ bude navíc obsahovat výraz $-2m\underline{T}''$ a výrazy obsahující $\underline{Q}''$ se navzájem odečtou, takže již nemusel tento koeficient nadále uvažovat a pro $\underline{T}''$ obdržel

$$\underline{T}'' = \frac{2m\underline{A}' + B' + 2\underline{P}' - Q'}{2m}$$

Euler ale použil oba členy $\underline{T}''eE\sin(\theta - E)$ a $\underline{Q}''e\cos(\theta - E)$ ve vyjádření x', které vystupuje ve vyjádření y'.

Pro lepší ilustraci problému, předpokládejme diferenciální rovnici ve tvaru

$$0 = \frac{d^2x'}{dE^2} + m^2x' + B\cos pE + \dots, \tag{2.81}$$

v řešení musíme očekávat dva členy:

$$-\frac{B\cos mE}{p^2 - m^2} + \frac{B\cos pE}{p^2 - m^2}. \tag{2.82}$$

Uvažujme $m = p + \varepsilon$, kde ε je velmi malé. V limitě $\varepsilon \to 0$ se 2.82 rovná $-(BE\sin mE/2p)$. Člen $(2\underline{P}' - Q')e\cos(\theta - E)$ z rovnice 2.79 odpovídá $B\cos pE$ z rovnice 2.81. Protože $d\phi \approx dE(1 - e\cos E)$, je

$$\phi = E - e\sin E + A,$$

kde A je délka afélia. Dále $d\phi' \approx mdM = m(dE + edE\cos E)$ a z toho dostaneme

$$\phi' \approx m(E + e\sin E).$$

Když $\theta = \phi - \phi'$, dostaneme přibližně

$$\cos(\theta - E) \approx \cos(mE - A) - (1 + m)e\sin E\sin(mE - A),$$

zanedbáním druhé mocniny výstřednosti e bude

$$(2\underline{P}' - Q')e\cos(\theta - E) = (2\underline{P}' - Q')e\cos(mE - A), \tag{2.83}$$

čímž jsme zjistili, že koeficient od E v argumentu je m. Pokud by Euler neuvažoval polohu aféla Jupiteru konstantní, řekněme $A \to A + \varepsilon E$, kde $\varepsilon \ll 1$, pak by pravá strana 2.83 přešla na

$$(2\underline{P}' - Q')e\cos[(m - \varepsilon)E - A],$$

a ve jmenovateli pro $\underline{Q}''$ by se objevil výraz $(m - \varepsilon)^2 - m^2 \approx -2m\varepsilon$ a v řešení by se „arc de cercle“ neobjevil. Euler o odstranitelnosti „arc de cercle“ věděl, ale ve svém řešení jej zahrnul, protože v něm viděl řešení problému pozorovaného sekulárního zmenšení pohybu Saturnu. Pro velkou složitost výpočtů koeficientů $\underline{Q}''$ a $\underline{T}''$ Euler navrhl jejich určení pomocí pozorování a skutečně dále ve své práci rozvíjel teorii, jak z vícenásobných pozorování určit koeficienty trigonometrických členů, tzv. metodou podmínkových rovnic.

Druhá Eulerova práce o pohybech Jupiteru a Saturnu z roku 1752 [5] neobsahovala žádný „arcs de cercle“. Euler nezavrhl analýzu z [4], ale zaměřil se na způsob, jakým poruchové členy přispívají k pozorované rovnici středu.

Ve vyjádření pro radiální vektor Saturnu, stejně jako v předchozí práci [4], nalezl člen obsahující $\cos(\theta - \sigma)$, stejně tak pro Jupiter člen obsahující $\cos(\theta - \sigma')$, kde σ a σ' je trochu odlišný druh anomálie, který se výrazně neliší od excentrické anomálie E. Euler v [5, str.40] naznačil, že koeficient u $\cos(\theta - \sigma)$ je výrazně větší, než koeficienty u jiných kosinových členů. A protože argument tohoto kosinu vyjadřuje vzdálenost Saturnu od Jupiterova afélia, původně předpokládaná kruhová dráha je rušena tak, že na ni můžeme pohlížet jako na excentrickou dráhu s aféliem shodným s tím Jupiterovým. Podobně to je i pro člen $\cos(\theta - \sigma')$ v radiálním vektoru Jupiteru.

Tyto dva členy, jeden obsažený v radiálním vektoru Saturnu a druhý v radiálním vektoru Jupiteru lze zapsat jako

$$k'e\cos(\theta-\sigma),\ ke'\cos(\theta-\sigma').$$

Pro čísla k, k' Euler spočítal hodnoty $1/2$ a $5/4$, které jsou ale, kromě značného množství aproximací, zatíženy chybami ve výpočtech.

Protože Saturn může mít svou vlastní výstřednost s vlastním aféliem, dojde k jejímu složení s výstředností „indukovanou" Jupiterem do jedné výstřednosti, kterou můžeme určit z pozorování. Když A je délka afélia Jupiteru a A' je délka afélia Saturnu a jeho délka je ϕ', vzdálenost Saturnu od Slunce závisející na vlastní a indukované výstřednosti je daná vztahem

$$r' = a'[1+e'\cos(\phi'-A')+k'e\cos(\phi'-A)].$$

Podobně i pro Jupiter můžeme nalézt pro jeho vzdálenost od Slunce vztah

$$r = a[1+e\cos(\phi-A)+ke'\cos(\phi-A')].$$

Dále Euler ukázal, jak lze z pozorovaných výstředností a afélií nalézt vlastní výstřednosti a afélia. Nechť f, f' jsou zdánlivé výstřednosti Jupiteru a Saturnu, B, B' jejich zdánlivá afélia. Potom platí:

$$e\cos(\phi-A)+ke'\cos(\phi-A') = f\cos(\phi-B), \tag{2.84}$$
$$e'\cos(\phi'-A')+k'e\cos(\phi'-A) = f'\cos(\phi'-B'), \tag{2.85}$$
$$e\sin(\phi-A)+ke'\sin(\phi-A') = f\cos(\phi-B), \tag{2.86}$$
$$e'\sin(\phi'-A')+k'e\cos(\phi'-A) = f'\cos(\phi'-B'), \tag{2.87}$$

Pro $\phi = 0$ a $\phi' = 0$, je

$$e\cos(A)+ke'\cos(A') = f\cos(B), \tag{2.88}$$
$$e'\cos(A')+k'e\cos(A) = f'\cos(B'), \tag{2.89}$$
$$e\sin(A)+ke'\sin(A') = f\cos(B), \tag{2.90}$$
$$e'\sin(A')+k'e\cos(A) = f'\cos(B'), \tag{2.91}$$

Z pozorování jsou známé f, f', B a B' a z teorie k, k'. Následně stačí rovnice vyřešit pro e, e', A a A'.

Euler ve svém díle *Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates in additamento* [3] zpřesnil teorii pohybu Měsíce. Aplikace Eulerovy teorie umožňovala odvození rovnic pro rychlost změn hlavní poloosy, výstřednosti a délky perigea. Tato teorie patřila ke klasickým analytickým metodám, ve kterých byly souřadnice kosmického tělesa, respektive dráhové elementy odvozovány řešením pohybových rovnic. Eulerovy pozdější teorie, nejen o pohybu Měsíce, využívaly numericko-analytický přístup, ve kterém hodnoty některých veličin přebíral z pozorování a dosazoval je do pohybových rovnic. Eulerův přínos byl v zavedení nových matematických postupů, například použití rozvoje do trigonometrických řad. Také navrhl myšlenku, že rušené těleso, například Měsíc, se v každém okamžiku pohybuje po eliptické dráze s malou výstředností a její orbitální parametry se pomalu mění.

Kapitola 3

Joseph-Louis Lagrange

Francouzský matematik a astronom italského původu Joseph-Louis Lagrange navázal na práce Eulera a přispěl k rozvoji nebeské mechaniky. Použil Eulerův nápad změn dráhových elementů a ukázal, že dva z nich podléhají pouze malým periodickým změnám, čímž přispěl k důkazu stability Sluneční soustavy.

3.1 Pohybové rovnice

Lagrange ve své první práci na téma planetárních poruch [8] věnované pohybům satelitů Jupiteru z roku 1766 použil Eulerovu mylenku změn orbitálních parametrů a aplikoval ji na výstřednost a afélium.

Nejprve si ale ukážeme Lagrangeovu formulaci pohybových rovnic. Nechť r označuje projekci radiálního vektoru do vztažné roviny, ϕ je úhel opsaný r během času t, p je tangens šířky planety, který je velmi malý a F je síla centrálního tělesa (např. Slunce) v jednotkové vzdálenosti. Planeta je přitahovaná k centrálnímu tělesu silou $\frac{F}{r^2(1+p^2)}$. Složky této síly ve směru r a směru kolmém k referenční rovině jsou $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ a $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dále Lagrange stejně jako Euler použil tři složky poruchových sil. Kde P je rovnoběžná s r, Q kolmá k r a rovnoběžná se vztažnou rovinou a Q je k ní kolmá. Na planetu působí ve třech směrech síly

$$\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+R,\ Q,\ \frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+P$$

Lagrange od první složky odečetl odstředivou sílu. Výsledná síla má tendenci zmenšovat r. První rovnice je proto podle Lagrange

$$-\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+R-r\frac{d\phi^2}{dt^2}. \tag{3.1}$$

Druhou rovnici odvodil následovně. Když je síla $Q=0$, r by opsal plochu úměrnou času a $d(r^2d\phi/2)=0$. Nenulová síla Q naopak způsobí zvětšení plochy $r^2d\phi/2$ o $Qrdt^2/2$, takže

$$d(r^2d\phi)=Qrdt^2,$$

integrací této rovnice a následně vydělením r^2dt Lagrange získal rovnici

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{c+\int Qrdt}{r^2}. \tag{3.2}$$

Ve třetí souřadnicové složce nalezl rovnici

$$-\frac{d^2(pr)}{dt^2} = \frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + P,$$

kterou pomocí rovnice 3.1 transformoval na tvar

$$\frac{d^2p}{dt^2} + p\frac{d\phi^2}{dt} + \frac{2dpdr}{rdt^2} + \frac{P-Rp}{r} = 0. \tag{3.3}$$

Po vzoru Eulera zavedl Lagrange substituce

$$r = a(1+nx), \quad \phi = ht + ny, \quad p = nz,$$

kde n je malý koeficient a x, y, z jsou nové proměnné. Základní dráha je kružnice o poloměru a, po které se pohybují planety s úhlovou rychlostí h.

Lagrange ve své první práci o planetární teorii [8] zkoumal především důsledky těchto pohybových rovnic. Část, ve které se věnoval změnám dráhových elementů je poněkud stručná. V ní nejprve použil rovnici

$$dt = \frac{r^2 d\phi}{(c^2 + 2\int Qr^3 d\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

k eliminaci času z rovnic 3.1 a 3.3. V rovnici 3.1 také použil substituci $u = 1/r$ a získal rovnice

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{F(1+p^2)^{\frac{3}{2}} + Rr^2 + Qr(dr/d\phi)}{c^2 + 2\int Qr^3 d\phi} = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2p}{d\phi^2} + p + \frac{r^3[P - pR + Q(dp/d\phi)]}{c^2 + 2\int Qr^3 d\phi} = 0. \tag{3.5}$$

Pokud jsou v rovnici 3.4 poruchové síly nulové, je jejím řešením

$$p = \lambda \sin(\phi - \varepsilon),$$

kde λ a ε jsou integrační konstanty, přičemž λ vyjadřuje tangens sklonu a ε je délka výstupních uzlů. Dále po vzoru Eulera Lagrange předpokládal, že stejné rovnice platí i když jsou poruchové síly nenulové, ale integrační konstanty se stanou proměnné. Potom platí

$$dp = d\lambda \sin(\phi - \varepsilon) + \lambda(d\phi - d\varepsilon)\cos(\phi - \varepsilon).$$

Protože se λ a ε mění mnohem pomaleji, než se planeta pohybuje v rovině určené těmito proměnnými, je

$$dp = \lambda \cos(\phi - \varepsilon) d\phi. \tag{3.6}$$

Vyloučením dp z posledních dvou rovnic Lagrange nalezl

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\varepsilon}{\tan(\phi - \varepsilon)}. \tag{3.7}$$

Diferenciací 3.6, když λ, ϕ a ε jsou brány jako proměnné a využitím 3.7 lze ukázat platnost rovnice

$$\frac{d^2p}{d\phi^2} + p = \frac{\lambda d\varepsilon}{\sin(\phi - \varepsilon)d\phi}. \tag{3.8}$$

S touto rovnicí a rovnicí 3.5 lze odvodit rovnice pro $d\varepsilon/d\phi$ a $d\lambda/d\phi$ vyjádřené prostřednictvím poruchových sil.

Pokud jsou poruchové síly nulové, rovnice 3.4 získá tvar

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{F}{c^2} = 0.$$

Jejím řešením je

$$u - \frac{F}{c^2} = \rho \cos(\phi - \alpha),$$

které je rovnicí elipsy s poloosou c^2/F, výstředností $\rho c^2/F$ a délkou dolní apsidy α. Podobně jako v předchozím případě, je

$$du = d\rho \cos(\phi - \alpha) - \rho(d\phi - d\alpha)\sin(\phi - \alpha), \tag{3.9}$$

$$du = -\rho \sin(\phi - \alpha)d\phi. \tag{3.10}$$

Z těchto posledních dvou rovnic eliminací du Lagrange nalezl vztah

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\tan(\phi - \alpha)d\alpha,$$

a následným sečtením $d^2u/d\phi^2$ a u získal rovnici

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{F}{c^2} = \frac{\rho d\alpha}{\cos(\phi - \alpha)d\phi}.$$

Použitím této rovnice a rovnice 3.4 lze odvodit rovnice prvního řádu pro $d\rho/d\phi$ a $d\alpha/d\phi$.

3.2 Rozklady do trigonometrických řad

Lagrangeovy koeficienty rozkladu iracionálního faktoru do trigonometrických řad, které odvodil ve své práci [8] z roku 1766 se liší od těch Eulerových. Lagrange použil následující vyjádření vzdáleností planet od Slunce

$$r = a(1 + ny), \quad r' = a'(1 + ny'), \tag{3.11}$$

kde a, a' jsou střední vzdálenosti těchto dvou planet od Slunce, y, y' jsou nové proměnné a n je malá konstanta. Použitím těchto vztahů je vzdálenost mezi těmito planetami

$$v = [a^2 - 2aa' \cos\theta + a'^2 + 2n(a^2y + a'^2y') - 2naa'(y + y')\cos\theta]^{\frac{1}{2}}.$$

Dále Lagrange použil první dva členy Taylorova rozvoje pro v^{-3}:

$$v^{-3} = (a^2 - 2aa' \cos\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3n[a^2y + a'^2y' - aa'(y + y')\cos\theta]}{[a^2 - 2aa' \cos\theta + a'^2]^{\frac{5}{2}}}$$

Iracionální faktory Lagrange převedl do tvaru

$$a'^{-2q}(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{-q}$$

a pokračoval rozvojem výrazu druhého činitele, který nejprve znovu rozložil na součin:

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\theta)^{-q}=[1-\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)]^{-q}[1-\alpha(\cos\theta-i\sin\theta)]^{-q}.$$

Oba činitele na pravé straně této rovnice poté rozepsal do Taylorových řad s využitím Moivrovy věty:

$$\begin{aligned}(1-\alpha(\cos\theta\pm i\sin\theta))^{-q}=&1+q\alpha(\cos\theta\pm i\sin\theta)\\&+\frac{q(q+1)}{2}\alpha^2(\cos 2\theta\pm i\sin 2\theta)+\dots.\end{aligned}$$

Tyto řady Lagrange rozdělil na reálnou a imaginární část

$$(1-\alpha(\cos\theta\pm i\sin\theta))^{-q}=P\pm iQ,$$

odkud nalezl

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-q}=P^2+Q^2.$$

Umocněním řad pro P a Q a jejich sečtením s využitím rovnosti

$$\cos m\theta\cos n\theta+\sin m\theta\sin n\theta=\cos(m-n)\theta,$$

získal řadu

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-q}=\frac{1}{2}b_q^{(0)}+b_q^{(1)}\cos\theta+b_q^{(2)}\cos 2\theta+\dots,$$

kde

$$\frac{1}{2}b_q^{(0)}=1+q^2\alpha^2+\left[\frac{q(q+1)}{2}\right]^2\alpha^4+\left[\frac{q(q+1)(q+2)}{1\cdot2\cdot3}\right]^2\alpha^6+\dots \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{2}b_q^{(1)}=q\alpha+q\frac{q(q+1)}{2}\alpha^3+\frac{q(q+1)}{2}\cdot\frac{q(q+1)(q+2)}{2\cdot3}\alpha^5+\dots. \tag{3.13}$$

Lagrange rovněž uvedl Eulerova pravidla pro výpočet koeficientů s horními indexy ze dvou předchozích koeficientů. Tyto řady konvergují rychleji než Eulerovy, protože α je menší než g.

3.3 Problém „arcs de cercle“

Lagrange jako první, ačkoli byl tento problém již částečně osvětlen Eulerem, podal přijatelný popis rovnice středu[1] a „arcs de cercle“. Tuto teorii vytvořil v práci o pohybu Jupiterových měsíců [8] a následně ji aplikoval také na teorii pohybu Jupiteru a Saturnu. Práci vytvořil bez znalosti Eulerovy z roku 1752 o Jupieru a Saturnu.

[1] Rozdíl mezi skutečnou anomálií ν a střední anomálií M.

Lagrange použil pohybové diferenciální rovnice 3.1,3.2 a 3.3. Předpokládal téměř kruhové oběžné dráhy málo skloněné k ekliptice, které popisoval radiální vzdáleností, délkou a tangensem šířky zadanými

$$r = a(1+nx), \quad \phi = ht+ny, \quad p = nz,$$

kde a je střední vzdálenost od centrálního tělesa, h je střední úhlová rychlost, n je malý koeficient a x, y, z jsou nové proměnné. Pro druhou planetu jsou použita stejná čárkovaná písmena. Rovnice pohybu se zanedbáním členů s n^2 potom měly tvar

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + (3h^2-2f)x + fX - 2hfY - n(6h^2-3f)x^2 - \frac{3}{2}nfz^2 + 6nhfxY - nfY^2, \tag{3.14}$$

$$0 = \frac{dy}{dt} + 2hx - fY - 3nhx^2 + 2nfxY, \tag{3.15}$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + hz^2 + fZ - 4nh^2zx + 2n\frac{dzdx}{dt^2} + 2nhfzY. \tag{3.16}$$

Kde $f = F/a^3$ je konstanta a X, Y, Z jsou trigonometrické řady udávající poruchy způsobené druhou planetou.

Lagrange dále zavedl substituce

$$x = \chi + \xi, \quad y = \zeta + \eta, \tag{3.17}$$

kde χ a ζ jsou mnohočleny odvozené tak, že po dosazení substitucí 3.17 do rovnic 3.14 a 3.15 se poruchové členy X a Y odečtou a zanedbáním členů s n rovnice získají tvar

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + M^2\xi = 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{d\eta}{dt} + 2h\xi = 0. \tag{3.19}$$

Kde $M^2 = 3h^2 - 2f$. Řešení těchto rovnic jsou

$$\xi = \varepsilon\cos(Mt+\omega), \tag{3.20}$$

$$\eta = -\frac{2h\varepsilon}{M}\sin(Mt+\omega), \tag{3.21}$$

integrační konstanty ε a ω jsou výstřednost a poloha afélia. Dále Lagrange dosadil první aproximaci ξ za x do členu $-n(6h^2-3f)x^2$ z rovnice 3.14 a do členu $-3nhx^2$ z rovnice 3.15 a tyto členy přidal k příslušným rovnicím 3.18, respektive 3.19 a jejich vyřešením s přibližnou rovností f, M^2 a h^2 nalezl druhé aproximace:

$$\xi = \varepsilon\cos(Mt+\omega) - \frac{n\varepsilon^2}{2}\cos 2(Mt+\omega), \tag{3.22}$$

$$\eta = -\frac{2h\varepsilon}{M}\sin(Mt+\omega) + n\frac{5h\varepsilon^2}{4M}\sin 2(Mt+\omega). \tag{3.23}$$

Lagrange poukázal, že poslední rovnice, která má na pravé straně tvar prvních dvou členů rovnice středu pro nerušenou elipsu není přesná,protože v původních diferenciálních rovnicích jsou navíc poruchové členy, které ovlivňují první člen rovnice středu.

Koeficient před x v rovnici 3.14 byl označen jako M^2, kde $Mt+\omega$ je střední anomálie. Pokud je poloha afélia konstantní, zvětšení střední anomálie je rovno jeho nárůstu ve střední délce $M=h$. Aby byla rovnice 3.14 konzistentní s tímto předpokladem, je $3h^2-2f=h^2$ nebo $f=h^2$ a rovnice nemůže obsahovat žádný člen s x. Oba předpoklady jsou chybné. Rovnost $f=h^2$ je přítomností dalšího tělesa mírně narušena a Lagrange proto napsal $f=h^2(1+ng)$. V poruchových členech rovnice 3.14 se také nachází člen úměrný x. Lagrange proto napsal $M^2=h^2(1-n\beta)$ a tento vztah aproximoval $M=h(1-n\beta/2)$. Pokud $\beta>0$, je $M<h$ a přímka apsid se pohybuje ve směru pohybu tělesa. Podle zákona akce a reakce musí být rušen také pohyb tělesa, které ruší doposud zkoumané těleso. Proto Lagrange také napsal $M'^2=h'^2(1-n\beta)$ a $M'=h'(1-n\beta'/2)$.

První aproximace veličin ξ,η,ξ',η' jsou

$$\xi=\varepsilon\cos(Mt+\omega), \tag{3.24}$$

$$\eta=-\frac{2h\varepsilon}{M}\sin(Mt+\omega), \tag{3.25}$$

$$\xi'=\varepsilon'\cos(M't+\omega'), \tag{3.26}$$

$$\eta'=\frac{2h'\varepsilon'}{M'}\sin(M't+\omega'). \tag{3.27}$$

Výraz pro fX v rovnici 3.14 obsahuje člen ve tvaru

$$nKx'\cos(h'-h)t, \tag{3.28}$$

kde K závisí na hmotnosti rušícího tělesa a středních vzdálenostech a,a' těles od centrálního tělesa. Lagrange dosadil za x' část jeho hodnoty

$$\xi'=\varepsilon'\cos(M't+\omega'),$$

a spočetl

$$\begin{aligned} nK\varepsilon'\cos(M't+\omega')\cdot\cos(h'-h)t =& \frac{nK\varepsilon'}{2}\cos[(M'-h'+h)t+\omega'] \\ &+\frac{nK\varepsilon'}{2}\cos[(M'+h'-h)t+\omega']. \end{aligned}$$

První člen na pravé straně této rovnice má zvláštní význam. V řešení diferenciální rovnice 3.14 dává výraz

$$\frac{\varepsilon'}{2}\frac{nK\cos[(h-n\beta'h'/2)t+\omega']}{(h-n\beta'h'/2)^2-(h-n\beta h/2)^2}=\frac{\varepsilon'}{2}\frac{K\cos[(h-n\beta'h'/2)t+\omega']}{h(\beta h-\beta'h')},$$

který neobsahuje n a patří proto k první aproximaci x. Vyjadřuje nerovnost pohybu prvního tělesa, která je úměrná výstřednosti druhého tělesa a kosinu rozdílu mezi střední délkou prvního tělesa a aféliem druhého. Dosazením tohoto výrazu za x v rovnici 3.15 a její integrací získal Lagrange výraz pro y:

$$y=-\frac{\varepsilon'kK\sin[(h-n\beta'h'/2)t+\omega']}{(\beta h-\beta'h')(h-n\beta'h'/2)},$$

který můžeme nazvat rovnicí středu vyvolaná přítomností druhého tělesa.

Do stejné teoretické roviny dospěl i Euler ve své práci [5] z roku 1752. Lagrange však zašel ve svých úvahách dál. Díky stejné úvaze aplikované na druhé těleso, mohl pro x' napsat rovnici středu pro druhé těleso vyvolané působením prvního tělesa:

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{K'\cos[(h'-n\beta h/2)t+\omega]}{h'(\beta' h'-\beta h)}.$$

Lagrange dále zajímalo, jak tento člen zpětně ovlivňuje první těleso. To zkoumal jeho dosazením za x' do výrazu 3.28. Po převedení součinu kosinů na jejich součet získal jeden ze dvou výsledných členů:

$$\frac{n\varepsilon}{4}\frac{KK'\cos[(h-n\beta h/2)t+\omega]}{h'(\beta' h'-\beta h)}.$$

V argumentu kosinu je před t koeficient $h(1-n\beta/2)=M$ a po vyřešení diferenciální rovnice 3.14 by tento výraz dával v řešení člen, který by měl ve jmenovateli M^2-M^2 a v řešení pro radiální vektor by se objevil „arc de cercle“:

$$-\frac{n\varepsilon KK' t\sin(Mt+\omega}{8h'(\beta' h'-\beta h)M}.$$

Tímto způsobem nové členy v x vytváří nové členy v x', které obsahují stále vyšší mocniny času. Podobný problém vzniká i u rovnice 3.16 pro šířku, kde se při řešení metodou postupných aproximací také objevují „arcs de cercles“.

Pro Lagrange byl takový výsledek chybný a vymyslel postup, jak se zbavit „arcs de cercle“, který zde naznačím. Nejprve redukoval rovnici 3.14 tak, aby obsahovala pouze členy vedoucí k „arcs de cercle“:

$$\begin{aligned}0=&\frac{d^2x}{dt^2}+M^2x-nAx'\cos(h'-h)t+nBy'\sin(h'-h)t\\&+2nC\int x'\sin(h'-h)tdt+2nD\int y'\cos(h'-h)tdt,\end{aligned}\tag{3.29}$$

kde A,B,C,D jsou konstanty. Výrazy dosazované za x' a y' jsou první aproximace zavedené výše pomocí ξ' a η'.

Dále Lagrange redukoval poslední čtyři členy z rovnice 3.29 do dvou. Nejprve použil homogenní rovnice

$$0=\frac{d^2x'}{dt^2}+M'^2x',\quad 0=\frac{dy'}{dt}+2h'x',$$

ze kterých vyjádřil veličinu

$$\frac{dy'}{dt}=\frac{2h'}{M'^2}\frac{d^2x'}{dt^2},$$

a její integrací získal

$$y'=\frac{2h'}{M'^2}\frac{dx'}{dt}.$$

Z první homogenní rovnice Lagrange odvodil

$$0=\int\frac{d^2x'}{dt^2}\sin(h'-h)tdt+M'^2\int x'\sin(h'-h)tdt,$$

a následně pomocí integrací per partes díky těmto vztahům převedl rovnici 3.29 na tvar

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + M^2x - nLx' \cos(h' - h)t - nN\frac{dx'}{dt}\sin(h' - h)t. \tag{3.30}$$

Zcela analogická rovnice platí i pro druhou planetu:

$$0 = \frac{d^2x'}{dt^2} + M'^2x' - nL'x \cos(h - h')t - nN'\frac{dx}{dt}\sin(h - h')t. \tag{3.31}$$

Lagrange zavedl substituce

$$P = x' \cos(h' - h)t, \tag{3.32}$$

$$p = x' \sin(h' - h)t, \tag{3.33}$$

ze kterých derivacemi podle času odvodil vztahy

$$\frac{dx'}{dt}\cos(h' - h)t = \frac{dP}{dt} + (h' - h)p, \tag{3.34}$$

$$\frac{dx'}{dt}\sin(h' - h)t = \frac{dp}{dt} - (h' - h)P, \tag{3.35}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\cos(h' - h)t = \frac{d^2P}{dt^2} + 2(h' - h)\frac{dp}{dt} - (h' - h)^2p, \tag{3.36}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\sin(h' - h)t = \frac{d^2p}{dt^2} + 2(h' - h)\frac{dP}{dt} - (h' - h)^2p. \tag{3.37}$$

Rovnici 3.30 za pomocí vztahů 3.32 a 3.35 transformoval na

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + M^2x - n[L - N(h' - h)]P - nN\frac{dp}{dt}. \tag{3.38}$$

Dále rovnici 3.31 vynásobil $\sin(h' - h)t$, popřípadě $\cos(h' - h)t$ a ze součinů sinů a kosinů ponechal pouze ty členy, které po vyřešení rovnice a dosazení x' do rovnice 3.30 mají koeficient u t blízký hodnotě h a použitím vhodných substitucí z 3.32-3.37 získal rovnice

$$0 = \frac{d^2p}{dt^2} - 2(h' - h)\frac{dP}{dt} + [M'^2 - (h' - h)^2]p + \frac{nN'}{2}\frac{dx}{dt}, \tag{3.39}$$

$$0 = \frac{d^2P}{dt^2} + 2(h' - h)\frac{dp}{dt} + [M'^2 - (h' - h)^2]P + \frac{nL'x}{2}. \tag{3.40}$$

Rovnice 3.38,3.39 a 3.40 udávají vzájemné vztahy mězi proměnnými x, P, p a jejich derivacemi.

Lagrange k jejich současnému vyřešení vynásobil rovnici 3.38 integračním faktorem e^{Vt}, rovnici 3.39 vynásobil λe^{Vt} a rovnici 3.40 $\lambda' e^{Vt}$, kde V, λ a λ' jsou konstanty, které určil později. Následně tyto rovnice sečetl a integroval. Použitím metody per partes získal výsledné rovnice ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}+\lambda\frac{dp}{dt}+\lambda'\frac{dP}{dt}\right)e^{Vt}+(n\lambda N'/2-V)xe^{Vt}+[2\lambda'(h'-h)-nN-\lambda V]pe^{Vt}\\
-[(2\lambda h'-h)+\lambda'V]Pe^{Vt}+[V^2-n\lambda N'V/+M^2-n\lambda'L'/2]\int xe^{Vt}dt\\
+[\lambda V^2-2\lambda'(h'-h)V+nNV+\lambda\{M'^2-(h'-h)^2\}]\int pe^{Vt}dt\\
+[\lambda'V^2+2\lambda(h'-h)V+\lambda'\{M'^2-(h'-h)^2\}\\
-nL+nN(h'-h)]\int Pe^{Vt}dt=konst.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Lagrange položil koeficienty před integrály rovné nule a tím dostal tři podmínkové rovnice pro konstanty V,λ a λ'

$$V^2-n\lambda N'v/2+M^2-n\lambda'L'/2=0, \tag{3.42}$$

$$\lambda V^2+[nN-2\lambda'(h'-h)]V+\lambda[M'^2-(h'-h)^2]=0, \tag{3.43}$$

$$\lambda'V^2+2\lambda(h'-h)V+\lambda'[M'^2-(h'-h)^2]-nL+nN(h'-h)=0. \tag{3.44}$$

Rovnice 3.41 se zjednodušuje na tvar

$$
\begin{aligned}
\Big\{\frac{dx}{dt}+\lambda\frac{dp}{dt}+\lambda'\frac{dP}{dt}+(n\lambda N'/2-V)x+[2\lambda'(h'-h)-nN-\lambda V]p\\
-[2\lambda(h'-h)+\lambda'V]P\Big\}e^{Vt}=konst.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

V rovnici 3.42, pokud by bylo $n=0$, pak $V^2+M^2=0$ a protože $M^2=h^2(1-n\beta)$, bylo by $V^2=h^2$. Lagrange proto zvolil

$$V^2=-h^2(1-n\nu),\quad V=ih(1-n\nu/2),$$

kde ν je nová proměnná. Lagrange vynásobil rovnici 3.43 $\pm i$, sečetl s rovnicí 3.44, použil substituce pro V^2 a V a dosadil vztah $M'^2=h'^2(1-n\beta')$ a získal

$$
\begin{aligned}
\left\{h'^2(1-n\beta')-[h'-h\mp h(1-n\nu/2)]^2\right\}(\lambda'+\lambda i)\\
-nL+nN[h'-h\mp h(1-n\nu/2)]=0.
\end{aligned}
$$

V této rovnici nejprve použil horní znaménko a zanedbal členy s n. Výsledkem je

$$\lambda'+\lambda i=0. \tag{3.46}$$

Následně použil dolní znaménko, sečetl možné členy, vydělil n a zanedbal členy, které stále obsahovaly n a použitím 3.46 a volbou $m=h\nu$ získal vztah

$$2h'^2\left(\frac{m}{h'}-\beta'\right)\lambda'-L+h'N=0. \tag{3.47}$$

Použitím substitucí

$$V^2=-h^2(1-n\nu),\quad V=ih(1-n\nu/2),\quad \lambda=i\lambda',\quad M^2=h^2(1-n\beta),\quad m=h\nu,$$

převedl rovnici 3.42 na:

$$2h^2\left(\frac{m}{h}-\beta\right)-\lambda'(L'-hN')=0. \tag{3.48}$$

Vyřešením rovnic 3.47 a 3.48 získal dvě hodnoty pro m a ke každému z nich příslušnou hodnotu λ'. Výraz pro m je symetrický vzhledem k čárkovaným a nečárkovaným veličinám.

Lagrange se vrátil k rovnici 3.45 a použil substituce

$$\lambda = i\lambda', \quad V = ih(1-n\nu/2) = i(h-nm/2)$$

a mimo argument exponentu zanedbal členy s n:

$$\left[\frac{dx}{dt}+\lambda'\left(\frac{dP}{dt}+i\frac{dp}{dt}\right)-ihx+\lambda'(2h'-h)(p-iP)\right]e^{i(h-nm/2)t}=konst.$$

Rozdělením této rovnice na reálnou a imaginání část získal dvě rovnice

$$\begin{aligned}&\left[\frac{dx}{dt}+\lambda'\left\{\frac{dP}{dt}+(2h'-h)p\right\}\right]\cos(h'-nm/2)t\\+&\left[hx-\lambda'\left\{\frac{dp}{dt}-(2h'-h)P\right\}\right]\sin(h-nm/2)t=D,\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{dx}{dt}+\lambda'\left\{\frac{dP}{dt}+(2h'-h)p\right\}\right]\sin(h'-nm/2)t\\+&\left[hx-\lambda'\left\{\frac{dp}{dt}-(2h'-h)P\right\}\right]\cos(h-nm/2)t=E,\end{aligned} \tag{3.50}$$

kde D a E jsou libovolné konstanty. V dalším postupu vynásobil první z těchto dvou rovnic $\sin(h-nm/2)t$ a druhou vynásobil $-\cos(h-nm/2)t$ a sečetl. Výsledkem byla rovnice

$$hx-\lambda'\left\{\frac{dp}{dt}-(2h'-h)P\right\}=D\sin(h-nm/2)t-E\cos(h-nm/2)t. \tag{3.51}$$

Pro dvě hodnoty m označené m_1 a m_2 a k nim příslušející λ_1' a λ_2' získal Lagrange z rovnice 3.51 dvě rovnice, ze kterých vyloučil výraz $\left\{\frac{dp}{dt}-(2h'-h)P\right\}$ a výsledkem bylo vyjádření

$$x=\varepsilon_1\cos[(h-nm_1/2)t+\omega_1]+\varepsilon_2\cos[(h-nm_2/2)t+\omega_2].$$

Odpovídající výraz pro y je

$$y=-2\varepsilon_1\sin[(h-nm_1/2)t+\omega_1]-2\varepsilon_2\sin[(h-nm_2/2)t+\omega_2].$$

Proto existují dvě rovnice středu, které dohromady tvoří tu pozorovanou. Pokud by existovala dvě rušící tělesa, vznikly by tři rovnice středu. Počet hodnot m proto musí odpovídat počtu planet.

Podobně řešením sklonu a pohybu uzlů oběžné dráhy lze ukázat, že existují dva sklony, první sklon je sklon roviny I vzhledem ke vztažné rovině, druhý je sklon roviny oběžné dráhy II vzhledem k rovině I. Rovina I rotuje vzhledem ke vtažné rovině s konstanntím sklonem a rovina II rotuje s konstantním sklonem k rovině I.

3.4 Sekulární nerovnosti

Výpočtem sekulárních nerovností v pohybu Jupiteru a Saturnu se Lagrange zabýval už v *„Solution de différents problèmes de calcul intégral“* [9], kde aplikoval svou teorii z [8]. V této části se však budu detailněji zabývat jeho pracemi *„Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires“* [10] přednesenou před Berlínsku akademií v roce 1774 a hlavně *„Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds des inclinations des orbits des planétes“* [11]. Jak naznačují jejich názvy, Lagrange se v nich zabýval pohybem uzlů planetárních drah a změnami jejich sklonů.

Lagrange zvolil pravoúhlou soustavu souřadnic, ve které si napsal pohybové rovnice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -Z,$$

kde X, Y, Z jsou složky síly působící na těleso. Z pohybových rovnic Lagrange vytvořil výrazy

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = Xy - Yx, \tag{3.52}$$

$$\frac{xd^2z - zd^2x}{dt^2} = Xz - Zx, \tag{3.53}$$

$$\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2} = Yz - Zy. \tag{3.54}$$

Integrací a označením integrálů R, Q a P Lagrange obdržel vztahy

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = \int (Xy - Yx)dt = R, \tag{3.55}$$

$$\frac{xdz - zdx}{dt} = \int (Xz - Zx)dt = Q, \tag{3.56}$$

$$\frac{ydz - zdy}{dt} = \int (Yz - Zy)dt = P. \tag{3.57}$$

Z rovnic 3.55-3.57 lze ukázat, že $Px - Qy + Rz = 0$, což můžeme považovat za rovnici roviny procházející počátkem, pokud jsou P, Q, R konstanty, nebo jejich poměry jsou konstantní. Jestliže jsou P, Q, R konstanty, jejich derivace podle času jsou nulové a z rovnic 3.55-3.57 vyplývá, že $Xy - Yx = 0, Yz - Zy = 0$ a $Xz - Zx = 0$, takže $X/x = Y/y = Z/z = K$, kde K je konstanta. Poměry složek sil odpovídají poměrům souřadnic jejich působení a síla proto vždy směřuje k počátku. Pokud P, Q a R nejsou konstantní, ale navzájem ve stálých konstantních poměrech, síly leží v rovině pohybu tělesa.

Pokud se P, Q, R s časem mění, těleso se nepohybuje v jedné rovině. Ale protože z rovnic 3.55-3.57 lze odvodit rovnici $Pdx - Qdy + Rdz = 0$, která je diferenciálem $Px - Qy + Rz = 0$ za předpokladu konstantních P, Q, R, můžeme říct, že se těleso při průchodu přes dx, dy, dz pohybuje v rovině $Px - Qy + Rz = 0$. Poloha roviny a tím i přímky uzlů se změnou P, Q, R mění. Přímka uzlů ležící v průsečíku této roviny s rovinou $x - y$ svírá s osou x okamžitý úhel χ, pro který platí

$$\tan \chi = \frac{P}{Q}$$

a tangens sklonu roviny k rovině $x-y$ je

$$\lambda = [P^2+Q^2]^{\frac{1}{2}}/R.$$

Lagrange spojením λ a χ zavedl nové proměnné:

$$s = \lambda \sin\chi = \frac{P}{R}, u = \lambda \cos\chi = \frac{Q}{R}.$$

Výpočtem dP/dt a dQ/dt z těchto rovnic a použitím rovnic 3.55-3.57 získal rovnice

$$R\frac{ds}{dt} + \frac{dR}{dt}s = Yz - Zy, \tag{3.58}$$

$$R\frac{du}{dt} + \frac{dR}{dt}u = Xz - Zx. \tag{3.59}$$

Dále Lagrange předpokládal, že oběžné dráhy jsou kruhové a tělesa se pohybují s konstantní úhlovou rychlostí. Zavedl substituce

$$x = r\cos q, \quad y = r\sin q, \quad z = rp, \tag{3.60}$$

kde r je velikost průmětu radiálního vektoru do roviny $x-y$, q je délka a p je tangens šířky a platí pro něj

$$p = \lambda \sin(q-\chi) = u\sin q - s\cos q.$$

Za těchto předpokladů jsou r a $dq/dt = \mu$ konstantní. Použitím substitucí pro x a y z 3.60 ve výrazu 3.55 pro R Lagrange zjistil, že

$$R = \frac{xdy - ydx}{dt} = r^2\frac{dq}{dt} = r^2\mu,$$

je také konstanta a proto $dR/dt = 0$. Rovnice 3.58 a 3.59 se zjednodušují na

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}(Yz - Zy), \tag{3.61}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{R}(Xz - Zx). \tag{3.62}$$

Síly X, Y, Z Lagrange vyjádřil pomocí hmotnosti Slunce, hmotností rušících planet $T_1, T_2, \ldots$, vzdáleností planet od Slunce a vzájemných vzdáleností mezi rušícími a rušenými planetami. Posledně uvedené vzdálenosti Lagrange vyjádřil trigonometrickou řadou s použitím nového značení koeficientů:

$$\begin{aligned}[r^2 - 2rr_1\cos(q-q_1) + r_1^2]^{-\frac{3}{2}} =& (r,r_1) + (r,r_1)_1\cos(q-q_1)\\ &+ (r,r_1)_2\cos(q-q_1) + \ldots.\end{aligned}$$

Rovnice 3.61 a 3.62 díky tomu převedl do tvaru

$$0 = \frac{ds}{dt} + \frac{T_1r_1(r,r_1)_1}{4\mu r}(u-u_1) + \frac{T_2r_2(r,r_2)_1}{4\mu r}(u-u_2) + \ldots + \Phi, \tag{3.63}$$

$$0 = \frac{du}{dt} + \frac{T_1r_1(r,r_1)_1}{4\mu r}(s-s_1) + \frac{T_2r_2(r,r_2)_1}{4\mu r}(s-s_2) + \ldots + \Psi, \tag{3.64}$$

kde Φ a Ψ obsahují členy, ve kterých jsou u a s vynásobené sinem, nebo kosinem úhlu $q, q_1, q+q_1, \ldots$ a tyto členy ve výsledku produkují nerovnosti závislé na polohách planet na oběžné dráze. Lagrange je proto zanedbal a hledal pouze nerovnosti uzlů a sklonů, které jsou nezávislé na polohách planet, tedy sekulární nerovnosti. Pro snadnější zápis označil

$$(0,1) = \frac{T_1 r_1 (r, r_1)_1}{4\mu r}, (0,2) = \frac{T_2 r_2 (r, r_2)_1}{4\mu r};$$
$$(1,0) = \frac{T r (r_1, r)_1}{4\mu_1 r}, (1,2) = \frac{T_2 r_2 (r_1, r_2)_1}{4\mu_1 r_1}, \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

kde první číslo v závorkách odkazuje na rušenou planetu a druhé na rušící planetu. Celkovou soustavu rovnic pro $s, u, s_1, u_1, \ldots$, pak Lagrange napsal jako

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{ds}{dt} + (0,1)(u-u_1) + (0,2)(u-u_2) + \ldots,\\
0 &= \frac{du}{dt} - (0,1)(s-s_1) - (0,2)(s-s_2) - \ldots,\\
0 &= \frac{ds_1}{dt} + (1,0)(u_1-u) + (1,2)(u_1-u_2) + \ldots,\\
0 &= \frac{du_1}{dt} - (1,0)(s_1-s) - (1,2)(s_1-s_2) - \ldots,\\
0 &= \frac{ds_2}{dt} + (2,0)(u_2-u) + (2,1)(u_2-u_1) + \ldots,\\
0 &= \frac{du_2}{dt} - (2,0)(s_2-s) - (2,1)(s_2-s_1) - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Problém sekulárních nerovností uzlů a sklonů Lagrange redukoval na vyřešení těchto rovnic, kterých je pro šest planet známých v té době dvanáct.

Pro ilustraci Lagrange uvažoval jen dvě planety s hmotnostmi T a T_1, kde oběžná dráha T_1 leží na ekliptice. Potom tangens sklonu λ_1 dráhy T_1 k ekliptice je nula a proto $s_1 = 0, u_1 = 0$ a rovnice 3.65 se zjednoduší:

$$0 = \frac{ds}{dt} + (0,1)u, \tag{3.66}$$

$$0 = \frac{du}{dt} - (0,1)s, \tag{3.67}$$

z nich odvodil diferenciálí rovnice druhého řádu:

$$0 = \frac{d^2 s}{dt^2} + (0,1)^2 s, \tag{3.68}$$

$$0 = \frac{d^2 u}{dt^2} + (0,1)^2 u. \tag{3.69}$$

Řešením posledních dvou rovnic jsou

$$s = A \sin[\alpha - (0,1)t], \tag{3.70}$$

$$u = A \cos[\alpha - (0,1)t]. \tag{3.71}$$

Platí

$$\tan\chi = \frac{s}{u} = \tan[\alpha - (0,1)t]$$

a

$$\lambda = (s^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} = A.$$

Je zřejmé, že sklon oběžné dráhy od T k dráze od T_1 je konstantní a uzel se pohybuje v opačném směru než planeta konstantní úhlovou rychlostí $(0,1)$ v rovině oběžné dráhy T_1.

Obecně každý z výrazů (n,m) reprezentuje rychlost pohybu uzlu planety T_n vzhledem k oběžné rovině planety T_m. K nalezení rychlostí a změn sklonů vzhledem k jednomu pevnému souřadnému systému pro šest v té době známých planet je třeba vyřešit soustavu dvanácti rovnic 3.65. Lagrange napsal jejich řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} s &= A\sin(at+\alpha), & u &= A\cos(at+\alpha),\\ s_1 &= A_1\sin(at+\alpha), & u_1 &= A_1\cos(at+\alpha),\\ s_2 &= A_2\sin(at+\alpha), & u_2 &= A_2\cos(at+\alpha),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.72}$$

a jejich dosazením do 3.65 získal podmínkové rovnice pro neznámé konstanty $a, A_1, A_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} aA + (0,1)(A - A_1) + (0,2)(A - A_2) + \ldots &= 0,\\ aA_1 + (1,0)(A_1 - A) + (1,2)(A_1 - A_2) + \ldots &= 0,\\ aA_2 + (2,0)(A_2 - A) + (2,1)(A_2 - A_1) + \ldots &= 0. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Pro n planet existuje n těchto podmínkových rovnic pro n koeficientů $A, A_1, A_2, \ldots$. Vyloučením těchto koeficientů ze systému rovnic až k poslednímu, který se sám vyrušil, získal rovnici stupně n pro konstantu a. Kořeny této rovnice označil $a, b, c, \ldots$. Ke každému kořenu zůstaly dvě nezávislé neznámé konstanty. Příslušející k a jsou označeny A, α, k b jsou B, β a tak dále. Výsledné řešení je dané součtem jednotlivých řešení. K dalšímu zjednodušení Lagrange položil $a = 0$ a $A = A_1 = A_2 = \ldots$, což je další řešení 3.73. Řešení soustavy 3.65 ve výsledku je

$$\begin{aligned} s &= A\sin\alpha + B\sin(bt+\beta) + C\sin(ct+\gamma) + \ldots,\\ s_1 &= A\sin\alpha + B_1\sin(bt+\beta) + C_1\sin(ct+\gamma) + \ldots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ u &= A\cos\alpha + B\cos(bt+\beta) + C\cos(ct+\gamma) + \ldots,\\ u_1 &= A\cos\alpha + B_1\cos(bt+\beta) + C_1\cos(ct+\gamma) + \ldots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{3.74}$$

konstanty $B_1, B_2, \ldots$ jsou závislé na B, b, konstanty $C_1, C_2, \ldots$ jsou závislé na C, c a tak dále.

K určení zbylých $2n$ konstant $A, \alpha, B, \beta, \ldots$ je třeba použít empirické hodnoty. Když je např. $t = 0$, dosadí se empirické hodnoty pro $s, s_1, s_2, \ldots, u, u_1, u_2, \ldots$ označené $S, S_1, S_2, \ldots$

$U, U_1, U_2, \ldots$. Podmínkové rovnice pro neznámé konstanty proto jsou:

$$
\begin{aligned}
S &= A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + \ldots,\\
S_1 &= A\sin\alpha + B_1\sin\beta + C_1\sin\gamma + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
U &= A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + \ldots,\\
U_1 &= A\cos\alpha + B_1\cos\beta + C_1\cos\gamma + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

V předchozí diskuzi se předpokládalo, že n kořenů rovnice pro a jsou včechny reálné a různé. Pokud se dva nebo více kořenů rovnají, řešení bude obsahovat „arcs de cercle“, pro imaginární kořeny se budou v řešení vyskytovat exponencionální funkce času. V obou případech přestanou být řešení přesná.

Při aplikaci této teorie na planety Sluneční soustavy označil Jupiter T, Saturn T_1, Zemi T_2, Venuši T_3, Mars T_4 a Merkur T_5. Spočetl numerické hodnoty koeficientů $(0,1), (1,0), \ldots$. Jak už naznačují mnohem větší hmotnosti Jupiteru a Saturnu, Lagrange spočetl, že koeficienty $(0,1) = 7.564''/rok$ a $(1,0) = 17.773''/rok$ jsou o několik řádů větší, než libovolný jiný. Lagrange proto nejprve vzal v úvahu pouze vzájemné působení těchto dvou planet a ostatní zanedbal. Řešení 3.74 soustavy diferenciálních rovnic 3.65 redukovaná pouze na Jupiter a Saturn jsou

$$
\begin{aligned}
s &= A\sin\alpha + B\sin(bt+\beta),\\
u &= A\cos\alpha + B\cos(bt+\beta,\\
s_1 &= A\sin\alpha + B_1\sin(bt+\beta),\\
u_1 &= A\cos\alpha + B_1\cos(bt+\beta).
\end{aligned}
$$

Potom pro uzly a tangenty sklonu Jupiteru a Saturnu platí:

$$\tan\chi = \frac{s}{u} = \frac{A\sin\alpha + B\sin bt + \beta}{A\cos\alpha + B\cos(bt+\beta)}, \tag{3.75}$$

$$\lambda = (s^2+u^2)^{\frac{1}{2}} = [A^2 + B^2 + 2AB\cos(bt+\beta-\alpha)]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.76}$$

$$\tan\chi_1 = \frac{s_1}{u_1} = \frac{A\sin\alpha + B_1\sin bt + \beta}{A\cos\alpha + B_1\cos(bt+\beta)}, \tag{3.77}$$

$$\lambda_1 = (s_1^2+u_1^2)^{\frac{1}{2}} = [A^2 + B_1^2 + 2AB_1\cos(bt+\beta-\alpha)]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.78}$$

Dále Lagrange určil hodnoty konstant. Z argumentu kosinu ve vztazích 3.76 a 3.78 vyplývá, že λ a λ_1 podléhají oscilacím s periodou $2\pi/b = 51150 let$. Maximum sklonu nastává, když je $\cos(bt+\beta-\alpha) = 1$ a minimum, když $\cos(bt+\beta-\alpha) = -1$. Lagrange po dosazení konstant zjistil rozsah oscilací sklonu pro Jupiter $45'3''$ a pro Saturn $1°45'51''$. Protože je B kladné a B_1 je záporné, vyplývá z 3.76 a 3.78, že když je sklon Saturnu v minimu, je Jupiteru v maximu a obráceně.

Derivací rovnice 3.75 Lagrange zjistil, že maximum nebo minimum pro χ nastane, jestliže

$$\cos(bt+\beta-\alpha) = -B/A$$

a pro χ_1, pokud

$$\cos(bt+\beta-\alpha) = -B_1/A.$$

Z těchto rovnic Lagrange odvodil vztahy udávající roky, ve kterých nastávají maxima a minima, pro Jupiter to jsou $t = -7934 - 51150n$, nebo $t = 1331 - 51150n$, kde $n \in Z$ a délky, ve kterých nastávají jsou $91°16'$ a $117°23'$ a rozsah librace je $26°27'$. Pro Saturn stanovil $t = 20342 - 51150n$ a $t = 36806 - 51150n$ a odpovídající délky jsou $72°16'$ a $136°24'$ a rozsah librace uzlů je $64°8'$.

Dále Lagrange pokračoval odvozením sekulárních změn s_i a u_i pro zbývající planety $i = 2,3,4,5$, ale nesnažil se z důvodu větší složitosti zjistit, zda jsou uzly a sklony v ohraničeném intervalu. Pro otázku stability systému je důležitější omezení sklonu. Jedním ze základních předpokladů této teorie je malý sklon mezi dráhami, který by v případě velkého zvětšení sklonu mohl přestat platit.

3.5 O středním pohybu planet

Další Lagrangeova důležitá práce [12] přednesená Berlínské akademii v roce 1776 se zabývá změnami středního pohybu planet. Ukázal v ní, že střední úhlové rychlosti planet v délce nepodléhají dlouhodobým neperidickým změnám i bez předpokladu téměř kruhových drah.

Lagrange předpokládal, že vzájemné gravitační působení planet je výrazně menší, než působení Slunce. Lze proto předpokládat, že se planeta v každém okamžiku pohybuje po elipse, v souladu s Keplerovým zákonem ploch, a poruchy způsobují postupné změny dráhových elementů této elipsy. Vzdálenost planety od Slunce je $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, síla, kterou na ni působí, je F/r^2 a složky celkové poruchové síly v pravoúhlých souřadnicích jsou X,Y,Z a pohybové rovnice mají tvar

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3} + X, \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3} + Y, \quad 0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3} + Z. \tag{3.79}$$

Pro bezporuchový případ, kdy $X = Y = Z = 0$ Lagrange určil řešení každé z nich. Dohromady obsahují šest integračních konstant, které jsou dráhovými elementy elipsy. Derivací těchto řešení podle času získal další tři rovnice, každá obsahuje jednu integrační konstantu. Nalezl šest diferenciálních rovnic prvního řádu se šesti integračními konstantami. Každou z těchto rovnic lze napsat ve tvaru $V = k$, kde V je funkce $V(x,y,z,t,dx/dt,dy/dt,dz/dt)$ a k je jedna z integračních konstant. Pro diferenciál platí $dV = 0$. Z rovnic 3.79 pro bezporuchový případ odvodil hodnoty diferenciálů

$$d(dx/dt) = -Fx\frac{dt}{r^3}, \quad d(dy/dt) = -Fy\frac{dt}{r^3}, \quad d(dz/dt) = -Fz\frac{dt}{r^3},$$

které použil ve vyjádření dV.

Dále vzal Lagrange v úvahu poruchové síly X,Y,Z. Diferenciály odvozené z rovnic 3.79 mají tvar

$$d(dx/dt) = -\left(\frac{Fx}{r^3}+X\right)dt, \quad d(dy/dt) = -\left(\frac{Fy}{r^3}+Y\right)dt, \quad d(dz/dt) = -\left(\frac{Fz}{r^3}+Z\right)dt.$$

Jejich dosazením do dV a zohledněním jeho vyjádření pro bezporuchový případ nalezl:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial(dx/dt)}(-Xdt) + \frac{\partial V}{\partial(dy/dt)}(-Ydt) + \frac{\partial V}{\partial(dz/dt)}(-Zdt).$$

Veličinu k je třeba brát jako proměnnou, takže $dV = dk$ a

$$dk = -\left[\frac{\partial V}{\partial(dx/dt)}X + \frac{\partial V}{\partial(dy/dt)}Y + \frac{\partial V}{\partial(dz/dt)}Z\right]dt. \tag{3.80}$$

Dále tuto rovnici použil ke zkoumání změn hlavní osy eliptické dráhy. Použil známé vzorce pro pohyb po elipse

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\phi-\alpha)}{a(1-e^2)}, \tag{3.81}$$

$$\frac{d(1/r)}{d\phi} = -\frac{e\sin(\phi-\alpha)}{a(1-e^2)}, \tag{3.82}$$

$$\frac{r^4 d\phi^2}{dt^2} = Fa(1-e^2), \tag{3.83}$$

kde a je hlavní poloosa, e je její výstřednost, ϕ je úhel, který svírá průvodič planety s pevně danou přímkou a α je úhel, který svírá hlavní osa elipsy se zmiňovanou přímkou. Použitím těchto rovnic odvodil vztah

$$\frac{1}{r} - \frac{r^2 d\phi^2 + dr^2}{2Fdt^2} = \frac{1}{2a}.$$

Tuto rovnici potom převedl do tvaru $V = k$, když vyjádřil r a ϕ v pravoúhlých souřadnicích. To lze provést snadno, když si uvědomíme, že $r^2 d\phi^2 + dr^2$ je čtverec vzdálenosti uražený za dobu dt, což je v pravoúhlých souřadnicích $dx^2 + dy^2 + dz^2$. Výsledkem je

$$\frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2Fdt^2} = \frac{1}{2a}.$$

Levou stranu této rovnice Lagrange ztotožnil s V a pravou stranu s k. Pomocí rovnice 3.80 vypočetl vztah

$$d\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{F}$$

udávající změny hlavní osy $2a$ eliptické dráhy tělesa, na které působí centrální síla F/r^2 a poruchové síly X, Y, Z.

Následovně Lagrange vyjádřil síly X, Y, Z. Hmotnost Slunce označil S, T je hmotnost studované planety, a $T', T'', \ldots$ jsou hmotnosti ostatních planet. Slunce položil do počátku souřadnic. Planeta T je proto přitahována ke Slunci silou $(S+T)/r^2$ a $F = S+T$. Ze stejného důvodu přenesl účinky ostatních planet ze Slunce na planetu T, ale s opačným znaménkem. Souřadnice planety T' označil jednou čárkou, souřadnice T'' dvěma čárkami a tak dále. Vzdálenost planety T od T' je v' a od T'' je v'' a tak dále. Součet těchto poruchových sil rozložených do příslušných souřadnicových os dává

$$X = T'\left(\frac{x-x'}{v'^3}+\frac{x'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{x-x''}{v''^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)+\dots,$$
$$Y = T'\left(\frac{y-y'}{v'^3}+\frac{y'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{y-y''}{v''^3}+\frac{y''}{r''^3}\right)+\dots,$$
$$Z = T'\left(\frac{z-z'}{v'^3}+\frac{z'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{z-z''}{v''^3}+\frac{z''}{r''^3}\right)+\dots.$$

Veličiny $r', r'', \dots, v', v'', \dots$ jsou dané vztahy

$$r' = (x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r'' = (x''^2+y''^2+z''^2)^{\frac{1}{2}}, \dots$$
$$v' = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}, \dots.$$

Lagrange dosadil vyjádření pro X, Y, Z do $Xdx + Ydy + Zdz$ a výraz integroval. Výsledkem bylo

$$\Omega = T'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{v'}\right)+T''\left(\frac{xx''+yy''+zz''}{r''^3}-\frac{1}{v''}\right)+\dots.$$

Vyjádření pro Ω bylo později Laplacem označeno jako „poruchová funkce“. V podstatě jde o potenciálovou funkci, ze které lze parciálními derivacemi spočítat poruchové síly ve směrech souřadnicových os.

Lagrange pro zjednodušení označil symbolem **d** diferenciál podle proměnných x, y, z. Potom

$$\mathbf{d}\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\Omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\Omega}{\partial z}dz = Xdx+Ydy+Zdz$$

a změna hlavní osy $2a$ eliptické dráhy planety T vyvolané působením planet $T', T'', \dots$ byly dány vztahem

$$d\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{\mathbf{d}\Omega}{S+T}.$$

Dále Lagrange označil $\theta, \theta', \theta'', \dots$ střední úhlové vzdálenosti, které planety T, T', T'' projdou kolem Slunce za čas t a pomocí rozvojů do trigonometrických řad vyjádřil výraz $\Omega/(S+T)$ ve tvaru součtu členů

$$M\left\{\begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array}\right\}(m\theta+n\theta'+p\theta''+\dots),$$

kde M závisí na dráhových elementech planet $T, T', T'', \dots$ a $m, n, p, \dots \in \mathbb{Z}$.

Protože poloha planety T závisí pouze na úhlu θ, je $\mathbf{d}\Omega/(S+T) = d[1/(2a)]$ rovno součtu členů ve tvaru

$$\pm mM\left\{\begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array}\right\}(m\theta+n\theta'+p\theta''+\dots)d\theta. \tag{3.84}$$

Za určitých podmínek lze předpokládat, že M je konstantní. Úpravou třetího Keplerova zákona Lagrange vyjádřil

$$\theta' = \theta\left(\frac{a^3}{a'^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta'' = \theta\left(\frac{a^3}{a''^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \dots,$$

kde $a, a', a'', \ldots$ lze brát jako konstanty. Použitím těchto substitucí 3.84 a její integrací Lagrange obdržel výraz pro členy $1/(2a)$:

$$\frac{\pm mM \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \{[m + n(a^3/a'^3)^{\frac{1}{2}} + p(a^3/a''^3)^{\frac{1}{2}} + \ldots]\theta\}}{m + n(a^3/a'^3)^{\frac{1}{2}} + p(a^3/a''^3)^{\frac{1}{2}} + \ldots}. \tag{3.85}$$

Podle tohoto výrazu podléhá $1/2a$ pouze periodickým nerovnostem, jestliže jmenovatel nebude nulový. Lagrange k tomu poznamenal [12, 270]: „*Je snadné se přesvědčit, že tento případ nemůže v našem systému nastat, protože hodnoty* $a^{\frac{3}{2}}, a'^{\frac{3}{2}}, a''^{\frac{3}{2}}, \ldots$ *jsou navzájem nesouměřitelné.*“ Význam Lagrangeova slova „nesouměřitelné“ je zřejmě v tom, že pro relativně malé hodnoty $m, n, p, \ldots$ nebude jmenovatel nula.

Další Lagrangeova práce o planetárních poruchách [13] byla publikovaná v roce 1779. Lagrange v ní ukázal využití poruchové funkce. Uvažoval systém těles s hmotnostmi $M, M', M'', \ldots$. Pravoúhlé souřadnice tělesa M jsou x, y, z, tělesa M' jsou x', y', z', a tak dále. Poruchovou funkci tohoto systému definoval ve tvaru

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{MM'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} + \\ & \frac{MM''}{[(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2]^{\frac{1}{2}}} + \\ & \frac{M'M''}{[(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2]^{\frac{1}{2}}} + , \ldots . \end{aligned}$$

Složky urychlujících sil působící na M vyvolané ostatními tělesy jsou

$$\frac{1}{M}\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{1}{M}\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{1}{M}\frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

podobně na M' působí síly

$$\frac{1}{M'}\frac{\partial \Omega}{\partial x'}, \quad \frac{1}{M'}\frac{\partial \Omega}{\partial y'}, \quad \frac{1}{M'}\frac{\partial \Omega}{\partial z'},$$

a tak dále pro ostatní tělesa systému. Pohybové rovnice tělesa M jsou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{M}\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{M}\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{M}\frac{\partial \Omega}{\partial z}, \tag{3.86}$$

podobně pro M' jsou

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{1}{M'}\frac{\partial \Omega}{\partial x'}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{1}{M'}\frac{\partial \Omega}{\partial y'}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{1}{M'}\frac{\partial \Omega}{\partial z'}, \tag{3.87}$$

a tak dále pro ostatní tělesa.

Lagrange předpokládal, že každá proměnná $x, x', x'', \ldots$ se zvětší o stejný přírůstek $\alpha = dx = dx' = dx'' = \ldots$, a stejně tak každá proměnná $y, y', y'', \ldots$ se zvětší o $\beta = dy =$

$dy' = dy'' = \ldots$ a proměnné $z, z', z'' \ldots$ se zvětší o $\gamma = dz = dz' = dz'' = \ldots$. Tvar funkce Ω je takový, že změnou proměnných zůstane Ω konstantní a proto platí rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial x'} + \frac{\partial\Omega}{\partial x''} + \ldots, \\ 0 &= \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{\partial\Omega}{\partial y'} + \frac{\partial\Omega}{\partial y''} + \ldots, \\ 0 &= \frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{\partial\Omega}{\partial z'} + \frac{\partial\Omega}{\partial z''} + \ldots . \end{aligned} \tag{3.88}$$

Použitím pohybových rovnic pro tělesa $M, M', \ldots$, jako jsou 3.86 a 3.87, rovnice 3.88 získají tvar:

$$\begin{aligned} 0 &= M\frac{d^2x}{dt^2} + M'\frac{d^2x'}{dt^2} + M''\frac{d^2x''}{dt^2} + \ldots, \\ 0 &= M\frac{d^2y}{dt^2} + M'\frac{d^2y'}{dt^2} + M''\frac{d^2y''}{dt^2} + \ldots, \\ 0 &= M\frac{d^2z}{dt^2} + M'\frac{d^2z'}{dt^2} + M''\frac{d^2z''}{dt^2} + \ldots . \end{aligned}$$

Souřadnice hmotného středu soustavy jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{Mx + M'x' + M''x'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots}, \\ Y_t &= \frac{My + M'y' + M''y'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots}, \\ Z_t &= \frac{Mz + M'z' + M''z'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots}, \end{aligned}$$

z čehož je vidět, že hmotný střed nepodléhá zrychlení.

Dále Lagrange odvodil zákon zachování momentu hybnosti. Uvažoval rotace, například kolem osy z

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + y\alpha, \\ \bar{y} &= y(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} - x\alpha, \\ \bar{x}' &= x'(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + y'\alpha, \\ \bar{y}' &= y'(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} - x'\alpha, \end{aligned}$$

a tak dále, kde α je sinus úhlu rotace. Vlivem této rotace má Ω stejný tvar. Za předpokladu, že α je velmi malé, lze α^2 zanedbat. Změny proměnných $x, x', x'', \ldots$ jsou potom vlivem rotace $y\alpha, y'\alpha, y''\alpha, \ldots$, a změny $y, y', y'', \ldots$ jsou $-\alpha x, -\alpha x', -\alpha x'', \ldots$. Protože se Ω vlivem této rotace nezmění, je její diferenciál Ω podle těchto proměnných nulový, takže

$$0 = \frac{\partial\Omega}{\partial x}y + \frac{\partial\Omega'}{\partial x}y' + \frac{\partial\Omega}{\partial x''}y'' + \ldots - \frac{\partial\Omega}{\partial y}x - \frac{\partial\Omega}{\partial y'}x' - \frac{\partial\Omega}{\partial y''}x''' - \ldots \tag{3.89}$$

Podobným způsobem lze odvodit analogické rovnice, stačí uvažovat malé rotace kolem zbylých dvou os. Opět použitím pohybových rovnic pro $M, M', M'', \ldots$ Lagrange získal rovnice

$$0 = My\frac{d^2x}{dt^2} + M'y'\frac{d^2x'}{dt^2} + \ldots - Mx\frac{d^2y}{dt^2} - M'x'\frac{d^2y'}{dt^2} - \ldots,$$
$$0 = Mz\frac{d^2x}{dt^2} + M'z'\frac{d^2x'}{dt^2} + \ldots - Mx\frac{d^2z}{dt^2} - M'x'\frac{d^2z'}{dt^2} - \ldots,$$
$$0 = Mz\frac{d^2y}{dt^2} + M'z'\frac{d^2y'}{dt^2} + \ldots - My\frac{d^2z}{dt^2} - M'y'\frac{d^2z'}{dt^2} - \ldots .$$

Jejich integrací Lagrange obdržel rovnice popisující zákon zachování momentu hybnosti:

$$M\frac{ydx - xdy}{dt} + M'\frac{y'dx' - x'dy'}{dt} + \ldots = a,$$
$$M\frac{zdx - xdz}{dt} + M'\frac{z'dx' - x'dz'}{dt} + \ldots = b,$$
$$M\frac{zdy - ydz}{dt} + M'\frac{z'dy' - y'dz'}{dt} + \ldots = c.$$

Nakonec Lagrange použil úplný diferenciál Ω :

$$\begin{aligned} d\Omega = & \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial x'}dx' + \frac{\partial\Omega}{\partial x''}dx'' + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial y'}dy' + \frac{\partial\Omega}{\partial y''}dy'' + \ldots \\ & + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial z'}dz' + \frac{\partial\Omega}{\partial z''}dz'' + \ldots . \end{aligned}$$

Opět pomocí pohybových rovnic 3.86,3.87, a podobných nahradil parciální derivace:

$$\begin{aligned} d\Omega = & M\frac{dxd^2x}{dt^2} + M'\frac{dx'd^2x'}{dt^2} + M''\frac{dx''d^2x''}{dt^2} + \ldots \\ & + M\frac{dyd^2y}{dt^2} + M'\frac{dy'd^2y'}{dt^2} + M''\frac{dy''d^2y''}{dt^2} + \ldots \\ & + M\frac{dzd^2z}{dt^2} + M'\frac{dz'd^2z'}{dt^2} + M''\frac{dz''d^2z''}{dt^2} + \ldots . \end{aligned}$$

Integrál poslední rovnice vyjadřuje zachování *forces vives*:

$$\Omega = M\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + M'\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} + \ldots + h. \tag{3.90}$$

Což je v podstatě zákon zachování kinetické energie.

Při řešení otázky stability Sluneční soustavy Lagrange rozdělil dráhové elementy do dvou skupin. V první skupině jsou délka výstupního uzlu, šířka perihélia a okamžik průchodu perihéliem. Změny těchto elementů nevedou k rozpadu systému. V druhé skupině jsou velká poloosa, výstřednost a sklon dráhy. Způsob jejich změn určuje stabilitu Sluneční soustavy. Stabilita planetárních drah proto byla zjišťována prostřednictvím studia změn těchto dráhových elementů. S využitím poruchové funkce Lagrange ukázal, že hlavní poloosa za předpokladu nesouměřitelnosti oběžných dob podléhá pouze periodickým změnám. Lagrange také za pomocí poruchové funkce odvodil integrály pohybu.

Kapitola 4

Pierre-Simon de Laplace

4.1 Pohybové rovnice

Ve své první práci o teorii pohybu planet [14] *„Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent."* Laplace zavedl použití symbolu δ před veličinou k označení infinitezimálně malého rozdílu.

Pohybové rovnice napsal ve tvaru

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(c + \int \frac{\psi' r dt}{p}\right), \tag{4.1}$$

$$0 = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^3}\left(c + \int \frac{\psi' r dt}{p}\right)^2 - \frac{\psi''}{p}, \tag{4.2}$$

$$0 = \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2dsdr}{rdt^2} + \frac{s}{r^4}\left(c + \int \frac{\psi' r dt}{p}\right)^2 + \frac{s\psi'' - \psi}{pr}, \tag{4.3}$$

kde ψ' označuje sílu působící ve směru růstu ϕ a p je hmotnost planety a ψ'' je síla působící v radiálním směru. Symbol s ve třetí rovnici označuje tangens šířky a ψ je síla působící ve směru růstu šířky.

Laplace vyjádřil zrychlení planety p způsobené Sluncem a další planetou s hmotností p':

$$-\frac{\psi''}{p} = \frac{S+p}{r^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} + p'\left[\frac{\cos\theta}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r - r'\cos\theta}{v^3}\right],$$

$$-\frac{\psi'}{p} = p'\sin\theta\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right],$$

$$-\frac{\psi}{p} = \frac{(S+p)s}{r^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} + p'\left[\frac{s'}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{rs - r's'}{v^3}\right].$$

Předpokládal hmotnosti planet nekonečně malé vzhledem k hmotnosti Slunce a označil je $p = \delta m$ a $p' = \delta m'$. Vzájemné sklony drah a jejich výstřednosti označil řádové velikosti α, což je velmi malá veličina a omezil se na členy řádu $\alpha^2 \delta m'$. Pro $p' = \delta m' = 0$ mají rovnice 4.1 a 4.2 tvar

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \tag{4.4}$$

$$0 = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{S+\delta m}{r^2}. \tag{4.5}$$

Řešení těchto rovnic Laplace vyjádřil ve tvarech:

$$\phi = nt + A' - 2\alpha e \sin(nt+\varepsilon) + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 \sin 2(nt+\varepsilon) + \dots, \tag{4.6}$$

$$r = a\left[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + e\cos(nt+\varepsilon) - \frac{\alpha^2 e^2}{2}\cos 2(nt+\varepsilon) + \dots\right]. \tag{4.7}$$

To vyjadřuje pohyb planety p, který není rušen přítomností druhé planety. Symbol n značí střední úhlovou rychlost kolem centrálního tělesa, A' je střední úhlová vzdálenost planety od pevně dané přímky v čase $t = 0$ a ε je úhel, o který je planeta před svým aféliem v čase $t = 0$. V případě, kdy $\delta m' \neq 0$ Laplace diferencoval rovnice 4.4 a 4.5 podle δ a k tomu přičetl členy z rovnic 4.1 a 4.2 obsahující $\delta m'$. Obdržel rovnice

$$\frac{d\delta\phi}{dt} = -\frac{2c}{r^3}\delta t - \frac{\delta m'}{r^2}\int r dt \sin\theta \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right], \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{3c^2}{r^4}\delta r - \frac{2(S+\delta m)}{r^3}\delta r + \frac{\delta m' r}{v^3} \\ &+ \frac{2c\delta m'}{r^3}\int r dt \sin\theta \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right] + \delta m' \cos\theta \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Podobným způsobem Laplace odvodil rovnici pro změny šířky. U bezporuchového případu se rovnice 4.3 redukuje na

$$0 = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2dsdr}{rdt^2} + \frac{c^2 s}{r^4}. \tag{4.10}$$

Pro $s = \alpha\lambda$, je řešením rovnice 4.10 splečně s 4.4

$$s = \alpha\gamma \sin(\phi + \omega), \tag{4.11}$$

kde γ a ω jsou integrační konstanty a $\alpha\gamma$ je tangens sklonu dráhy planety p ke vztažné rovině. Diferenciací rovnice 4.10 a přičtením členů obsahující poruchovou sílu Laplace dostal

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d^2\delta\lambda}{dt^2} + \frac{2d\lambda d\delta r}{rdt^2} + \frac{2drd\delta\lambda}{rdt^2} + \frac{c^2\delta\lambda}{r^4} - \frac{4c\lambda\delta r}{r^5} \\ &- \frac{2c\lambda}{r^4}\delta m' \int r dt \sin\theta \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right] \\ &+ \frac{\delta m'}{r}[\lambda' - \lambda\cos\theta]\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Základem je Keplerův pohyb po elipse definovaný rovnicemi 4.6, 4.7 a 4.11. Euler s Lagrangem jako základní bezporuchovou dráhu ve svých pracech používali kruhový pohyb. Poruchové efekty Laplace popisuje pomocí rovnic 4.8, 4.9 a 4.12.

4.2 Rozklady do trigonometrických řad

Stejně jako jeho předchůdci, také Laplace ve svých pracech používal rozložení převrácené třetí mocniny vzdáleností mezi rušenou a rušícími planetami do trigonometrických řad. Laplace vyjádřil vztah pro tuto funkci ve tvaru

$$\begin{aligned} v^{-3} =& [r^2 - 2rr'\cos\theta + r'^2 + (r's' - rs)^2]^{-\frac{3}{2}} \\ =& [r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2]^{-\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{2rr'\cos\theta}{r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2}\right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Poté zavedl substituci

$$g = \frac{2rr'}{r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2} \tag{4.13}$$

a přešel k obecnějšímu problému nalezení koeficientů trigonometrické řady

$$(1 + \beta^2)^{-q}(1 - g\cos\theta)^{-q} = b_q^{(0)} + b_q^{(1)}\cos\theta + b_q^{(2)}\cos 2\theta + \ldots, \tag{4.14}$$

kde β je poměr středních středních vzdáleností planet od Slunce. Toto vyjádření je podobné Eulerovu. V Laplaceově případě je g proměnná:

$$g = h + \alpha h',$$

kde $h = 2aa'/(a^2 + a'^2)$, α je malé číslo vyjadřující řád změn a h' je funkce závislá na polohách planet. Protože jsou koeficienty $b_q^{(j)}$ funkcemi g, lze každý z nich popsat řadami

$$b_q^{(j)} = (b_q^{(j)})_{g=h} + \alpha h' \left(\frac{\partial b}{\partial g}\right)_{g=h} + \frac{\alpha^2 h'^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial g^2}\right)_{g=h} + \ldots .$$

K určení derivací koeficientů $b_q^{(j)}$ podle g Laplace nejprve zderivoval rovnici 4.14:

$$q\cos\theta(1 + \beta^2)^{-q}(1 - g\cos\theta)^{-q-1} = \frac{\partial b_q^0}{\partial g} + \frac{\partial b_q^1}{\partial g}\cos\theta + \ldots,$$

vynásobením $(1 - g\cos\theta)$ a použitím rovnice 4.14 získal

$$q\cos\theta(b_q^{(0)} + b_q^{(1)}\cos\theta + \ldots) = (1 - g\cos\theta)\left(\frac{\partial b_q^{(0)}}{\partial g} + \frac{\partial b_q^{(1)}}{\partial g}\cos\theta + \ldots\right).$$

Redukcí násobků kosinů na součty kosinů násobných úhlů a následným porovnáním koeficientů kosinů stejných argumentů Laplace nalezl vztahy mezi $b_q^{(j)}$ a jejich derivacemi:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial b_q^{(0)}}{\partial g} &= qb_q^{(1)} + g\frac{\partial b_q^{(1)}}{\partial g}, \\ 2\frac{\partial b_q^{(1)}}{\partial g} &= 2\left(qb_q^{(0)} + g\frac{\partial b_q^{(0)}}{\partial g}\right) + qb_q^{(2)} + g\frac{\partial b_q^{(2)}}{\partial g}, \\ 2\frac{\partial b_q^{(2)}}{\partial g} &= qb_q^{(1)} + g\frac{\partial b_q^{(1)}}{\partial g} + qb_q^{(3)} + g\frac{\partial b_q^{(3)}}{\partial g}, \ldots . \end{aligned}$$

Kombinací těchto vztahů s rekurentními vzorci pro výpočet libovolného koeficientu pomocí dvou předchozích Laplace nalezl první derivace koeficientů vyjádřené pomocí $b_q^{(0)}$ a $b_q^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_q^{(0)}}{\partial g} &= \frac{b_q^{(1)}(q-1)+2qb_q^{(0)}g}{2(1-g^2)}, \\ \frac{\partial b_q^{(1)}}{\partial g} &= \frac{2qb_q^{(0)}+b_q^{(1)}(qg^2-1)}{g(1-g^2)}, \dots . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Vztahy pro derivace vyšších řádů lze odvodit derivacemi rovnic 4.15.

Aby Laplace určil $\alpha h'$, rozvinul rovnici 4.13 do Taylorovy řady s použitím substitucí

$$r = a[1+\alpha e\cos(nt+\varepsilon)], \quad r' = a'[1+\alpha e'\cos(nt'+\varepsilon')],$$
$$s = \alpha\gamma\sin(nt+\omega), \quad s' = \alpha\gamma'\sin(n't+\omega').$$

4.3 Problém „arcs de cercle“

Laplace svou metodu pro eliminaci „arcs de cercle“ představil v pracech [15] a [16]. Hlavní myšlenkou je variace konstat. Jedním z Laplaceových vysvětlení je řešení diferenciální rovnice

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + y - L + \alpha y^2, \tag{4.16}$$

kde α je velmi malá konstanta a L je také konstanta. Nejprve zanedbal člen s α a nalezl řešení

$$y = L + p\sin t + q\cos t, \tag{4.17}$$

kde p a q jsou integrační konstanty, které lze určit z počátečních podmínek $(y)_{t=0} = L+q$ a $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = p$. K partikulárnímu řešení 4.17 přičetl další člen:

$$y = L + p\sin t + q\cos t + \alpha z. \tag{4.18}$$

Tento poslední vztah dosadil do diferenciální rovnice 4.16 a zanedbal členy s α^2. Výsledkem je rovnice

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + z + \frac{2L^2+p^2+q^2}{2} + 2Lp\sin t + 2Lq\cos t + pq\sin 2t + \frac{q^2-p^2}{2}\cos 2t,$$

jejíž řešení po dosazení do rovnice 4.18 dává

$$\begin{aligned} y =& L - \alpha\frac{2L^2+p^2+q^2}{2} + (p-\alpha Lqt)\sin t + (q+\alpha Lpt)\cos t \\ &+ \alpha\frac{q^2-p^2}{6}\cos 2t + \alpha\frac{pq}{3}\sin 2t. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Poté celý proces opakoval, ale pro čas $t = T + t_1$, kde T je konstanta reprezentující větší časový úsek a t_1 je nová proměnná. Výsledkem byla rovnice:

$$\begin{aligned} y =& L - \alpha\frac{2L^2+p_1^2+q_1^2}{2} + (p_1-\alpha Lq_1t_1)\sin T + t_1 + (q_1+\alpha Lp_1t_1)\cos T + t_1 \\ &+ \alpha\frac{q_1^2-p_1^2}{6}\cos 2T + 2t_1 + \alpha\frac{p_1q_1}{3}\sin 2T + 2t_1. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pro konstanty p_1 a q_1 platí podmínky $(y)_{t=T} = L + q_1$ a $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=T} = p_1$. Když je v rovnicích 4.19 a 4.20 $\alpha = 0$, rovnice budou totožné s 4.17 a p_1 a q_1 budou rovné p a q. Proto rozdíly $p_1 - p = \delta p$ a $q_1 - q = \delta q$ jsou řádu α. Po odečtení 4.19 od 4.20, několika úpravách a zanedbání členů řádu α^2 a α^3 Laplace získal rovnici

$$0 = (\delta p + \alpha LTq)\sin t + (\delta q - \alpha LTp)\cos t. \tag{4.21}$$

Z rovnice 4.21 je zřejmé, že

$$\delta p = -\alpha LTq, \quad \delta q = \alpha LTp. \tag{4.22}$$

Laplace zavedl substituci $\alpha LT = x$ a funkce p_1 a q_1, které závisí na x, rozepsal do Taylorovy řady:

$$\begin{aligned} p_1 &= p + \delta p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{x^2}{2!}\frac{d^2p}{dx^2} + \dots, \\ q_1 &= q + \delta q = q + x\frac{dq}{dx} + \frac{q^2}{2!}\frac{d^2q}{dx^2} + \dots . \end{aligned} \tag{4.23}$$

S použitím rovnic 4.22 a 4.23, při zanedbání členů řádu x^2, lze nalézt rovnice

$$\frac{dp}{dx} = -q, \quad \frac{dq}{dx} = p,$$

jejich řešením je

$$p = e\cos(x + \overline{\omega}), \quad q = e\sin(x + \overline{\omega}).$$

Když je $x = 0$, je $p = p_1$ a $q = q_1$, proto

$$p_1 = e\cos(\alpha LT + \overline{\omega}), \quad q_1 = e\sin(\alpha LT + \overline{\omega})$$

a rovnice 4.20 v čase $t_1 = 0$ se stává

$$y = L - \frac{\alpha(2L^2 + e^2)}{2} + e\sin[T(1 + \alpha L) + \overline{\omega}] - \frac{\alpha e^2}{6}\cos[2T(1 + \alpha L) + 2\overline{\omega}]. \tag{4.24}$$

Rovnice 4.24 je vyjádřením y v libovolném čase T při zanedbání členů řádu α^2. Když budeme o y uvažovat jako o rotujícím radiálním vektoru, můžeme vidět, že velikosti maxima a minima y jsou konstantí, ale jejich polohy se mění. Z pohledu nebeské mechaniky tento postup naznačuje, že řešení problému dvou těles je pro krátký časový úsek téměř platné, ale pro delší horizont se dráhové elementy mění. Laplace dále ukázal, že při započítání členů řádu α^2 řešení nebude obsahovat „arcs de cercles“ a tvrdil, že potvrdil stejný výsledek i pro každý vyšší řád. Problém s postupem Laplace je ten, že aby byl platný, musí být x řádu α, ale x závisí lineárně na T. Když bude narůstat čas, x také poroste a předpoklad po dostatečně dlouhé době nebude platný.

4.4 Sekulární nerovnosti

Nyní se vrátíme k Laplaceově práci [14] o planetárním pohybu. Po odvození pohybových rovnic zkoumal princip univerzální gravitace a diskutoval všechny možné příčiny způsobující sekulární zrychlení těles. Konstatoval, že Newton a jeho následovníci učinili čtyři předpoklady: 1. gravitační přitažlivost je přímo úměrná hmotnosti těles a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti, 2. přitažlivá síla tělesa je výsledkem přitažlivostí všech jeho částí , 3.síla se šíří okamžitě, 4. na tělesa v klidu působí stejným způsobem, jako na tělesa v pohybu. Prvním dvěma předpokladům Laplace důvěřoval. Vyslovil však pochyby o okamžitém působení gravitační síly.

Co se týče čtvrtého předpokladu, Laplace vyslovil názor, že těleso pohybující se ve směru působiště síly podléhá menší gravitační přitažlivosti. Tato hypotéza vychází z představy, že gravitační síly představuje impuls částic éteru, který se pohybuje ke středu Země, nebo od Slunce s konečnou rychlostí. Na základě této hypotézy byl schopen vysvětlit sekulární zrychlení Měsíce a planet. Po důkladnějších výpočtech ale tuto teorii vyvrátil, když na základě sekulárního zrychlení Měsíce vypočetl sekulární zrychlení Jupiteru a Saturnu, které bylo takřka nedetekovatelné a neodpovídalo pozorováním. Laplace také pochyboval o vysvětlení sekulárního zrychlení Měsíce vlivem tření s éterem. Sám o jeho existenci pochyboval. Hypotéza, že Slunce při vyzařování ztrácí hmotnost a tím dojde ke zpomalení zemské dráhy, by pro pozorované zrychlení 1° za 2000let ve středním pohybu Měsíce vyžadovala zpomalení středního pohybu Země o několik stupňů, což je také v rozporu s pozorováním. Dalším návrhem bylo zpomalení rotace Země působením větrů v tropické zóně. Protože dny by byly pomalejší, Měsíc by se zdál rychlejší. Tuto hypotézu Laplace také zamítl.

V poslední části práce se Laplace zabýval odvozením sekulárních nerovností dráhových elementů planet vyplývající z nemodifikované Newtonovy teorie bez předpokladu, že velikosti sil závisí na rychlosti planet. Laplace vyšel z rovnic 4.8 a 4.9:

$$\frac{d\delta\phi}{dt} = -\frac{2c}{r^3} - \frac{\delta m'}{r^2}\int r dt \sin(\phi'-\phi)\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right], \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{3c^2}{r^4}\delta r - \frac{2(S+\delta m)}{r^3}\delta r + \frac{\delta m' r}{v^3} \\ &+ \frac{2c\delta m'}{r^3}\int r dt \sin(\phi'-\phi)\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right] \\ &+ \delta m' \cos(\phi'-\phi)\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]. \end{aligned} \tag{4.26}$$

V rovnici 4.26 nahradil členy obsahující faktor $\delta m'$ řadou

$$a\frac{\delta m'}{a^3}A + \alpha^2 a\frac{\delta m'}{a^3}Bnt + \alpha a\frac{\delta m'}{a^3}C\cos(nt+\varepsilon) + \alpha a\frac{\delta m'}{a^3}D\sin(nt+\varepsilon).$$

Protože členy úměrné času mohou vzniknout pouze integrací konstantních členů, zavedl

Laplace v rovnici 4.25 substituci

$$\frac{\delta m'}{r^2}\int r dt \sin(\phi'-\phi)\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{r'}{v^3}\right]=\alpha^2\frac{\delta m'}{a^3}\frac{a^2}{2c}Bnt,$$

ve které zanedbal periodické členy. Na pravé straně této rovnice je $a^2/c=1/n$, protože pro bezporuchovou elipsu platí:

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{c}{a^2}(1+\alpha^2e^2+\ldots)=n+\ldots\,.$$

Protože pro systém dvou těles platí $(S+\delta m)/a^2=an^2$, Laplace zavedl vyjádření $\frac{\delta m'}{a^3}=n^2\delta\mu'$,kde $\delta\mu'=\delta m'/S$. Rovnice 4.25 a 4.26 přejdou na tvar

$$\frac{d\delta\phi}{dt}=-\frac{2c}{r^3}\delta r-\alpha^2\frac{\delta\mu'}{2}Bn^2t, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}0=&\frac{d^2\delta r}{dt^2}+\frac{3c^2\delta r}{r^4}-\frac{2(S+\delta m)}{r^3}\delta r+\alpha\delta\mu'n^2A\\&+\alpha a\delta\mu'n^2C\cos(nt+\varepsilon)+\alpha a\delta\mu'n^2D\sin(nt+\varepsilon)+\alpha^2a\delta\mu'Bn^3t.\end{aligned} \tag{4.28}$$

K jejich vyřešení si Laplace napsal vyjádření pro $\delta\phi$ a δr s neznámými koeficienty:

$$\delta\phi=\delta\mu'gnt+\alpha^2\delta\mu'hn^2t^2, \tag{4.29}$$

$$\delta r=a\delta\mu'[d+\alpha fnt\cos(nt+\varepsilon)+\alpha qnt\sin(nt+\varepsilon)+\alpha^2knt]. \tag{4.30}$$

Jejich dosazením do rovnic 4.27 a 4.28, použitím substitucí $r=a[1+\alpha e\cos(nt+\varepsilon)]$, $r^{-3}=a^{-3}[1-3\alpha e\cos(nt+\varepsilon)]$ a $r^{-4}=a^{-4}[1-4\alpha e\cos(nt+\varepsilon)]$ a porovnáním homologických členů nalezl

$$g=2A,\quad d=-A,\quad f=\frac{1}{2}D,\quad q=-3eA-\frac{1}{2}C,\quad k=\frac{3}{2}eD-B,\quad h=\frac{3}{4}(B-eD).$$

Nyní Laplace mohl vyjádřit střední délku planety spolu s její sekulární změnou způsobenou rušením ostatních planet

$$\phi=nt+A'+\delta\phi=nt+A'+2A\delta\mu'nt+\alpha^2\delta\mu'\frac{3}{4}(B-eD)n^2t^2+\ldots, \tag{4.31}$$

kde A' je střední délka planety v čase $t=0$. Pro vzdálenost planety od Slunce spočetl vztah

$$\begin{aligned}r=&a\Bigg[1+\alpha e\cos(nt+\varepsilon)-A\delta\mu'+\frac{1}{2}\alpha\delta\mu'Dnt\cos(nt+\varepsilon)\\&-\alpha\delta\mu'\left(3eA+\frac{C}{2}\right)nt\sin(nt+\varepsilon)+\alpha^2\delta\mu'\left(3e\frac{D}{2}-B\right)nt\Bigg],\end{aligned}$$

který lze použitím přibližných vztahů $\cos\left[\delta\mu'\left(3A+\frac{C}{2e}\right)\right]\approx 1$ a $\sin\left[\delta\mu'\left(3A+\frac{C}{2e}\right)\right]\approx\delta\mu'\left(3A+\frac{C}{2e}\right)$ upravit na tvar

$$r=a\left[1-A\delta\mu'+\alpha\left(e+\delta\mu'Dn\frac{t}{2}\right)\cos\left\{nt\left(1+3A\delta\mu'+C\frac{\delta\mu'}{2e}\right)+\varepsilon\right\}+\ldots\right]. \tag{4.32}$$

Z rovnice 4.32 je zřejmé, že sekulární nárůst výstřednosti je

$$\alpha a \delta \mu' Dnt. \tag{4.33}$$

Podle rovnice 4.31 je střední pohyb rušené planety $(1+2A\delta\mu')nt$. Z argumentu kosinu v rovnici 4.32 lze určit pohyb afélia

$$-\delta\mu' nt\left(A+\frac{C}{2e}\right) \tag{4.34}$$

a z rovnice 4.31 získáme zrychlení středního pohybu

$$\frac{3}{4}\alpha^2\delta\mu'(B-eD)n^2t^2. \tag{4.35}$$

K určení sekulárních změn sklonu a polohy uzlu oběžné dráhy Laplace využil rovnici 4.12 pro poruchy:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2\delta\lambda}{dt^2}+\frac{2\delta\lambda d\delta r}{rdt^2}+\frac{2drd\delta\lambda}{rdt^2}+\frac{c^2\delta\lambda}{r^4}-\frac{4c^2\lambda\delta r}{r^5} \\ & -\frac{2c\lambda}{r^4}\delta m'\int rdt\sin(\phi'-\phi)\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{r'}{v^3}\right] \\ & +\frac{\delta m'}{r}[\lambda'-\lambda\cos(\phi'-\phi)]\left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{r'}{v^3}\right]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Laplace dospěl k závěru, že je potřeba započítat pouze členy úměrné $\cos(nt+\overline{\omega})$ a $\sin(nt+\overline{\omega})$, kde $\overline{\omega}$ je úhlová vzdálenost mezi planetou a uzlem v čase $t=0$. Proto položil členy úměrné $\delta m'$ rovné

$$En^2\delta\mu'\sin(nt+\overline{\omega})+Fn^2\delta\mu'\cos(nt+\overline{\omega}).$$

Také pro $\delta\lambda$ položil

$$\delta\lambda=\delta\mu' gnt\sin(nt+\overline{\omega})+\delta\mu' fnt\cos(nt+\overline{\omega}).$$

Jejich dosazením do 4.36 a porovnáním koeficientů homologických členů vyjádřil neznámé koeficienty:

$$f=\frac{E}{2}+2\gamma A, \quad g=-\frac{F}{2}.$$

Nyní byl schopen vypočítat $\lambda+\delta\lambda$ a vyjádřit

$$s=\alpha\left(\gamma-\delta\mu' Fn\frac{t}{2}\right)\sin\left[nt\left(1+2A\delta\mu'+\frac{E\delta\mu'}{2\gamma}\right)+\overline{\omega}\right].$$

Z tohoto vztahu lze vyčíst sekulární zmenšení sklonu oběžné dráhy k referenční rovině:

$$\alpha\delta\mu' Fn\frac{t}{2} \tag{4.37}$$

a zpětný pohyb uzlů v referenční rovině

$$\delta\mu' En\frac{t}{2\gamma}. \tag{4.38}$$

Po provedení rozvojů do řad a vyčíslení konstant A,B,C,D,E a F, pokud V je úhel mezi afélii dvou planet, rovnice pro sekulární nárůst výstřednosti 4.33 má tvar

$$\alpha a\delta\mu' e' \sin V\left\{(1+\beta^2)b^{(1)}_{\frac{3}{2}} - 3\beta b^{(0)}_{\frac{3}{2}}\right\}nt$$

a pohyb afélia 4.34 je

$$\delta\mu'\left\{\frac{\beta b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{e'}{2e}\cos V[3\beta b^{(0)}_{\frac{3}{2}} - (1+\beta^2)b^{(1)}_{\frac{3}{2}}]\right\}nt.$$

Nechť U je úhel mezi výstupními uzly dvou planet, pokles sklonu oběžné dráhy 4.37 je dán

$$\alpha\gamma'\delta\mu'\left\{\frac{\beta b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{4}\sin U\right\}nt$$

a zpětný pohyb uzlu 4.38 je

$$\delta\mu'\frac{\beta b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{4}\left\{1 - \frac{\alpha\gamma'}{\alpha\gamma}\cos U\right\}nt.$$

Tyto vzorce platí pro Jupiter. Pro získání odpovídajících vztahů pro Saturn je třeba nahradit $\delta\mu' \to \delta\mu, e' \to e, a \to a', V \to V', U \to -U$ a $\beta \to 1/\beta, b^{(0)}_{\frac{3}{2}} \to b^{(0)}_{\frac{3}{2}}/\beta^3, b^{(1)}_{\frac{3}{2}} \to b^{(1)}_{\frac{3}{2}}/\beta^3$. Tento výsledek souhlasí s tím, který stanovil Lagrange.

Zrychlení středního pohybu 4.35, Laplace zjistil, je s přesností do řádu $\alpha^2\delta\mu'$ pro obě planety nulové. Nejprve tento výsledek obdržel dosazením numerických hodnot pro Jupiter a Saturn a ihned pojal podezření, že nejde o nic neobvyklého. Následně se mu podařilo dokázat, že tento výsledek musí platit pro jakékoli dvě planety.

V [14, 253] se Laplace k výsledku sekulárních změn středního pohybu vyjádřil takto: *„Z porovnání pozorování Jupiteru a Saturnu z různých století astronomové odvodili zrychlení středního pohybu Jupiteru a zpomalení Saturnu. Nebudu se zabývat diskuzí nejistot měření vzhledem k velikostem těchto změn, stačí uvést, že jejich existence se zdá velmi pravděpodobná a zpomalení Saturnu je mnohem větší, než zrychlení Jupiteru za stejné časové období. Z předchozí teorie vyplývá, že tyto změny nelze připisovat vzájemnému působení těchto dvou planet.“* Laplace navrhl možnost ovlivňování středního pohybu planet kometami.

Laplace v [14] uvedl ještě jedno odvození ukazující, že gravitací nelze vysvětlit sekulární změny středních pohybů Jupiteru a Saturnu. Vyšel z principu Chevaliera d'Arcyho [17], který je ve skutečnosti principem zachování úhlové hybnosti. Na jeho základě odvodil vztah

$$\delta n' = -\delta n\frac{\delta\mu}{\delta\mu'}\left(\frac{n'}{n}\right)^{\frac{4}{3}} = -\delta n(0.84149).$$

Z toho vylývá, že sekulární změny Jupiterova středního pohybu v určitém časovém intervalu by měly být k těm Saturnovým v poměru 1 : 0.84149 a měly by mít opačné znaménko. Laplace k tomu poznamenal: *„Pozorování splňují ve skutečnosti poslední podmínku ale ne první, protože sekulární zrychlení Saturnu, místo aby bylo menší než Jupiterovo, je mnohem větší.“* [14, 257]

Laplaceův závěr je chybný, jak později sám zjistil. Práce Laplace a Lagrange vychází z pohybu po eliptické dráze v souladu s Keplerovým zákonem ploch. Kvůli vzájemnému působení planety podléhají nerovnostem, které narušují keplerovský pohyb. Nerovnosti jsou dvojího druhu. První jsou označené „periodické“ a závisí na polohách planet. Druhé jsou označené „sekulární“ a mění elementy drah velmi pomalu během každého oběhu. Ale dokonce i sekulární změny jsou periodické s velmi dlouhými periodami. Jak zjistil Lagrange a Laplace to přijal.

Problém s druhým Laplaceovým argumentem využívající zachování momentu hybnosti je, nepoužil zákon zachování energie. V té době si nejspíš nebyl vědom nutnosti jeho předpokladu.

4.5 Stabilita Sluneční soustavy

Laplace s konečnou platností vyřešil problém anomálií ve středních pohybech Jupiteru a Saturnu v práci [18] z roku 1785. První část je věnovaná měsícům Jupiteru. Druhá sekce je inspirovaná Lagrangovými pracemi [12] a [13]. Laplace uvažoval systém těles $m, m', m'', \dots$ pohybující se kolem tělesa M s jednotkovou hmotností, která je mnohem větší než hmotnost ostatních těles. Laplace nejprve definoval, po vzoru Lagrange, poruchovou funkci

$$\lambda = \frac{mm'}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{mm''}{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{m'm''}{[(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2]^{\frac{1}{2}}} + \dots .$$

Poté přesunul síly, kterými působí systém na těleso M do m a vytvořil pohybové rovnice pro m:

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} + \frac{m'x'}{r'^3} + \dots - \frac{1}{m}\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \tag{4.39}$$

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} + \frac{m'y'}{r'^3} + \dots - \frac{1}{m}\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \tag{4.40}$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} + \frac{m'z'}{r'^3} + \dots - \frac{1}{m}\frac{\partial\lambda}{\partial z}. \tag{4.41}$$

Podobné rovnice platí i pro $m', m'', \dots$.

V dalším kroku vynásobil rovnici 4.39 výrazem

$$2mdx - \frac{2m(mdx + m'dx' + \dots)}{1+m+m'+\dots},$$

rovnici 4.40 podobným výrazem, kde za x se dosadil y a rovnici 4.41 opět stejným výrazem kde ale figuruje z. Diferenciální rovnice pro m' vynásobil odpovídajícími členy, ve kterých nahradil dx, dy, dz za dx', dy', dz' a obráceně. Obdobně postupoval u diferenciálních rovnic ostatních těles systému. Všechny takto získané rovnice sečetl a s použitím Lagrangeových rovnic 3.88 pro poruchovou funkci, substitucí $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}, r' = (x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}} \ldots$ a zanedbáním členů se součinem tří libovolných hmotností $m, m', m'', \ldots$ získal rovnici

$$
\begin{aligned}
0 =& 2m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2} + 2m'\frac{dx'd^2x'+dy'd^2y'+dz'd^2z'}{dt^2} + \ldots \\
&-2\frac{mdx+m'dx'+\ldots}{1+m+m'+\ldots}\frac{md^2x+m'd^2x'+\ldots}{dt^2} \\
&-2\frac{mdy+m'dy'+\ldots}{1+m+m'+\ldots}\frac{md^2y+m'd^2y'+\ldots}{dt^2} \\
&-2\frac{mdz+m'dz'+\ldots}{1+m+m'+\ldots}\frac{md^2z+m'd^2z'+\ldots}{dt^2} \\
&+\left(\frac{mdr}{r^2}+\frac{m'dr'}{r'^2}+\ldots\right)-2d\lambda.
\end{aligned}
$$

Po integraci této rovnice získal vztah pro energii systému:

$$
\begin{aligned}
0 =& f + m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2} + \ldots \\
&-\frac{(mdx+m'dx'+\ldots)^2}{(1+m+m'+\ldots)dt^2}-\frac{(mdy+m'dy'+\ldots)^2}{(1+m+m'+\ldots)dt^2}-\frac{(mdz+m'dz'+\ldots)^2}{(1+m+m'+\ldots)dt^2} \\
&-2\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}+\ldots\right)-2\lambda.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Rovnice 4.42 je komplikovanější, než Lagrangeova rovnice 3.90, protože Laplace umístil počátek souřadnic do středu centrálního tělesa. Díky tomu dosáhl výsledku, který ho přesvědčil, že anomálie Jupiteru a Saturnu je způsobena pouze jejich vzájemným působením.

Laplace nejprve uvažoval vztah pro rychlost jediné planety obíhající kolem Slunce. Následně, aby zahrnul působení ostatních planet, přidal k vyjádření poruchový člen ψ:

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{2(1+m)}{r} - \frac{1+m}{a} + \psi,$$

Podobné vztahy platí i pro ostatní planety $m', m'', \ldots$. Ty dosadil do rovnice 4.42 a upravil. Dále zanedbal členy obsahující součiny dvou, nebo více hmotností planet $m, m', \ldots$ a získal vztah:

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots. \tag{4.43}$$

Protože $f, m, m', \ldots$ jsou konstantní, rovnice 4.43 poskytuje určitou podmínku pro změny hlavních poloos. Pokud se některá z nich zvětšuje, musí se alespoň jedna z ostatních poloos zmenšovat.

U pohybu Jupiteru a Saturnu lze působení ostatních planet zanedbat. Laplace využil třetího Keplerova zákona a vhodnou volbou jednotek napsal ve tvaru $n^2a^3 = n'^2a'^3 = 1$. Rovnice 4.43 přechází pro tento případ do tvaru

$$f = mn^{\frac{2}{3}} + m'n'^{\frac{2}{3}},$$

ze kterého Laplace odvodil vztah

$$\delta n' = -\frac{m}{m'}\left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{1}{2}}\delta n.$$

Dosazením příslušných hodnot ukázal, že pokud jsou změny středního pohybu Jupiteru a Saturnu způsobené vzájemným působením, jejich poměr musí být přibližně 7 : 3.

K získání rovnic vyjadřujících zachování úhlového momentu, vynásobil rovnici 4.39 výrazem

$$-my + \frac{m(my + m'y' + ...)}{1 + m + m' + ...},$$

a rovnici 4.40

$$+mx - \frac{m(mx + m'x' + ...)}{1 + m + m' + ...}.$$

Také první z rovnic vztahující se k m' vynásobil

$$-m'y' + \frac{m'(my + m'y' + ...)}{1 + m + m' + ...},$$

a druhou

$$-m'x' - \frac{m'(my + m'y' + ...)}{1 + m + m' + ...}.$$

a tak dále i první a druhé rovnice pro každou z ostatních planet. Všechny takto získané rovnice sečetl a zanedbal členy obsahující součiny tří hmotností planet a ke zjednodušení použil Lagrangeovy rovnice 3.89 a první dvě rovnice 3.88. Takto nalezl rovnici

$$\begin{aligned} 0 =& m\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + m'\frac{x'd^2y'd^2x'}{dt^2} + ... \\ & - \frac{mx + m'x' + ...}{1 + m + m' + ...}\frac{md^2y + m'd^2y' + ...}{dt^2} + \frac{my + m'y' + ...}{1 + m + m' + ...}\frac{md^2x + m'd^2x' + ...}{dt^2}. \end{aligned}$$

Její integrál dává

$$\begin{aligned} c =& m\frac{xdy - ydx}{dt} + m'\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} + \\ & - \frac{mx + m'x' + ...}{1 + m + m' + ...}\frac{mdy + m'dy' + ...}{dt} + \frac{my + m'y' + ...}{1 + m + m' + ...}\frac{mdx + m'dx' + ...}{dt}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Při pohybu planety kolem centrálního tělesa opíše její průvodič za čas dt plochu $\frac{1}{2}dt[a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}$, kde a je střední vzdálenost od centrálního tělesa a e je výstřednost. Projekce této plochy do roviny xy, pokud θ označuje tangens sklonu, je

$$\frac{dt}{2}\left[\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(xdy - ydx).$$

Rovnost platí pouze za předpokladu eliptického pohybu. Analogické vztahy platí pro plochy opsané průvodiči ostatních planet. Laplace je dosadil do rovnice 4.44 a zanedbal konstantní a periodické veličiny řádu m^2. Obdržel rovnici

$$c = m\left[\frac{a(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]^{\frac{1}{2}} + m'\left[\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]^{\frac{1}{2}} + \dots . \tag{4.45}$$

Podobné rovnice lze odvodit i pro roviny yz a zx.

Laplace dále připomenul teorii sekulárních změn vytvořenou o deset let dříve Lagrangem a jím samotným. Nechť $e, e', e'', \dots$ jsou výstřednosti planetárních drah, $V, V', V'' \dots$ jsou délky jejich afélií, $\theta, \theta', \theta'', \dots$ jsou tangenty sklonů oběžných drah a $I, I', I'', \dots$ jsou délky výstupních uzlů. Pro veličiny $e\sin V, e'\sin V', e''\sin V'', \dots, e\cos V, e'\cos V', e''\cos V'', \dots$ a $\theta\sin I, \theta'\sin I', \theta''\sin I'', \dots, \theta\cos I, \theta'\cos I', \theta''\cos I'', \dots$ platí diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.

Řešení systému rovnic vztahující se k výstřednostem jsou vyjádřena součtem konečného množství sinů a kosinů. K určení koeficientů vyskytujících se u času t v argumentech těchto sinů a kosinů je třeba vyřešit algebraickou rovnici stupně rovnému počtu planet. Pokud jsou kořeny této rovnice reálné a různé, řešení nebude obsahovat „arcs de cercle“, ani exponenciální funkce. Pokud by ale některé kořeny byly stejné, nebo alespoň jeden z nich imaginární, bude tomu naopak. V opou případech lze napsat řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} e\sin V &= \alpha f^{it} + \beta f^{i't} + \dots + \gamma t^r + \lambda t^{r-1} + \dots + h, \\ e\cos V &= \mu f^{it} + \varepsilon f^{i't} + \dots + \phi t^r + \psi t^{r-1} + \dots + k \end{aligned} \tag{4.46}$$

a také obdobně pro planety $m', m'', \dots$. Zde f je základ přirozeného logaritmu. Koeficienty $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, \dots, \alpha', \beta', \mu', \varepsilon', \dots$, musí být funkcemi t a nebo periodické, ale bez exponenciál. Veličiny $\gamma, \lambda, \phi, \psi, \dots, h, k, \gamma', \lambda', \phi', \psi', \dots, h'k', \dots$ jsou buď konstantní, nebo periodické funkce.

Nechť $i > i' > i'' > \dots$. Umocněním a sečtením rovnic 4.46 Laplace spočetl

$$e^2 = (\alpha^2 + \mu^2)f^{2it} + \dots + (\gamma^2 + \phi^2)t^{2r} + \dots + h^2 + k^2. \tag{4.47}$$

Analogické rovnice lze odvodit pro čtverce výstředností ostatních planet a také pro druhé mocniny tangent sklonů každé planety. Protože jsou $e, e', e'', \dots$ a $\theta, \theta', \theta'', \dots$ velmi malé, lze rovnici 4.45 upravit na tvar

$$c = ma^{\frac{1}{2}} + m'a'^{\frac{1}{2}} + \dots - \frac{1}{2}ma^{\frac{1}{2}}(e^2 + \theta^2) - \frac{1}{2}m'a^{\frac{\prime 1}{2}}(e'^2 + \theta'^2) - \dots$$

Střední vzdálenosti planet od centrálního tělesa $a, a', a'', \dots$ nepodléhají výrazným sekulárním změnám. Proto Laplace napsal

$$ma^{\frac{1}{2}}(e^2 + \theta^2) + m'a'^{\frac{1}{2}}(e'^2 + \theta'^2) + \dots = konst.$$

Výstřednosti a sklony jsou v současnosti velmi malé, můžeme proto předpokládat, že jejich změny jsou na sobě nezávislé. Laplace proto separoval předchozí rovnici na dvě:

$$konst. = ma^{\overline{2}}e^2 + m'a'^{\frac{1}{2}}e'^2 + \dots , \tag{4.48}$$

$$konst. = ma^{\overline{2}}\theta^2 + m'a'^{\frac{1}{2}}\theta'^2 + \dots . \tag{4.49}$$

Do rovnice 4.48 dosadil vztah 4.47 a jemu podobné vztahy pro ostatní planety a nalezl vztah

$$\begin{aligned} konst. = & [ma^{\frac{1}{2}}(\alpha^2+\mu^2)+m'a'^{\frac{1}{2}}(\alpha'^2+\mu'^2)+...]f^{2it}+... \\ & +[ma^{\frac{1}{2}}(\gamma^2+\phi^2)+m'a'^{\frac{1}{2}}(\gamma'^2+\phi'^2)+...]t^{2r}+... \\ & +ma^{\frac{1}{2}}(h^2+k^2)+m'a'^{\frac{1}{2}}(h'^2+k'^2)+... \,. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Aby tato rovnice platila bez ohledu na hodnotu t, musí být výrazy u exponenciál a mocnin času rovny nule. Veličiny $ma^{\frac{1}{2}}, m'a'^{\frac{1}{2}}, ...$ jsou kladné, exponenciála f^{2it} se ze vztahu 4.50 eliminuje právě, když $\alpha = \alpha' = ... = \mu = \mu' = ... = 0$. Ze stejného argumentu vyplývá, že také $\gamma = \gamma' = ... = \phi = \phi' = ... = 0$. Z toho je zřejmé, že ve výrazech pro výstřednosti se nenachází žádné exponenciály ani žádné „arcs de cercles“ a $e = (h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}, e' = (h'^2+k'^2)^{\frac{1}{2}}, ...$. Podle rovnice 4.50 bude mezi nimi platit vztah

$$konst. = ma^{\frac{1}{2}}(h^2+k^2)+m'a'^{\frac{1}{2}}(h'^2+k'^2)+... \,.$$

Protože $h, k, h', k', ...$ jsou buď konstantní nebo periodické, musí být výsledný koeficient každého sinu nebo kosinu nulový. Jinými slovy, změny ve výstřednostech mohou být pouze periodické a to tak, že když se výstřednost jedné planety zvětšuje, musí výstřednost ostatních planet příslušným způsobem klesat. Podobný výsledek lze nalézt také pro tangenty sklonů planetárních drah. Výstřednosti a sklony planetárních drah proto zůstanou navždy malé. Změny ostatních dráhových parametrů jsou pro otázku stability Sluneční soustavy nepodstatné.

4.6 Analytická teorie pohybu Jupiteru a Saturnu

V květnu a červenci 1786 byla Pařížské akademii ve dvou přednáškách představena „Théorie de Jupiter et de Saturne“ [19]. Skládá se ze tří částí, první zavádí analytickou teorii pohybu Jupiteru a Saturnu a další dvě části se věnují aplikací teorie na pohyb Saturnu a Jupiteru.

Na úvod Laplace připomněl hlavní odchylky v pohybu studovaných planet a uvedl účel své práce [19, 95]:

„Doposud nebyla teorie univerzální gravitace schopna tyto jevy vysvětlit. V analytických výsledcích získaných matematiky nelze nalézt nic, co by je vysvětlilo. Zde chci ukázat, že nejde o výjimku principu gravitace, ale jsou jejím nutným důsledkem a předložit další důkaz tohoto podivuhodného principu.“

Laplaceova nová teorie bere v úvahu nerovnosti závislé na druhých a vyšších mocninách výstředností a sklonů oběžných drah. V předchozích teoriích by jejich určení bylo pracné. Laplace ale nalezl jednoduchou metodu jejich určení.

Na úvod definoval poruchovou funkci. Tentokrát ale pouze pro dvě planety s hmotnostmi m a m'.

$$\lambda = \frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Definice se oproti té uvedené v předchozí kapitole liší o faktor mm'. Pohybové rovnice se v poruchové části mírně liší o stejný faktor:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} + \frac{m'x'}{r'^3} - m'\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} + \frac{m'y'}{r'^3} - m'\frac{\partial\lambda}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} + \frac{m'z'}{r'^3} - m'\frac{\partial\lambda}{\partial z}, \end{aligned} \tag{4.51}$$

a pro m':

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{(1+m')x'}{r'^3} + \frac{mx}{r^3} - m\frac{\partial\lambda}{\partial x'}, \\ 0 &= \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{(1+m')y'}{r'^3} + \frac{my}{r^3} - m\frac{\partial\lambda}{\partial y'}, \\ 0 &= \frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{(1+m')z'}{r'^3} + \frac{mz}{r^3} - m\frac{\partial\lambda}{\partial z'}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Laplace použil poruchovou funkci k nalezení rovnic vhodných k určení poruch. Dále označil poruchovou funkci planety m rušenou m' za předpokladu počátku souřadnic vztaženém ke středu Slunce symbolem R:

$$R = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} - \lambda.$$

Po přechodu do polárních souřadnic převedl poruchovou funkci na tvar

$$R = \frac{r[1-s'^2]^{\frac{1}{2}}}{r'^2}\cos(v'-v) - \frac{1}{[r^2 - 2rr'(1-s'^2)^{\frac{1}{2}}\cos(v'-v) + r'^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.53}$$

Z rovnic 4.51 a 4.52 s využitím Keplerových zákonů Laplace odvodil rovnice:

$$0 = \frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{n^2a^3}{r^3}r\delta r + 2\int \mathbf{d}R + r\frac{\partial R}{\partial r}, \tag{4.54}$$

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{\begin{pmatrix} +2\cos v \int ndtr\sin v \int \mathbf{d}R + \cos v \int ndtr^2 \sin v \frac{\partial R}{\partial r} + \\ -2\sin v \int ndtr\cos v \int \mathbf{d}R - \sin v \int ndtr^2 \cos v \frac{\partial R}{\partial r} \end{pmatrix}}{[1-e^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.55}$$

$$\delta v = [1-e^2]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2rd\delta r + \delta rdr}{a^2ndt} + 3a\int ndt \int \mathbf{d}R + 2a\int ndtr\frac{\partial R}{\partial r}\right). \tag{4.56}$$

Právě tyto rovnice využil k nalezení poruch. Jejich využití Laplacem lze rozdělit do několika etap.

Nejprve hledal *poruchy nezávislé na druhých a vyšších mocninách výstředností*. Pro tento případ vzal vyjádření 4.53 poruchové funkce, ve kterém zanedbal vliv heliocentrické šířky. Za r, v, r', v' dosadil vyjádření

$$
\begin{aligned}
r &= a[1 + h\sin(nt+\varepsilon) + k\cos(nt+\varepsilon)],\\
v &= nt + \varepsilon + 2h\cos(nt+\varepsilon) - 2k\sin(nt+\varepsilon),\\
r' &= a'[1 + h'\sin(n't+\varepsilon') + k'\cos(n't+\varepsilon'),\\
v' &= n't + \varepsilon' + 2h'\cos(n't+\varepsilon') - 2k'\sin(n't+\varepsilon'),
\end{aligned}
$$

kde

$$h = e\sin\overline{\omega}, \quad k = e\cos\overline{\omega}, \quad h' = e'\sin\overline{\omega}', \quad k' = e'\cos\overline{\omega'}.$$

Díky Taylorově rozkladu nalezl převedl převedl vztah 4.53 pro poruchovou funkci R do tvaru:

$$
\begin{aligned}
R =& S + a\frac{\partial S}{\partial a}[h\sin(nt+\varepsilon) + k\cos(nt+\varepsilon)]\\
&- \left(S + \frac{\partial S}{\partial a}\right)[h'\sin(n't+\varepsilon) + k'\cos(n't+\varepsilon')]\\
&+ \frac{2}{n-n'}\frac{\partial S}{\partial t}[h\cos(nt+\varepsilon) - k\sin(nt+\varepsilon)]\\
&- [h'\sin(nt+\varepsilon') + k'\cos(n't+\varepsilon')],
\end{aligned}
$$

kde

$$S = \frac{1}{2}\sum_i A^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Sčítací index $i \in \mathbb{Z}$ a $A^{(-i)} = A^i$.

Laplace v rovnicích 4.54 a 4.56 položil $R = S, r = a, \delta r = au$ a $\delta v = V$. Výsledkem jsou rovnice

$$0 = \frac{d^2u}{dt^2} + n^2u + 2n^2g + \frac{n^2a^2}{2}\frac{\partial A^0}{\partial a} + \frac{n^2}{2}\sum_i\left(a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{2naA^{(i)}}{n-n'}\right)\cos W, \tag{4.57}$$

$$
\begin{aligned}
V =& 3gnt + a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}nt + \frac{2du}{ndt} - \sum_i\frac{3n^2}{2i(n-n')^2}aA^{(i)}\sin W\\
&- \sum_i\frac{na^2}{i(n-n')}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\sin W.
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

Kde $W = i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ a g je integrační konstanta pocházející z integrálu $a\int \mathbf{d}R$. Suma prochází přes všechny hodnoty indexů kromě $i = 0$. Protože je nt empiricky určený střední siderický pohyb tělesa m a rovnice 4.58 má určovat odchylky od tohoto pohybu, musí být celkový výraz úměrný nt v této rovnici nulový a

$$g = -\frac{a^2}{3}\frac{\partial A}{\partial a}.$$

Řešení diferenciální rovnice 4.58 je

$$u = \frac{a^2}{6}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \sum_i\frac{\frac{n^2a^2}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{n^3aA^{(i)}}{n-n'}}{i^2(n-n')^2 - n^2}\cos W$$

Výpočtem du/dt a dosazením do 4.58 Laplace nalezl vyjádření pro V:

$$V = \sum_i \left[\frac{n^2}{2i(n-n')^2} aA^{(i)} + \frac{n^3 a^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{2n^4 aA^{(i)}}{n-n'}}{i(n-n')^2[i^2(n-n')^2 - n^2]} \right] \sin W.$$

Tyto poruchy jsou nezávislé na výstřednostech. K určení nerovností úměrných prvním mocninám výstředností Laplace znovu využil rovnice 4.54 a 4.56. Tentokrát za δr a δv dosadil $a(u+u_1)$ a $V+V_1$. Členy au_1 a V_1 reprezentují poruchy v radiálním vektoru a délce, které jsou úměrné prvním mocninám výstředností. Tyto rovnice poté zjednodušil odečtením členů z rovnic 4.57 a 4.58 a zanedbáním členů s druhými mocninami výstředností.

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 u_1}{dt^2} + n^2 u_1 + 2n^2 \int X n dt + n^2 Y \\ & + \left[\frac{d^2 u}{dt^2} - 3n^2 u \right] [h \sin(nt+\varepsilon) + k \cos(nt+\varepsilon)] \\ & + 2n \frac{du}{dt} [h \cos(nt+\varepsilon) - k \sin(nt+\varepsilon)] \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{2du_1}{ndt} + 3 \int \int X n^2 dt^2 + 2 \int Y n dt \\ & + \frac{2du}{ndt} [h \sin(nt+\varepsilon) + k \cos(nt+\varepsilon)] \\ & + u[h \cos(nt+\varepsilon) - k \sin(nt+\varepsilon)]. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Písmeno X značí zbytek $\mathbf{d}R$ po odečtení členů nezávislých na výstřednosti a Y je zbytek $a^2 \frac{\partial R}{\partial a}$.

Řešení rovnice pro u_1 je

$$\begin{aligned} u_1 = & f \sin(nt+\varepsilon) + f' \cos(nt+\varepsilon) \\ & + \frac{1}{2}(hB + h'C) nt \cos(nt+\varepsilon) - \frac{1}{2}(kB + k'C) nt \sin(nt+\varepsilon) \\ & + \sum n^2 \left\{ \frac{hD^{(i)} + h'E^{(i)}}{[n - i(n-n')]^2 - n^2} \sin(W + nt + \varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{kD^{(i)} + k'E^{(i)}}{[n - i(n-n')]^2 - n^2} \cos(W + nt + \varepsilon) \right\}, \end{aligned}$$

kde f, f' jsou integrační konstanty, B a C jsou konstanty vyjádřené pomocí $A^{(0)}, A^{(1)}$ a jejich derivacích podle a, $D^{(i)}$ a $E^{(i)}$ jsou další konstanty závisející na i, a, n, n' a $A^{(i)}$ a jejich dervivacích podle a. Řešení rovnice pro poruchu v délce dává

$$\begin{aligned} V_1 = & -(hB + h'C) nt \sin(nt+\varepsilon) - (kB + k'C) nt \cos(nt+\varepsilon) + \\ & + n \sum_i \left\{ \frac{kF^{(i)} + k'G^{(i)}}{n - i(n-n'} \sin(W + nt + \varepsilon) - \frac{hF^{(i)} + h'G^{(i)}}{n - i(n-n'} \cos(W + nt + \varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Konstanty f a f' určil Laplace tak, že vyjádření V_1 obsahuje pouze siny a kosiny $nt + \varepsilon$, které jsou vynásobeny nt. První dva členy představují sekulární změny výstředností a délek afélií planet a e a $\overline{\varpi}$ jsou hodnoty výstřednosti a délky afélia v čase $t = 0$.

Výsledek lze zapsat, pokud (r) a (v) odpovídají nerušenému eliptickému pohybu, ve tvaru

$$r = (r) + m'a(u + u_1), \qquad v = (v) + m'(V + V_1).$$

Při výpočtu nerovností vyšších řádů můžeme nalézt sinusoidální členy s novými argumenty ale také s těmi, které se vyskytly u členů nižších řádů. Laplace uvedl zákon, kterým se výskyt těchto argumentů řídí. Řád, nebo součet exponentů mocnin výstředností nebo sklonů vyskytující se v daném členu označíme j. Pokud se daný argument sinu nebo kosinu vyskytne v některém členu řádu j, objeví se znovu v členu řádu $j+2$, poté v členu řádu $j+4$ a tak dále. Důvodem je, že každý sinusoidální argument vystupující v poruchových členech je tvořen součinem sinu nebo kosinu $W = i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ a trigonometrické řady pro nerušený radiální vektor nebo délku či šířku jedné z planet. V argumentech sinů nebo kosinů těchto řad jsou úhly $N(nt + \varepsilon - \overline{\varpi})$ nebo $N(n't + \varepsilon' - \overline{\varpi'})$, a pokud je N sudé, všechny mocniny výstřednosti nebo sklonu vyskytující se v příslušném koeficientu jsou sudé a naopak. Argument součinu sinu nebo kosinu W se sinem nebo kosinem $N(nt + \varepsilon - \overline{\varpi})$ lze vyjádřit ve tvaru

$$i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + N(nt + \varepsilon)$$

kde $i \in \mathbb{Z}$ a $N \in \mathbb{N}_0$. To umožňuje určit řád N poruchových výrazů závisející na daném úhlu. Například úhel $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon = 5(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3(nt + \varepsilon)$ odpovídá $N = 3$.

Dále se Laplace ve své práci [19] z roku 1786 věnoval *sekulárním změnám dráhových elementů Jupiteru a Saturnu.* Ta se neliší od té, kterou společně s Lagrangem vytvořili o deset let dříve.

Hlavní inovací této Laplaceovy práce v části *poruchy Jupiteru a Saturnu, které závisí na druhé a vyšších mocninách výstředností a sklonů* je nová metoda použitá k jejich určení. Podle Laplace metoda použitá v dřávější části by vedla k „*výpočtům přílišné délky. Naštěstí důvod, který nás nutí se těmito nerovnostmi zabývat nám zjednodušuje jejich určení zanedbáním nedetekovatelných veličin.*“ [19, 143]

Tentokrát Laplace začal rovnicemi 4.55 a 4.56. Předpokládal, že $\mathbf{d}R$ obsahuje sinus nebo kosinus úhlu $\alpha t + \beta$, kde α je velmi malá konstanta. Dvojitý integrál $\int ndt \int \mathbf{d}R$ obsahuje člen závislý na úhlu $\alpha t + \beta$ a má ve jmenovateli α^2. Když je $\alpha = 0$, daný člen po je integraci úměrný čtverci času. Laplace navrhnul nalézt takové členy ve vyjádření δr a δv.

V rovnici 4.55 se nachází dva dvojité integrály obsahující $\mathbf{d}R$ a to $\int ndtr \sin v \int \mathbf{d}R$ a $\int ndtr \cos v \int \mathbf{d}R$. Pro nerušený eliptický pohyb planety m platí vztahy

$$ndt = \frac{r^2 dv}{a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos v}. \tag{4.61}$$

Pomocí druhého vztahu můžeme druhý integrál upravit:

$$\int ndtr \cos v \int \mathbf{d}R = \int ndt \frac{r - a(1-e^2)}{e} \int \mathbf{d}R. \tag{4.62}$$

Použitím rozkladu $r = a\left(1 + \frac{e^2}{2} + e\chi\right)$, kde χ je trigonometrická řada, upravil integrál na

$$\int ndtr \cos v \int \mathbf{d}R = a \int ndt \left(\frac{3e}{2} + \chi\right) \int \mathbf{d}R.$$

Dále označil $\chi' = \int n\chi dt$ a pomocí integrace per partes ukázal, že

$$\int n\chi dt \int \mathbf{d}R = \chi' \int \mathbf{d}R - \int \chi' \mathbf{d}R.$$

Na pravé straně se nevyskytuje žádný dvojitý integrál $\mathbf{d}R$ a ve výrazu proto není člen, který má ve jmenovateli α^2. Původní integrál se redukuje na

$$\int ndtr\cos v \int \mathbf{d}R = \frac{3ae}{2} \int ndt \int \mathbf{d}R.$$

Použitím vztahů 4.61 na první integrál $\int ndtr\sin v \int \mathbf{d}R$ a následnou integrací per partes ukázal, že neobsahuje žádný člen s α^2 ve jmenovateli.

Ve vyjádření pro δr se Laplace omezil pouze na diskutované členy:

$$\frac{\delta r}{a} = -\frac{3ae\sin v}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \int ndt \int \mathbf{d}R.$$

Protože $\frac{ae\sin v}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{dr}{ndt}$, přejde tato rovnice na tvar

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{3}{n}\frac{dr}{dt} \int ndt \int \mathbf{d}R.$$

Pokud se ve vyjádření pro radiální vektor započítají pouze poruchové členy s α^2 ve jmenovateli, jeho tvar je

$$r = (r) + \left(\frac{dr}{ndt}\right) 3am' \int ndt \int dR,$$

kde (r) a $\left(\frac{dt}{ndt}\right)$ jsou hodnoty r a $\frac{dt}{ndt}$ u neporušeného eliptikého pohybu. Koeficient u $\left(\frac{dt}{ndt}\right)$ je přírůstek ke střednímu pohybu nt. Pro započítání příslušných poruch ve vyjádření radiálního vektoru pro neporušenou elipsu stačí ke střední délce $nt + \varepsilon$ přidat veličinu $3am' \int ndt \int \mathbf{d}R$. Podobným způsobem z rovnice 4.56 ukázal, že délka je daná vztahem

$$v = (v) + \left(\frac{dv}{ndt}\right) 3a \int ndt \int R.$$

Konstantní část rozvoje $\left(\frac{dv}{ndt}\right)$ do trigonometrické řady je jedna. Vyjádření délky v proto obsahuje člen $3am' \int ndt \int \mathbf{d}R$. Za předpokladu kdy výstřednosti a vzájemné sklony drah jsou malé, lze poruchovou funkci R rozvinout do nekonečné trigonometrické řady se členy ve tvaru $k\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}(int + i'n't + A)$, kde $i, i' \in \mathbb{Z}$. Její diferenciál vzhledem ke střednímu pohybu nt planety m má členy

$$\pm ikndt \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} \left(int + i'n't + A\right),$$

pokud pro některé dvojice i, i' je $in + i'n' = 0$, vyjádření délky obsahuje sekulární člen $(3/2)am'kn^2t^2$. Laplace zde opakoval Lagrange, že k tomu z důvodu nesouměřitelnosti středních pohybů m a m' v našem systému nedochází.

Laplace dále zajímaly případy, ve kterých je hodnota $\alpha = in + i'n'$ velmi malá. Konkrétně, protože dvojnásobek středního pohybu Jupiteru je téměř roven pětinásobku středního pohybu Saturnu, to nejprve bylo $\alpha = 5n' - 2n$. Část poruchové funkce R, která závisí na tomto úhlu Laplace vyjádřil následovně:

$$k\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - k'\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon). \tag{4.63}$$

Změny k a k' Laplace vyjádřil pouze jejich prvními derivacemi podle času a vyšší derivace zanedbal. Tímto způsobem pro Jupiter nalezl:

$$\begin{aligned} 3am' \int ndt \int \mathbf{d}R = \frac{6am'n^2}{(5n'-2n)^2} \Bigg[&\left(k' - 2\frac{(\partial k/\partial t)}{5n'-2n}\right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ &+ \left(k + 2\frac{(\partial k'/\partial t)}{5n'-2n}\right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \Bigg]. \end{aligned}$$

Podobně spočetl odpovídající nerovnost Saturnu, pouze při výpočtu $\mathbf{d}R$ derivoval podle $n't$ místo nt:

$$\begin{aligned} 3a'm \int n'dt \int \mathbf{d}R = -\frac{15a'mn'^2}{(5n'-2n)^2} \Bigg[&\left(k' - 2\frac{(\partial k/\partial t)}{5n'-2n}\right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ &+ \left(k + 2\frac{(\partial k'/\partial t)}{5n'-2n}\right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \Bigg]. \end{aligned}$$

K určení numerických hodnot k a k' zavedl ve vyjádření poruchové funkce 4.53 aproximace

$$s' = \gamma \sin(v_1' - \Pi)$$

a

$$v' = v_1' - \frac{\gamma^2}{4}\sin 2\Pi - \frac{\gamma^2}{4}\sin 2(v_1' - \Pi),$$

kde γ je tangens sklonu Saturnovy dráhy k Jupiterově a Π je úhlová vzdálenost výstupního uzlu Saturnu od přímky, od které je měřeno v. Ve jmenovateli druhého výrazu R eliminoval proměnnou v' a nahradil ji v_1' pomocí druhé z aproximací a nahrazením $(1 - s'^2)^{\frac{1}{2}}$ pomocí $\left[1 - \frac{\gamma^2}{2}\sin^2(v_1' - \Pi)\right]$. Z výsledku následně vyřadil členy, jejichž rozvoje nedávají sinus či kosinus úhlu $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$. Zbylé členy jsou:

$$-\frac{1}{[r^2 - 2rr'\cos(v_1' - v) + r'^2]^{\frac{1}{2}}}, \qquad -\frac{(rr'\gamma^2/4)\cos(v_1' + v - 2\Pi)}{[r^2 - 2rr'\cos(v_1' - v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ty rozložil do trigonometrických řad a izoloval členy, které mají v argumentu daný úhel. Jejich součet odpovídá části poruchové funkce 4.63. Takto Laplace nalezl vyjádření

$$\begin{aligned} k = {} & M^{(0)}e'^3\sin 3\varpi' + M^{(1)}e'^2 e \sin(2\varpi' + \varpi) + M^{(2)}e'e^2\sin(\varpi' + 2\varpi) \\ & + M^{(3)}e^3\sin 3\varpi + M^{(4)}e'\gamma^2\sin(2\Pi + \varpi') + M^{(5)}e\gamma^2\sin(2\Pi + \varpi), \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} k' = {} & -M^{(0)}e'^3\cos 3\varpi' - M^{(1)}e'^2 e \cos(2\varpi' + \varpi) - M^{(2)}e'e^2\cos(\varpi' + 2\varpi) \\ & - M^{(3)}e^3\cos 3\varpi - M^{(4)}e'\gamma^2\cos(2\Pi + \varpi') - M^{(5)}e\gamma^2\cos(2\Pi + \varpi). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Díky blízkosti hodnot $5n'$ a $2n$ mohou ale vzniknout také jiné nezanedbatelné členy. Laplace uvažoval takové sinusoudální argumenty, které by v případě rovnosti $5n$ a $2n$ vedly k argumentu nt pro Jupiter a $n't$ pro Saturn. Uvažované nerovnosti by přizpívaly k rovnici středu. Jedním z takových argumentů je úhel $2nt-4n't$. Při řešení rovnice 4.54 dají členy závisející na tomto úhlu ve výsledku $r'\delta r'$ výrazy ve tvaru

$$\frac{-A}{n'^2-(2n-4n')^2}\left\{\begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array}\right\}(2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon').$$

Jmenovatel zlomku se dá rozložit na součin $(5n'-2n)(2n-3n')$ a první ze součinitelů je, malý.

Aby Laplace nalezl výrazy závisející na úhlu $2nt-4n't$ a ve jmenovateli mají $5n'-2n$, použil variantu rovnice 4.54 pro Saturn a navrhl omezit R na členy závisející na úhlu $5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon$. Poté z této rovnice vynechal členy, které nemohou mít $5n'-2n$ ve jmenovateli. Rovnice se redukuje na

$$0=\frac{n'^2a'^3}{r'^3}r'\delta r'+2\int \mathbf{d}R. \tag{4.66}$$

Laplace první člen rozdělil na dvě části. V první, která závisí na úhlu $(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)$ a má ve jmenovateli $5n'-2n$, označil $r'\delta r'$ jako ρ. Ve druhé části, která závisí na úhlu $(2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon')$ a má stejný dělitel označil $\delta r'/a'$ dvojčlenem

$$P'\sin(2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon')+Q'\cos(2nt-4n't+2\varepsilon-4\varepsilon'). \tag{4.67}$$

Navíc použil substituci $r^{-2}=a'^{-2}[1-2e'\cos(n't+\varepsilon'-\varpi)]$ a rovnici 4.66 upravil na tvar

$$\begin{aligned}0=\frac{\rho}{a'^2}+e'P'\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi')\\ -e'Q'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi')+2a'\int \mathbf{d}R\end{aligned} \tag{4.68}$$

Následně se vrátil ke svým obecným rovnicím pro úhlovou hybnost a ukázal, že

$$r'^2\frac{dv'}{dt}=c'-m\int dt\frac{\partial R}{\partial v'},$$

kde $c'=[a'(1-e'^2)]^{\frac{1}{2}}$. Diferenciací této rovnice nalezl vztah:

$$\frac{d\delta v'}{dt}=-\frac{2c\delta r'}{r'^3}-\frac{1}{r'^2}dt\frac{\partial R}{\partial v'}.$$

Když R závisí pouze na členech, které mají v argumentu úhel $(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)$, je $\delta v'=3a'\int n'dt\int \mathbf{d}R$ a proto je

$$\frac{d\delta v'}{dt}=3a'n'\int \mathbf{d}R.$$

Laplace sloučil tyto poslední dvě rovnice a použil substituce 4.67 a $r'^{-3} = a'^{-3}[1 - 3e'\cos(n't + \varepsilon' - \varpi')]$. Nová rovnice omezená na členy, které mají v argumentu $(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$ má tvar

$$3a' \int \mathbf{d}R = -\frac{2\rho}{a'^2} - 3e'P' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi') + 3e'Q' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi') - a' \int n'dt \frac{\partial R}{\partial v'}.$$

K této rovnici přičetl dvojnásobek rovnice 4.68 a tím eliminoval ρ:

$$e'P' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi') - e'Q' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi') = a \int \left(\mathbf{d}R - n'dt \frac{\partial R}{\partial v'} \right).$$

Na pravé straně Laplace za R dosadil členy poruchové funkce, které mají v argumentu úhel $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$. Po zdlouhavých výpočtech nalezl vztahy pro P' a Q':

$$P' = \frac{n'a'}{5n' - 2n} \left(\frac{\partial k}{\partial e'} \cos \varpi' + \frac{\partial k'}{\partial e'} \sin \varpi' \right),$$
$$Q' = \frac{n'a'}{5n' - 2n} \left(\frac{\partial k'}{\partial e'} \cos \varpi' + \frac{\partial k}{\partial e'} \sin \varpi' \right).$$

Poruchy v radiálním vektoru Saturnu jsou

$$\delta r' = a'P' \sin(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon') + a'Q' \cos(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon').$$

Pro nalezení odpovídajících poruch v délce Laplace využil rovnici 4.56. Pro započítání členů závisejících na úhlu $(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon')$ a které mají $(5n' - 2n)$ ve jmenovateli ji stačí omezit na tvar

$$\delta v' = \frac{2r'd\delta r'}{a'^2 n'dt}.$$

Za r' zde dosadil a' a protože se $5n'$ přibližně rovná $2n$, položil $(2n - 4n')/n' = 1$. Pro poruchy v délce poté nalezl vztah

$$\delta v' = 2P' \cos(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon') - 2Q' \sin(2nt - 4n't + 2\varepsilon - 4\varepsilon').$$

Laplace s konečnou platností vyřešil stabilitu Sluneční soustavy.Tento problém pochází z dob Newtona, kdy astronomové nalezli poruchy v pohybu Jupiteru a Saturnu. Konkrétně zrychlování středního pohybu Jupiteru a zpomalování Saturnu. Na základě krátkodobých pozorování nebylo možné zjistit, zda jsou periodické, či nikoli. Laplace ukázal, že jejich příčinou je poměr oběžných dob Jupiteru a Saturnu, který je přibližně 5 : 2. Při studiu stability Sluneční soustavy zjistil, že pro střední vzdálenosti, výstřednosti a sklony drah planet platí omezující podmínky 4.48 a 4.49. V obou jsou součty výrazů pro planety konstantní.

Závěr

Pro vysvětlení nerovností v pohybech Jupiteru a Saturnu vypsala v letech 1748, 1750 a 1752 Pařížská akademie soutěže. Euler je vyhrál v letech 1748 a 1752 i přes to, že nevysvětlil kvantitativně zrychlení středního pohybu Jupiteru a zpomalení středního pohybu Saturnu. Lagrange ve svých pracech z let 1776 a 1779 naznačil, že tyto změny by mohly být dlouhoperiodické. Laplace ve svých pracech z roku 1776 ukázal, že sekulární zrychlení, nebo zpomalení středních pohybů nemůže být způsobeno jejich vzájemným gravitačním působením. Ke změně došlo, když Laplace ve své práci „*Théorie de Jupiter et de Saturne*" [19] z roku 1786 zavedl poruchy vyšších řádů, které závisí na mocninách a součinech výstředností a sklonů oběžných drah druhé, nebo vyšší dimenze. Euler a Lagrange se pro velkou složitost výpočtů nechtěli pouštět do hledání těchto poruch. Laplace ukázal cestu, jak jednoduše nalézt nezanedbatelné poruchy vyšších řádů, a tím předložil nástroj vhodný ke zdokonalení teorií pohybu a tabulek poloh všech planet. Uvedl, jak učinit rozumný odhad druhu poruch vyšších řádů, které mohou být významné a následně navrhl postup, jak tyto poruchy z diferenciálních rovnic nalézt.

Při řešení diferenciálních rovnic pohybu zaváděli matematici řadu aproximací. Euler ve svých prvních dvou pracech při řešení pohybu Jupiteru a Saturnu problém postupně řešil pro čtyři různé varianty zjednodušení. V první z nich zvolil pro obě planety kruhové dráhy s nulovým sklonem. Ve druhé zavedl výstřednost Saturnovy dráhy, zatímco ostatní předpoklady nechal beze změny. Ve třetí toto obrátil a výstřednost předpokládal u dráhy Jupiteru a Saturnovu uvažoval kruhovou. V poslední Euler zjišťoval, jak by mohl být pohyb ovlivněn nenulovým sklonem mezi kruhovými drahami. Lagrange ve svých prvních pracech na téma problému více těles předpokládal, že tělesa se pohybují po eliptických drahách málo odlišných od kruhových. Proto je také aproximoval kruhovými drahami s malými vzájemnými sklony. Eliptické dráhy Lagrange poprvé uvažoval ve své práci z roku 1776. Laplace ve svých pracech na dané téma od začátku jako základní nerušený předpokládal pohyb po elipse.

Laplace bezpochyby hodně čerpal z prací Eulera a Lagrange. Ačkoli byly Eulerovy dvě práce na téma Jupiteru a Saturnu nepřesné a obsahovaly mnoho výpočetních chyb, přinesly mnoho důležitých myšlenek. První z nich byl nápad vyjádření vzdálenosti mezi rušící a rušenou planetou pomocí trigonometrických řad a také uvedl několik metod, jak koeficienty těchto řad vypočítat. Z Lagrangeovy práce „*Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter*" [8] z roku 1766 víme, že vzhledem k pohybu afélia planetární dráhy dostaneme při obvyklém způsobu řešení diferenciálních rovnic pohybu „arcs de cercle". Tyto výrazy úměrné času jsou odstranitelné a žádný skutečný projev v pohybu planet.

Poruchová funkce, chápána jako potenciálová funkce, ze které lze odvodit síly působící mezi tělesy systému a z ní odvozené zákony zachování byla zavedená Lagrangem. Ten ji využil ve svém důkazu neměnnosti středních pohybů planet a také k nalezení integrálů pohybu, a to zachování momentu hybnosti a energie. Pro Laplace byla tato funkce velmi důležitá. Využil ji ve svém odvození zákona zachování energie díky kterému ukázal, že empiricky odvozené sekulární zrychlení pro Jupiter a Saturn jsou způsobené vzájemným gravitačním působením. Laplace také za pomocí poruchové funkce převedl diferenciální rovnice pohybu do takového tvaru, díky kterému mohl snadno nalézt významné poruchové členy.

Seznam použité literatury

[1] I. Newton: *The Principia - Mathematical Principles of Natural Philosophy.* University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1999. Translation by I. B. Cohen.

[2] I. Newton: *Theory of the Moon's Motion.* London 1702.

[3] L. Euler: *Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates in additamento.* Academiae imperialis scientiarum, Petropolitanae Anno. 1753.

[4] L. Euler: „Recherches sur la question des inégalités du movement de Saturne et de Jupiter“, Sujet proposé pour le prix de l'anné 1748, par l'Académie royale des sciences de Paris, s. 1-123.

[5] L. Euler: „Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne“ Piéce dui a remporté le Prix proposé par l'Academmie des Science, pour l'anneé 1752, vol. VII, s. 1-84

[6] L. Euler: „Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionen eorum mutuam afficiuntur“, Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Académie royale des sciences, t. VIII. Paris, 1769.

[7] L. Euler: *Opera omnia*. Birkhauser Basileae (2002)

[8] J. L. Lagrange: „Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle“ (1766), Prix de l'Académie royale des sciences de Paris, tome IX, s.63-225, Paris 1777.

[9] J.L. Lagrange: „Solution de différents problèmes de calcul intégral“, Miscellanea Taurinensia, t. III, s.471-668, 1762-1765.

[10] J. L. Lagrange: „Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires“, Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, s.5-108, 1774.

[11] J.L. Lagrange: „Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds des inclinations des orbits des planétes“, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris s.635-709, 1774.

[12] J.L. Lagrange: „Sur l'altération des moyens mouvements des planètes“, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Science et Belles - Lettres de Berlin, anné 1776, s255-271.

[13] J.L. Lagrange: „Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances.“ Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, p.401-418, 1777.

[14] P.S. Laplace: Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent. Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, (Savants étrangers), année 1773, t. VII, s.201-275, 1776.

[15] P.S. Laplace: „Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, s.325-366, 1772.

[16] P.S. Laplace: „Recherches sur le calcul intégral et sur le sysème du monde“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, anné 1772, s.369-477.

[17] M. le Chevalier D'Arcy: „Principe Géneral de Dynamique“,Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, s. 348–356, 1747.

[18] P.S. Laplace: „Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites“, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1784, s. 49-92, 1787.

[19] P.S. Laplace: „Théorie de Jupiter et de Saturne.“ Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1785, s. 95-207, 1788.

[20] C. Wilson: *The great inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace.* Archive for History of Exact Science 33, 15(1985)

[21] J. Suzuki: *A History of the Stability Problem in Celestial Mechanics from Newton to Laplace.* Ph.D. thesis, Boston University, Boston 1996.

[22] P. Schroeder: *La genèse de la loi de la gravitation universelle et la tentative de sa démonstrarion à travers le problème des trois corps et la théorie de la Lunce - de Newton à Euler et Laplace.* Thèse de doctorat, Université Otto-Friedrich à Bamberg, Bamberg 2005.

[23] J. Laskar: „Le Systéme solaire est-il stable?“, Séminaire Poincaré **XIV**, 221 (2010)

[24] M. C. Gutzwiller: „The oldest three - body problem“, Rev. Mod. Phys. **70**, 589(1998).

Obrázky

Obrázek 1.1: viz [1]

Obrázek 1.2: viz [1]

Obrázek 1.3: viz [1]

Obrázek 1.4: viz [1]

Obrázek 1.5: viz [1]

Obrázek 1.6: viz [1]

Obrázek 2.1: viz [20]