

Masarykova univerzita v Brně
Přírodovědecká fakulta

Diplomová práce

Analýza světelných křivek uhlíkových mirid

Jan Polster

Vedoucí: doc. RNDr. Zdeněk Mikulášek, CSc.

Brno 2006

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval
samostatně jen s použitím zdrojů uvedených
v seznamu použité literatury.

Jan Polster

Děkuji vedoucímu své diplomové práce, doc. Mikuláškovi, za čas, trpělivost a rady, které mi věnoval během zpracovávání tohoto úkolu.

Abstrakt:

Uhlíkové miridy jsou hvězdy asymptotické větve obrů a nacházejí se tedy v poslední etapě svého aktivního života. Vyznačují se vysokým zářivým výkonem ($\sim 1000 L_{\odot}$), anomálním chemickým složením vnějších vrstev a periodickými pulzacemi obalu, které jsou příčinou značných změn jejich zářivého výkonu. Již od dvacátých let minulého století je známo, že perioda těchto změn není stabilní a podléhá jistým krátkodobým fluktuacím. V této práci byla zpracována pozorovací data pro 30 uhlíkových mirid, převážně od vizuálních pozorovatelů (zdroje: AAVSO, AFOEV, VSOLJ). Dále byla použita i spolehlivější pozorování z družice HIPPARCOS a data z přehlídkového projektu ASAS.

Hlavním výsledkem práce jsou O-C diagramy zmíněných hvězd, získané dvěma různými metodami. První z metod se ukazuje jako vhodnější pro hvězdy s většimi rozsahy bodů O-C. Druhá metoda je iterační a při velkém rozsahu O-C (> 150 dny) její spolehlivost rapidně klesá. Jeví se však jako vhodnější v případě malých rozsahů, neboť snižuje rozptyl bodů v O-C diagramu, způsobený nepřesnostmi v pozorování. V O-C diagramech se projevují krátkodobé fluktuace periody, které jsou však do značné míry překryty výše zmíněným rozptylem. Druhým typem změn je prodloužení či zkrácení periody o několik dní, které přetrvává po několik desítek cyklů.

Dalším výsledkem této práce je zjištění „střední“ světelné křivky zkoumaných hvězd a hlavních odchylek jejich světelných změn od této křivky. Křivka hlavních odchylek ukazuje, že pro různé hvězdy nastává maximum v mírně odlišných fázích periody.

Abstract:

Carbon Miras are members of asymptotic giant branch that means they are spending the last stage of their active lives. They feature high luminosity ($\sim 1000 L_{\odot}$), anomalous chemical composition of their outer layers and periodic pulsations of their outer envelope, which cause considerable light variations. It has been known since twenties of the last century that periods of these variations are instable and underlie to some short-term fluctuations. In this thesis there were compiled observational data for 30 carbon Miras, obtained mainly by visual observers (sources: AAVSO, AFOEV, VSOLJ). The more reliable data from HIPPARCOS satellite and ASAS survey have been also used.

The main result of this thesis are O-C diagrams for the listed stars taken by two methods. First of them turns out to be more effective for stars with larger span of O-C variations. The second one is iterative and for wide span of O-C (> 150 days) its reliability drops remarkably. It appears, however, more efficient in case the span of O-C is not very large as it reduces dispersion caused by unreliability of visual observations. In O-C diagrams appear short-term period variations, which are, however, vague due to the above mentioned dispersion. The second type of changes is lengthening or shortening of light periods by several days, which may endure for several tens of cycles.

Another result of this thesis is specification of "average" lightcurve of investigated stars and the main deviations of their light changes from this curve. It could be seen from the curve of main deviations that maxima of different stars occur in slightly different phases of period.

Obsah

1	Úvod	7
2	Historie pozorování uhlíkových hvězd	8
3	AGB hvězdy	8
3.1	Vývoj hvězdy před příchodem na asymptotickou větev	9
3.2	Pobyt hvězdy na asymptotické větvi obrů	10
3.3	Atmosféry a obálky AGB hvězd	13
4	Uhlíkové hvězdy	15
4.1	Atmosféry a spektra	16
4.2	Pozorování a identifikace uhlíkových hvězd	18
4.3	Spektrální klasifikace C hvězd	19
4.4	Proměnné uhlíkové hvězdy	20
5	Miridy	21
5.1	Pulzace	21
5.2	Proměnnost mirid	23
5.3	Hvězdný vítr a ztráta hmoty	24
5.4	Světelné křivky	27
6	Použité matematické metody	28
6.1	Robustní regrese	28
6.2	Komponentová analýza	29
6.2.1	Obecný postup při použití PCA	29
7	Data	31
8	O-C diagramy	34
8.1	Metoda I	34
8.2	Metoda II	36
8.3	Výsledky	38
9	Světelné křivky	51
9.1	Proložení	51
9.2	Aplikace komponentové analýzy	59
10	Závěr	61

1 Úvod

Tématem této diplomové práce je *Analýza světelných křivek uhlíkových mirid*. V první části (kapitoly 2 až 5) je podán stručný výklad o současných znalostech, týkajících se hvězd asymptotické větve obrů a jejich konkrétních podskupin, tedy uhlíkových hvězd a mirid. Je zde nastíněna vývojová posloupnost, která vede ke vzniku fenoménu obřích uhlíkových a pulzujících proměnných hvězd a dále popis vlastností těchto objektů.

Uhlíkové hvězdy se vyznačují zvýšeným obsahem uhlíku a jemu blízkých těžších prvků (O, N, . . .). Pro vzhled jejich spektra a především vývoj je také příznačné, že nízká teplota jejich povrchových vrstev dovoluje, aby byly tyto prvky vázány v molekulách (především CO, C₂N₂, a jiné), případně aby ve hvězdných obálkách tyto molekuly kondenzovaly do prachových zrn. Hvězdné pulzace společně s tvorbou prachu způsobují silný hvězdný vítr a tím i distribuci prvků těžších než vodík a helium do mezihvězdného prostoru. Lze tedy říci, že uhlíkové hvězdy přispěly nemalým dílem i ke vzniku planety Země a jejich obyvatel.

Druhá část této práce je věnována studiu světelných křivek 30 vybraných uhlíkových mirid. Zaměřuje se především na prověření stability periody těchto proměnných hvězd metodou O-C diagramů a dále na srovnání vhodnosti dvou metod pro vytváření těchto diagramů. Ukazuje se, ve shodě s dřívějšími pracemi různých autorů, že periody uhlíkových mirid podléhají změnám. Tyto změny lze v zásadě rozdělit do dvou skupin, přičemž změny prvního typu mají charakter fluktuací periody kolem určité střední hodnoty. Je však obtížné či nemožné tyto změny určit s dostatečnou přesností vlivem nedostatečné kvality pozorovacích dat, která jsou zde převážnou většinou zastoupena vizuálními pozorováními. Dalším typem zjištěných změn je prodloužení či zkrácení periody, které přetrvává po mnoho (několik desítek) pulzačních cyklů hvězdy. Tyto změny by se daly nazvat zlomovými, neboť způsobují zlomy v křivce O-C diagramu.

Poslední kapitola druhé části práce je věnována určení jisté společné „střední“ světelné křivky zkoumaných hvězd a hlavních rozdílů mezi křivkami tohoto souboru metodou komponentové analýzy.

Tato práce tedy potvrzuje dříve známou proměnnost periody uhlíkových mirid a rozšiřuje tuto oblast především zpracováním poměrně rozsáhlého pozorovacího materiálu. Ten obsahuje data pro 30 hvězd v rozsahu cca 2–80 let, přičemž průměrný časový rozsah pozorování je 42 let.

2 Historie pozorování uhlíkových hvězd

Temná noční obloha posetá třpytícími se světly hvězd byla ve starověku a středověku vzorem dokonalosti a neměnnosti. Jen planety se po svých dokonalých drahách pohybovaly na pozadí stálic. Tak tomu bylo u národů v Evropě a Blízkém východě, jejichž kultury byly postaveny na základech kultury řecké. V jiných oblastech světa byly vedeny záznamy o podivných jevech na obloze, jako třeba objevení se nové hvězdy, ale v těchto dobách pozorování pouhým okem bylo možno zaznamenat jen jevy velmi výrazné. Prvními objevenými proměnnými hvězdami tak byly supernovy, které se objeví neočekávaně na předtím prázdném místě oblohy a po čase opět zmizí.

Druhým objeveným typem proměnných hvězd však byly *hvězdy typu Mira* či *miridy*, jimž se dostalo, vzhledem k délce jejich periody, také názvu *dlohoperiodické proměnné*. Roku 1596 pozoroval David Fabricius hvězdu o Ceti, která měla něco společného s novami. Objevila se a zase zmizela. Zvláštností však bylo, že se objevovala a mizela periodicky, Fabricius ji proto roku 1609, kdy ji znovu pozoroval, nazval Mira (Podivuhodná). Mira byla dále sledována jinými pozorovateli a roku 1667 publikoval Bouillau práci, v níž určil periodu její proměnnosti na 333 dní (současná hodnota 332 dní). To je oproti většině dalších dnes známých typů proměnných hvězd poměrně mnoho, proto se miridám a jim podobným proměnným hvězdám dostalo názvu *dlohoperiodické proměnné*.

S nástupem spektroskopie v druhé polovině 19. století bylo zjištěno, že mnohé dlohoperiodické hvězdy patří do kategorie *hvězd uhlíkových*.

Od roku 1862 prováděl Angelo Secchi spektroskopická pozorování na Vatikánské observatoři a hvězdy poté rozdělil do tří kategorií. O pět let později však pozoroval nový typ hvězd jež byly nápadně červené díky výrazným absorbním pásům v modré oblasti spektra. Pro tyto hvězdy vytvořil novou kategorii. V absorbních pásech pak rozpoznal spektrum uhlíku. Díky vysokému obsahu tohoto prvku v atmosféře byly pak hvězdy čtvrté skupiny označeny jako uhlíkové.

V polovině 20. století byl ve spektru uhlíkových hvězd identifikován zvýšený obsah izotopu uhlíku ^{13}C (Bouigue, 1954) a řada dalších prvků jako například izotop technecia ^{99}Te s poločasem rozpadu 2×10^5 roků, z čehož vyplývá, že musí existovat mechanismus, který dokáže vynést produkty jaderného hoření z centrálních oblastí hvězdy do fotosféry.

Po zavedení Hertzsprung-Russelova (H-R) diagramu byly identifikovány hvězdy *asymptotické větve obrů* (AGB = *Asymptotic Giant Branch*). V 70. letech 20. století bylo zjištěno, že uhlíkové hvězdy právě mezi tyto AGB patří.

3 AGB hvězdy

Hvězdy asymptotické větve obrů se nacházejí v pravé horní části H-R diagramu, jedná se tedy o chladné (2500-3000 K) veleobří hvězdy s vysokými zářivými výkony ($> 3000 L_{\odot}$).

V důsledku silného hvězdného větru se však postupně posouvají doleva a s tím jak odhalují své horké centrální části se stávají jádry planetárních mlhovin. Charakteristikami AGB hvězd jsou tedy poměrně nízká efektivní teplota, vysoký zářivý výkon, velký poloměr, silný hvězdný vítr a mnohdy neobvyklé chemické složení svrchních vrstev obalu hvězdy. AGB hvězdy jsou proto i důležitým zdrojem prvků těžších než vodík a helium, kterými obohacují mezihvězdnou hmotu.

Pro hvězdy o hmotnostech $0,8 - 8 M_{\odot}$ je to také poslední fáze jejich aktivního života, tedy období, kdy jsou ztráty energie vyzařováním hrazeny z energie uvolňované při termonukleárních reakcích v jádře.

3.1 Vývoj hvězdy před příchodem na asymptotickou větev

S vyčerpáním hlavního paliva, vodíku, v jádře končí hvězda svůj pobyt na hlavní posloupnosti H-R diagramu, tedy nejdelší část svého aktivního života. Jádro se nyní skládá především z „popela“ vodíkových reakcí, z helia. Po přerušení přísunu energie z jaderných reakcí se jádro smrští a zahřeje, v případě hmotnosti hvězdy menší než $4 M_{\odot}$ dojde k jeho elektronové degeneraci. Vlivem zvýšení teploty dojde k zažehnutí vodíkových reakcí ve slupce okolo jádra a tím hvězda dostane nový zdroj energie v okolí centra. Tyto procesy, smrštění jádra a zažehnutí vodíkových reakcí v jeho okolí, jsou zdrojem velkého množství zářivé energie a vysoký tlak záření způsobí expanzi vnějších vrstev hvězdy. Hvězda řídne a chladne, ale díky zvýšení poloměru ($\sim 100 R_{\star}$) je schopna udržovat zářivý výkon v řádu tisícinásobků svého zářivého výkonu na hlavní posloupnosti. Hvězda se na H-R diagramu přesune na větev červných obrů (*RGB = Red Giant branch*).

Teplotní gradient ve hvězdě je dán vztahem

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\kappa}F_r\rho}{16\sigma T^3},$$

kde $\bar{\kappa}$ je střední opacita a σ Stefan-Boltzmannova konstanta. Celkový teplotní gradient ve hvězdě s expanzí poklesne. Poklesne však i gradient tlaku a zejména v blízkém okolí hořící vodíkové vrstvy je tok záření F_r vysoký natolik, že je splněna podmínka konvekce

$$\frac{dT}{dr} \geq \left(1 - \frac{c_p}{c_v}\right) \frac{P}{T} \frac{dP}{dr}.$$

Spodní části konvektivní vrstvy zasahují částečně i do slupky, kde probíhají jaderné reakce. Konvektivní proudy tak vynášejí produkty jaderného hoření k povrchu a naopak přivádějí nové palivo pro jaderné reakce do slupky okolo jádra. Dochází tak k tzv. *prvnímu promíchávání* (prohrabávání, bagrování; anglicky *dredge up*). Konvekce je zodpovědná i za výraznou ztrátu hmoty hvězdným větrem.

Podobně jako u hvězd hlavní posloupnosti se zvyšujícím se obsahem helia v oblasti hoření vodíku se tato oblast zahušťuje, roste její teplota a zářivý výkon. Zvyšování teploty

slupky má samozřejmě vliv i na jádro, které se taktéž zahřívá. Po překročení teploty 10^8 K se v jádře zažehnou heliové reakce, při kterých vzniká uhlík, případně kyslík (Salpeterova reakce: $3 \text{ } ^4\text{He} \rightarrow \text{ } ^{12}\text{C} + \gamma$). Jedná-li se o hvězdu s hmotností $\leq 4 M_{\odot}$, a tedy s degenerovaným jádrem, dochází k tzv. *heliovému záblesku* při němž se naráz vznítí heliové jádro a sejme se degenerace. Jádro expanduje a během heliového záblesku se jeho výkon zvýší až na $\sim 10^{10} L_{\odot}$.

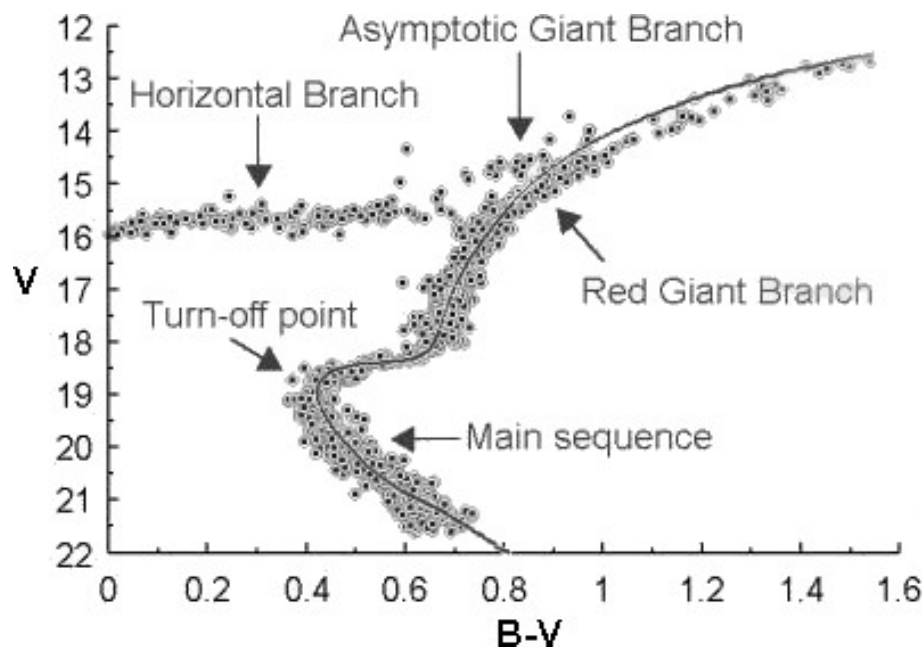
Expanze jádra přesune slupku hořícího vodíku dále od centra do oblasti s nižší teplotou, což podstatně sníží její výkon. Protože však vodíkové reakce jsou nejvýznamnějším zdrojem zářivé energie hvězdy, poklesne její celkový zářivý výkon, hvězda se smrští na několiknásobek své velikosti na hlavní posloupnosti a její povrchová efektivní teplota stoupne. Stane se tak oranžovým či žlutým obrem a přesouvá se na *horizontální větev obrů* (*HB = horizontal branch*).

Heliové reakce nejsou oproti vodíkovým příliš účinné, hradí však podstatnou část vyzařené energie hvězdy a za vysoké teploty v jádře probíhají vysokým tempem. Po poměrně krátké době se tak vytvoří jádro z produktů heliových reakcí. Obsahuje především C, N, O a Ne a pro hvězdy o počáteční hmotnosti $\leq 11 M_{\odot}$ je elektronově degenerované. Heliové reakce nyní probíhají ve slupce kolem jádra. Se vznikem prvků o vyšší atomové hmotnosti se jádro opět zahustilo a zahřálo, vrstva hořícího vodíku se tak opět dostala do oblasti s vyšší teplotou a stoupl její výkon. Hvězda má nyní $\sim 10^4$ krát vyšší výkon než měla na hlavní posloupnosti, na což reaguje opět expanzí a zchladnutím obalu. Dosahuje poloměru $\sim 200 R_{\odot}$ a stává opět červeným obrem. Na H-R diagramu se nyní vyskytuje na asymptotické větvi obrů.

3.2 Pobyť hvězdy na asymptotické větvi obrů

Na asymptotické větvi obrů se nacházejí hvězdy o poměrně nízké teplotě a vysokém poloměru. V pozdějších fázích vývoje v jejich atmosférách dochází ke změnám poměru těžších prvků, což vede ke vzniku uhlíkových hvězd. Některé z AGB hvězd jsou také periodickými či nepravidelnými proměnnými. Dále jsou charakterizovány silným hvězdným větrem, který způsobuje ztrátu hmoty $\sim 10^{-7} M_{\odot}/\text{rok}$, někdy krátkodobě až $10^{-4} M_{\odot}/\text{rok}$ (*super wind*).

Zdrojem energie AGB hvězd je slupkové hoření vodíku a helia v okolí jádra. Okolo degenerovaného uhlíko-kyslíkového jádra se nachází vrstva jaderně hořícího helia, ve které probíhá při teplotě kolem 10^8 K 3α -proces. O něco dále od centra, kde teplota již klesá pod zápalnou teplotu helia, se nachází vrstva neaktivního helia. Ta odděluje hořící helium od vrstvy hořícího vodíku. Nad vodíkovou vrstvou se již nachází neaktivní vodíkový obal o poloměru kolem 1 AU, který plynule přechází v okolohvězdnou obálku o poloměru několika AU. Díky silnému hvězdnému větru se vodíkový obal hvězdy postupně rozpíná, zředuje a kolem hvězdy se tvoří řídkší a chladnější obálka. V důsledku toho je ve svrchních



Obr. 1: H-R diagram kulové hvězdokupy M3. Převzato ze stránky <http://www.astro.livjm.ac.uk/courses/phys134/hrdiag.html>

vrstvách nízká hustota a gradient teploty. Z toho vyplývá, že pozorovaný poloměr hvězdy velmi závisí na vlnové délce záření, které detekujeme. Zpravidla se poloměry AGB hvězd pohybují v řádu ~ 100 až $\sim 1000 R_{\odot}$.

Hvězdy asymptotické větve obrů procházejí několika vývojovými fázemi. Zpočátku se nacházejí ve stadiu *E-AGB* (*Early AGB*). V tomto stadiu je hlavním zdrojem energie pro hvězdu spalování helia, které probíhá za vysokých teplot a tedy vysokou rychlostí ($\sim \rho^2 T^{30}$). U hvězd s hmotností $\geq 4 M_{\odot}$ je tok záření dost vysoký na to, aby konvektivní proudy sestoupily z vyšších vrstev hvězdy až do vodíkové slupky. Dochází tak k *druhému promíchávání*, které vynáší do atmosféry produkty CNO cyklu.

Helium vyniklé proton-protonovým řetězcem, případně CNO cyklem, se pomalu ukládá pod vodíkovou slupku. Toto množství ukládaného materiálu je jen desetinou hmotnosti potřebné k tomu, aby reakce v heliové slupce probíhaly stabilně. Podle Ibena et al. (1989) je množství ukládaného helia od $\sim 4 \cdot 10^{-7} M_{\odot}/\text{rok}$ (pro hmotnost jádra $M_c \sim 0,6 M_{\odot}$) po $\sim 4 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$ (pro $M_c \sim 1,1 M_{\odot}$). Helium ve slupce se tedy záhy vyčerpá a v energetice hvězdy převládá spalování vodíku. Heliová slupka je pak ukládáním nového materiálu pomalu stlačována a zahřívána. Po překročení zápalné teploty 10^8 K dojde k opětovnému nastartování heliových reakcí. Tento proces má velmi dramatický průběh (výkon vzroste až na $10^7 - 10^8 L_{\odot}$). Hovoříme o tzv. *termálním pulsu* (*thermal pulse, helium shell flash*) (Schwarzschild a Harm, 1965). Vrstva helia se rozpne, přesune vodíkovou vrstvu do vyšších, chladnějších oblastí hvězdy a získá tím opět výsadní

postavení v energetice hvězdy. Po vyčerpání helia ve slupce se situace několikrát opakuje v periodě $\sim 5 \times 10^4 - 10^5$ let (Wood a Vassiliadis, 1993). Dobu mezi pulsy t_{intp} lze odhadnout ze vztahu (Iben, 1991)

$$t_{\text{intp}} \sim \frac{1300}{\text{rok}} \left(\frac{M_{\text{OC}}}{M_{\odot}} \right)^{10},$$

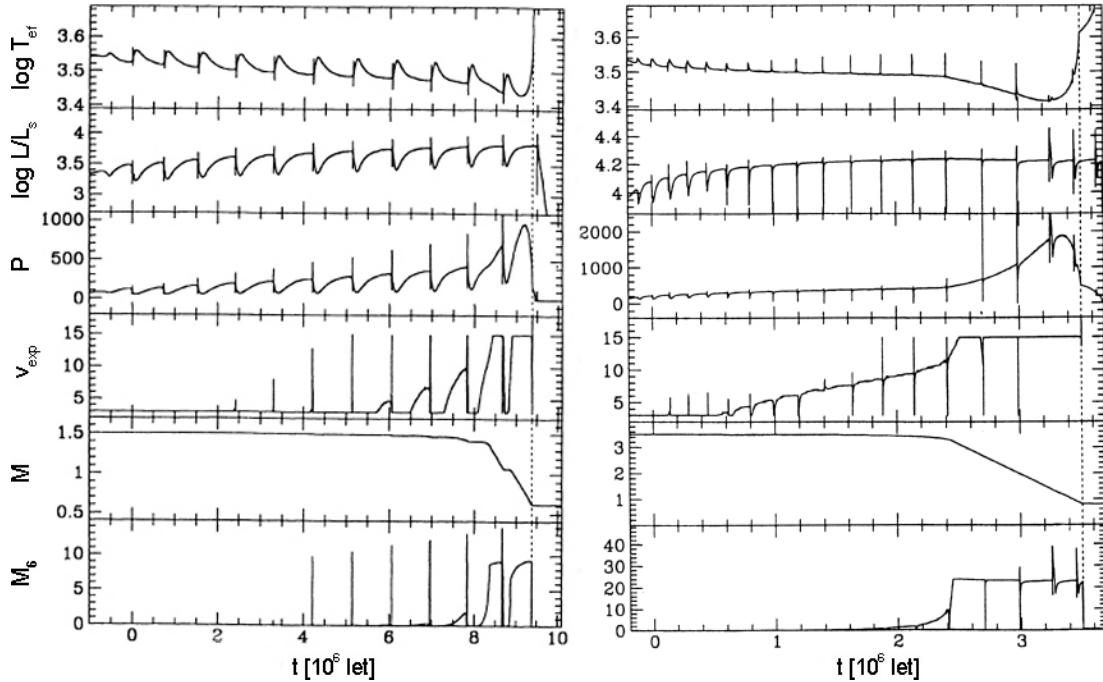
kde M_{OC} je hmotnost jádra. Hvězda tak vstoupila do fáze termálních pulsů – *TP-AGB*.

Termální pulsy svým vysokým výdejem energie způsobují, že vznikne konvektivní vrstva mezi helivou a vodíkovou slupkou. Uhlík ^{12}C vzniklý spalováním helia tak obohacuje vodíkovou slupku až na 20% hmotnosti (Iben, 1991) a následně je vynášen vnějšími konvektivními proudy do atmosférických vrstev hvězdy. Atomy kyslíku ^{16}O jsou z níra transportovány stejným mechanismem, je jich však o mnoho méně než atomů uhlíku, který tak začne po určitém počtu termálních pulsů převažovat. K tomu přispívá i to, že se intenzita pulsů postupně zvyšuje, přičemž u prvních několika roste lineárně (Boothroyd a Sackmann, 1988). Produkty termonukleárních reakcí jsou tedy vynášeny k povrchu a dochází tak k *třetímu promíchávání*. Protože se pulsy opakují, atmosféra hvězdy je obohacována o těžší prvky, zejména ^{12}C , několikrát a může tak dojít ke vzniku uhlíkové hvězdy.

Fáze termálních pulsů je charakterizována periodickými zjasněními a zvýšenou ztrátou hmoty díky rázovým vlnám způsobeným pulsy. V závěru fáze termálních pulsů se hvězda stává pulsující proměnnou a ztráta hmoty je velmi dramatická (až $10^{-4} M_{\odot}/\text{rok}$), neboť pulsace vypuzují ve vlnách látku z obalu do okolí hvězdy. To je umožněno mimo jiné nízkým gravitačním zrychlením ve fotosféře. Takto hvězda ztratí převážnou část svého obalu a dá vzniknout planetární mlhovině, v jejímž centru zbude žhavé ($\sim 10^7$ K) jádro, která se posléze stane hustým ($\sim 10^9$ kg/m³) chladnoucím bílým trpaslíkem. Bílý trpaslík již nemá vlastní zdroj energie. Pasivně tak vyzařováním ztrácí energii, nashromážděnou během svého aktivního života, kdy se původní hvězda buď smršťovala či v ní probíhaly termonukleární reakce

Toto je konec aktivního života hvězdy o hmotnosti $0,8 - 8 M_{\odot}$. Méně hmotné hvězdy nedokončí spalování vodíku v konečném čase. Hvězdy hmotnější dosáhnou dostatečné centrální teploty na to, aby jejich jádro přešlo ze stavu elektronové degenerace opět do stavu ideálního plynu a probíhaly zde další reakce, které dají vznik těžším prvkům až po železo. Tyto hvězdy pak končí jako supernovy typu II či Ib v okamžiku, kdy hmotnost jejich železného jádra přesáhne Chandrasekharovu mez $\approx 1,4 M_{\odot}$ a zhroutí se za vzniku neutronové hvězdy či černé díry.

Hvězdy s přibližně sluneční počáteční hmotností dávají vzniknout bílým trpaslíkům o hmotnosti $\sim 0,6 M_{\odot}$, hmotnější hvězdy pak končí s hmotností do $\sim 1,1 M_{\odot}$. Někdy může dojít ke vzniku kyslíkoneonového (ONe) bílého trpaslíka o hmotnosti $\sim 1,38 M_{\odot}$ z hvězdy s počáteční hmotností $8 - 10 M_{\odot}$ (Iben, 1991).



Obr. 2: Model vývoje hvězdy ve fázi TP–AGB podle Vassiliadis a Wood (1993). Metalicita $Z = 0,008$, hmotnostní podíl helia $Y = 0,25$, počáteční hmotnost – vlevo: $M = 1,5 M_{\odot}$, vpravo: $M = 3,5 M_{\odot}$. Model předpokládá maximální expanzní rychlost obálky $v_{exp} \leq 15 \text{ km s}^{-1}$. Zřetelně se zde rýsují termální pulsy a rozhodující ztráta hmoty v poslední části TP–AGB fáze hvězdy. M_6 - ztráta hmoty v $10^{-6} M_{\odot}/\text{rok}$, M - hmotnost v M_{\odot} , v_{exp} - rychlost větru v km/s, P - perioda ve dnech.

Časové škály pobytu hvězdy v jednotlivých zde popsaných fázích jsou podstatně nižší než doba pobytu na hlavní posloupnosti ($MS = \text{main sequence}$) a také se stále zkracují s tím, jak v centrálních oblastech roste teplota a rychlost reakcí se zvyšuje. Hvězda také pod vodíkovou slupkou přechází na méně energeticky vydatné palivo, které se rychleji vyčerpává. Tab. 1 ukazuje délku jednotlivých fází podle modelu Vassiliadise a Wooda (1993).

3.3 Atmosféry a obálky AGB hvězd

V důsledku promíchávání hvězdy jsou do atmosféry z centrálních vrstev vynášeny těžší prvky, které obohacují chemické složení okrajových částí hvězdy. Do atmosféry tak pronikají izotopy ^{14}N a ^{13}C , které vznikají během CNO cyklu a dále především uhlík ^{12}C , čímž se mění poměry izotopů ve spektru hvězdy. Dále je atmosféra obohacována o těžší prvky, které jsou produktem s-procesu, tedy zachytávání pomalých neutronů, vzniklé především

Tab. 1: Časové škály jednotlivých fází vývoje pro hvězdy se sluneční metalicitou

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{t_{\text{MS}}}{\text{rok}}$	$\frac{t_{\text{RGB}}}{\text{rok}}$	$\frac{t_{\text{HB}}}{\text{rok}}$	$\frac{t_{\text{E-AGB}}}{\text{rok}}$	$\frac{t_{\text{TP-AGB}}}{\text{rok}}$	$\frac{M_{\text{WD}}}{M_{\odot}}$
1,0	$1,1 \times 10^{10}$	$3,6 \times 10^9$	$1,4 \times 10^8$	$1,2 \times 10^7$	$4,9 \times 10^5$	0,57
2,5	$6,2 \times 10^8$	$1,8 \times 10^8$	$2,8 \times 10^8$	$1,1 \times 10^7$	$2,2 \times 10^6$	0,67
5,0	$9,6 \times 10^7$	$2,9 \times 10^6$	$2,4 \times 10^7$	$1,1 \times 10^6$	$2,6 \times 10^5$	0,89

M je počáteční hmotnost, t_{xxx} časy výskytu v jednotlivých fázích a M_{WD} hmotnost vzniklého bílého trpaslíka.

během termálního pulsu. Jedná se např. o Sr, Zr, Ba, Po, Tc (např. Jørgensen, 1993).

Z povrchu AGB hvězd vane silný hvězdný vítr, který způsobuje ztrátu hmoty v rozsahu $10^{-7} M_{\odot}$ až $10^{-4} M_{\odot}$. Rychlosti větru jsou však poměrně nízké (zhruba do 15 km/s) (Vassiliadis a Woods, 1993). Ztrátu hmoty hvězdným větrem udává klasický Reimersův vztah

$$\dot{M} = \eta 4 \times 10^{-13} \frac{LR}{M}$$

v hmotnostech Slunce za rok. L , R a M jsou v jednotkách Slunce. Tento vztah je však pouze aproximací a pro výpočty modelů (např. výsledky v Tab. 2) (Groenewegen et al., 1995) se používají jeho zpřesněné verze.

Vítr vanoucí z povrchu AGB hvězd způsobuje vznik rozsáhlých hvězdných obálek a na konci období TP-AGB ve fázi super větru i vznik planetární mlhoviny.

Ve vrstvách obálky bližších hvězdě (kolem $2 R_{\star}$) se vyskytují jednodušší dvou- a třiatomové molekuly, jako např. TiO, VO, CO, C₂, C₃ či H₂O. Výše pak i složitější molekuly, u uhlíkových hvězd vznikají organické molekuly jako uhlíkové řetězce či aromatické uhlovodíky. Byly zaznamenány i částičky grafitu.

Teplota v obálce klesá úměrně $r^{-1/2}$. Ve vzdálenosti cca $10 R_{\star}$ (Anandarao et al., 1992) kde teplota klesne přibližně na 1000 K dojde ke kondenzaci prachových zrn. Prach má podstatný vliv na pozorované záření hvězdy. Pohlcuje záření přicházející od hvězdy, a zpětně jej vyzáří v infračerveném oboru (65% záření okolo $\lambda = 11 \mu\text{m}$ pochází z prachové vrstvy). Pohlcené fotony také předají prachovým částicím svou hybnost. Prach se tak urychluje a strhává s sebou i okolní plynné složky obálky – vzniká hvězdný vítr poháněný rozptylem záření na prachových částicích.

Struktura hvězdy od fotosféry výše tedy vypadá zhruba takto: Nejnižší se nachází fotosféra, v níž vzniká atomové absorpční spektrum. V pulsujících proměnných hvězdách dochází k průchodům rázových vln atmosférou a disipaci jejich energie. Je tedy možná existence chromosféry, zahříváné právě přeměnou energie rázových vln. Dále je zde „molekulová fotosféra“, vytvářející absorpční molekulová spektra. Nad touto vrstvou

se nachází oblast, která září rádiově díky volně-volným přechodům elektronů. Nejvyšší podíl na přechodech elektronů mají zřejmě záporný iont vodíku H^- a molekula H_2^- . Výše již může docházet ke kondenzaci prachových zrn a vzniku SiO maserů (Reid a Menten, 1997). Dalšími maserovými zářiči jsou molekuly H_2O a OH (Chapman et al., 1995).

Energie fotonů pohlcených prachem je zpětně vyzářena v infračerveném oboru spektra a AGB hvězdy s obálkami se tak stávají výraznými IČ zdroji, jež byly ve velkém množství pozorovány družicemi IRAS či 2MASS. Hvězdy s rozsáhlými silnými obálkami se pak stávají OH/IR hvězdami. Zatím není jasné zda se OH/IR hvězdy vyvíjejí z AGB hvězd nebo červených veleobrů. Prach kolem hvězdy se pravděpodobně vytváří vlivem nehomogenit ve vyvrhovaném materiálu a oblaka takto vzniklého prachu pak mohou v určitém směru na jistou dobu zastínit hvězdu a způsobit tak výrazný pokles pozorované jasnosti. To je pravděpodobně příčinou proměnnosti hvězd typu R CrB.

Obálky také nemusí být sféricky symetrické. Mohou být asymetrické či mít spíše osovou symetrii způsobenou např. průvodcem hvězdy v binárním systému (Groenewegen, 1996), případně mohou být doprovázeny různými bipolárními výtrysky.

4 Uhlíkové hvězdy

Běžný poměr hmotnostního zastoupení uhlíku ke kyslíku v látce hvězdné atmosféry (C/O) činí 0,4 a odpovídá tak složení původní zárodečné mlhoviny. To je dáno tím, že obal hvězdy nemá dostatečnou teplotu na změnu svého chemického složení termonukleárními procesy a těžší prvky v jádře jsou po většinu doby trvání hvězdy nedostupné. To se však mění v závěrečné fázi pobytu hvězdy na asymptotické větvi obrů. Termální pulsy pohánějí mohutné konvektivní proudy, které zasahují od heliové slupky kolem jádra do vrstvy hořícího vodíku, kde pak přebírá štafetu konvekce ve vodíkovém obalu hvězdy a vynáší produkty heliových reakcí (především ^{12}C) až do fotosféry. Takto je materiál hvězdy promícháván a její atmosféra se pak obohacuje zejména o atomy uhlíku a helia. Podle měření hvězd ve Velkém Magelanově mračnu vynášený materiál obsahuje 2% O 22% C a 76% He (Boothroyd a Sackmann, 1988). Tak se po několika tepelných pulsech poměr C/O zvýší na hodnotu větší než jedna. Takovou hvězdu pak označujeme jako *hvězdu uhlíkovou* či *hvězdu bohatou na uhlík*.

Fází uhlíkové hvězdy projdou všechny stálice o počátečních hmotnostech v rozsahu cca $1,5 M_{\odot}$ až $4 M_{\odot}$ (Groenewegen, 1995; Dušek 2002). Hvězdy o počáteční hmotnosti $1,55 M_{\odot}$ se dostanou do stadia uhlíkové hvězdy až s posledním termálním pulsem. U hvězd hmotnějších než $4 M_{\odot}$ probíhá proces nazvaný *hot bottom burning*. Spočívá v tom, že konvektivní vrstva dosahuje mezi termálními pulsy až do slupky, v níž se prostřednictvím CNO cyklu přeměňuje vodík na helium. Do svrchních vrstev jsou vynášeny meziproducty jaderné reakce ^{14}N a ^{13}C což způsobuje nárůst poměru $^{14}N/^{12}C$ a naopak pokles $^{12}C/^{16}O$. Tak je zabráněno hvězdě stát se uhlíkovou.

Tab. 2: Doby pobytu hvězdy v jednotlivých fázích M, S a C. Převzato z Groenewegen et al. (1995), model Blöcker a Schönberner

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{t_M}{10^3 \text{ let}}$	$\frac{t_S}{10^3 \text{ let}}$	$\frac{t_C}{10^3 \text{ let}}$	N_c	N_{tot}
1,0	232	0	0	-	3
1,55	355	0	37	6	6
2,0	352	91	367	7	10
3,0	437	185	1667	9	31
4,0	55	83	183	11	22
5,0	140	0	0	-	29

kde M je počáteční hmotnost, t_x doby pobytu v jednotlivých fázích, N_c počet termálních pulsů potřebných pro přeměnu v uhlíkovou hvězdu a N_{tot} celkový počet pulsů.

Pro uhlíkové hvězdy byl zaveden speciální spektrální typ C .

Uhlíkovou se hvězda stává postupně. Dokud se poměr C/O pohybuje v oblasti mezi nulou a jedničkou, jedná se o klasickou hvězdu spektrálního typu M (či u teplejších K) a nazývá se *kyslíkovou AGB hvězdou*. Kyslík je zde vázán především v molekulách, z nichž ve spektru dominují pásy H_2O , TiO a CO . Mohou se vyskytovat i další jednoduché sloučeniny kyslíku, např. VO či ZrO . Všechn uhlík je zde vázán v molekule CO , která má poměrně velkou disociační energii 11,09 eV (Dušek, 2002). Do třídy M-AGB hvězd patří i typová hvězda části dlouhoperiodických proměnných, mirid, o Ceti (Mira).

Přechodným typem je S . Vyskytuje se poměrně vzácně, protože hvězda nepobývá v této fázi dlouho a záhy se stává uhlíkovou. Atmosféry S hvězd jsou bohaté na prvky vznikající s -procesy a poměrné zastoupení uhlíku a kyslíku je zde $C/O \sim 1$. Ve spektru se vyskytují silné pásy ZrO , často doplněné TiO .

4.1 Atmosféry a spektra

Spektra uhlíkových hvězd jsou charakterizována množstvím atomárních čar a především molekulárních pásů. Často dochází k blendování, což znamená, že křídla čar se navzájem překrývají a pozorovatelné bývá pouze jádro čáry. Je proto obtížné a často nemožné určit úroveň kontinua a ekvivalentní šířky čar.

Kontinuum ve viditelné a infračervené oblasti je vytvářeno především fotoionizací negativního iontu vodíku H^- . Jeho disociační energie je 0,75 eV, ve spektru se tedy projevuje na vlnových délkách $\lambda < 1650$ nm. U horkých C hvězd hraje v ultrafialové oblasti roli i fotoionizace neutrálního vodíku, případně některých těžších prvků. Přispívat může i fotodisociace nejrozšířenějších molekul. Ve vnějších vrstvách atmosféry se projevuje

Thompsonův rozptyl na volných elektronech, Rayleighův rozptyl na náhodných shlucích molekul ($\sim \lambda^{-4}$) a Mieův rozptyl na prachových částicích ($\sim \lambda^{-1}$).

Hlavním stavebním prvkem atmosféry uhlíkové hvězdy je, stejně jako u jiných hvězd, vodík a nejrozšířenější molekulou je H_2 . Navzdory své nižší koncentraci však hrají důležitou roli ve spektru další, těžší, prvky, o něž byla hvězdná atmosféra obohacena během předešlých cyklů třetího promíchávání. Jsou to především C, N a O, které se při teplotách $T_{\text{ef}} \leq 3500$ K začínají slučovat v molekuly. Nejdříve a v nejhojnějším počtu se vždy začnou vyskytovat molekuly s největší disociační energií. Především proto jsou nejrozšířenější molekuly CO a se snižující se teplotou narůstá množství především CN, C_2 , C_3 , HCN a C_2H_2 (Dušek, 2002). I při své menší koncentraci dominují ve spektru nad vodíkem, neboť jejich absorpční koeficienty jsou podstatně vyšší než u H_2 .

U proměnných uhlíkových hvězd se intenzity molekulárních pásů mění vlivem změny efektivní teploty. Byla nalezena korelace ve změně intenzit CN, C_2 a C_3 , k čemuž se přidává antikorelace s molekulou CO (Bergeat et al., 1976). Bujarrabal a Cernicharo (1994) našli možnou korelaci mezi množstvím HCN a CS ve fotosféře a přilehlých vrstvách obálky.

Z molekulárních pásů se zde setkáme např. ve viditelné a modré části spektra se Swanovým systémem $A^3\Pi_g - X'^3\Pi_u$, v infračervené oblasti Ballikovým-Ramsayovým systémem $A'^3\Sigma_g^- - X'^3\Pi_u$ molekuly C_2 či s fialovým systémem molekuly CN, jenž odpovídá přechodu $B_2\Sigma^+ - X_2\Sigma^2$.

Intenzivní depresi na vlnových délkách 380-400 nm a pravděpodobně i kolem $5 \mu\text{m}$ způsobuje molekula C_3 . Na depresi ve fialové oblasti se podílí molekula SiC_2 , případně ve vyšších vrstvách kondenzáty SiC (Dušek, 2002).

Podle atlasu čar Barnbaumové (1994) se ve všech uhlíkových hvězdách vyskytují čáry Na I (589,59 a 588,99 nm), K I (769,89 nm), Mg Ib (518,36 nm) a Li I (670,78 nm). Dále se dají najít čáry Sr, Y, Zr, Ba a dalších produktů s-procesu. Vyskytují se hvězdy s intenzivní čarou Ba II (455,4 nm) - *baryové* a také se sérií čar Tc I - *techneciové*.

U hvězd s počáteční hmotností $4 M_{\odot}$ a vyšší probíhá ve vodíkové slupce CNO cyklus a jeho meziprodukty (především ^{14}N a ^{13}C) jsou nejhlubšími konvektivními proudy vynášeny do atmosféry. Tyto proudy pravděpodobně napomáhají i vzniku *lithiových* ($\log \epsilon(Li) > 1$)¹ a *superlithiových* hvězd ($\log \epsilon(Li) > 4$). Abia a Isern (1997, 2000) pozorovali vybraný vzorek uhlíkových hvězd v červeném pásu ^{13}CN kolem 800 nm a v čáře Li I (670,8 nm). Zjistili antikorelaci mezi obsahem Li a poměrem $^{12}C/^{13}C$. Vysoký obsah Li se pozoruje i u některých málo hmotných hvězd ($\leq 2 M_{\odot}$). To podle Abia a Isern (2000) pravděpodobně umožňuje *cool bottom processing*.

V důsledku úniku hmoty z atmosféry se mohou vyskytovat u některých čar P-Cygni profily. Tyto čáry vznikají v různých slupkách s různou rychlostí vzhledem k pozorovateli. Dále vznikají rozsáhlé okolohvězdné obálky z vyvrženého plynu a zkondenzovaných

¹ $\log \epsilon(Li) = \log(Li/H) + 12$

prachových zrn. Z vnějších vrstev obálek jsou pozorovány emise SiO a CS, pro vnitřní části je charakteristická emise molekuly CN (Bujarrabal a Cernicharo, 1994). Obálky vznikají jak ve fázi kyslíkové hvězdy, tak i později, kdy se hvězda stane uhlíkovou. Může tak dojít ke vzniku vnější oddělené obálky s převahou kyslíku a vnitřní uhlíkové.

Na rozdíl od hvězd kyslíkových, v obálkách uhlíkových hvězd dochází k formování prachových zrn za vyšší teploty. Ke kondenzaci začíná docházet zhruba při teplotě $T \sim 1900$ K. U kyslíkových hvězd prach stěží vzniká při teplotě vyšší než $T \sim 1000$ K. Uhlíkové hvězdy jsou pak prachem více zacloněny, neboť začne vznikat dříve, v nižších a teplejších vrstvách obálky (Lewis, 1989).

4.2 Pozorování a identifikace uhlíkových hvězd

Jak bylo zmíněno na počátku kapitoly, uhlíkové hvězdy jsou definovány tím, že v jejich atmosférách je poměr uhlíku ku kyslíku větší než jedna. Oba prvky jsou však z velké části vázány v různých molekulách, proto není zjištění tohoto poměru triviálním úkolem. Přesnost určení ekvivalentních šířek čar je navíc limitována častým blendováním. Tomuto efektu lze do jisté míry čelit pozorováním v infračervené oblasti, kde je spektrum o něco méně „husté“ a k překryvům čar dochází méně často.

Vzhledem ke skutečnosti, že značné množství uhlíku obsahují molekuly, měří se celkový obsah uhlíku nepřímo. Ve spektru jsou změřeny intenzity čar a pásů vybrané molekuly či molekul a z výsledku se přibližně určí celkový podíl uhlíku ve hvězdné atmosféře. Ohnaka et al. (2000) za tímto účelem analyzovali ve spektrech Phillipsův systém molekuly C_2 , vzniklý přechodem $A^1\Pi - X^1\Sigma^+$. Dále pozorovali sérii čar prvního vyššího harmonického modu molekuly CO, což umožňuje vhléd do vnějších vrstev atmosféry, případně vnitřní obálky hvězdy. Cerny et al. (1978) zkoumali červený systém $A^2\Pi - X^2\Sigma^+$ molekuly CN, přičemž se zaměřili také na rozlišení množství ^{12}CN a ^{13}CN .

Má-li hvězda velký poměr $^{12}C/^{13}C$ (~ 4), je označována písmenem J . Normální hodnota J parametru se pohybuje v řádu desítek. Hlavy pásů molekul $^{12}C^{13}C$, $^{13}C^{13}C$ jsou vůči sobě posunuty o 0,7 nm, což lze zaregistrovat a určit přítomnost ^{13}C již při nízkém obsahu tohoto izotopu.

U uhlíkových hvězd také pozorujeme vysoký barevný index ($B-V$) a ($U-B$), který je vždy větší než 1 mag. To je dáno jednak nízkou efektivní teplotou a také fialovou depresí, způsobenou molekulárními pásy, zejména C_3 a SiC_2 . Na oslabení modré části spektra se také významně podílí okolohvězdné obálky, jejichž hmotnost i rozsah postupně narůstá s délkou pobytu hvězdy na AGB. Hvězdy se tak postupně stávají výraznými infračervenými zdroji na úkor viditelného záření, které může být téměř úplně zastíněno.

Nabývá tak na důležitosti pozorování v infračervené oblasti spektra. Pozorování se provádí např. ve filtrech I (0,8 μm), J (1,25 μm), H (1,65 μm), K (2,2 μm), L (3,5 μm) a M (4,8 μm) Johnsonova systému. Pro identifikaci infračervených zdrojů slouží např.

pozorování družice IRAS (ve filtrech centrovaných na 12 μm , 25 μm , 60 μm , 100 μm), 2MASS (ve filtrech J, H a K_s (2,15 μm)) či programu DENIS (jižní obloha, filtry I, J a K_s).

4.3 Spektrální klasifikace C hvězd

V současné době se používají dva hlavní typy klasifikace C hvězd. Prvním je tzv. *R-N systém* (Shane 1928) a druhým *KM-klasifikace* (Keenan a Morgan, 1941). Podobně jako v případě kyslíkových hvězd je zde snaha setřídít spektra C hvězd do posloupnosti podle teploty. Spektra těchto hvězd jsou však velmi složitá a je obtížné vybrat vhodnou skupinu čar, která by určovala příslušnost k tomu kterému spektrálnímu typu. Ve spektru uhlíkových hvězd se totiž nachází velké množství čar prvků a molekulárních pásů a vzájemné překrývání (blendování) čar je tedy spíše pravidlem než výjimkou. Kvůli velké vzdálenosti většiny uhlíkových hvězd také nejsou příliš dobře známy jejich efektivní teploty. Zjišťováním efektivních teplot se zabýval např. Bergeat a Sibai (1983) (rozdíl mezi jednotlivými způsoby určení teploty jsou cca 200-300 K) či Bergeat et al. (2001).

Počátky R-N klasifikace jsou již v hvězdném katalogu *Henry Draper Catalogue*. Zařazení hvězdy je dáno třemi parametry: C/O, $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$ (*J* parametr) a těžké prvky/lehké prvky. Hvězdy jsou rozděleny do dvou skupin *R* a *N*, které jsou dále rozděleny do podskupin 0-9. Hlavním kritériem pro zařazení je intenzita pásů C_2 , CN a také průběh intenzity v krátkovlnném konci spektra. Postupně se z této klasifikace vydělilo i několik specifických skupin, např. *CH-hvězdy*. CH-hvězdy mají spektra typu R, jsou chudé na kovy a mají velké vlastní i radiální pohyby.

V rozsahu skupin R0-R3 jsou pásy C_2 a CN poměrně nevýrazné, mezi skupinami R3-R8 jsou naopak dominantní. Ve skupině N jsou pásy C_2 a CN také výrazné a navíc zde dochází k degradaci spektra v oblasti $\lambda < 450 \text{ nm}$. Tuto tzv. *fialovou depresi* způsobují absorpční pásy C_3 a SiC_2 .

Později ustanovená KM-klasifikace je určena zastoupením atomárních čar v modré oblasti spektra, intenzitě dubletu Na a srovnání intenzity spektra na třech definovaných místech. Rozdělení do podtříd 0-9 je opět dáno intenzitou pásů C_2 .

S modifikací spektrální klasifikace C hvězd přišel Keenan (1993). Kombinuje oba druhy třídění a zavádí skupiny C- N_n , C- R_n a C- H_n , kde n je index korespondující s teplotní posloupností u kyslíkových hvězd (Dušek, 2002).

V pracech o uhlíkových hvězdách autoři přicházejí i s jinými rozděleními, např. Bergeat et al. 1997. Zde autoři rozdělili proměnné uhlíkové hvězdy do skupin CV1-CV7 podle teploty (CV = carbon variables). V článku z roku 1999 rozšířili svou studii na teplejší uhlíkové hvězdy a přidali nové kategorie HC0-HC5 (HC = hot carbon stars).

4.4 Proměnné uhlíkové hvězdy

Pro uhlíkové AGB hvězdy je proměnnost spíše pravidlem než výjimkou, přičemž světelné změny se dějí na časové škále desítek až tisíců dní. Charakter proměnnosti zřejmě závisí na stupni vývoje hvězdy. *General Catalogue of Variable Stars, IV ed. (GCVS)* (Cholopov, 1985–88) uvádí necelých tři sta proměnných C a CS hvězd (Dušek, 2002). Ukazuje se, že všechny proměnné uhlíkové hvězdy jsou pulsujícími proměnnými různých typů (Gráf, 2003).

Uhlíkové proměnné hvězdy byly rozděleny do těchto typů:

1. **Miridy** – Dlouhoperiodické (cca 300-500 dní) proměnné hvězdy s velkými amplitudami světelných změn. V oboru V 7 mag. Podrobnější popis mirid viz další kapitola.
2. **Polopravidelné proměnné (SR)** – Jak napovídá název, SR hvězdy (semiregular stars) se vyznačují proměnnou periodou i amplitudou. Podle výraznosti těchto změn se dělí do tří typů:
 - a – Nepříliš velké odchylky od pravidelné proměnnosti. Amplitudy bývají menší než u mirid ($\leq 2, 5$ mag).
 - b – Špatně definovaná perioda či intervaly mezi maximy. Změny jasnosti jsou při tom v oboru V malé a v oboru K velmi malé.
 - c – Amplituda světelných změn je zde malá (≤ 1 mag), periody však podléhají změnám od 30 do tisíců dní.
3. **Cefeidy (CW, CWA, CWB)** – Patří sem několik uhlíkových cefeid jejichž spektra jsou klasifikována jako R.
4. **Symbiotické hvězdy (Z And)** – několik uhlíkových hvězd tvoří podvojnou soustavu s bílým trpaslíkem. Záření trpaslíka ionizuje látku opouštějící AGB hvězdu a vznikají tak obyčejné i zakázané emisní čáry. Častěji se však vyskytují soustavy, kde obří složkou je hvězda kyslíková.
5. **Hvězdy typu R CrB** – Vykazují rychlé poklesy jasnosti o více než 6 mag. Tyto změny jsou způsobeny vznikem oblaku prachu, který zkondenzuje v obálce hvězdy a dočasně ji zakryje pohledu ze Země. Gradient záření pak oblak postupně „odfoukne“ a hvězda opět zjasní na původní hvězdnou velikost.
6. **Nepravidelné proměnné (Lb)** – Hvězdy spektrálních typů K, M, S či C s velmi malou amplitudou, mění se bez jakékoliv pravidelnosti.

5 Miridy

Miridy jsou dlouhoperiodické pulsující proměnné hvězdy. Na H-R diagramu se nacházejí na vrcholu asymptotické větve obrů. Jsou to poměrně chladné hvězdy ($T_{\text{ef}} < 3500 \text{ K}$). Díky velkému poloměru (několik AU) jsou však jedny z nejzářivějších ve vesmíru. Nejvíce energie vyzařují v infračervené oblasti mezi $(1,0-3,0) \mu\text{m}$. Odhad rozsahu hmotností je zhruba $(0,8-2,0) M_{\odot}$.

Periody pulsací se pohybují ve stovkách dní (nejčastěji 300-500). Z pozorování mirid v kulových hvězdokupách vyplývá souvislost mezi periodou a metalicitou. Vyšší obsah kovů znamená delší periody. Naopak krátkoperiodické miridy (kolem 200 dnů) patří ke staré diskové nebo halo-diskové populaci s nižší metalicitou (Štefl, 2005). Započítáme-li k miridám i proměnné OH/IR hvězdy, dosahují periody této skupiny i 1000-2000 dní. OH/IR hvězdy jsou dlouhoperiodické proměnné s vyšší hmotností, až $\sim 4 M_{\odot}$. Pomineme-li supernovy, byly miridy prvním objeveným typem proměnných hvězd. To bylo umožněno tím, že v optické oblasti spektra dosahují jejich světelné křivky amplitud až 7 mag (největší zaznamenaná je 14 mag u hvězdy χ Cyg). Bolometrická hvězdná velikost se však mění jen o 0,5 až 1 mag.

Hvězda se zřejmě může stát miridou vícekrát a to během jasných fází cyklu tepelných pulsů. Mezitím bude pravděpodobně polopravidelnou proměnnou hvězdou s malou amplitudou (Štefl, 2005). Mnoho polopravidelných či nepravidelných proměnných hvězd je také pravděpodobně miridami, jejich proměnnost nebyla dostatečně prozkoumána pro nedostatek pozorovacího materiálu (Dušek, 2002).

5.1 Pulzace

Miridy, jakož i další proměnné AGB hvězdy, dosahují světelných změn díky pulsacím, tedy více či méně periodickým změnám poloměru vodíkového obalu jádra. Změnou poloměru jsou pak způsobeny i změny hustoty, povrchového tíhového zrychlení, gravitační potenciální energie a efektivní teploty. Se změnou teploty se může měnit i podíl počtu molekul v celkovém počtu částic a dále samotné spektrum hvězdy. Jako charakteristika pulsace pulsujících proměnných hvězd se používá *pulsační konstanta*

$$Q = P \left(\frac{M}{R^3} \right)^{1/2},$$

kde M i R jsou v jednotkách slunečních.

Existuje několik typů pulsujících proměnných hvězd. Na H-R diagramu však nejsou pravidelně rozptýleny, ale vyskytují se převážně v tzv. *oblastech nestability*. To je způsobeno podmínkou existence mechanismu udržujícího hvězdné pulsace v chodu. Hvězda je útvar, který je za normálních okolností ve stabilní hydrostatické rovnováze a jakékoliv kmity způsobené výchylkou z rovnovážné polohy se brzy utlumí. Pulsující proměnné

hvězdy čerpají energii pro pulsace ze zářivé energie přicházející z centra. Akumulaci a přeměnu energie fotonů v kinetickou energii pohybu obalu zajišťuje tzv. *Eddingtonova záklopka*, která je schopna ve vhodný okamžik akumulovat dostatek energie a v jiný okamžik ji uvolnit v podobě energie kinetické. U mirid je to vrstva částečně ionizovaného vodíku. Tato zóna se nachází v oblasti charakteristických teplot $(1,0 - 1,5) \times 10^4$ K.² Zpětnou rekombinací se uvolňuje energie pro další expanzi obalu jádra. Hovoříme o *záporné disipaci energie*. Tato vrstva musí být ve správné hloubce obalu, proto mohou pulsovat pouze hvězdy se správnou teplotou a poloměrem. Pokud by byla příliš hluboko, nemohla by akumulovat energii, neboť je zde amplituda kmitů velmi malá. Přílišná vzdálenost od centra zase znamená nízkou hustotu a nedostatečnou hmotnost plynu nezbytnou pro vytvoření potřebného efektu.

Pulsace tělesa hvězdy budí ve svrchních vrstvách atmosféry rázovou vlnu, která jako pokračování pulsu postupuje okolohvězdnou obálkou. Jde vlastně o zvukovou vlnu, pohybující se rychlostí cca $20 - 30 \text{ km s}^{-1}$. Podle Cuntze (1990) rázové vlny zahřívají vrstvy nad fotosférou a může vzniknout chromosféra. Ve vzdálenosti od centra $1,05 R_*$ dochází k rovnováze mezi zahříváním a radiačním ochlazováním. Ve výšce $1,13 R_*$ je již teplota $\sim 12000 \text{ K}$.

Rázová vlna má vyšší hustotu a teplotu³ než okolní látka a svým průchodem způsobuje vznik emisních čar. V práci Willsona (1976) jsou rozděleny do tří skupin. Primární čáry vznikají v nejteplejší oblasti, těsně za čelem vlny. Spadají do ultrafialové části spektra a patří především iontům Mg II, Fe II a Ti II. Druhou skupinou jsou emise v Balmerově sérii a některé čáry Si I, Mg I a Fe I. Vznikají v oblasti před čelem vlny a za vlnou. Silné krátkovlnné emise zapříčiňují vznik třetí skupiny – fluorescenčních čar. Ty vznikají v okolním plynu. Z tohoto emisního spektra je možno určit např. teplotu či vzájemnou rychlost jednotlivých částí vlny a okolí.

Perioda pulsací závisí na poloměru hvězdy a rychlosti zvuku v prostředí vodíkového obalu. Z tohoto je možno odvodit, že perioda je obecně nepřímo úměrná odmocnině ze střední hustoty $\sqrt{\rho}$. Groenewegen a Whitelock (1996) odvodili z napozorovaných dat pro periody P galaktických mirid vztahy

$$M_{\text{bol}} = -2,59 \log P + 2,02$$

a

$$M_{\text{K}} = -3,56 \log P + 1,14,$$

kde M_{bol} a M_{K} jsou absolutní hvězdné velikosti bolometrické a ve filtru K. Periody jsou ve dnech. Pro závislost periody na hmotnosti a poloměru hvězdy odvodil Wood (1990a) vztah

²U teplejších hvězd je to vrstva obalu, kde existují ionty He II a He III v poměru zhruba 1:1. Charakteristická teplota je zde $4 \times 10^4 \text{ K}$.

³Teplota těsně za vlnou je $\sim 20000 \text{ K}$ (Cuntz, 1990)

$$\log P = -2,07 + 1,94 \log R - 0,9 \log M,$$

kde M a R jsou v jednotkách slunce.

Jelikož podle současných znalostí tyto vztahy platí pro miridy obecně, je možno předpokládat, že průběh pulsací bude u všech mirid velmi podobný. V současné době však je stále otevřená otázka, zda dlouhoperiodické proměnné pulsují v základním či některém vyšším harmonickém modu. Výsledky se liší podle metody výpočtu a typu veličin pozorovaných pro srovnání s modelem (např. P , R atd.). Tuchman (1991) určoval poloměr R_{CO} podle emise molekuly CO po průchodu rázové vlny pulsů. Dále určil konstantu Q_{CO} a porovnával s modelem. Z výsledků vyplývá, že miridy pulsují v prvním harmonickém modu a připouštějí i vyšší řády modů. K pulsacím v základním modu došli Creech-Eakman a Thompson (2003), kteří porovnávali změřené průměry a periody 50 mirid s modelovými hodnotami. Ke stejnému výsledku dospěli i Ya'ari a Tuchman (1999) za pomoci výpočtů v nelineární aproximaci a Wood a Sebo (1996), kteří porovnávali M_{bol} s periodami pulsací. Mantegazza (1996) zkoumal dlouhoperiodickou proměnnou BS Lyr. Z výsledků vyplývá, že hvězda pravděpodobně pulsuje v základním i prvním harmonickém modu. Bedding et al. (1998) se zabývali možnostmi střídání pulsačních modů u hvězdy R Dor. Dospěli k výsledku, že hvězda opravdu každých několik cyklů střídá dva pulsační mody. Další z nich je pravděpodobně první harmonický a zároveň vyhovuje klasickému vztahu $P - L$ pro miridy. V diskusi výsledků dospívají k závěru, že miridy pulsují v prvním harmonickém modu.

5.2 Proměnnost mirid

Na první pohled nejvýraznější změny u mirid jsou změny jasnosti ve vizuálním oboru. Amplituda změn dosahuje několika magnitud a miridy jsou takové proměnné AGB hvězdy, které mají amplitudu změny větší než 2,5 mag. Pozorování na delších vlnových délkách však ukazují, že např. v infračerveném oboru jsou změny podstatně menší. Celková, bolometrická, světelná křivka má zpravidla amplitudu jinou, kolem 1 mag.

Světelné změny mirid jsou způsobeny pulsacemi, které mění charakteristiky povrchových vrstev hvězdy. Především se stoupajícím poloměrem klesá efektivní teplota. Již roku 1933 Petit a Nicholson ukázali, že rozdíly efektivních teplot dosahují $\approx 30\%$. Je-li faktor změny celkové zářivosti přibližně 2, pak ze vztahu $L = \sigma T_{\text{ef}}^4 \pi R^2$ vyplývá rozdíl poloměrů $\approx 40\%$ (Reid a Goldston, 2002). Tyto změny jsou hlavní příčinou proměnnosti mirid. Intenzita záření závisí na efektivní teplotě silněji než na poloměru. Minimum světelné křivky proto nastává při maximálním poloměru, neboť zvětšení povrchu nestačí kompenzovat pokles teploty.

Velký rozdíl v proměnnosti ve vizuální a infračervené oblasti je způsoben relativně nízkými efektivními teplotami mirid. Předpokládejme planckovské vyzařování hvězdy

a efektivní teplotu 2500 K. Pak nárůst teploty o 1% způsobí zvýšení intenzity na $\lambda = 700$ nm o 8,24%, $\lambda = 1 \mu\text{m}$ o 5,79% a $\lambda = 2, 2 \mu\text{m}$ o 2,83% (Štefl, 2005).

Protože spektrum záření především chladných hvězd se od Planckovy křivky značně liší, není planckovská změna maxima vyzařování jediným efektem, který způsobuje světelné změny. Se snížením efektivní teploty vzroste i opacita povrchové vrstvy a to jak v kontinuu, tak především v oblasti molekulárních pásů. V miridách typu M a S mají na molekulární opacitu největší vliv oxidy kovů, zvláště TiO. Při zchlazení vnější fotosféry pod cca 2000 K dochází k vlně slučování atomů titanu s atomy kyslíku a zvyšuje se tak koncentrace molekul v plynu. Tím se výrazně zvýší opacita a také pozorovaný poloměr hvězdy přibližně na $1,8 R_*$ (Reid a Goldston, 2002). Krátkovlnné záření z teplejších spodních vrstev je odstíněno molekulární absorbcí a pozorované spektrum vzniká ve vyšších, chladnějších oblastech. Úhlová velikost hvězdy závisí na pozorované vlnové délce. Např. ve střední infračervené oblasti je hvězda o 60% větší než v blízké infračervené oblasti.

U uhlíkových hvězd hrají v molekulární absorpci hlavní roli sloučeniny uhlíku, které mají výrazné absorpční pásy v modré a vizuální oblasti spektra. Jedná se např. o C_3 , CN či SiC_2 .

Kromě změn v molekulárních absorpčních pásech se během pulsačního cyklu ve spektru projevují i výrazné změny v atomární emisi. Jak bylo zmíněno v předchozím odstavci, jedná se z velké části o fluorescenční čáry neutrálních atomů Fe, Co, Ti a dalších. Atomy jsou excitovány spektrálně blízkými UV čarami Mg II, Ti II a Fe II. Je pravděpodobný i výskyt emise v čarách H a K Ca II, tyto čáry jsou však zcela překryty okolní absorbcí (Willson, 1976). U všech uhlíkových mirid je také silná proměnlivá emise v Balmerově sérii vodíku. Souvislost ekvivalentní šířky W čáry H_α s fází světelných změn u 30 uhlíkových mirid zkoumali Mikulášek a Gráf (2005). Z výsledku práce vyplývá, že v minimu jasnosti je čára H_α prakticky nezjistitelná zatímco v maximu je zpravidla jasně patrná. Ekvivalentní šířka je tím větší, čím je vyšší amplituda světelných změn.

V práci Richtera (2003) byla studována emise čar Fe II a [Fe II] v miridách typu M. Tyto čáry se ve spektru objevují společně okolo minima jasnosti, vyžadují však ke svému vzniku silnou rázovou vlnu a tvoří se pouze v miridách s jasným maximem. Vynikají přibližně ve vnitřní oblasti formování prachu ($1,5 - 3 R_*$) a jsou proto dobrou sondou do vnitřních částí obálky.

5.3 Hvězdný vítr a ztráta hmoty

Všechny chladné obří a zvláště AGB hvězdy, se vyznačují silným hvězdným větrem. K tomu přispívají podpovrchové konvektivní proudy a nízké tíhové zrychlení v povrchových vrstvách. Výsledkem je značná ztráta hmoty, která vede k úplnému odvržení vodíkového obalu a odhalení jádra. K největší ztrátě hmoty dochází během fáze TP-AGB, zvláště když hvězda prochází fází dlouhoperiodické proměnnosti. Jak je vidět z Obr. 2,

je ztráta hmoty nejmarkantnější během posledních několika termálních pulsů. Tato fáze netrvá déle než zhruba 10^5 let (Jura, 1987). Hvězda prochází fází super větru, kdy je ztráta hmoty $\sim 10^{-5} M_{\odot} \text{ rok}^{-1}$ až $\sim 10^{-4} M_{\odot} \text{ rok}^{-1}$.

U AGB hvězd v zásadě existují dva hlavní mechanismy hvězdného větru a ztráty hmoty. Prvním je *hvězdný vítr poháněný prachem (dust-driven wind)*. Tento mechanismus předpokládá rozptyl fotonů na okolohvězdných prachových částicích a přenos hybnosti záření na prach. Takto urychlený prach pak s sebou strhává okolní plyn za vzniku hvězdného větru. Gail a Sedlmayr (1987) však teoreticky dokázali, že hvězdný vítr poháněný pouze prachem potřebuje být ke svému udržení tak silný, že minimální ztráta hmoty by byla u C hvězd $2 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{ rok}^{-1}$ a u M hvězd $5 \times 10^{-6} M_{\odot} \text{ rok}^{-1}$. Tyto hodnoty se sice vyskytují, často je však pozorována ztráta hmoty o jeden až dva řády nižší.

Dalším mechanismem ztráty hmoty je *hvězdný vítr poháněný pulsacemi*. Pulzace budí na „povrchu“ hvězdy rázové vlny, které pak vypuzují hmotu dále od hvězdy. Ukazuje se, že tyto mechanismy pracují v součinnosti. Pulzace vyvrhují hmotu do vnitřních částí hvězdné obálky, kde mohou kondenzovat prachová zrna. Ta jsou pak dále urychlována proudem záření, přicházejícím od hvězdy (např. Anandarao et al., 1993; Le Bertre a Winters, 1998). Je možné očekávat stejné kvalitativní chování větru kyslíkových a uhlíkových mirid. Pro vítr poháněný prachem lze očekávat numericky různé vztahy díky rozdílným optickým vlastnostem prachu (Le Bertre a Winters, 1998).

Intenzita hvězdného větru závisí na periodě pulsací hvězdy. Jak je vidět z Obr. 3, u hvězd s periodou pod ~ 500 dní roste \dot{M} exponenciálně. Nad touto hodnotou periody se hvězdy nacházejí ve fázi super větru a \dot{M} již na periodě nezávisí. Wood (1990a) zjistil pro exponenciální úsek závislost

$$\log \dot{M} = -11,4 + 0,0123 P,$$

kde \dot{M} je v $M_{\odot} \text{ rok}^{-1}$ a P je ve dnech. Pro hmotnější hvězdy z horní části AGB ($M \approx 5 M_{\odot}$, $M_{\text{bol}} = -6$ až -7 mag) je logaritmická závislost o něco posunuta (na Obr. 3 vyznačena čárkovaně).

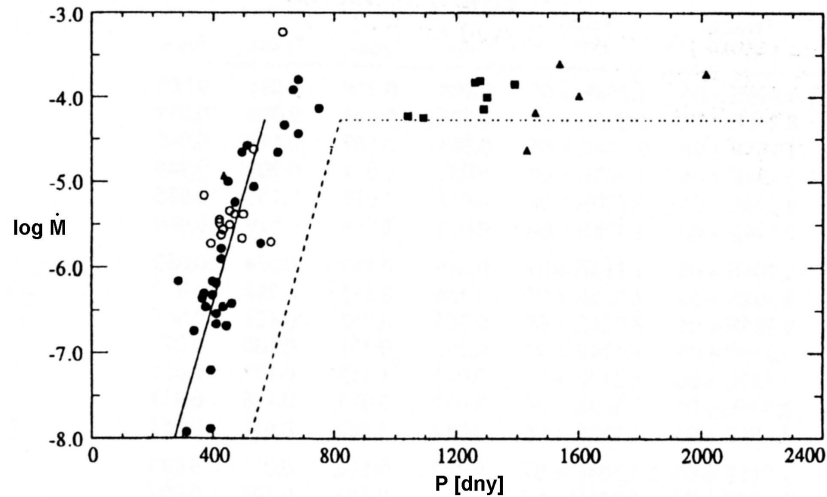
Knapp (1986) prováděl výzkum hvězdného větru u AGB hvězd v Galaxii, Wood et al. (1992) v LMC a Whitelock, Feast a Catchpole v galaktické výduti. Z výsledků vyplývá, že ve fázi super větru platí vztah

$$\dot{M} = \frac{L}{c v_{exp}},$$

$$v_{exp} = -13,5 + 0,056 P.$$

v_{exp} je expanzní rychlost obálky ve velké vzdálenosti od hvězdy a pohybuje se v rozmezí $(3 - 15) \text{ km s}^{-1}$ (Vassiliadis a Wood, 1993).

Podle Bowena a Willsona (1991) roste \dot{M} exponenciálně s časem. Platí $\dot{M} = 4\pi r^2 v \rho$, proto musí růst v nebo ρ . Rychlost však podle modelu dokonce mírně klesá, nárůst \dot{M} tedy



Obr. 3: Závislost ztráty hmoty na periodě. Převzato z Vassiliadis a Wood (1993).
Do periody ~ 500 dnů roste \dot{M} exponenciálně, při vyšších periodách je již konstantní. \dot{M} je v jednotkách $M_{\odot} \text{ rok}^{-1}$.

musí být způsoben zvýšením hustoty. V oblasti nad kterou vznikají rázové vlny hustota klesá s rostoucím r exponenciálně protože se zde zachovává hydrostatická rovnováha. Ve vrstvě, v níž vzniká hvězdný vítr, je hustota úměrná r^{-2} , je však také závislá na hustotě přilehlé nižší vrstvy. "scale height" je úměrná $R^2 T/M$ a podstatně se tedy mění se změnami R a M . Se ztrátou hmoty se tak mění i rozložení hustoty v okolí hvězdy.

Epchtein et al. (1990) zpracovali infračervená pozorování družice IRAS 249 hvězd jižní oblohy. Mimo jiné se v práci zabývali ztrátou hmoty uhlíkových hvězd. Zjistili korelaci indexu $(K-L)$ a \dot{M} , danou vztahem $\log \dot{M} = 0,34(K-L)$.

Souvislost infračervených barevných indexů se ztrátou hmoty zkoumali také Le Bertre a Winters (1998). U kyslíkových i uhlíkových hvězd byla zjištěna korelace mezi $\log \dot{M}$ a indexy $(K-L)^4$ a $(J-K)$. V kombinaci s daty družice IRAS odvodili u uhlíkových hvězd pro index $(K-I_2)$ vztah $\log \dot{M} = -24/[(K-12)+4]+3$. Ztráta hmoty u AGB hvězd tedy souvisí s hodnotou některých barevných indexů v infračervené oblasti. Typ závislosti však záleží na spektrálním typu hvězdy (M či C) a na celkové metalicitě. S nízkým obsahem těžších prvků klesá množství materiálu pro formování prachu, což znamená nedostatek částic urychlovaných rozptylovaným zářením. Hvězdy s nižší metalicitou mají i menší poloměry a tím i vyšší povrchová tíhová zrychlení. Stadia supervětru tak mohou dosáhnout jen hvězdy s vysokou zářivostí. Hvězdná populace s nízkou metalicitou tak bude mít větší podíl zářivých AGB hvězd, supernov a bílých trpaslíků s vysokou hmotností (Bowen a Willson, 1991).

Anandarao et al. (1993) na základě pozorování družice IRAS navrhli existenci dvou

⁴Filtr L': 3800 nm, šířka 600 nm.

Tab. 3: Vlastnosti vnitřní prachové obálky některých mirid (Anandarao et al., 1993).

hvězda	$\frac{P}{\text{dny}}$	$\frac{T_p}{\text{K}}$	$\frac{M_p}{M_\odot}$	$\frac{R_d}{\text{AU}}$
R Boo	223	257	$4,6 \times 10^{-7}$	33
R CVn	328	331	$4,0 \times 10^{-7}$	39
Z Pup	500	235	$1,0 \times 10^{-5}$	226

kde P je perioda, T_p teplota prachu, M_p hmotnost prachové obálky a R_p vnitřní poloměr obálky.

prachových obálek kolem mirid, které snad vypovídají o různých fázích ztráty hmoty. Pro vnitřní obálku určili teplotu 250–400 K, pro vnější 25–40 K. Ke kondenzaci prachu dochází ve vzdálenosti 3 – 10 R_* , maximum je v rozsahu 5 – 7 R_* . Byla nalezena korelace mezi hmotnostmi prachové obálky a periodou pulsací.

5.4 Světelné křivky

Miridy, jako všechny pulsující proměnné hvězdy, se vyznačují v prvním přiblížení pravidelnými změnami jasnosti a tedy periodickou světelnou křivkou. Amplituda změn patří k nejvyšším mezi proměnnými hvězdami. U dané miridy však nemusí být (a zpravidla nebývá) stálá, ale s časem se může měnit. Změny jsou často nepravidelné a délka jednoho cyklu se od délky těch ostatních více či méně liší. Změny však nejsou toho druhu, aby hvězda nebyla považována za periodicky proměnnou.

Na světených křivkách se dále mohou vyskytovat krátkodobé (hodiny až dny) změny o velikosti 0,5 – 1 mag (Smith et al., 2002). Tyto nerovnoměrnosti byly prokázány ve vizuální (Maffei a Tosti, 1995; de Laverny et al., 1998) a v blízké infračervené oblasti (Smak a Wing, 1979b; Guenter a Henson 2001). Na větších vlnových délkách zatím pozorovány nebyly.

Smith et al. (2002) zpracovávali světelné křivky osmi uhlíkových a třiceti kyslíkových mirid. Zkoumaný vzorek poté rozdělili do dvou skupin. Hvězdy první skupiny se vyznačují přibližně sinusoidní křivkou. Druhá skupina vykazuje ve stoupající části křivky nepravidelnosti v podobě plošiny či inflexe. U hvězdy R Car se navíc rysuje výrazné sekundární maximum ve fázi 0,75.

Na vzhledu křivky se projevuje i asymetrie v průběhu periody. Doba vzrůstu jasnosti se často liší od doby poklesu. Zavádí se *faktor asymetrie* $f = (\text{doba vzrůstu jasnosti})/(\text{perioda})$. Z práce Mennessiera (1985) vyplývá, že faktor f je spojen s amplitudou křivky. V zásadě je možno říci, že hvězdy s větší amplitudou mají kratší dobu vzrůstu jasnosti do maxima. Dále podle Bowerse a Kerra (1977) mají krátkoperiodické miridy svě-

telné křivky přibližně symetrické. Pro dlouhoperiodické a OH hvězdy pak faktor f klesá. Toto je spojeno i se spektrálním typem, neboť dlouhoperiodické a OH hvězdy zpravidla spadají do pozdějších spektrálních tříd ($>M6$).

Tvar křivky u dané hvězdy závisí i na vlnové délce, na které ji pozorujeme. Ve vizuální oblasti jsou světelné změny větší než na kratších vlnových délkách díky molekulární a prachové opacitě ve vnější atmosféře. Okamžik maxima se s vyššími vlnovými délkami opožďuje pravděpodobně také vlivem výše zmíněné opacity. Fázový rozdíl mezi vizuální a blízkou infračervenou oblastí je $\sim 0,05 - \sim 0,12$ (Smith et al., 2002).

Podle vzhledu křivek je možno miridy rozdělit do skupin podle vybraných vlastností. Např. Campbell (1925) rozděлил miridy do sedmi skupin. V roce 1928 navrhl Ludendorff klasifikaci, kde jsou hvězdy rozděleny do tří tříd α , β a γ podle symetrie křivky a deseti podtříd podle vzhledu maxim a minim.

6 Použité matematické metody

6.1 Robustní regrese

Při analýze světelných změn proměnných hvězd je zpravidla naším prvním cílem proložit napozorovanými daty křivku, která bude světelné změny co nejlépe vystihovat. Nejrozšířenější metodou prokládání křivek je *metoda nejmenších čtverců (MNC)*. V této metodě se optimálního proložení křivky dosahuje minimalizací čtverců odchylek bodů od teoretické křivky. Minimalizovaná veličina $S(\vec{\beta})$ je dána předpisem:

$$S(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^n [y_i - F(\vec{\beta}, x_i)]^2 w_i,$$

kde x_i , y_i jsou změřené hodnoty, F modelová funkce popsaná parametry $\vec{\beta}$ a w_i váhy jednotlivých měření.

Metoda nejmenších čtverců je však citlivá na přítomnost tzv. *odlehých bodů (outliers)* a hodnota výsledku tím může být podstatně snížena. Tomuto jevu se dá čelit tím, že přidělíme odlehlým bodům podstatně menší váhu či je zcela vyřadíme. Vystává však otázka, podle jakého klíče váhy přidělovat či jaké kritérium použít pro vyřazení odlehlých bodů. Tento problém se zvláště projevuje v astronomii u fotometrických dat, například v důsledku nestability pozorovacích podmínek či nepřesnosti vizuálních odhadů. Jednou z možností, jak minimalizovat vliv odlehlých bodů, je metoda *robustní regrese*. Každý člen sumy $S(\vec{\beta})$ je vynásoben hodnotou *váhovací funkce* φ_i , přičemž

$$\varphi_i = \varphi(\Delta y_i, \sigma_r) = 1,060 \exp \left[- \left(\frac{\Delta y_i}{2,5\sigma_r} \right)^4 \right].$$

kde σ_r je parametr rozptýlení, který v případě normálního rozdělení odpovídá standardní odchylce.

$$\sigma_r = 1,108 \sqrt{\frac{n_r}{n_r - g} \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 w_i \varphi_i}{\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i}},$$

kde g je počet prvků $\vec{\beta}$ a n_r je počet bodů datového souboru očištěného o odlehlé body podle vztahu

$$n_r = n \frac{\sum_{i=1}^n w_i \varphi_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

(Mikulášek et al., 2003).

Úlohu řešíme iteračně, přičemž v prvním kroku použijeme odhad získaný metodou nejmenších čtverců.

6.2 Komponentová analýza

Komponentová analýza (PCA = Principal Component Analysis) je matematický postup, pomocí nějž je možno najít v datových souborech společné rysy. V astronomii je tato metoda zatím poměrně málo známá. Používá se však v jiných vědních oborech, např. pro analýzu sociologických dat. V oboru informačních technologií je PCA známa jako metoda pro tvorbu komprimovaných formátů obrázkových souborů. Komprese dat spočívá v redukci dimenzí datového souboru za jisté, nepřilíš velké, ztráty informace.

V analýze světelných křivek lze pomocí PCA vysledovat v jejich souboru „střední světelnou křivku“ a zjistit tak společné znaky studovaných hvězd.

6.2.1 Obecný postup při použití PCA

Metoda PCA umožňuje analýzu souboru hodnot jisté vektorové veličiny. Mějme m sloupcových vektorů hodnot $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ n -rozměrné veličiny, získaných měřeními či jiným postupem. Od těchto vektorů je nejdříve třeba odečíst jejich střední hodnoty. Množství informace, v datech obsažené, tím neutrpí, neboť v grafu se soubor pouze přesune do oblasti kolem počátku soustavy souřadnic. Z takto upravených vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ nyní sestavíme matici \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_m \end{pmatrix}.$$

Z té pak vypočteme kovarianční matici \mathbf{C} ,

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T.$$

Dostáváme čtvercovou matici o rozměrech $n \times n$. Nyní matici C podělíme $(n - 1)$ a dostaneme tak matici, jejíž diagonální prvky jsou disperzemi a nediagonální korelačními koeficienty daného datového souboru. Z takto upravené matice však už lze o datech alespoň kvalitativně získat první poznatky. Čím více se například korelační koeficienty po znormování matice blíží ± 1 , tím je pravděpodobnější lineární závislost mezi příslušnými dvěma prvky vektoru. Dále prvek proměnné \vec{x} , jehož disperze je největší, má na měřeném intervalu hodnot největší rozptyl či v případě lineární závislosti roste nejrychleji.

Dalším krokem je nyní spočtení vlastních vektorů a vlastních hodnot kovarianční matice C . Pro data získaná měřením bude s největší pravděpodobností počet různých vlastních vektorů stejný jako rozměr matice, tedy n . Vlastní vektory jsou navzájem ortogonální a tvoří v prostoru prvků vektorové proměnné \vec{x} ortogonální bázi. Kovarianční matice je vlastně maticí přechodu k této nové bázi. Nová báze je natočena tak, že vektor s nejvyšší vlastní hodnotou má směr nejvyššího rozptylu bodů kolem počátku.

Velikost vlastních hodnot udává míru rozptylu datových bodů ve směru příslušného vlastního vektoru. Seřadíme-li vlastní vektory (komponenty) podle velikosti vlastních hodnot, dostaneme posloupnost podle jejich „důležitosti“. Vektor s nejvyšší vlastní hodnotou je pak *hlavní komponentou* (*principal component*). Nyní se nám otvírá cesta jak zredukovat počet dimenzí datového souboru. Nejdříve porovnáme velikosti vlastních hodnot. Vektory s výrazně menšími vlastními hodnotami než u hlavní komponenty pak vyřadíme.

Sestavíme-li zbylých p vektorů do matice F , dostaneme vlastně matici projekce na novou p -rozměrnou bázi (*feature vector*). Snížení počtu dimenzí dosáhneme tím, že původní data (matici X) promítneme maticí F na novou bázi

$$N = F^T \cdot X.$$

Na Obr. 4 je zobrazen graf dvourozměrného datového souboru, který by mohl vzniknout např. měřením dvou lineárně závislých veličin. Disperze podél vektoru směřujícího vpravo nahoru je podstatně větší, vektor je tedy hlavní komponentou. Druhý vlastní vektor vyřadíme a dostaneme jednorozměrný soubor dat kolmým průmětem na hlavní komponentu.

Do původní báze můžeme data opět převést podle rovnice

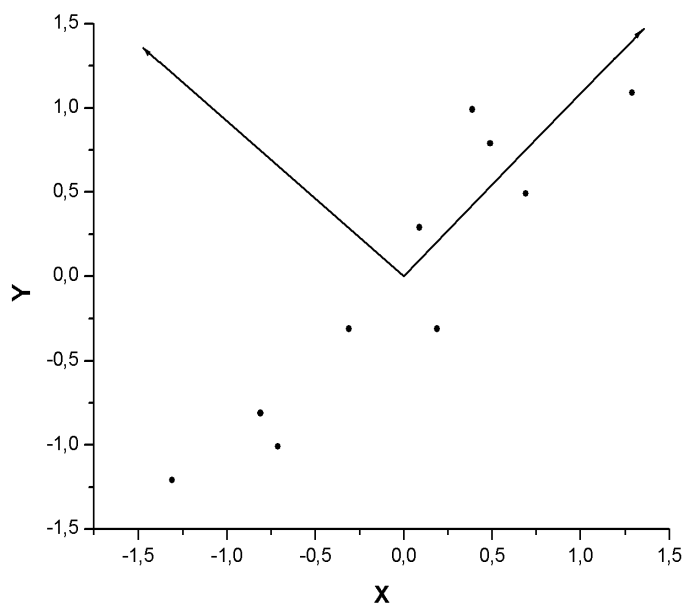
$$X' = F^{-1} \cdot N,$$

X' je soubor dat opět v původní bázi. Tento vzorec však platí jen v případě, že je matice F čtvercová a tedy, že nebyly vynechány žádné vlastní vektory. Pro matici vlastních vektorů však platí, že inverzní matrice se rovná matici transponované a tento výsledek lze použít i pro matice s nesterjým počtem řádků a sloupců. Převod upraveného datového souboru na původní bázi se pak realizuje podle vztahu

$$Y' = F^T \cdot N + M,$$

kde matice M obsahuje střední hodnoty, které byly na počátku výpočtu odečteny.

Tímto dostáváme nový datový soubor, který byl ochuzen o určitou část informace díky předchozímu snížení počtu dimenzí. Např. na Obr. 4 by všechny body ležely na přímce určené hlavní komponentou. Čím menší však byly vlastní hodnoty vyřazených vektorů, tím menší je ztráta informace.



Obr. 4: Datový soubor s vlastními vektory převzatý ze Smith (2002). Je vidět, že hlavní komponentou je vektor směřující vpravo nahoru. Jeho vlastní hodnota je $26\times$ větší než vl. hodnota druhého vl. vektoru.

7 Data

Protože miridy patří mezi dlouhoperiodické proměnné hvězdy, je pro analýzu jejich světelných křivek třeba získat pozorování, pokrývající dlouhý časový úsek. Délky period jsou řádově stovky dní, pozorování by tedy měla pokrývat časový úsek několika let, lépe však desítek let. Pro zachycení dlouhodobých změn je však stále historie pozorování proměnných hvězd příliš krátká.

Nejstarším druhem pozorování s nejdelšími pozorovacími řadami jsou vizuální odhady jasnosti. První mirida, *o Ceti*, byla identifikována jako proměnná přibližně před 300 lety, nejdelší pozorovací řady tedy dosahují méně než tři staletí. Nejdelší řady použité v této práci pokrývají časový úsek cca 80 let.

Data z vizuálních pozorování byla získána z databází organizací AAVSO (*American Association of Variable Star Observers*; <http://www.aavso.org>) (28 hvězd), AFOEV (*Association Francaise des Observateurs d'Etoiles Variables*; <http://cdsweb.u-strasbg.fr/afoev/english.htm>) (25 hvězd) a VSOLJ (*Variable Star Observers League in Japan*) (24 hvězd).

Vizuální pozorování mají v současnosti výhodu nejdelšího časového rozsahu a počtu jednotlivých odhadů. I odhady od zkušených pozorovatelů jsou však většinou podstatně méně přesné než pozorování provedená např. CCD technikou, která je však v astronomii používána poměrně krátkou dobu. Pro zpřesnění proložení křivky daty a také pro určení okamžiků dalších maxim byla dále použita data z družice HIPPARCOS (<http://simbad.u-strasbg.fr>; 19 hvězd) a z automatické přehlídky oblohy ASAS (*the All Sky Automated Survey*; <http://www.astrow.edu.pl/gp/asas/asas.html>) (11 hvězd). Pozorování z družice HIPPARCOS zpravidla pokrývají jen dvě až tři periody a časově se kryjí s vizuálními pozorováními. Jsou tedy užitečná především pro zpřesnění určení primárního maxima dané hvězdy. Data z přehlídky ASAS (časový rozsah 1997–2000) většinou pokrývají tři periody a navazují na nejpozdější vizuální pozorování. Je tedy možno je použít pro přesné určení primárního maxima a dále pro rozšíření časového rozsahu O-C diagramu.

Pro fotometrii byl na družici HIPPARCOS použit širokopásmový filtr H_p (340–890 nm, max. 450 nm), v přehlídce ASAS filtr V Johnsonova systému. Aby bylo možné použít současně všechna pozorování k proložení křivky, je třeba provést vzájemné transformace dat z jednotlivých filtrů. Ukazuje se, že hvězdné velikosti v různých barvách lze vzájemně převádět lineární transformací (Mikulášek a Gráf, 2005).

Transformace dat byla provedena následujícím způsobem. Vybereme ty úseky, které se kryjí. Daty, která byla zvolena jako primární (k nim se budou ostatní transformovat), proložíme zvolenou funkcí f . Nyní daty, která chceme transformovat, proložíme funkcí

$$F = a + b f.$$

Zjistíme odchylky dy bodů souboru od funkce F a ty pak přičteme k bodům funkce f . Jako primární soubor byla většinou volena data z vizuálního pozorování, neboť ta obsahují nejvíce bodů a mají nejdelší pozorovací řady. Jako f byla použita funkce

$$f = A + B \sin 2\pi\varphi,$$

kde φ je fáze, pro daný případ blíže popsána v dalších odstavcích.

Pro 21 hvězd je možno nalézt pozorování v databázi automatického přehlídkového projektu TASS (*The Amateur Sky Survey*). Datové soubory však nebylo možno transformovat, neboť zpravidla obsahují příliš málo bodů a pokrývají příliš krátký časový úsek a není možné jimi proložit křivku s dostatečnou přesností. Pouze u dvou hvězd (VX Gem, CL Mon) byla použita pozorování z filtru V jako doplněk k datům z přehlídky ASAS.

Většina pozorovacích dat, použitých v této práci, pochází z vizuálních odhadů. Tyto odhady však mívají velký rozptyl (může být i kolem 2 mag) a často se zde vyskytují

Tab. 4: Základní údaje o studovaných uhlíkových miridách. P – perioda, M_0 – primární maximum, A – amplituda, N_{xx} – počet použitých pozorování (HIPPARCOS, vizuální, ASAS). Charakteristiky hvězd byly převzaty z Mikulášek a Gráf (2005). Údaje označené hvězdičkou byly určeny nově pomocí metody I (viz. další odstavec)

hvězda	Sp. typ	M_0	P	V_{\min}	A	N_{Hp}	N_{vis}	N_{asas}
V374 Aql	C7,3	52800±2*	466±3	13,2	1,5	0	93	83
AU Aur	C6-7,3e	48074±3	396,8±0,8	13,8	1,6	73	167	0
AZ Aur	C7,1e-C8,2-3	48270±2	414,6±3,7*	13,2	3,3	0	1049	0
S Aur	C4-5	47908±5	590,4±0,7	12,6	2,1	0	3283	0
UV Aur	C6,2-C8,2Jep	48124±5	393,9±5,5*	10,3	1,5	72	4247	0
S Cam	C7,3e	48246±3*	326,2±0,2	10,4	1,8	163	9417	0
R CMi	C7,1Je	48080±2	338,2±2,6*	11,0	2,8	120	10163	158
HV Cas	C4,3-5,4e	(38120)	(527,1)			0	39	0
W Cas	C7,1e	47880±1	407,0±2,5*	12,0	2,7	256	13004	0
X Cas	C5,4e	48210±2	427,7±0,3	12,4	2,0	108	3832	0
S Cep	C7,4e	48176±2	485,5±0,5	10,2	2,3	121	10537	0
V CrB	C6,2a	47688±1	357,3±0,2	11,6	3,0	141	16149	0
RS Cyg	C8,2e	48154±2	418,9±3,9*	8,9	1,5	129	20159	0
U Cyg	C7,2e-C9,2	47792±2	462,3±0,4	10,7	3,3	117	21949	0
V Cyg	C5,3e-C7,4e	47786±2	419,6±0,2	13,7	3,8	81	5775	0
WX Cyg	C8,2JLi	48242±0,7	408,3±4,0*	13,3	2,9	131	4647	0
T Dra	C6,2e-C8,3e	47762±2	425,1±4,6*	12,8	3,3	0	3554	0
R For	C4,3e	48178±2	386,5±0,3	13,3	2,8	0	1622	337
VX Gem	C7,2e-C9,1e	48069±3	382,2±4,7*	13,0	4,0	88	1308	224
ZZ Gem	C5,3e	47881±3	316,1±0,4	11,3	2,1	0	1664	0
CZ Hya	Ce	52296±2*	442,5±13,0*			0	0	448
V Hya	C6,3e-C7,5e	47943±4	530,2±0,7	9,5	2,0	98	3784	330
R Lep	C7,6e	48187±2	438,6±5,7	10,2	2,5	131	10027	357
U Lyr	C4,5e	48033±3	455,4±6,0*	12,3	1,8	0	5097	0
CL Mon	C6,3e	48008±9	497±2	13,9	3,5	0	106	85
V Oph	C5,2-C7,4e	47789±2	297,2±3,1*	10,6	2,6	84	4407	306
RZ Peg	C9,1e(Tc)	47856±2	437,0±0,2	12,6	4,2	142	5135	0
SY Per	C6,4e	48021±5	476,4±0,9	11,6	1,8	83	1306	0
RU Vir	C8,1e	47783±2	442,6±0,4	13,6	2,9	84	2854	204
SS Vir	C6,3e	47887±4	357,9±3,1*	9,5	2,1	0	7181	196

odlehle body. Je proto vhodné provést transformaci datového souboru na tzv. *normální body*. Tím se následně prokládání bodů křivkou o něco zpřesní, zjednoduší a i výsledný graf bude přehlednější.

Časový úsek, který probíhají pozorovací data, rozdělíme na krátké intervaly (v této práci byla zvolena délka 10 dnů). Časovými souřadnicemi normálních bodů budou středy intervalů, které obsahují alespoň jeden bod. Souřadnici hvězdné velikosti určíme např. jako medián z hvězdných velikostí bodů v intervalu. Tím bude omezen vliv odlehlých bodů. Dále je vhodné normálním bodům přiřadit váhy úměrné počtu bodů, ze kterých byly vytvořeny.

Někdy je převod na normální body nezbytný vzhledem k výpočetní náročnosti při použití všech původních bodů. Soubory pozorování u některých hvězd obsahují až 20 000 bodů a při zpracování vyvstal problém nedostatku paměti počítače během výpočtu.

8 O-C diagramy

Diagramem O-C rozumíme graf časové závislosti rozdílu pozorovaného okamžiku extrému ($O=observed$) a jeho teoretické předpovědi ($C=computed$),

$$C = M_0 + E \cdot P,$$

kde P je perioda. Na časové ose může být vynesena např. epocha E (pořadí od primárního extrému M_0), spočtený čas extrému či jiná časová souřadnice.

Typ sledovaného extrému závisí na typu proměnné hvězdy. Např. pro zákrytové dvojhvězdy je sledován okamžik minima. U pulzujících proměnných hvězd je možno sledovat maxima i minima, častěji se však pracuje s maximy.

Podle vzhledu O-C diagramu lze teoreticky určit, zda je správně určena perioda a primární maximum, či zda se perioda s časem nemění. Přesnost a samotná možnost této analýzy však také závisí na kvalitě pozorovacích dat. Důležitá je zde přesnost, ale také pravidelnost pokrytí křivky pozorováními. Vliv jednotlivých faktorů závisí také na metodě zpracování dat a vytváření O-C diagramu.

Pro vytvoření O-C diagramů zde byly použity dvě metody, popsané v článku Mikulášek et al. (2005).

8.1 Metoda I

Tato metoda je „přímá“, neboť jako první věc zjišťuje okamžiky jednotlivých extrémů proložením zvolené křivky.

Nejdříve zvolíme kolem každého pozorovaného maxima či minima určitý interval. Z bodů, které obsahuje, pak budeme určovat skutečnou polohu extrému. Je možno zvolit

„plošně“ určitý interval (např. $\pm P/4$), což práci zjednoduší a urychlí. Někdy je však vhodné určit meze pro každý extrém zvlášť. Tento přístup je vhodný v případech, že křivky světelných změn jsou pokryty pozorováními nepravidelně, či je v okolí jednotlivých extrémů různě velký rozptyl odhadů. Tato situace nastává často u souborů vizuálních pozorování. Křivky jsou pokryty pozorováními v různých časech s různou hustotou a někdy jsou zde i různě dlouhé mezery, proto je třeba zvolit vhodný časový úsek kolem extrému. Ten musí být takový, aby bylo možno proložit křivku, která bude dobře odpovídat tvaru, odhadnutému z napozorovaných bodů. Některé extrémy také mají ve svém okolí poměrně velký počet bodů, ale jejich rozmístění je takové, že okamžik extrému nelze určit. Problému velkého rozptylu bodů lze čelit převedením na normální body.

Je-li křivka pokryta poměrně pravidelně dostatečným počtem bodů, je lepší brát kratší intervaly, přičemž délku je zde vhodné volit podle „ostrosti“ extrému. V krátkém intervalu je možno přesněji určit okamžik extrému i při nízkém stupni prokládaného polynomu. Při méně pravidelném pokrytí či při menším počtu bodů je třeba volit delší intervaly. Klesající a rostoucí větve křivky kolem extrému však často nemá jednoduchý tvar a při nízkém stupni prokládaného polynomu vnáší zkreslení do proložení v těsné blízkosti extrému.

Zejména u vizuálních pozorování také není vhodné používat vyšší stupně polynomů, neboť ty při velkém rozptylu a nepravidelnosti odhadů mají tendenci zesložitovat skutečný tvar křivky a vytvářet imaginární extrémy. Vyšší stupně je možno použít např. při analýze pozorování z CCD. Opět je zde podmínkou pravidelnost pokrytí.

Je-li F funkce proložená daty, bude pro okamžik extrému platit $F'(t_{\text{ext}}) = 0$ a t_{ext} najdeme některou ze standardních minimalizačních metod. Nejistotu $\delta(t_{\text{ext}})$ dostaneme ze vztahu

$$\delta(t_{\text{ext}}) = \frac{\delta|F'(t_{\text{ext}})|}{|F''(t_{\text{ext}})|}.$$

V této práci byl použit pro určení okamžiků maxim program doc. Mikuláška Maxipes. Ten prokládá daty metodou robustní regrese funkci

$$f = a_1 + a_2 T + \sum_{k=1}^n a_{k+2} \sin(k\pi T) \quad , \quad T = \frac{t - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}},$$

kde t_{\max} a t_{\min} jsou horní a spodní hranice vybraného intervalu. Počet koeficientů ($n + 2$) zde označíme jako stupeň polynomu.

Při prokládání byly použity stupně 3 až 5, u dat z ASAS výjimečně i 7. Pro data z vizuálních pozorování však doporučuji zůstat v rozmezí stupňů 3 a 5. Při použití vyšších stupňů se zvyšuje možnost vzniku imaginárních extrémů vlivem nepravidelnosti a nepřesnosti pozorovacích dat. Odchylka od skutečného okamžiku extrému pak může činit i několik desítek dnů, tedy významný zlomek periody.

Výhodou metody I oproti metodě II (viz. další odstavec) je to, že umožňuje jednoduše určit periodu průměrováním časových intervalů mezi určenými maximy (minimy).

Za primární extrém M_0 zvolíme ten, který považujeme za nejpřesněji určený a pak již z rozdílů okamžiků extrémů spočtených (C) a určených z proložení (O) můžeme sestavit O-C diagram. Nejistoty určení bodů diagramu určíme podle zákona šíření chyb z nejistoty určení daného extrému a nejistoty určení periody.

Metoda I je vhodná pro analýzu přesných pozorování (CCD, fotoelektrické fotometry) s dobře pokrytými světelnými křivkami. Pak umožňuje s dobrou přesností určit tvar křivky v okolí extrému a i okamžik, kdy extrém nastal. Je zde však třeba očekávat vyšší rozptyl bodů v O-C diagramech. U méně přesných pozorování se rozptyl zvyšuje chybným určením okamžiku extrému, zvláště u „plochých“ extrémů, kde se směrnice tečny ke křivce nemění příliš rychle. U mirid se také setkáváme s tím, že tvar křivky se v jednotlivých periodách může více či méně měnit a daný extrém může nastávat v mírně odlišné fázi periody. Tento jev se více projeví u přesných pozorování, kde proložená křivka dobře kopíruje skutečné světelné změny hvězdy.

8.2 Metoda II

Jak bylo zmíněno v předchozím odstavci, může pro data z vizuálního pozorování docházet při určování okamžiku extrému ke zkreslením, zejména díky nepravidelnosti rozmístění bodů podél křivky a případným prázdným časovým úsekům. Metoda I je k těmto zkreslením poměrně náchylná, proto se k omezení vlivu těchto problémů využívá metoda II. Ta je robustnější, neboť k určení tvaru extrému používá všechna okolí najednou a nikoli jednotlivě jako metoda I. Jednou z nevýhod této metody je, že pro její použití potřebujeme odhad periody získaný již dříve jiným způsobem. Teoreticky lze pak podle výsledků tento odhad zpřesnit. Zde byly použity periody a primární maxima z článku Mikulášek a Gráf (2005). V tomto článku však byly periody určovány jen z dat pro několik cyklů, za účelem porovnání se změnami spekter. Tyto periody se u některých hvězd ukazují pro delší časový interval jako nepřesné a proto byly změněny podle výsledků metody I.

Časové intervaly v okolí extrémů byly v tomto případě vybrány jako pevně určený zlomek periody v okolích spočtených okamžiků extrémů (zde byl použit interval $\pm P/3$). U této metody je o něco méně důležité pokrytí jednotlivých intervalů body a tento přístup také podstatně urychlí celý výpočet. Protože byly intervaly vybírány automaticky, je třeba zavést podmínku určitého minimálního počtu bodů (zde použito šest) v intervalu a dále také, aby se vpravo i vlevo od spočteného okamžiku extrému vyskytoval jistý minimální počet bodů (zde alespoň jeden). Pokud by v intervalu bylo příliš málo bodů, nebo byla pokryta jen vzestupná či sestupná větev, výsledky by mohly být velmi nepřesné nebo i zcela nesmyslné.

Nyní v každém intervalu vezmeme spočtený okamžik extrému jako nulový bod a intervaly na sebe „sesadíme“, aby se tyto okamžiky kryly. Graf z takto složených intervalů může být prvním indikátorem toho, jak přesné jsou hodnoty periody a primárního ex-

trému. Pokud jsou zadány hodnoty, které se u dané hvězdy ani neblíží skutečným, bude graf chotickou směsicí bodů. U dat s malým rozptylem (zde se jedná zpravidla o data z ASAS) je již zde možné přibližně odhadnout, jak přesně jsou elementy křivky určeny. Chyba určení primárního extrému se projeví posunem extrému od středu grafu a chyba periody pak „rozesunutím“ jednotlivých křivek v grafu.

Je vidět, že spojené extrémy mohou být vytvořeny ze všech dostupných druhů pozorování (vizuální, CCD), je však třeba křivky navzájem naškálovat. Jako základní soubor, ke kterému se budou ostatní transformovat, byla většinou použita data z vizuálních pozorování, neboť jejich počet zpravidla dalece převyšuje ostatní soubory. Jen u hvězd V374 Aql a CZ Hya byla jako primární zvolena pozorování z ASAS.

Celý soubor spojených intervalů nyní proložíme křivkou, popsanou v předchozím odstavci u metody I. Pro proložení byla opět použita metoda robustní regrese a stupeň polynomu pět. Proložení se účastní body všech zahrnutých extrémů, což s velkou pravděpodobností eliminuje problém nepravidelnosti rozložení bodů. Na rozdíly mezi jednotlivými obsaženými intervaly se bere ohled jen pro koeficient polynomu a_0 , který znamená posun křivky podél osy hvězdných velikostí. Ostatní členy polynomu, které určují tvar funkce, jsou již určeny podle všech bodů bez rozdílu.

Tímto způsobem dostáváme funkci $F(t - C) = F(\Delta t)$, která popisuje střední tvar extrému. Posunutí jednotlivých extrémů ve hvězdné velikosti (q) a v čase ($O - C$) je možno určit minimalizací váhované sumy čtverců odchylek Δy_i bodů od funkce. Pomocí Taylorova rozvoje můžeme psát

$$\Delta y_i(\Delta t_i) = y_i - F(\Delta t_i) \cong q - (O - C)F'(\Delta t_i),$$

což je vlastně rovnice přímky protínající osu y v q a se směrnici $(O - C)$. Rozdíl $(O - C)$, posun q a jejich nejistoty $\delta(O - C)$ a δq je pak možno určit ze vztahů

$$u = \overline{F'^2} - \overline{F'}^2, \quad O - C = -\frac{\overline{\Delta y F'} - \overline{\Delta y} \overline{F'}}{u}, \quad q = \frac{\overline{F'^2} \overline{\Delta y} - \overline{F'} \overline{\Delta y F'}}{u}$$

$$\delta(O - C) = \sqrt{\frac{\overline{\Delta y^2} - q \overline{\Delta y} + (O - C) \overline{\Delta y F'}}{(N - 2)u}}, \quad \delta q = \delta(O - C) \sqrt{\overline{F'^2}},$$

kde N je počet bodů.

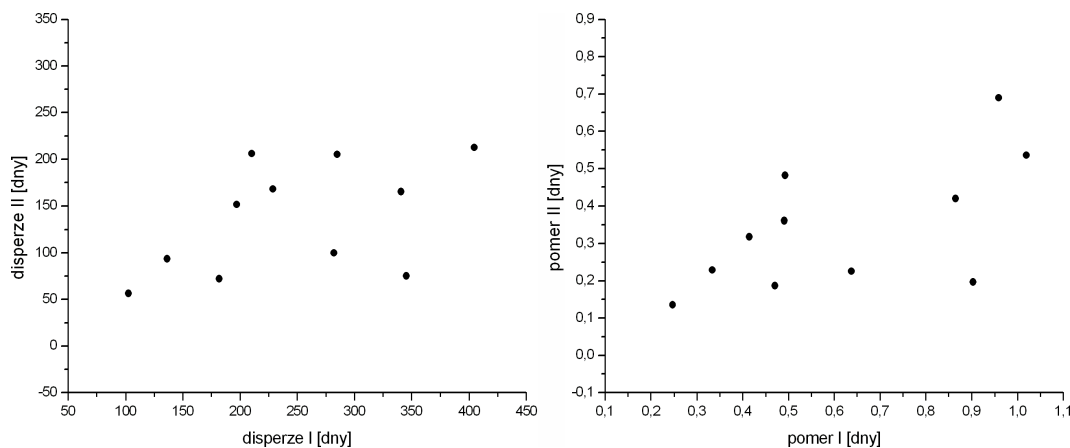
Výhodou této metody je její robustnost, neboť výrazně omezuje vliv nestejně hustoty a mezer v datech. Ty nemají významný vliv na tvar křivky, pouze mírně ovlivňují její posunutí při fitování v jednotlivých intervalech, což má na výsledek podstatně menší vliv. Její nevýhodou může být „neprůhlednost“ a tedy ztížená identifikace problémů a chyb v postupu. Metoda II také předpokládá více méně stejný tvar extrémů. Nebere tak ohled na možný rozdíl ve tvarech extrémů a přesné určení reálného okamžiku extrému pak není možné.

Zde však záleží na tom, co je cílem výpočtu okamžiku extrému. Tvar křivky v jeho okolí se může i podstatně měnit a okamžik extrému může nastávat v mírně odlišné fázi periody. Tvar křivky v širším intervalu je však zpravidla stabilnější. Zkoumáme-li například stabilitu periody, pak je naopak vhodnější nezabývat se detailně tvarem blízkého okolí extrému. Pro detailní analýzu je pak třeba použít přesných pozorování a pro určení tvaru křivky použít metodu I.

8.3 Výsledky

Pro 28 hvězd byly vytvořeny O-C diagramy metodami I a II. U zbývajících dvou hvězd, HV Cas a CL Mon, byla použita pouze metoda II. Příčinou byl malý počet pozorování a rozmístění bodů. Zde se ukazuje další výhoda metody II, která je k těmto faktorům méně citlivá protože určuje tvar proložené funkce ze všech použitých intervalů zároveň. I tak ovšem obsahují grafy málo bodů a výsledky nejsou příliš přesné.

Z výsledných O-C diagramů na Obr. 7 vyplývá jistý rozdíl mezi oběma metodami. Při malém rozsahu hodnot O-C dává metoda II podle očekávání menší rozptyl bodů. Při větším rozsahu změn O-C (cca od 80 až 100) začíná být výsledný rozptyl u obou hodnot srovnatelný. Rozptyl bodů a celkový tvar grafu zejména při větším rozpětí hodnot O-C také do určité míry závisí na počtu iteračních kroků. Vhodný počet kroků se zpravidla pohybuje mezi 8 a 12, ve většině případů pak bylo použito deseti kroků. Pro urychlení a zpřesnění určení O-C diagramu je při velkých změnách (>140 dnů) možno použít výsledky metody I jako výchozího odhadu. Tohoto postupu bylo využito u hvězd U Cyg, V Cyg, R Lep a SS Vir. Metoda II také někdy vytváří výrazně odlehle body, pravděpodobně u málo pokrytých extrémů. Tyto body byly z grafů odstraněny.

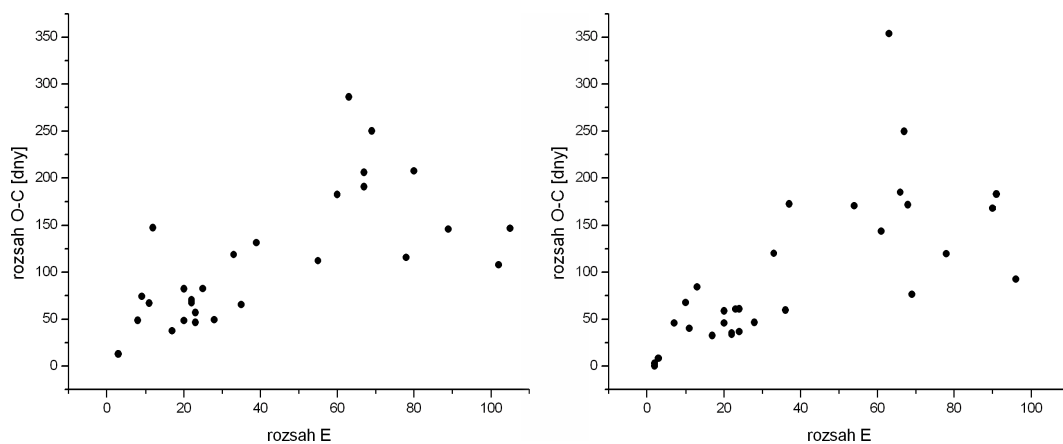


Obr. 5: Porovnání disperzí z metody I a II. V levém grafu jsou vyneseny disperze, v pravém poměry disperze/ P .

Pro některé hvězdy je možno, alespoň přibližně, proložit O-C diagram přímkou (V374 Aql, AU Aur, AZ Aur, UV Aur, X Cas, WX Czg, R For, VX Gem, V Oph, SY Per, RU Vir). Pro tyto hvězdy byla zjištěna disperze bodů vůči proložené přímce. Na Obr. 5 jsou vyobrazeny grafy pro srovnání disperzí výsledků první a druhé metody a poměru disperze ku periodě dané hvězdy.

Rozptyl bodů v grafech je značný, lze však mezi nimi předpokládat lineární závislost. To je potvrzeno i korelačními koeficienty, které mají hodnoty pro graf disperzí 0,932 a pro graf poměrů 0,935. Odráží se zde i menší rozptyl bodů u metody II. Směrnice přímek, proložených body v grafech a procházejících počátkem, je $(0,53 \pm 0,06)$ pro disperze i poměry. Disperze v O-C diagramech je prakticky nezávislá na délce periody dané hvězdy (korelační koeficienty -0,296 pro metodu I a -0,122 pro metodu II).

Na Obr. 6 jsou vyneseny grafy závislosti rozsahu hodnot O-C na příslušném rozsahu časů maxim. I přes velký rozptyl bodů se zde jeví rostoucí tendence. Korelační koeficienty jsou 0,663 resp. 0,696 pro metodu I resp. II. Do rozsahu E přibližně 40–50 hodnoty viditelně stoupají. Pro vyšší rozsahy je patrné jisté ustálení hodnot, i když v dosti širokém pásu. V této oblasti má již na rozptyl hodnot O-C samotná nepřesnost jejich určení menší vliv a projevují se zde již více reálné změny periody. V rostoucí oblasti grafu se postupně zvyšuje i rozptyl bodů a se zvyšujícím se počtem period nabývá na důležitosti skutečná proměnnost periody. Velký rozptyl bodů je způsoben rozdílnou proměnností period u jednotlivých hvězd.



Obr. 6: Grafy závislosti rozsahu hodnot O-C na počtu epoch E. Vlevo pro metodu I, vpravo pro metodu II.

V případech, kdy je světelná křivka silně deformována, může vyvstat problém výrazně rozdílných celkových tvarů křivky během některých cyklů. Toto je případ hvězd V Hya a R Lep (viz. další odstavec). U některých částí křivky se pak tvar extrému určený metodou II značně vzdaluje od skutečného tvaru daného extrému a výsledkem je podstatně

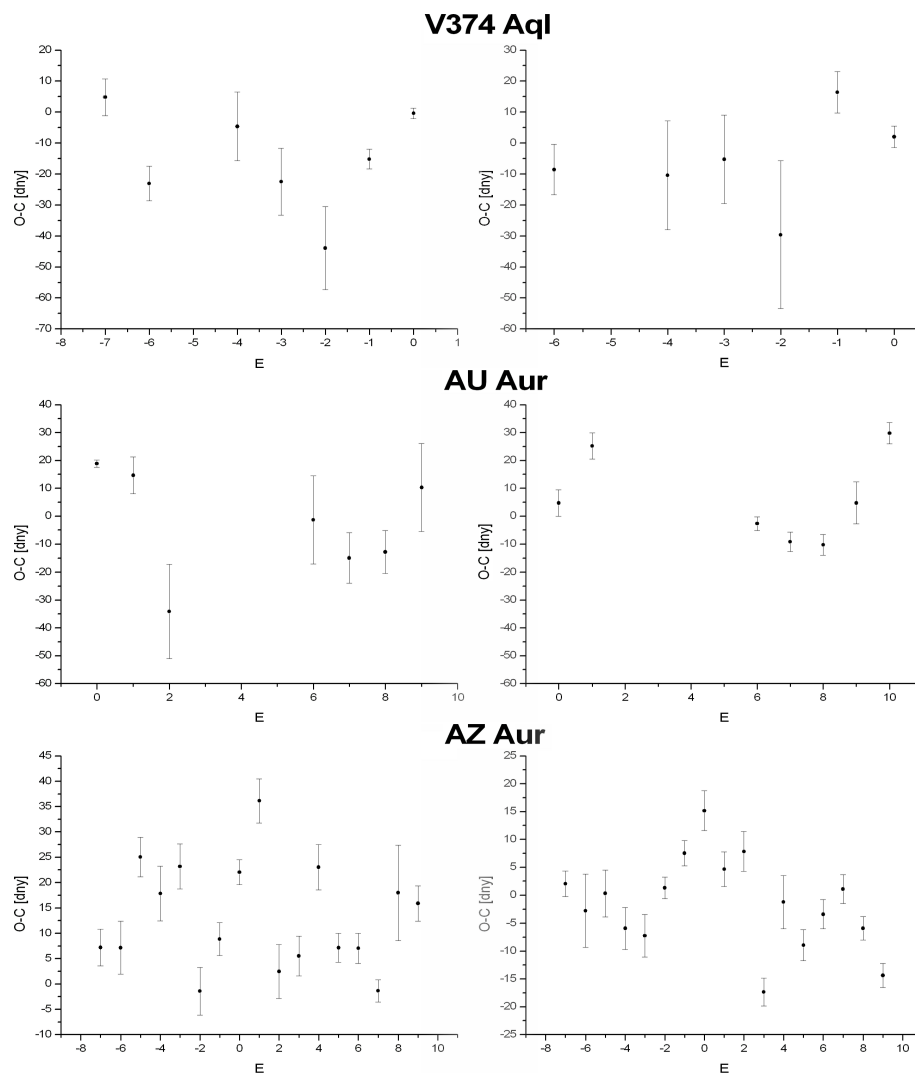
větší rozptyl bodů O-C a také vytváření odlehlých bodů, jak je vidět z grafů na Obr. 7. Na první pohled chybně určené body (několik stovek dnů) byly z grafu odstraněny, je zde však stále patrný neúměrně velký rozptyl v porovnání s ostatními hvězdami a s výsledky metody I. V případě takto deformovaných křivek tedy pravděpodobně lépe odpovídají skutečnosti výsledky metody I.

Jak je patrné z diagramů na Obr. 7, u značné části hvězd délka periody podléhá změnám a to na různých časových škálách. Menší změny je možno pozorovat i u sousedních period. V některých případech dochází i k větším změnám (více než deset dnů) během jedné či několika málo period. Tyto jevy je možno dobře sledovat i při prokládání světelných křivek už pomocí prostého prohlédnutí výsledného grafu. Fluktuace periody tohoto typu studovali např. Percy a Colivas (1999).

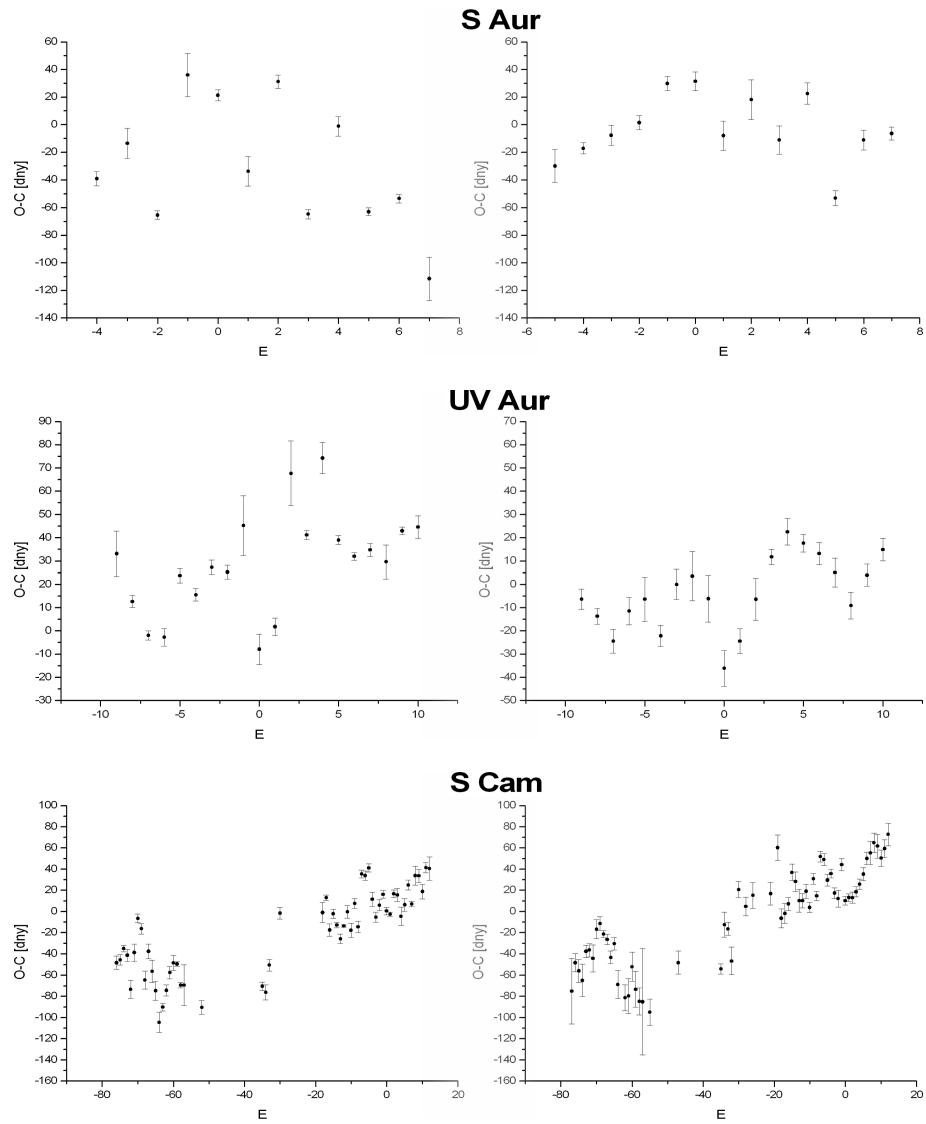
Vyvstává otázka, zda je vůbec možno dané hvězdě přiřadit určitou periodu, která by charakterizovala její světelné změny. Zkoumáme-li světelnou křivku v určitém časovém úseku, je možno určit průměrnou délku cyklu (např. pomocí metody I). Nejlepší charakteristikou je určení závislosti periody na čase, zde využité pozorovací řady však nejsou dostatečně dlouhé ke zjištění této závislosti.

Zpřesnění periody pomocí O-C diagramu se tak stává obtížným či nemožným. Tuto metodu lze použít pouze v časovém úseku, v němž je perioda poměrně stabilní. Vzhledem k převaze vizuálních pozorování je v tomto případě lepší použít metodu II vzhledem k její robustnosti a menšímu rozptylu výsledných bodů. Pro analýzu stability a správnosti určení periody v oblasti, kde nedochází k jejím velkým změnám, se tedy jeví jako vhodnější metoda II. Dochází-li ve sledovaném časovém intervalu k podstatným změnám O-C, jsou obě metody rovnocenné, případně lze použít kombinaci obou metod. Přesnost samotné metody II klesá se zvyšujícím se rozsahem hodnot O-C. Jak bylo zmíněno výše, je při výběru metody také třeba brát v úvahu celkový tvar křivky.

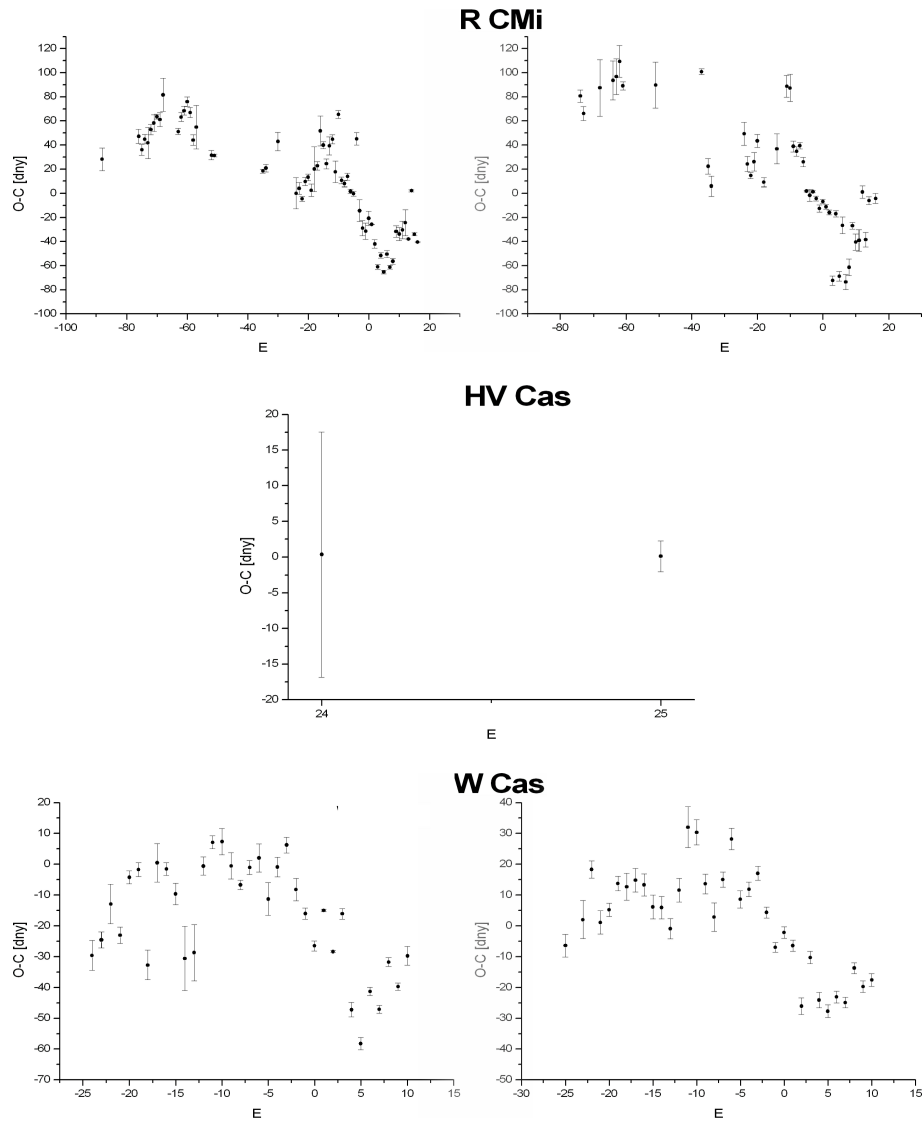
Metoda zpřesnění periody proložením přímkou O-C diagramem zde byla použita jako kontrola pro periody nově určené metodou I.



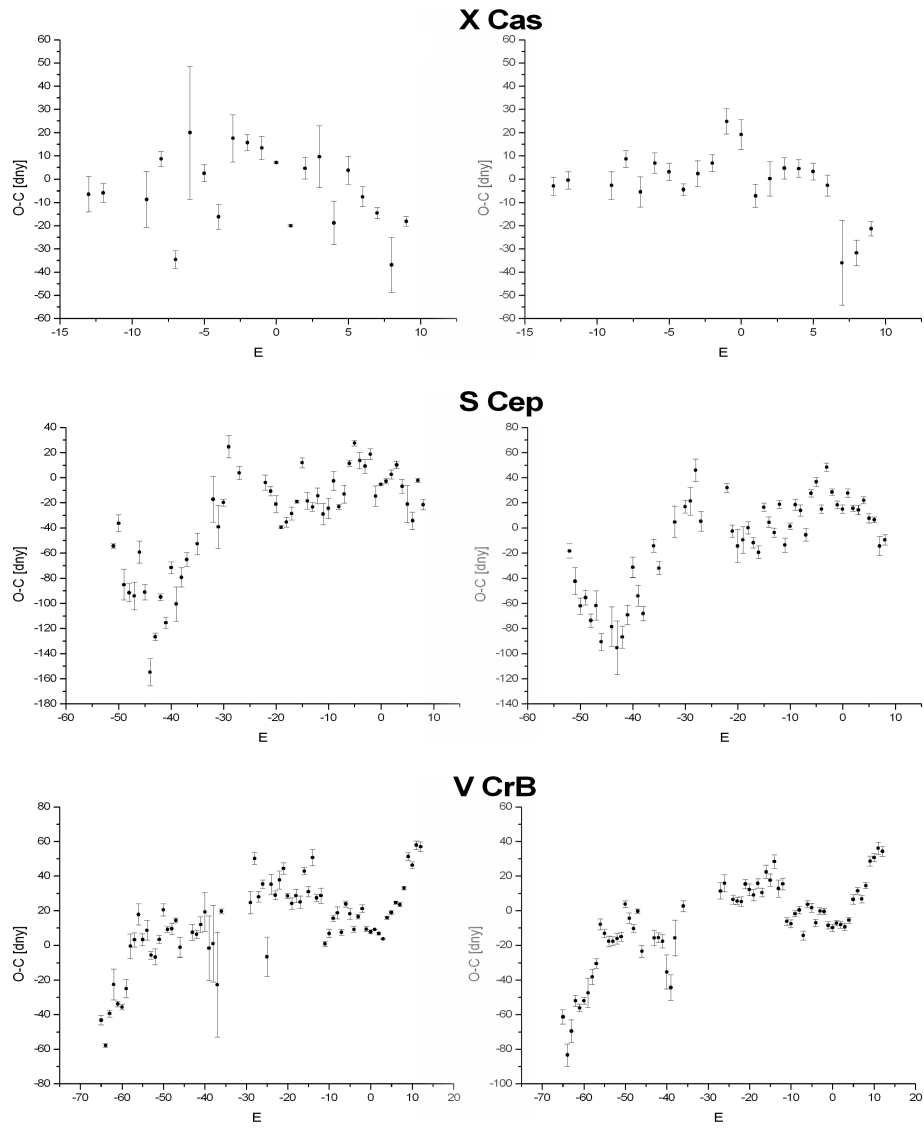
Obr. 7: O-C diagramy mirid. Pro 28 z 30 hvězd je zde po dvou diagramech, přičemž vždy obrázky vlevo byly vytvořeny pomocí metody I, obrázky vpravo metodou II. Pro hvězdy HV Cas a CL Mon je zde jen po jednom grafu z metody II. Veličina E na nezávislé ose je epocha



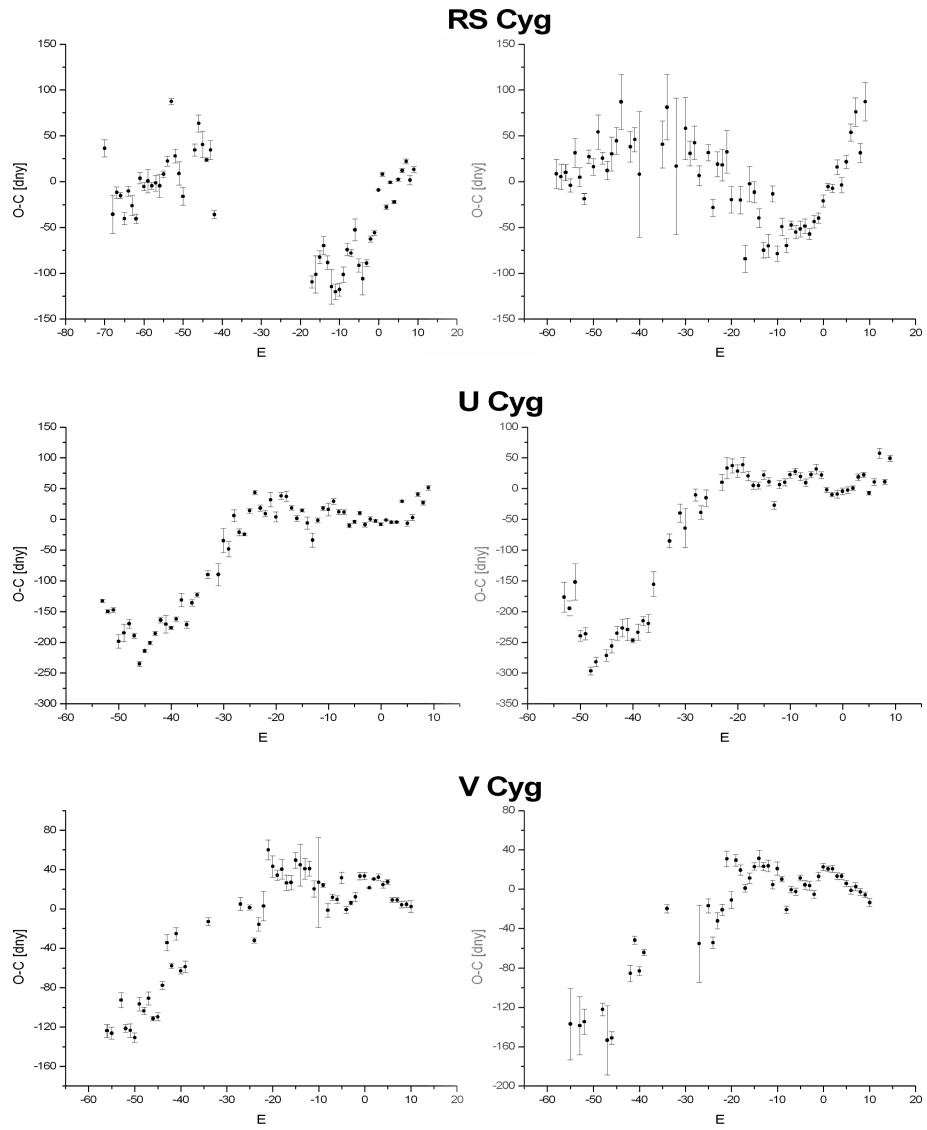
Obr. 7 – Pokračování



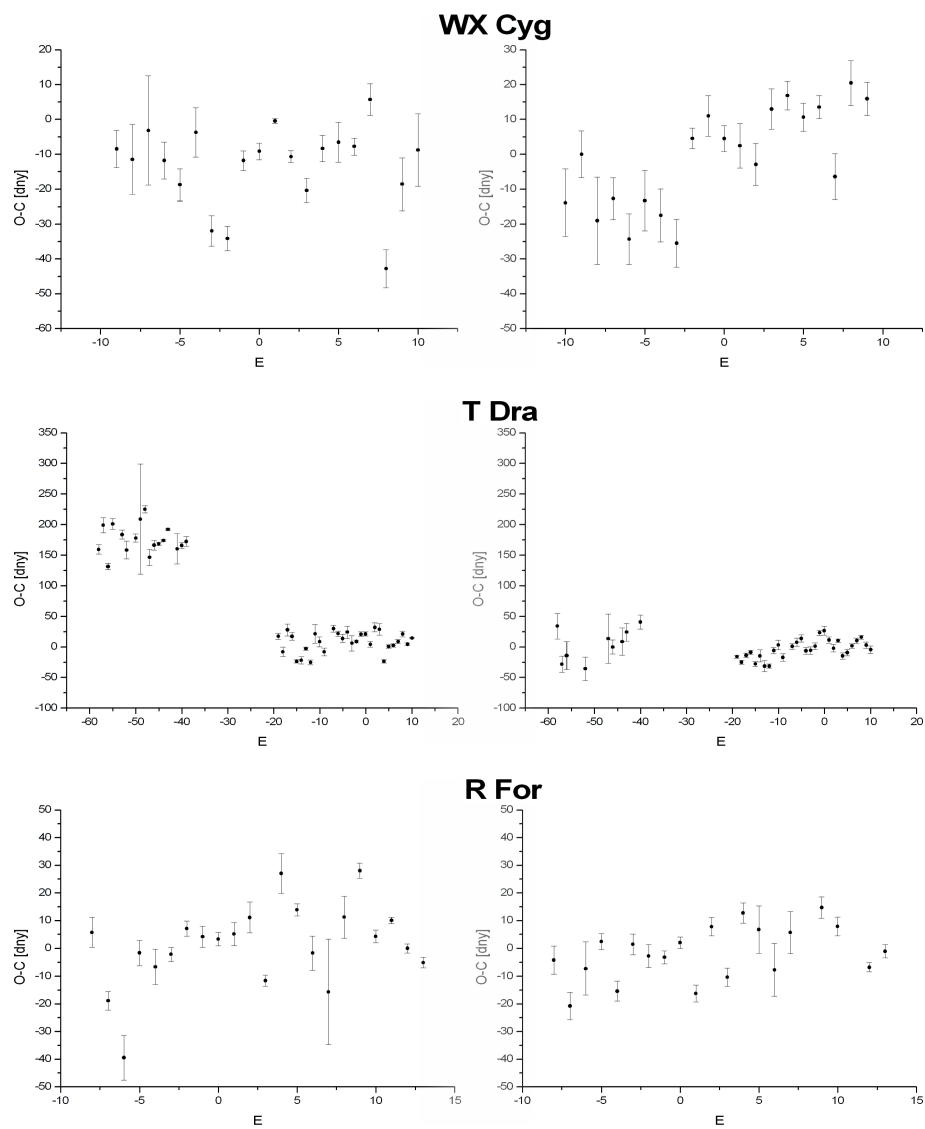
Obr. 7 – Pokračování



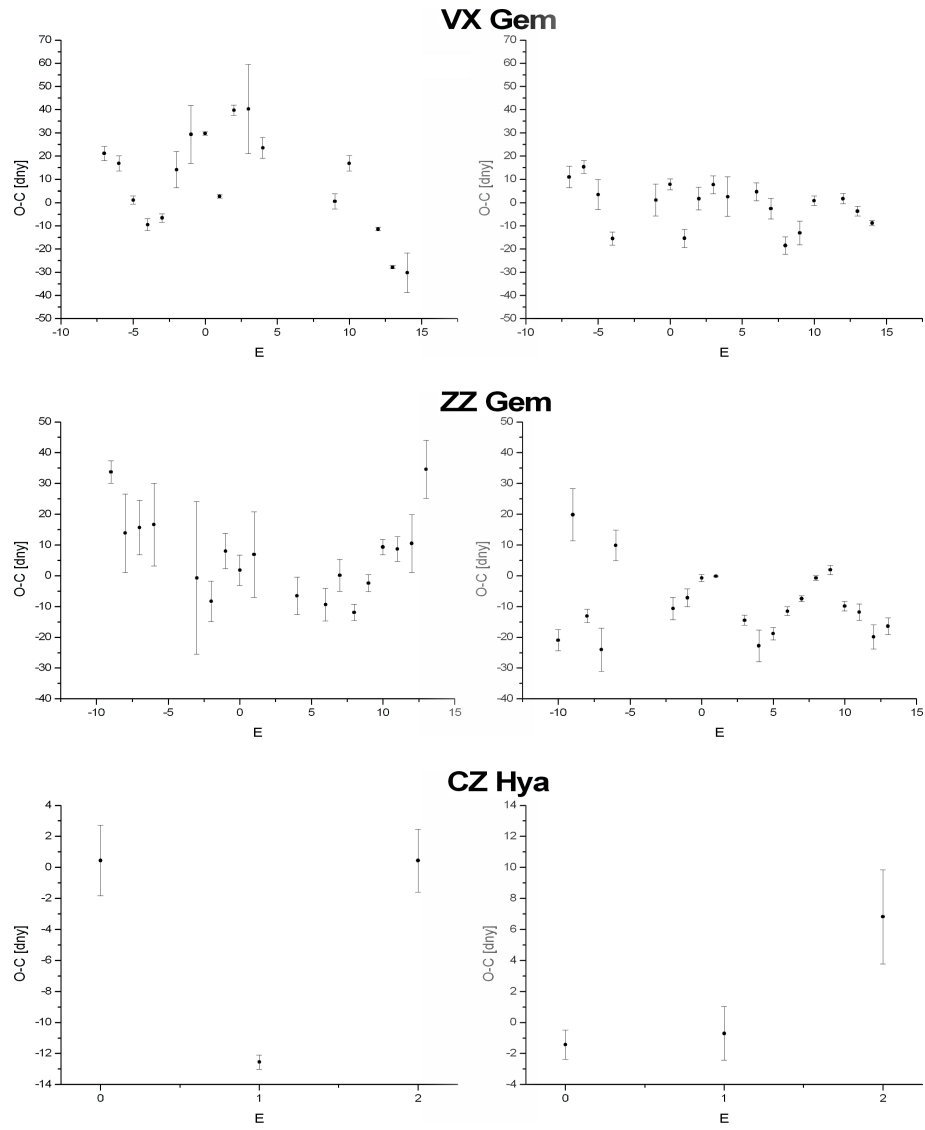
Obr. 7 – Pokračování



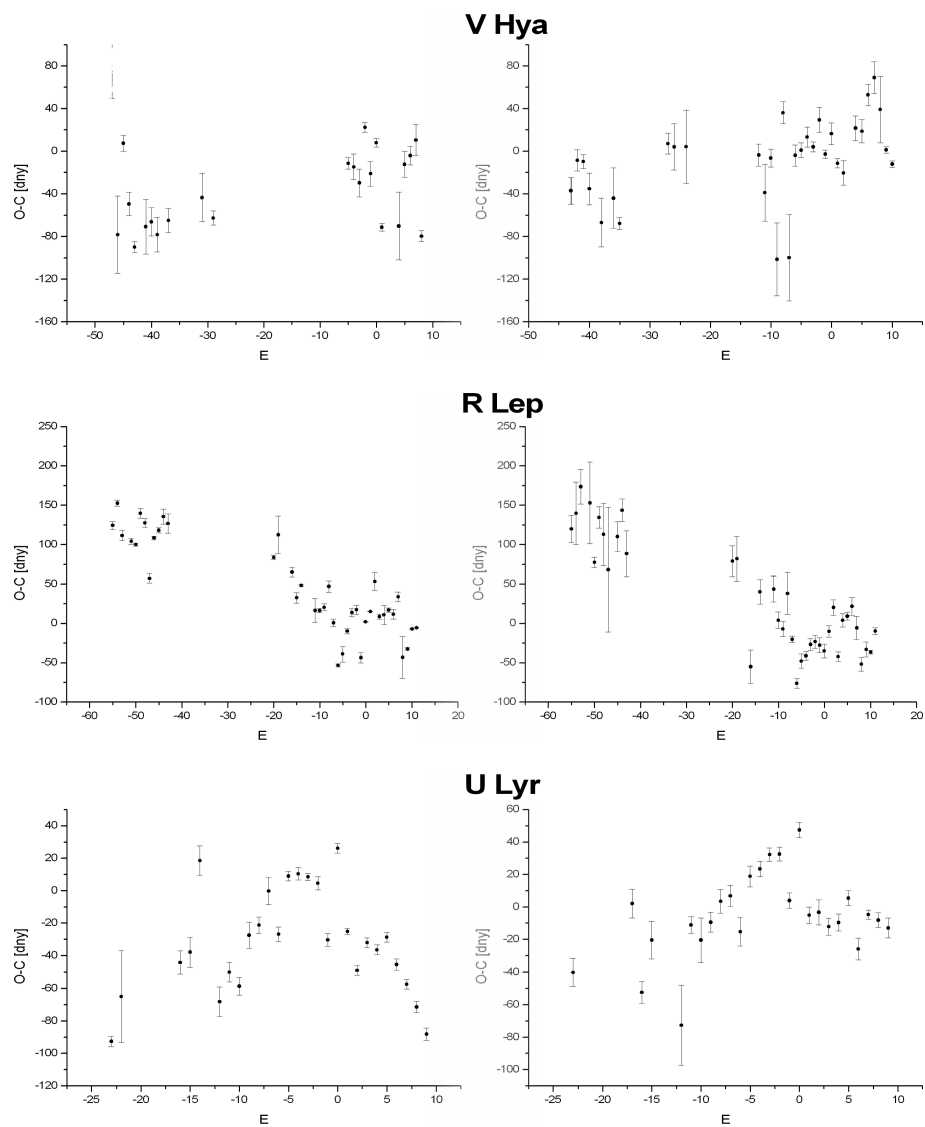
Obr. 7 – Pokračování



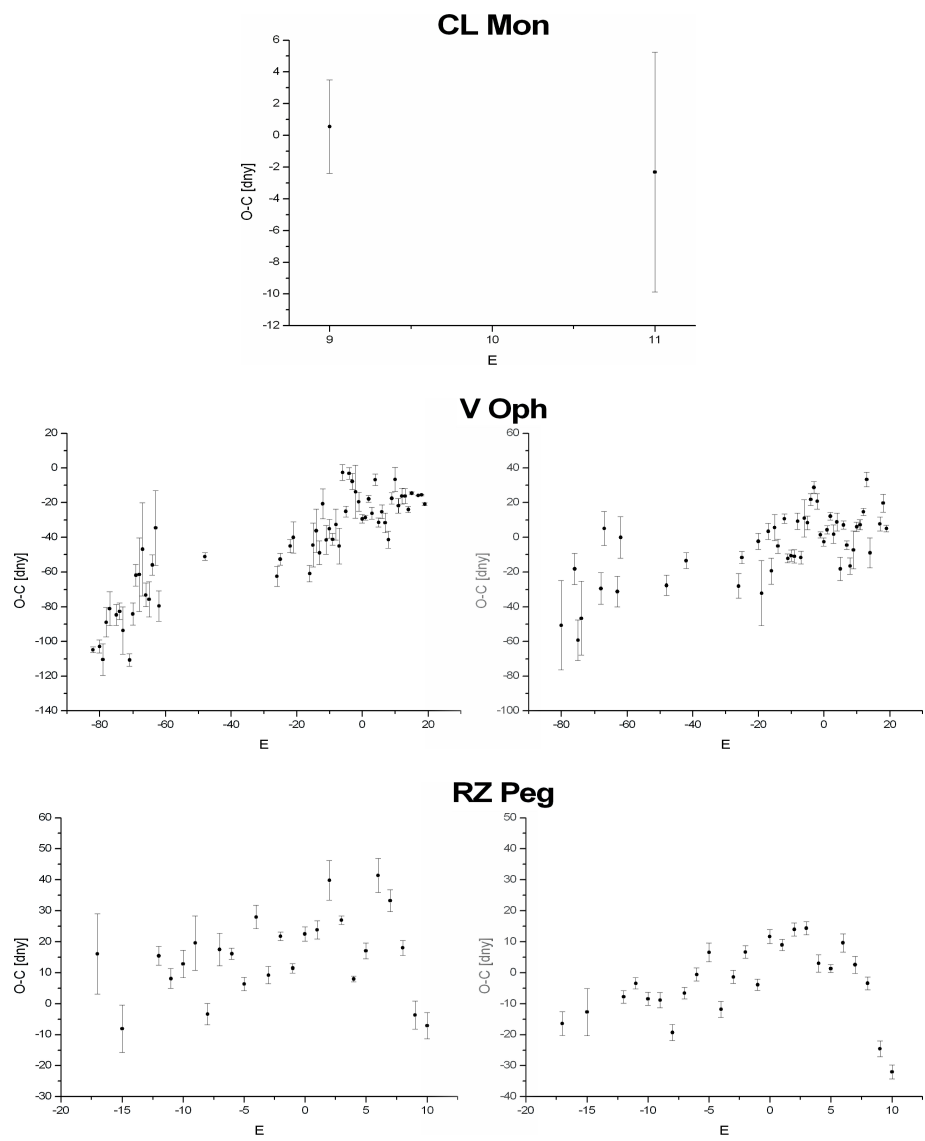
Obr. 7 – Pokračování



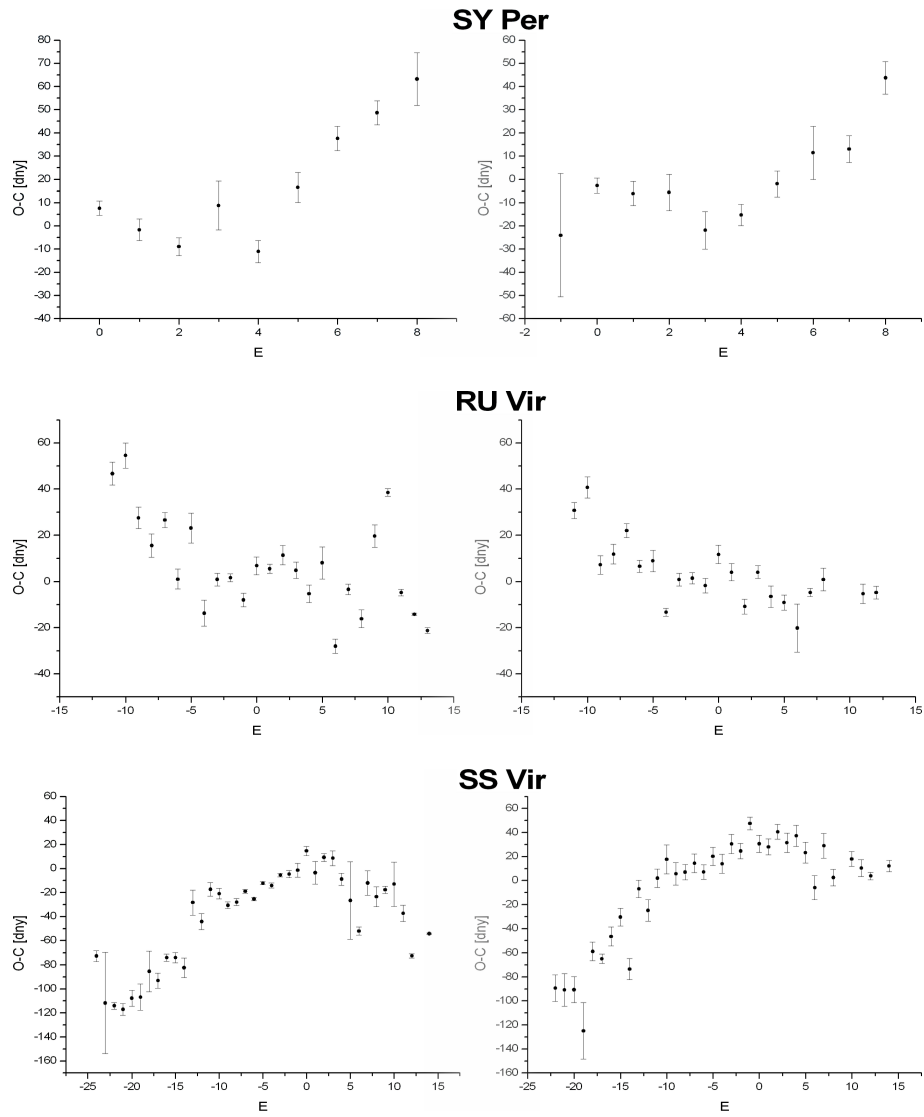
Obr. 7 – Pokračování



Obr. 7 – Pokračování



Obr. 7 – Pokračování



Obr. 7 – Pokračování

9 Světelné křivky

Perioda, diskutovaná v předchozích odstavcích, je jednou z hlavních veličin používaných k popisu světelných změn proměnných hvězd. Dalším důležitým zdrojem informací o hvězdě je samotný tvar světelné křivky, z něž lze dále určovat také další veličiny (amplituda, faktor f , ...). Tvar světelných změn vypovídá o změnách ve vnějších vrstvách hvězdy během pulzu. Dochází zde ke změnám teploty, hustoty a rychlosti pohybu látky vůči pozorovateli, což se projeví změnou zářivého výkonu a přerozdělením energie ve spektru vlivem vzniku a zániku určitých spektrálních čar a přesunu planckovského maxima vyzařování.

9.1 Proložení

Zpravidla je odhad tvaru světelné křivky určován proložením vhodného polynomu napozorovanými daty. U mirid dochází nejen k pravidelným změnám během jisté dané periody, ale proměnnost hvězdy se projevuje i v dalších charakteristikách. Především dochází ke změnám v amplitudě a střední jasnosti hvězdy. Funkce pro proložení byla proto sestavena ze tří polynomů,

$$F = f_{\text{amp}} \cdot f_{\text{main}} + f_{\text{mean}}.$$

Polynomy f_{amp} , f_{main} a f_{mean} reprezentují proměnnost amplitudy, hlavní periodickou složku a změny střední jasnosti. Tyto polynomy jsou tvaru

$$f_{\text{amp}} = a_0 + a_1 t + \sum_{k=1}^{n_{\text{amp}}} a_{2k} \cos\left(k\pi \frac{t - t_m}{t_M - t_m}\right) + a_{2k+1} \sin\left(k\pi \frac{t - t_m}{t_M - t_m}\right),$$

$$f_{\text{main}} = \sum_{k=2}^{n_{\text{main}}} b_{2k-3} \cos\left(k\pi \frac{t - M_0}{P}\right) + b_{2k-2} \sin\left(k\pi \frac{t - M_0}{P}\right),$$

$$f_{\text{mean}} = c_0 + c_1 t + \sum_{k=1}^{n_{\text{mean}}} c_{2k} \cos\left(k\pi \frac{t - t_m}{t_M - t_m}\right) + c_{2k+1} \sin\left(k\pi \frac{t - t_m}{t_M - t_m}\right),$$

kde t_m a t_M jsou spodní a horní časové hranice prokládaného intervalu, P je perioda a M_0 okamžik primárního maxima. Při prokládání bylo opět použito metody robustní regrese.

Protože ve funkci figuruje součin polynomů, nelze provést proložení přímo metodou lineární regrese. Jednou z možností je zafixovat f_{amp} a proložit funkci F , nyní již jednoduchý polynom. Poté vezmeme výsledný polynom f_{main} jako pevný a proložením zjistíme koeficienty polynomu f_{amp} . Takovouto iterací získáme výslednou křivku. V tomto případě

však již není možné klasickou metodou lineární regrese určit nejistotu proložení. Proto byl zvolen linearizační postup, který toto umožňuje.

Každý koeficient v polynomu považujeme za součet jisté konstantní hodnoty a a malé opravy Δa . Zavedeme-li dále substituci $T = t - M_0/P$, dostaneme funkci

$$F = [(a_0 + \Delta a_0) + (a_1 + \Delta a_1)t + \dots] \cdot [(b_1 + \Delta b_1) \cos(\pi T) + (b_2 + \Delta b_2) \sin(\pi T) + \dots] + c_0 + c_1 t + \dots$$

Předpokladem je, že opravy jsou malé, proto po roznásobení polynomů můžeme zanedbat členy, kde figuruje vzájemný součin dvou z nich. Roznásobením tedy dostaneme lineární kombinaci funkcí pro klasickou lineární regresi. Protože se zde jedná o součin dvou polynomů, může při hledání koeficientů nastat problém škálování (soustava obsahuje o jeden koeficient více než je nutné). Proto je vhodné jeden zvolený koeficient zafixovat na pevnou hodnotu. V tomto případě byla za první koeficient hlavního polynomu b_1 dosazena hodnota 1. Výsledná funkce tedy bude mít tvar

$$F = [a_0 + a_1 t + \dots] \cdot [\cos(\pi T) + b_2 \sin(\pi T) + \dots] + \Delta a_0 [\cos(\pi T) + b_2 \sin(\pi T) + \dots] + \Delta a_1 t [\cos(\pi T) + b_2 \sin(\pi T) + \dots] + \dots + \Delta b_2 \sin(\pi T) [a_0 + a_1 t + \dots] + \dots c_0 + c_1 t + \dots$$

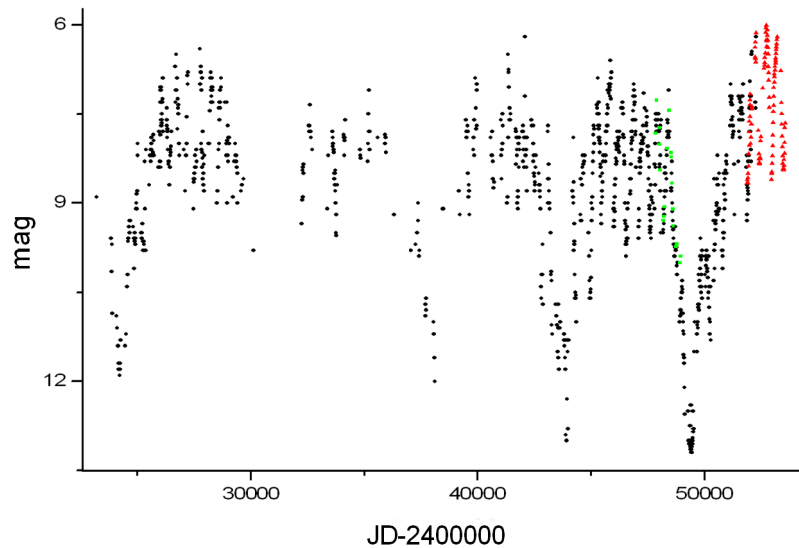
Výsledné koeficienty jsou pak součtem původního odhadu a oprav, získaných v jednotlivých iteračních krocích. V tomto případě bylo použito 5 iterací.

Váhy použitých bodů jsou součinem vah z převodu na normální body a průměru vah pro daný soubor z určování O-C diagramu metodou II.

Proložení křivky je také jedním ze způsobů kontroly správnosti periody. Je-li perioda správná či správně blízká, křivka dobře sleduje body určené pozorováním. S nesprávně určenou periodou se začne křivka se zvyšující se vzdáleností od primárního extrému odchylovat od bodů a výsledky proložení se stávají nesmyslnými. Jak bylo zjištěno pomocí O-C diagramů, perioda je u velké části zkoumaných hvězd nestabilní v rámci použitého časového úseku. Je také možno předpokládat, že tyto nestability by se projevíly u všech třiceti hvězd, jestliže by byly k dispozici u všech dostatečně dlouhé pozorovací řady. Chceme-li tedy zjistit tvar světelné křivky proložení, je třeba vybrat takový časový úsek kolem primárního extrému, v němž je perioda relativně stabilní.

Dále se v datových souborech objevují velké mezery (i několik desítek period), které znehodnocují výsledek proložení. Z těchto důvodů byl u hvězd s dlouhými pozorovacími řadami použit vždy jen určitý úsek kolem primárního maxima⁵.

⁵S Cam, R CMi, S Cep, V CrB, RS Cyg, U Cyg, V Cyg, T Dra, V Hya, R Lep, V Oph, SS Vir



Obr. 8: Světelná křivka hvězdy V Hya, u níž se projevují pravidelné změny střední jasnosti.

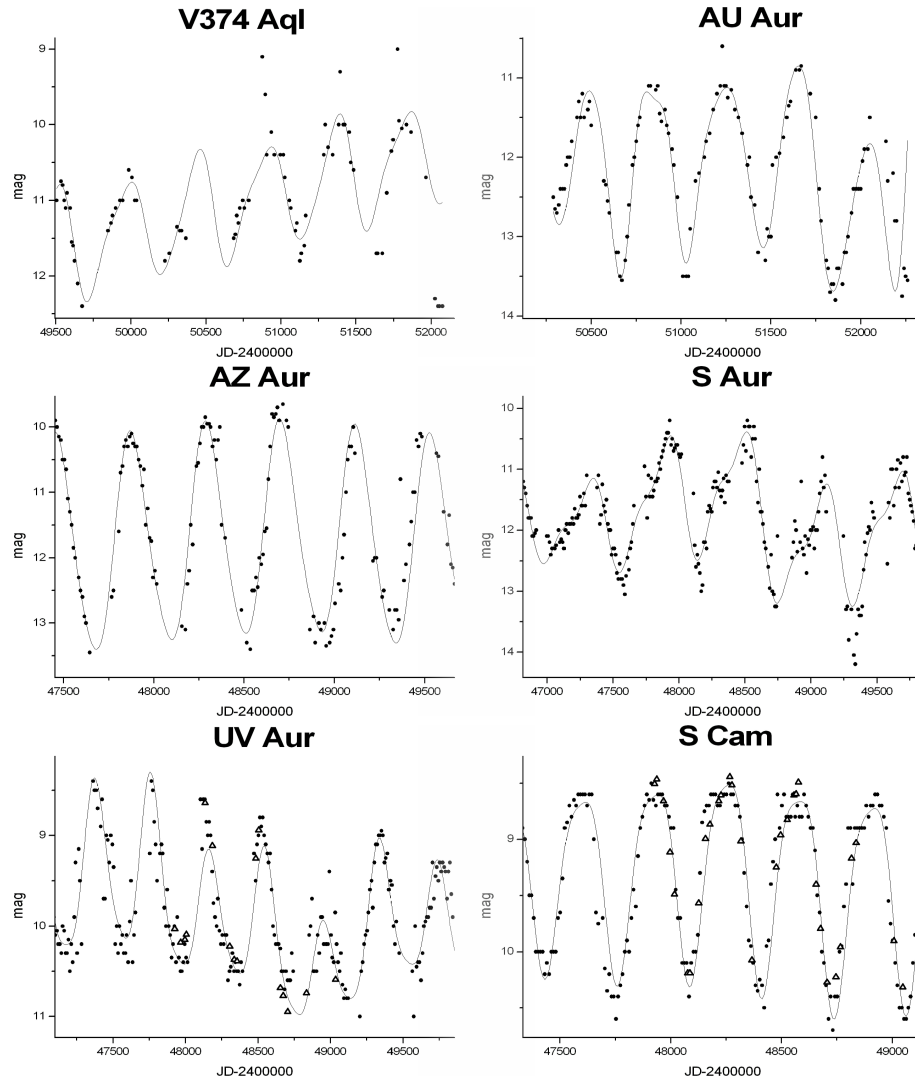
Jak je vidět z Obr. 9, nedaří se ani takto v některých místech křivku dobře aproximovat. Podstatným změnám podléhá i amplituda a střední hodnota jasnosti hvězdy. Tyto změny jsou prakticky neustálé a probíhají na různých časových škálách. Amplituda se například může podstatně měnit periodu od periody či může po několik period zůstat více méně stabilní. Amplitudy těchto změn jsou zpravidla v rozsahu zlomků magnitudy až jedna mag. Změny jsou zpravidla větší u hvězd s větší amplitudou základní, pravidelné proměnnosti. Podobně je tomu u střední hodnoty jasnosti. Zde mohou být rozsahy změn ještě větší.

Zajímavým případem je hvězda V Hya (Obr. 8), u níž se projevují více méně pravidelné změny střední jasnosti zhruba o 3,5 mag, přičemž průměrná amplituda základní proměnnosti je asi o magnitudu menší. Perioda těchto změn se podle různých měření pohybuje mezi 6000 a 6500 dny. Hvězda je pravděpodobně na konci svého pobytu na AGB a nachází se ve fázi super větru. Hvězda je jednou ze složek dvojhvězdy a perioda oběhu přibližně souhlasí s periodickým zeslabováním hvězdy. Podle Knapp et al. (1999) dochází k periodickému zakrývání hvězdy oblakem, vzniklým díky silnému hvězdnému větru. Tento oblak je udržován na místě gravitačním působením jejího souputníka. Podobný tvar křivky je pozorovatelný i u hvězdy R Lep, kde jsou změny plynulejší a je zde menší poměr mezi amplitudou změn střední jasnosti a základní proměnnosti (cca 2,7/3,5).

Při bližším pohledu na pozorování z CCD je vidět, že se na světelné křivce projevují i krátkodobější změny (kratší než jedna perioda) a tvar křivky se tak může mírně lišit periodu od periody. Tento jev zpravidla příliš nevádí při prokládání zvolené funkce.

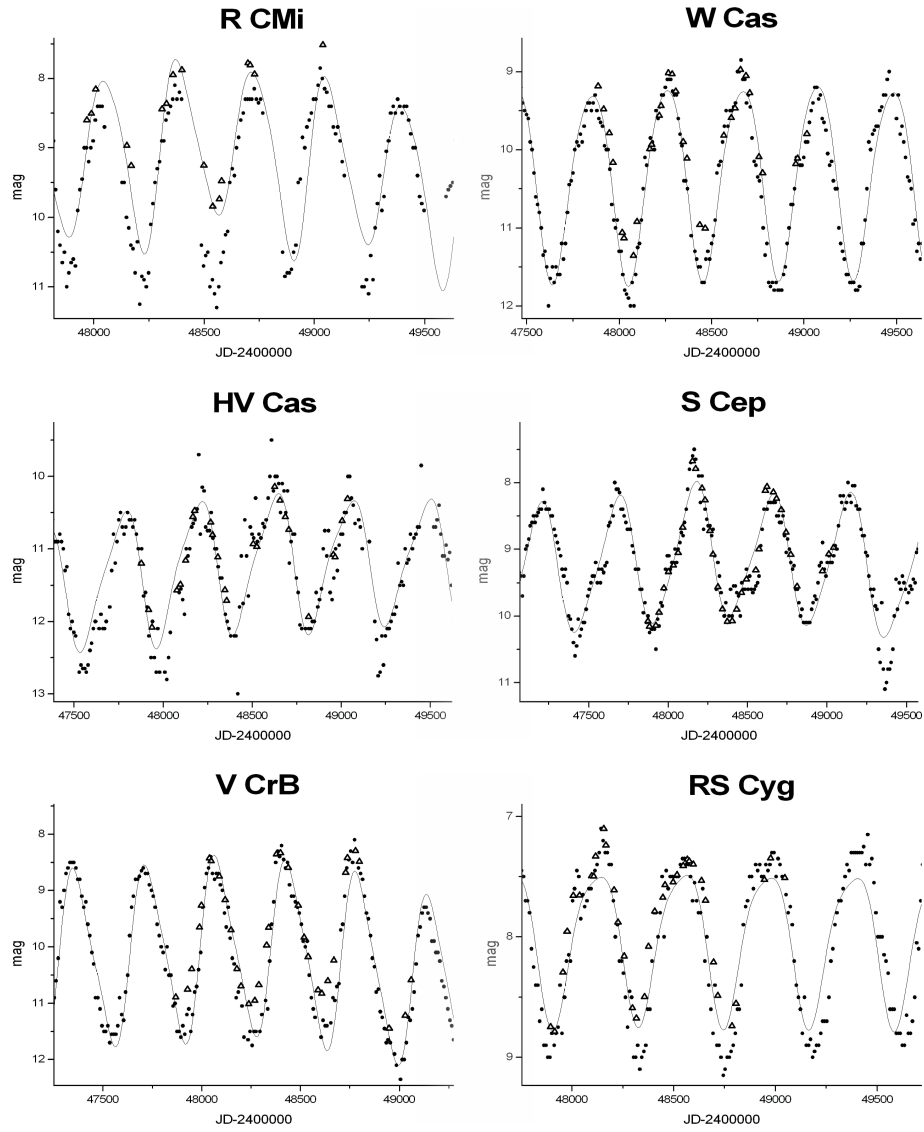
Proložení je však potom horší aproximací skutečné křivky.

Jednou z možností jak překlenout výše zmíněné obtíže se složitostí světelných křivek je uvažovat křivku jako soustavu intervalů o přibližné délce jedné periody. Každý tento interval jednotlivě je pak možné proložit zvolenou funkcí. Zavedeme-li okrajovou podmínku rovnosti funkcí a jejich prvních derivací na okrajích intervalů, je pak možné tyto jednotlivé výsledky spojit do celkové světelné křivky. Touto metodou by bylo možné lépe aproximovala skutečnou světelnou křivku hvězdy a postihnout i jemnější detaily v jejím tvaru narozdíl od proložení celé křivky jednou funkcí, které bere v úvahu pouze „průměrný“ tvar křivky. Podmínkou použití této metody je však její aplikace na přesná pozorování, která opravdu postihují skutečný tvar křivky. Vizuální pozorování tuto podmínku zpravidla nespĺňují. U dat z vizuálních pozorování je naopak vhodné vzít v úvahu spíše „průměrný“ tvar křivky, který na jedné straně stírá menší rozdíly ve tvaru jednotlivých period, ale na druhé straně omezuje vliv nepřesností a falešných nepravidelností v jejím tvaru.

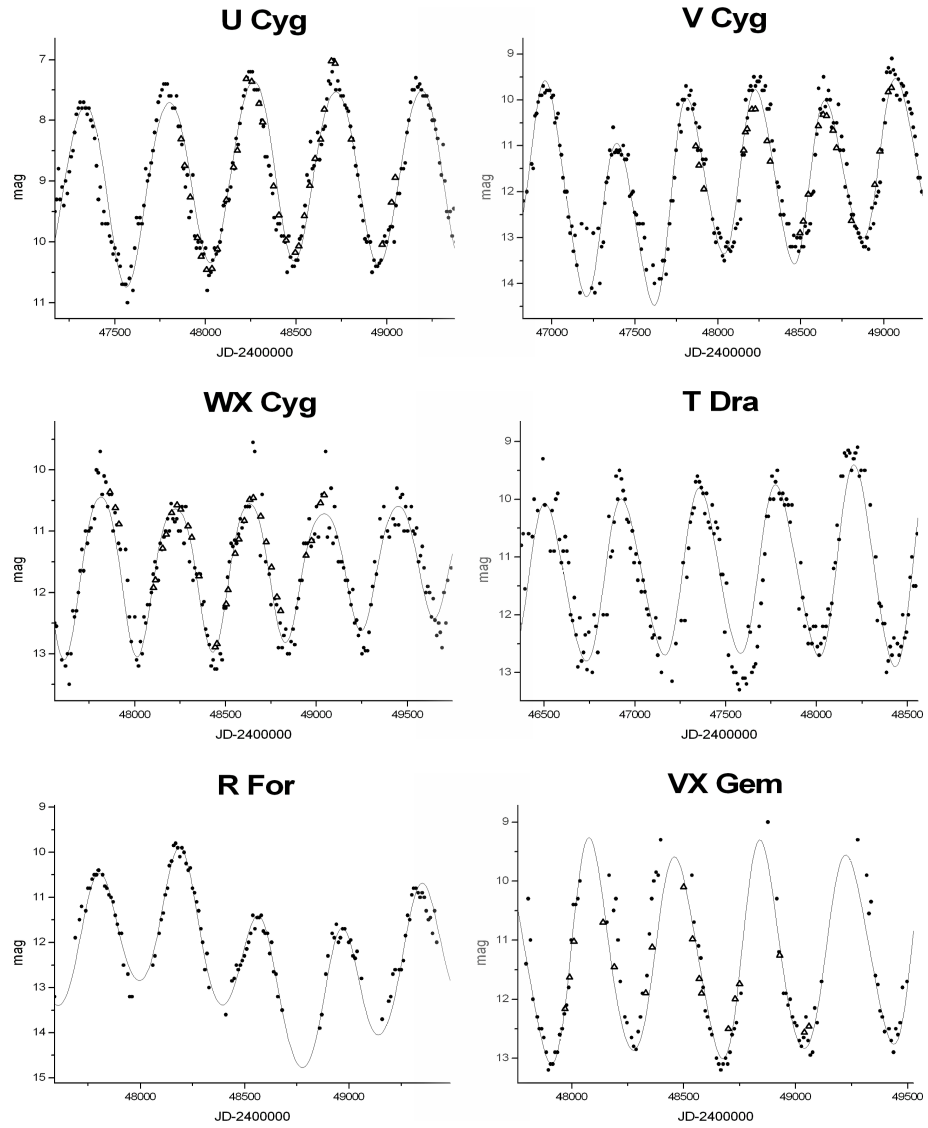


Obr. 9: Úseky proložených křivek kolem primárního maxima. JD – juliánské datum, mag – hvězdná velikost v magnitudách.

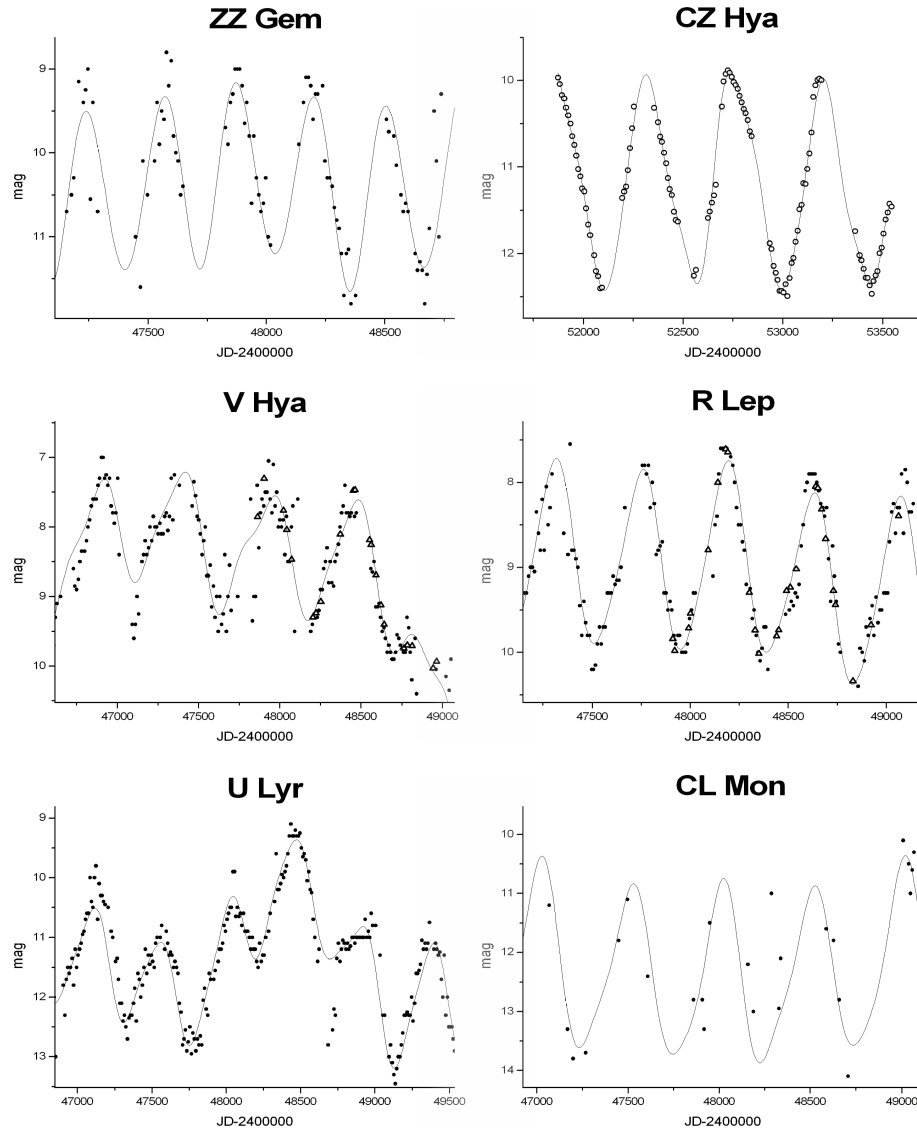
● – vizuální, △ – HIPPARCOS, ○ – ASAS



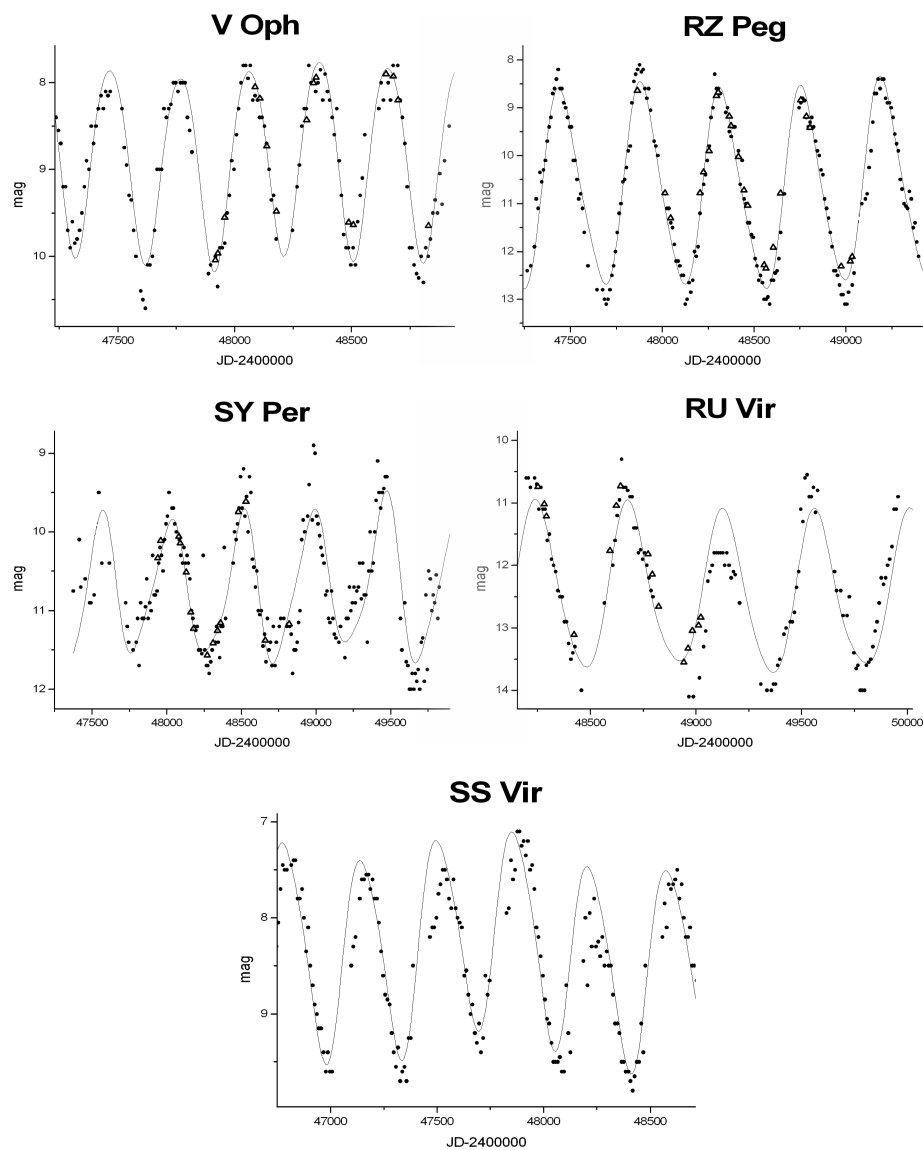
Obr. 9 – Pokračování



Obr. 9 – Pokračování



Obr. 9 – Pokračování

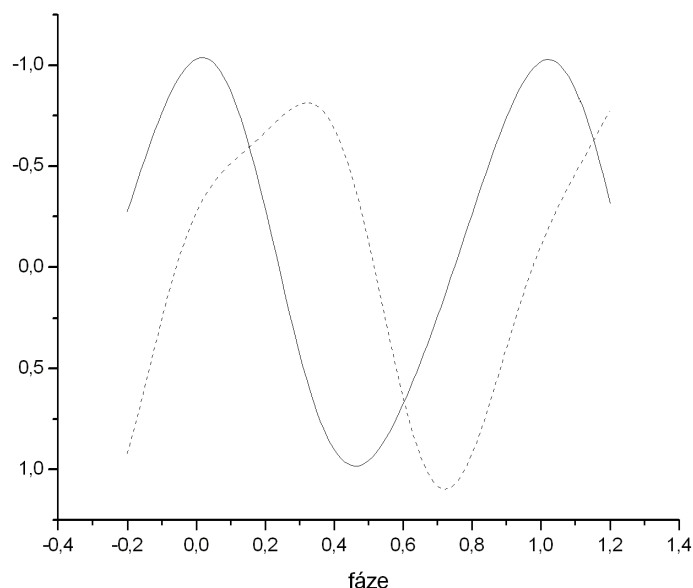


Obr. 9 – Pokračování

9.2 Aplikace komponentové analýzy

Proložení křivek pozorováními získáme u každé hvězdy vektor koeficientů pro členy zvoleného polynomu. V tomto případě se jedná vlastně o tři vektory, jeden pro každý z polynomů. Tvar světelných křivek je u jednotlivých hvězd rozdílný. Je snad možné nalézt jisté společné prvky, pravděpodobně by však toto bylo možné až při analýze pozorovacích řad několikrát delších než těch, které byly použity v této práci. Do změn střední jasnosti a amplitudy hvězdy se také mohou promítat vlivy, které jsou pro danou hvězdu či soustavu

specifické. Příkladem může být případ hvězdy V Hya. Proměnnost amplitudy a střední jasnosti je také často velmi složitá a použitou metodou ji nelze aproximovat s přesností dostatečnou pro jejich porovnávání.



Obr. 10: Graf funkcí pro dvě hlavní komponenty. Plná čára přísluší hlavní komponentě.

Omezíme-li se však na polynom hlavní periodické proměnnosti, stačí již použitá data na porovnání „středního“ tvaru křivky u jednotlivých hvězd. Pro nalezení podobností mezi křivkami byla použita výše popsaná metoda komponentové analýzy. Porovnávat je možné jen vektory o stejné délce, ve všech křivkách byl proto použit stupeň tři (tedy tři dvojice sin, cos). Toto je další důvod, proč nelze touto metodou srovnávat ostatní dva polynomy, neboť zpravidla není možné použít u více hvězd stejný stupeň těchto polynomů.

Tab. 5: Výsledné vlastní hodnoty.

0,86	0,15	0,012	0,0069	0,0044	0,0016
------	------	-------	--------	--------	--------

Tab. 6: Vlastní vektory příslušné dvěma největším vlastním hodnotám.

$$v_1 = (0,99, 0,037, -0,0024, 0,012, 0,088, 0,029)$$

$$v_2 = (0,046, -0,97, 0,038, 0,080, -0,17, 0,14)$$

Vzhledem k tomu, že zde srovnáváme vlastně směry vektorů v šestirozměrném prostoru koeficientů, je třeba nejdříve všechny vektory znormovat na jednotkovou délku. Poté

metodou komponentové analýzy určíme vlastní vektory a k nim příslušné vlastní hodnoty. Vybereme vlastní vektory příslušné k viditelně největším vlastním hodnotám a tyto pak budou hledanými vektory koeficientů „průměrných“ křivek daného souboru hvězd.

V Tab. 5 jsou uvedeny výsledné vlastní hodnoty kovarianční matice. Jako hlavní charakteristiky souboru vektorů byly vybrány dvě největší z nich. Obě jsou více než o řád větší než zbývající čtyři. Hlavní komponenta udává jistý základní tvar, sdílený všemi zde určenými světelnými křivkami. Vektor příslušný ke druhé největší vlastní hodnotě charakterizuje hlavní rozdíly mezi těmito křivkami.

10 Závěr

V části, pojednávající o O-C diagramech, byly porovnávány dvě metody pro jejich vytváření. První metoda spočívá v přímém určení polohy extrémů proložením okolních bodů zvolenou křivkou a tento postup probíhá pro každý extrém individuálně. Tato metoda je tedy vhodná pro detailnější analýzu tvaru křivky v okolí extrémů za předpokladu přesných pozorovacích dat, která jsou rovnoměrně rozložena podél křivky. V případě dat s velkým rozptylem a nerovnoměrným rozložením, jako v případě zde převážně používaných vizuálních pozorování, může vytvářet fiktivní tvary křivek a okamžiky extrémů jsou určeny s menší přesností. Je tak třeba používat nízké stupně polynomů (3-5), což eliminuje výhodu detailní analýzy tvaru křivky.

Metoda II při určování tvaru proložené křivky pracuje se všemi zkoumanými extrémy naráz a tak prakticky odstraňuje problém s nepravidelným rozložením pozorování a případnými krátkými mezerami v datech. Tím, že pracuje dohromady se všemi extrémy, neumožňuje detailnější analýzu tvaru jednotlivých extrémů a předpokládá jejich více méně stejný tvar. Tento předpoklad sice není zpravidla oprávněný, u vizuálních pozorování lze však tuto aproximaci použít, neboť zde jsou individuální tvary extrémů překryty nepřesnostmi a velkým rozptylem bodů.

Protože druhá metoda používá pouze jeden tvar křivky pro všechny extrémy, snižuje rozptyl bodů v O-C diagramu pro menší rozsahy hodnot O-C. Pro rozsah od přibližně 80 až 100 dnů jsou v tomto ohledu metody rovnocenné. Se vzrůstajícím rozsahem hodnot O-C také klesá přesnost určení bodů metodou II. U rozsahů větších než 200 dnů je tak často vhodné použít kombinaci obou metod, tedy výsledky metody I vzít jako počáteční odhad. Při volbě metody je také třeba brát v úvahu celkový tvar křivky. Jsou-li tvary extrémů silně deformované (zde např. hvězda V Hya), zvyšuje se při použití metody II podstatně rozptyl bodů O-C a dochází i k vytváření výrazně odlehlých bodů (několik desítek i stovek dnů). V takovémto případě pravděpodobně lépe odpovídají skutečnosti výsledky metody I.

Výsledné O-C diagramy teoreticky umožňují prověřit stabilitu periody zkoumaných hvězd, případně určit, jak se s časem mění. Výsledky potvrzují a rozšiřují analýzy, prove-

dené již dříve různými autory. U hvězd s delšími pozorovacími řadami (několik desítek let) se ukazuje, že u period ke změnám dochází. U hvězd s kratšími pozorovacími řadami (několik let) se tyto změny příliš neprojevují, lze však předpokládat, že kdyby byly k dispozici časově rozsáhlejší soubory pozorování, daly by se i zde tyto změny pozorovat.

Změny lze v zásadě rozdělit do dvou skupin. Krátkodobé fluktuace, které mírně mění periodu cyklus od cyklu. Tyto fluktuace mohou být v rozsahu jednotek dní za periodu, vyskytují se však i skoky, kdy se délka periody změní o několik desítek dní během jednoho až dvou cyklů. Tyto údaje jsou však pouze přibližné, neboť je do značné míry překrývá nepřesnost pozorovacího materiálu. Další typ změn je možno nazvat „zlomové“, neboť způsobují zlomy v O-C diagramu. Jde o zvýšení či snížení délky periody během několika málo cyklů, které poté přetrvává po několik desítek dalších pulzačních cyklů hvězdy. Příčiny těchto změn délky periody nejsou dosud uspokojivě objasněny.

Pro podrobnější analýzu změn period jsou zde použité pozorovací řady příliš krátké. K určení periodicity/aperiodicity, omezenosti amplitudy a dalších vlastností těchto změn by bylo třeba pozorovacích řad o délce několika stovek let. Tyto změny periody však pravděpodobně stále patří k těm relativně krátkodobějším, neboť podle modelů hvězdného vývoje, zmíněných v teoretické části této práce, dochází k velkým změnám periody na podstatně větších časových škálách. Délka historie pozorování mirid však neumožňuje tyto modely ověřit.

Proměnnost periody potvrzuje i proložení křivek celým datovým souborem dané hvězdy. Pro tyto křivky byla perioda z Tab. 4 zadána pevně. U hvězd s dlouhými pozorovacími řadami tedy bylo možno pro proložení použít jen část datového souboru, asi polovinu až třetinu časového úseku pozorování. Kromě základní proměnnosti mirid se u nich projevují i změny ve střední jasnosti a velikosti amplitudy. Tyto změny bývají poměrně složité a použitou prokládanou funkcí je lze s dobrou přesností aproximovat pouze tehdy, zaměříme-li se na interval pokrývající jen několik period. Při použití intervalu více než 10 period se přesnost proložení zhoršuje, pro přibližné určení tvaru křivky je však dostačující.

Z takto zjištěných světelných křivek byla metodou komponentové analýzy určena křivka, která je hlavní složkou všech křivek zde zkoumaných hvězd. Na Obr. 10 a v Tab. 6 je uvedena tato hlavní komponenta a dále největší vedlejší komponenta, která udává hlavní rozdíly mezi jednotlivými křivkami. Posun maxima oproti hlavní komponentě je $0,3P$, což mimo jiné vypovídá o rozdílném faktoru asymetrie f u jednotlivých hvězd

Literatura

- Abia, C., Isern, J., 1997, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **289**, 11
- Abia, C., Isern, J., 2000, *IAUS*, **177**, 89
- Alard, C., Terzan, A., Guibert, J., 1996, *A&AS*, **120**, 275
- Anandarao, B. G., Pottasch, Vaidya, D. B., 1993, *A&A*, **273**, 570
- Anandarao, B. G., Pottasch, S., Seema, P., Vaidya, D. B., 1992, *ASP Conference Series*, **26**, 474
- Barthés, D., Tuchman, Y., Mennessier, M. O., Mattei, J. A., 1993, *AP&SS*, **210**, 139
- Bedding, T. R., Zijlstra, A. A., Jones, A., Foster, G., 1998, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **301**, 1073
- Bergeat, J., Knapik, A., Rutily, B., 1999, *A&A*, **342**, 773
- Bergeat, J., Knapik, A., Rutily, B., 2001, *A&A*, **369**, 178
- Bergeat, J., Sibille, F., Lunel, M., Lefevre, J., 1976, *A&A*, **52**, 227
- Le Bertre, T., Winters, J. M., 1998, *A&A*, **334**, 173
- Boothroyd, A. I., Sackmann, I.-J., 1988, *ApJ*, **328**, 671
- Bowen, G. H., Willson, L. A., 1991, *ApJ*, **375**, L53
- Bowers, P. F., Kerr, F. J., 1977, *A&A*, **57**, 115
- Bujarrabal, V., Cernicharo, J., 1994, *A&A*, **288**, 551
- Creech-Eakman, M. J., Thompson, R. R., 2003, *ASP Conference Series*, , 1036
- Cuntz, M., 1990, *ApJ*, **353**, 255
- Duari, D., Cherchneff, I., Willacy, K., 1999, *A&A*, **341**, L47
- Dušek, J., 2002, *Disertační práce, Masarykova Universita v Brně*
- Epchtein, N., Le Bertre, T., Lépine, J. R. D., 1990, *A&A*, **227**, 82
- Gráf, T., 2003, *Disertační práce, Masarykova Universita v Brně*
- Groenewegen, M. A. T., 1996, *A&A*, **305**, L61
- Groenewegen, M. A. T., van den Hoek, L. B., de Jong, T., 1995, *A&A*, **293**, 381
- Groenewegen, M. A. T., Whitelock, P. A., 1996, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **281**, 1347
- Hartmann, L. W., Dolan, J. F., 1974, *ApJ*, **187**, 151
- Chapman, J. M., Habing, H. J., Killeen, N. E. B., 1995, *ASP Conference Series*, **83**, 113
- Iben, I. Jr., 1991, *IAUS*, **145**, 257
- Jura, M., 1987, *ApJ*, **313**, 743
- Knapik, A., Bergeat, J., Rutily, B., 1999, *A&A*, **344**, 263
- Knapp, G. R., Dobrovolsky, S. I., Ivezić, Z., Young, K., Crosas, M., Mattei, J. A., Rupen, M. P., 1999, *A&A*, **351**, 97
- Lewis, B. M., 1989, *ApJ*, **98**, 181
- Lobel, A., Doyle, J. G., Bagnulo, S., 1999, *A&A*, **343**, 466
- Mantegazza, L., 1996, *A&A*, **315**, 481

- Marsakova, V. I., 1999, *JAAVSO*, **27**, 141
- Meloun, M., Militký, J., 2002, *Kompendium statistického zpracování dat* Academia, Praha
- Mennessier, M. O., 1985, *A&A*, **144**, 463
- Mennessier, M. O., Barthes, D. Mattei, J. A., 1990, *ASPC*, **11**, 379
- Mikulášek, Z., 2002, *Proměnné hvězdy (skripta)*
- Mikulášek, Z., Gráf, T., 2005, *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso*, **35**, 1
- Mikulášek, Z., Wolf, M., Zejda, M., Pecharová, P., 2006, *Astrophysics and Space Science Journal*, (in print)
- Mikulášek, Z., Žižňovský, J., Zverko, J., Polosukhina, N. S., 2003, *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso*, **33**, 29
- Ohnaka, K., Tsuji, T., Aoki, W., 2000, *A&A*, **353**, 528
- Olofsson, H., Eriksson, K., Gustafsson, B., Carlström, U., 1993, *ApJ Supp. Ser.*, **87**, 305
- Percy, J. R., Colivas, T., 1999, *A&A*, **111**, 94
- Reid, M. J., Goldston, J. E., 2002, *ApJ*, **568**, 931
- Reid, M. J., Menten, K. M., 1997, *ApJ*, **476**, 327
- Richter, H., 2003, *Disertace, Technische Universität Berlin*
- Rose, W. K., 1996, *ASP Conference Series*, **99**, 196
- Scholz, M., Wood, P. R., 2000, *A&A*, **362**, 1065
- Smith, L. I., 2002, *A tutorial on Principal Components Analysis*
- Smith, B. J., Leisawitz, D., Castelaz, M. W., Luttermoser, D., 2002, *ApJ*, **123**, 948
- Štefl, Z., 2005, *Studijní text k přednášce Fyzika chladných hvězd*
- Tuchman, Y., 1991, *ApJ*, **383**, 779
- Vanýsek, V., 1980, *Základy astronomie a astrofyziky* Academia, Praha
- Vardya, M. S., 1988, *A&AS*, **73**, 181
- Vassiliadis, E., Wood, P. R., 1993, *ApJ*, **413**, 641
- Wannier, P. G., Sahai, R., Anderson, B-G, Johnson, H. R., 1990, *ApJ*, **358**, 251
- Willson, L. A., 1976, *ApJ*, **205**, 172
- Willson, L. A., Hill, S. J., 1979, *ApJ*, **228**, 854
- Wood, P. R., 1990, *ASP Conference Series*, **11**, 355
- Wood, P. R., Sebo, K. M., 1996, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **282**, 958
- Wood, P. R., Vassiliadis, E., 1993, *IAUS*, **155**, 291
- Ya'ari, A., Tuchman, Y., 1999, *ApJ*, **514**, L35