

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

DOPPLEROVSKÉ ZOBRAZOVÁNÍ POVRCHU
HORKÝCH HVĚZD

Diplomová práce

Jan Skalický

Brno 2008

Prohlašuji, že jsem práci napsal samostatně a všechny použité prameny jsem uvedl v seznamu literatury.

Jan Skalický
V Brně 14. května 2008

Na tomto místě bych rád poděkoval Mgr. Jířímu Krtičkovi, Ph.D. za možnost věnovat se tomuto tématu a jeho trpělivé vedení. Další poděkování patří mým rodičům za podporu během studia, bez které by tato práce rovněž nevznikla.

Anotace

Dopplerovské zobrazování (nebo též tomografie) je nepřímou metodou mapování povrchových struktur hvězd a jiných vzdálených astrofyzikálních objektů (např. akrečních disků). V případě hvězd je možné detekovat povrchové skvrny (jejich velikost a rozložení na povrchu) a to jak skvrny slunečního typu (u chladných hvězd) nebo skvrny s neobvyklým chemickým složením (u chemicky pekuliárních hvězd). Právě mapování nehomogenit na povrchu chemicky pekuliárních hvězd je cílem této práce.

Metoda je založená na principu Dopplerova jevu, přesněji na skutečnosti, že jednotlivé body na povrchu rotující hvězdy mohou mít v daný okamžik různou radiální rychlost a tedy i vlnová délka záření, které k nám od tohoto bodu přichází, je různě posunuta. Pokud se na povrchu hvězdy vyskytuje nehomogenita, tak na profilu spektrální čáry vznikne nerovnost, která se během rotace hvězdy po profilu přemísťuje. Pomocí profilů získaných během celého rotačního cyklu je možné zpětně zrekonstruovat rozložení skvrn na povrchu.

V práci jsou použity dva přístupy. První z nich je tzv. přímé zobrazování, které je založeno na hledání modelových profilů, které se nejméně liší od pozorovaných. Je diskutováno, pro které konfigurace je tato metoda použitelná a kdy naopak nedává správné výsledky. Dále je vyvinut a popsán formalismus, který umožňuje provést rekonstrukci povrchu pomocí inverze spektrálních profilů. Bohužel se nepodařilo touto metodou získat správné výsledky, její vyladění by znamenalo další výzkum nad rámec této práce.

Abstract

Doppler imaging (or tomography) is indirect method for mapping of stellar surfaces and surface structures of other astrophysical objects (e.g., accretion discs). It allows to reconstruct surface spots (their sizes and distribution) on both cold stars (solar-like spots) and hot stars (abundance inhomogeneities). The aim of this thesis is to describe mapping chemical inhomogeneities on surfaces of chemically peculiar stars.

Doppler imaging is based on the Doppler effect. This means that Doppler shift of emitted light incoming from different points on the surface of rotating star can be also different. In case of surface inhomogeneity, resulting spectral line profile is not smooth, but contains a bump, which is moving across the profile during rotation cycle.

The thesis deals with two various methods. The first one is based on minimization of variation between observed and modelled spectral line profiles. This method is called direct imaging. Advantages and disadvantages as well as suitability of this method for various surface-spot configurations are discussed. The second is surface mapping based on inverse of the line profiles. For this purpose theoretical inverse procedure was developed. However, of testing this method did not provide reasonable results.

Obsah

Úvod	6
1 Chemicky pekuliární hvězdy a magnetická pole	7
1.1 Chemicky pekuliární hvězdy a historie jejich mapování	7
1.2 Chemické složení atmosfér CP hvězd, nehomogenity na jejich povrchu . . .	8
2 Rozšíření spektrálních čar	12
2.1 Mechanismy způsobující rozšíření čar	12
2.2 Rotační rozšíření spektrálních čar	14
3 Základní model pro výpočty	20
3.1 Souřadnice popisující povrch hvězdy	20
3.2 Radiální rychlost, výpočet profilu spektrální čáry	21
3.3 Okrajové ztemnění	23
3.4 Lokální a výsledné profily, povrchové skvrny	24
4 Přímé zobrazování	27
4.1 Minimalizace pro konstantní φ_S	27
4.2 Minimalizace pro konstantní ρ_S	35
4.3 Obecná minimalizace	43
5 Řešení inverze spektrálních profilů	52
5.1 Formulace inverzního problému	52
5.2 Výsledky získané pomocí inverze	53
Závěr	56
Literatura	57

Úvod

Základním problémem astronomického a astrofyzikálního výzkumu je fakt, že naprostá většina objektů, které jsou cílem tohoto bádání, leží v nedosažitelných vzdálenostech. Proto je jediným zdrojem informací o těchto objektech světlo, které k nám od nich přichází. V případě hvězd jsme limitováni ještě tím, že většinu z nich není možné rozlišit jako plošné objekty, ale jeví se jako bodové zdroje světla. Na první pohled to tedy vypadá, že naše možnosti jejich studia jsou značně omezené. Opak je ale pravdou. Existuje řada nepřímých metod, díky kterým můžeme tuto bariéru překonat a dozvědět se o těchto základních kamenech vesmíru mnohem více, než se může zdát.

Jednou ze zmiňovaných nepřímých metod je tzv. dopplerovské mapování (nebo dopplerovská tomografie). Umožňuje nám rekonstruovat rozložení hodnot vybraných veličin na povrchu hvězdy na základě pozorování jejího spektra v různých rotačních fázích. Je možné mapovat například chemické složení nebo povrchové magnetické pole. Cílem této práce je navrhnout, popsat, implementovat a otestovat metodu, pomocí níž bude možné mapovat chemické složení povrchových vrstev atmosfér skupiny horkých hvězd s nestandardním chemickým složením.

Dopplerovské zobrazování se používá ale i pro další druhy objektů, jako například skvrny na povrchu chladných hvězd a akreční disky u interagujících dvojhvězd. Jejich detailní popis ale zasahuje mimo rámec práce, nebude jim tedy věnována větší pozornost.

Kapitola 1

Chemicky pekuliární hvězdy a magnetická pole

1.1 Chemicky pekuliární hvězdy a historie jejich mapování

Chemicky pekuliární (CP) hvězdy tvoří poměrně bohatou množinu horkých hvězd (hvězd hlavní posloupnosti). Jejich označení je důsledkem jejich podivných – pekuliárních spekter, ve kterých je možné pozorovat intenzivní čáry prvků, které se obvykle ve hvězdných atmosférách vyskytují v menším množství. Důvodem zvláštních charakterů spekter může být ale i kromě zvýšené abundance některých prvků naopak abundance snižená. Efektivní teploty chemicky pekuliárních hvězd je možné vymezit spodní hranicí 6000 K a horní 30000 K (Mikulášek & Krtička, 2007).

Zajímavou skupinou těchto hvězd jsou magnetické CP hvězdy (označované také mCP). Tyto hvězdy vykazují fotometrickou proměnnost, stejně jako proměnnost spektra a magnetického pole. Všechny tyto změny jsou periodické a jejich periody se shodují. To vedlo k hypotéze, že tyto změny jsou zapříčiněny rotací hvězdy a perioda je rovna periodě rotace (viz Stibbs, 1950). Podle této hypotézy není rozložení chemických prvků na povrchu hvězdy rovnoměrné, ale vyskytují se zde skvrny s jejich zvýšenou abundancí, jejichž rozložení může (resp. v některých případech tomu tak je) souviset s globálním magnetickým polem hvězdy. Během rotace jsou na povrchu viditelné různé skvrny, což způsobuje výše zmíněnou proměnnost. Tento model se nazývá model skloněného rotátoru. Předpokládá, že rotační osa, která nemusí být kolmá na směr k pozorovateli, a osa magnetického pole nejsou rovnoběžné.

Na základě modelu skloněného rotátoru byl vytvořen v polovině 20. století (Deutsch 1958, 1970) první postup mapování povrchových nehomogenit pomocí proměnných profilů spektrálních čar. Šlo o harmonickou analýzu spektrálních charakteristik jako je ekvivalentní šířka a radiální rychlost. Pojem *dopplerovské zobrazování* zavedl Goncharov (1982), který vybudoval formalismus pro inverzi proměnných rotačně rozšířených profilů. Tato metoda a její modifikace byly používány pro rekonstrukci povrchových skvrn u chladných hvězd

stejně jako u hvězd horkých. Z prací věnujících se mapování skvrn na povrchu chladných hvězdách (zde se jedná o skvrny s rozdílnou teplotou, nikoliv chemickým složením) je možné zmínit například Vogt & Penrod (1983), Vogt, Penrod & Hatzes (1987) nebo Kürster (1993). Pokud se podíváme na studie týkající se Ap hvězd, tak můžeme zmínit článek autorek Khokhlova & Ryabchikova (1975) nebo přehledovou práci Piskunova (1990) a další práce již zmíněných autorů (Rice, 1996 a Hatzes, 1996). Existuje i tzv. magnetické dopplerovské mapování (např. Piskunov & Kochukhov, 2002), kdy lze ze zeemanovsky rozštěpených spekter (pozorovaných pomocí spektrografu se Zeemanovým analyzátozem) mapovat kromě distribuce chemických prvků na povrchu hvězdy také lokální magnetická pole.

Mezi hvězdy, které byly mapovány patří dnes tři desítky zástupců, z nichž pouze jediná není magnetickou hvězdou. Prvky, jejichž rozložení po povrchu se zkoumá, jsou ty, u nichž pozorujeme největší anomálie. Jsou to (podle Ryabchikova, 2003) helium (He) u heliově slabých (He-weak) a silných (He-strong) hvězd, křemík (Si) a helium u křemíkových hvězd a křemík, chrom (Cr), železo (Fe), vzácné zeminy u CrSi a Sr-Cr-Eu hvězd a některé další prvky. V případě křemíkové hvězdy 56 Ari se podařilo získat mapy povrchu v rozmezí let 1986 až 2001 (více než 5700 rotačních cyklů) a rozložení nehomogenit na povrchu se během této doby nezměnilo (Ryabchikova, 2003). Dá se tedy očekávat, že jsou tyto struktury stabilní a v čase se nemění. To je rozdíl oproti chladným hvězdám, mezi které patří i Slunce, v jejichž případě se počet a rozložení skvrn mění v průběhu cyklů aktivity.

Z výsledků magnetické dopplerovské tomografie (Piskunov & Kochukhov, 2002) vyplývá, že v případě mCP hvězd existuje korelace mezi strukturou magnetického pole a rozložením povrchových nehomogenit. Prvky jako He, Li, Cl, vzácné zeminy se koncentrují v blízkosti magnetických pólů a podél magnetického rovníku je možné nalézt skvrny kyslíku (O). Cr a Fe se vyskytují v místech mezi póly a rovníkem, v tomto případě je spojení s geometrií magnetického pole méně prokazatelné. Existují ale i prvky (Ca), které se na povrchu hvězd vyskytují bez závislosti na magnetickém poli. Rozložení těchto nehomogenit (skvrn) musí být tedy závislé i na jiných faktorech než je konfigurace magnetického pole.

1.2 Chemické složení atmosfér CP hvězd, nehomogenity na jejich povrchu

Výskyt skvrn na povrchu, tedy chemických nehomogenit v horizontálním směru, může souviset s přítomností magnetického pole. Jaké jevy ale způsobují, že atomy daného prvku neklesnou do hlubších vrstev atmosféry, nebo je naopak neodnese hvězdný vítr? Jakými mechanismy je zapříčiněna nehomogenita právě ve směru vertikálním?

U některých prvků, které se projevují ve spektru, pozorujeme jejich rozdílnou abundanci v různých optických hloubkách. To se projevuje tak, že není možné s jednou hodnotou abundance namodelovat současně střed a křídla čáry, které pozorujeme ve spektrech chemicky pekuliárních hvězd. Zároveň se liší abundance téhož prvku určená z jeho slabých a silných čar. Vertikální stratifikace abundance je poměrně složitý jev pro modelování. Proto dnes

existuje pouze několik hvězd, pro které byl vertikální průběh abundance modelován pro více než jeden prvek. Ukazují se rovněž rozdíly mezi jednotlivými izotopy téhož prvku. Vertikální stratifikace prvků je důsledkem dvou protichůdných jevů. První z nich je gravitační usazování, kdy v důsledku tíhové síly částice klesají do nižších vrstev. Druhým podstatným efektem je difúze pod vlivem zářivé síly. Zářivá difúze se v podstatné míře vyskytuje pouze u hvězd s relativně vysokou efektivní teplotou a ovlivňuje pouze povrchové části hvězdy. U chladných hvězd se uplatňuje ve vyšší míře konvekce, která neumožní vznik zářivé difúze. Naopak hvězdy s nejvyššími efektivními teplotami (spektrální typ O) chemickou pekuliaritu nevykazují, protože jejímu vzniku zabrání silný hvězdný vítr.

Nejdříve se podíváme na difúzi v případě nemagnetických hvězd. Difúzi máme na mysli vzájemný pohyb některých prvků vůči jiným. Nemagnetické horké hvězdy, které rotují relativně pomalu (ale dostatečně rychle pro dopplerovské mapování) můžeme popsat za předpokladu sférické symetrie. V případě těchto hvězd může způsobit difúze vertikální stratifikaci jednotlivých prvků, ale můžeme očekávat, že se neprojeví v podobě povrchových (horizontálních) nehomogenit. Koncentraci c_i prvku i můžeme popsat rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(c_i v_D(i)), \quad (1.1)$$

v níž vystupuje difúzní rychlost, kterou můžeme přepsat (podle Babel & Michaud, 1991)

$$v_D(i) = D_i \left\{ -\frac{\partial c_i}{\partial r} + \frac{A_i m_p}{kT} (g_{\text{rad};i} - g) + \alpha \frac{\partial \ln T}{\partial r} + \dots \right\}. \quad (1.2)$$

Ve vztahu 1.2 je D_i difúzní koeficient, který závisí na srážkových účinných průřezech a na stupni ionizace prvku i . Je to průměr difúzních koeficientů pro jednotlivé ionizační stavy atomů. Člen s teplotním gradientem odpovídá za teplotní difúzi. Je násobený faktorem α , který opět závisí na srážkových účinných průřezech. Nejdůležitější člen, který určuje výsledné znaménko (a tedy směr rychlosti $v_D(i)$), je rozdíl zářivého $g_{\text{rad};i}$ a tíhového zrychlení g . Pokud platí $g_{\text{rad};i} - g \geq 0$, pak se atomy vznášejí, naopak při $g_{\text{rad};i} - g < 0$ klesají níž. A_i je relativní atomová hmotnost vyjádřená v jednotkách hmotnosti protonu m_p . Pokud nedochází ke ztrátě hmoty, tak je stratifikace určena vlivem gravitace, tlaku záření a konvektivního promíchávání. Zářivá síla na jeden atom klesá s rostoucí abundancí daného prvku a je rovněž v menší míře závislá na abundanci jiných prvků. Pokud je v atmosféře hvězdy podstatný hlavně tlak záření a gravitace, ustaví se rovnováha mezi tíhovým a zářivým zrychlením.

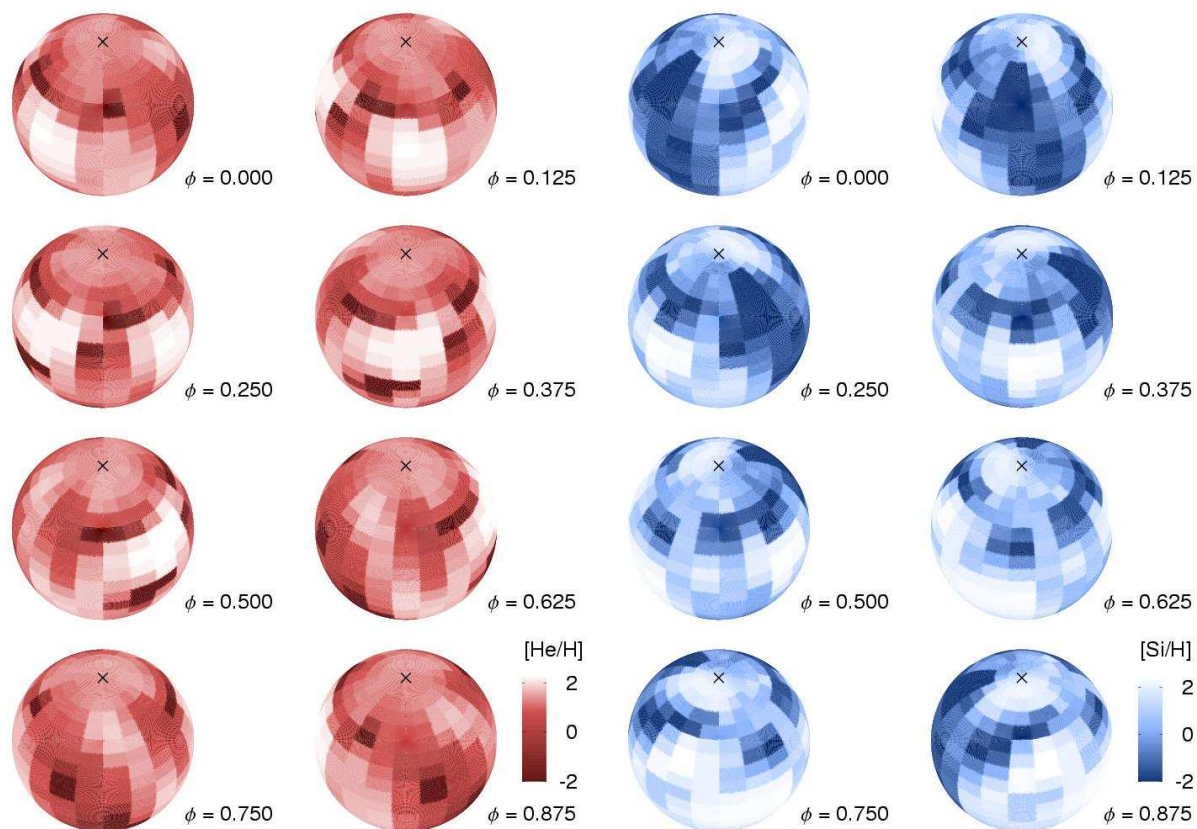
Pokud má hvězda dostatečně silné magnetické pole, dojde k několika změnám. Magnetické pole má vliv na drift ionizovaných částic. Difúzní koeficient pro pohyb ve směru kolmém na magnetické siločáry je snižen v závislosti na velikosti indukce pole a náboji částic (Michaud, Mègessier & Charland, 1981). V důsledku tohoto jevu může docházet ke driftu iontů podél magnetických siločar. Magnetické pole ovlivňuje i zářivé zrychlení, které vzniká hlavně v důsledku absorpce záření v čarách. U nich může dojít k rozštěpu v důsledku sejmutí degenerace energiových hladin. V důsledku toho může zářivé zrychlení výrazně vzrůst (Borsenberger, Michaud & Praderie, 1981; Alecian & Stift, 2002). Přítomnost magnetického pole může ovlivnit i konvekci. Ta může být potlačena vertikálním polem a to i při

relativně nízkých hodnotách magnetické indukce zhruba 10 kG (Balmforth a kol., 2001). Konvekce nemusí být potlačena na magnetickém rovníku, ale může zde dojít ke stabilizaci turbulentních pohybů nad konvektivní zónou. Výsledkem působení magnetického pole na výše zmíněné procesy je porušení sférické symetrie difúze a vznik nehomogenit chemického složení na povrchu. Rovněž vertikální stratifikace se liší od hvězdy bez magnetického pole.

Při započtení vlivu magnetického pole na stratifikaci prvků v atmosféře (ať už vertikální nebo horizontální) je možné modelovat pozorované skvrny na povrchu těchto mCP hvězd. Jde o velmi jednoduché modely, které popisují magnetická pole mCP hvězd pomocí dipólové aproximace (Turcotte, 2003). Nejprve se zaměříme na magnetické póly. Tam jsou siločáry kolmé na povrch hvězdy a dochází tedy k potlačení konvektivních proudění. Naopak únik hmoty z povrchu prostřednictvím hvězdného větru není nijak bržděn. Podobná rychlost ztráty hmoty se pozoruje i u nemagnetických hvězd spektrální třídy A. Konvekce v těchto oblastech je srovnatelná s konvekcí u nemagnetických HgMn hvězd. Vertikální stratifikace je zde určena mírou ztráty hmoty a zářivou difúzí. Helium, které je jen minimálně zářivě urychlováno, klesá do nižších hloubek (Vauclair, Dolez & Gough, 1991). Některé ostatní prvky jsou odnášeny hvězdným větrem, zatímco jiné se hromadí v oblastech formování spektrálních čar.

Nyní se soustředíme na region v blízkosti magnetického rovníku. Zde jsou magnetické indukční čáry rovnoběžné s povrchem hvězdy, takže pole nebrání konvekcii ale naopak zde nedochází úniku látky prostřednictvím větru. Konvekce u těchto horkých hvězd ale zdaleka neprobíhá v takové míře jako například u Slunce. Oblasti nad touto konvektivní slupkou zde stabilizuje magnetické pole a může zde docházet k vertikálnímu rozvrstvení jednotlivých chemických prvků. Výsledkem těchto procesů je vytlačení prvků, které nejsou zářivě urychlovány (He, O) z oblastí blízko magnetického rovníku a kumulace prvků, které zářivě urychlovány jsou, v těchto magnetických kapsách, kde pak pozorujeme jejich zvýšenou abundanci.

V oblastech, kde se vyskytuje velké množství neutrálních atomů (tj. částic bez náboje), je situace mnohem komplikovanější. U některých prvků, jako je například Si, dochází k zářivému vyzdvižení jeho neutrálních atomů, zatímco ionizovaný křemík zůstává v nižších vrstvách. Magnetické siločáry pak zamezí úniku neutrálního křemíku z povrchu hvězdy a ten pak může vytvořit pás okolo magnetického rovníku. Na obrázku 1.1 je zobrazena hvězda HD 37776, jejíž mapování provedla Khokhlova a kol. (2000). Jde o rozložení helia a křemíku na jejím povrchu. Obrázek je převzat z článku Krtička a kol. (2007).



Obrázek 1.1: Na obrázku je hvězda HD 37776. Khokhlova a kol. (2000) mapovali rozložení helia a křemíku na jejím povrchu. Odstíny červené je vyznačena abundance He a na modrém panelu pak Si. Hvězda je zobrazena v několika fázích během celého rotačního cyklu. pól hvězdy je vyznačen černým křížkem. Obrázek je převzat z Krtička a kol. (2007).

Kapitola 2

Rozšíření spektrálních čar

2.1 Mechanismy způsobující rozšíření čar

Profily čar, které pozorujeme ve spektrech hvězd jsou formovány mnoha mechanismy. V jejich důsledku nejsou spektrální čáry nekonečně tenké, ale zasahují do širšího intervalu vlnových délek. Proto se mluví o mechanismech způsobujících rozšíření čar. Při popisu těchto mechanismů jsem vycházel především z Rutten (2003).

Přirozené rozšíření

Žádná spektrální čára nemůže mít nulovou šířku. Tato skutečnost vychází ze základů kvantové mechaniky. Doba existence excitovaných stavů v elektronovém obalu je dána statistickou rozdělovací funkcí a z Heisenbergovy relace neurčitosti svazující dobu existence kvantového stavu s jeho energií plyne rozmazání energiových rozdílů jednotlivých hladin. Tomuto mechanismu se říká přirozené rozšíření. Označme si γ^{rad} pravděpodobnost deexcitace pro dvouhladinový atom v excitovaném stavu vztahenou na jednotku času. Střední doba existence tohoto stavu je tedy $\Delta t = 1/\gamma^{\text{rad}}$. Neurčitost energie bude tedy $\Delta E = \frac{\hbar}{2\pi\Delta t}$. Přirozené rozšíření je popsáno tzv. Lorentzovým profilem se středem v klidové frekvenci ν_0

$$\psi(\nu - \nu_0) = \frac{\gamma^{\text{rad}}/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma^{\text{rad}}/4\pi)^2}, \quad (2.1)$$

pro který platí $\int_0^\infty \psi(\nu - \nu_0) d\nu = 1$. Pomocí symbolu $\psi(\nu - \nu_0)$ obecně označujeme profil emisní. V tomto případě tak budeme značit i absorpční profil, protože mají stejný tvar.

Rozšíření tlakem

Dalším mechanismem formujícím tvar profilu je rozšíření tlakem (nebo srážkami). Je způsobeno srážkami vyzařujících částic v atmosféře a tedy jejich coulombovskými interakcemi. Pro jeho popis slouží dva přístupy. První je impaktní aproximace. Popisuje rychle se pohybující částice, které naráží do vyzařujícího atomu. Jde hlavně o volné elektrony, ale

tento popis je možné použít i pro srážky s atomy neutrálního vodíku. Tvar profilu je opět Lorentzovský, jen je parametr γ^{rad} zvýšen o γ^{col} odpovídající srážkám. Podívejme se nyní na kvazistatickou aproximaci. Ta popisuje srážky s velkým množstvím pomalých iontů nebo protonů. Jejich hustota definuje elektrické pole, které ovlivňuje vázané stavy vyzařujících atomů. Tvar tohoto profilu se od Lorentzova liší. Podívejme se tedy nyní jednotlivé typy tlakového rozšíření. Zavedeme si interakční konstantu C_n

$$\frac{C_n}{r^n} \equiv \frac{\Delta E}{h} = \Delta \nu \quad (2.2)$$

a r jako vzdálenost největšího přiblížení interagujících částic (při uvažování impaktní aproximace) nebo vzdálenost nejbližšího sousedního iontu (pokud pracujeme s kvazistatickou aproximací). Exponent n pak určuje rychlost poklesu rozšíření čáry s rostoucí hodnotou r .

Lineární Starkův jev Pro tento druh rozšíření je n rovno 2. Uplatňuje se zejména u čar H I (se stálým dipólovým momentem) a vysvětluje jejich velkou šířku ve spektrech horkých hvězd. Dále hraje roli u čar He II. Je způsoben srážkami s elektrony a protony. Starkovof rozšíření je způsobené srážkami s protony. Energiové hladiny H I jsou v důsledku jejich elektrického pole rozštěpené na více složek. Rozdíl jejich vlnových délek je úměrný intenzitě tohoto pole. Výsledkem působení mnoha interagujících částic v různých vzdálenostech je Holtsmarkův profil.

Rezonanční rozšíření Jde o interakci neutrálních atomů vodíku mezi sebou, jejíž intenzita klesá úměrně s třetí mocninou vzdálenosti ($n = 3$). Uplatňuje se například u čáry H α ve spektru Slunce.

Kvadratický Starkův jev n je v tomto případě rovno 4. Jedná se o srážky s elektrony a ionty. Hraje roli u atomů bez dipólového momentu. Srážky probíhají rychle, je tedy platná impaktní aproximace a výsledný profil je opět lorentzovský. K parametru γ^{rad} se zde přičítá další člen γ_4 . Toto rozšíření způsobené srážkami s elektrony se projevuje u atomů různých od vodíku v prostředí s vysokou elektronovou hustotou a nízkou koncentrací neutrálního vodíku.

Van der Waalovo rozšíření Tento efekt s $n = 6$ můžeme nalézt u chladných hvězd a je způsoben vzájemnými srážkami atomů neutrálního vodíku. Můžeme ho popsat impaktní aproximací a výsledný profil je tedy opět lorentzovský. Podobné rozšíření se vyskytuje i u jiných než vodíkových atomů (např. He II). Často se ale namísto modelování samostatného rozšíření pro tyto atomy započítá tento efekt jako větší Van der Waalovo rozšíření vlivem srážek neutrálního vodíku.

Dopplerovské rozšíření

Dopplerův posun vlnové délky nebo frekvence je způsoben pohybem vyzařující částice vzhledem k pozorovateli, tedy je-li radiální rychlost ξ různá od nuly. Pak pro $\xi \ll c$ platí

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\xi}{c}. \quad (2.3)$$

Pro termální pohyb částic v atmosféře hvězdy se velikost radiálních rychlostí řídí Maxwellovým rozdělením

$$\frac{n(\xi)}{N} d\xi = \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/\xi_0^2} d\xi, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (2.4)$$

kde $n(\xi)$ je počet částic pohybujících se rychlostí ξ a N celkový počet částic. Výsledný profil čáry má potom tvar Gaussovy funkce

$$\varphi(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2}, \quad \Delta\nu_D = \frac{\xi_0}{c} \nu_0. \quad (2.5)$$

Voigtův profil

Pokud budeme brát v potaz přirozené rozšíření spolu se srážkovými ve formě Lorentzova profilu a dopplerovské rozšíření v důsledku termálního pohybu, pak je výsledný profil spektrální čáry výsledkem konvoluce těchto dvou profilů (Lorentzova a Gaussova). Popisuje ho Voigtova funkce

$$\varphi(\nu - \nu_0) = \frac{H(a, v)}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}}. \quad (2.6)$$

Symbolický zápis $H(a, v)$ můžeme rozepsat (včetně významu jednotlivých členů)

$$H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v - y)^2 + a^2} dy, \quad (2.7)$$

$$y = \frac{\xi}{c} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_D}, \quad (2.8)$$

$$v = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D}, \quad (2.9)$$

$$a = \frac{\gamma}{4\pi\Delta\nu_D} = \frac{\lambda^2}{4\pi c} \frac{\gamma}{\Delta\lambda_D}, \quad (2.10)$$

kde $\Delta\lambda_D = \frac{\xi_0}{c} \lambda_0$. Můžeme rovněž použít aproximativní tvar

$$H(a, v) \approx e^{-v^2} + \frac{a}{v^2 \sqrt{\pi}}, \quad (2.11)$$

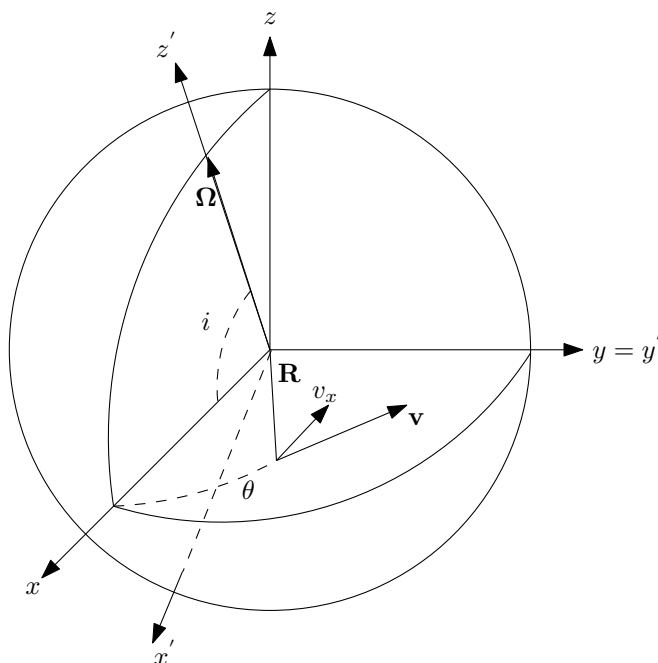
ze kterého je patrné, že ve středu čáry se profil blíží gaussovskému a v křídlech naopak lorentzovskému profilu.

2.2 Rotační rozšíření spektrálních čar

Z mnoha procesů, které formují výsledný tvar čar ve spektru hvězd, je pro nás nejdůležitější rotační dopplerovské rozšíření, díky kterému je možné pro rychle rotující hvězdy použít metody dopplerovského mapování. Podívejme se tedy, jak rotace hvězdy deformuje tvar spektrálních čar. Všechny výpočty probíhají za předpokladu, že hvězda má sférický tvar

(není rotačně zploštělá) a rotuje jako tuhé těleso. I když tyto podmínky nebývají v případě skutečných hvězd splněny, jde o dostačující aproximaci. Postup při odvození rozačného rozšíření spektrálních profilů je převzat z Gray (1992).

Pro odvození tvaru rotačně rozšířených čar budeme používat dvě souřadné soustavy. V první z nich (x, y, z) směřuje osa x k pozorovateli a osy y a z definují rovinu kolmou na směr k pozorovateli. Druhá soustava (x', y', z') je oproti první otočená kolem osy y o úhel rovný doplňku sklonu i do 90° a její osa z' splývá s osou rotace hvězdy. Definice těchto souřadnicových soustav je zobrazena na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Definice souřadnic používaných při popisu rotačního rozšíření čar

Necháme tedy hvězdu rotovat s úhlovou rychlostí $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, jejíž složky jsou rovny

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Omega \cos i, \\ \Omega_y &= 0, \\ \Omega_z &= \Omega \sin i.\end{aligned}$$

Pro rychlost bodu na jejím povrchu určeného vektorem $\mathbf{R} = (x, y, z)$ pak platí

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{R}. \quad (2.12)$$

Průmět rychlosti \mathbf{v} do směru k pozorovateli, tj. v_x , je tedy roven

$$v_x = z\Omega_y - y\Omega_z = z\Omega_y - y\Omega \sin i = -y\Omega \sin i. \quad (2.13)$$

To je první důležitý závěr. Je totiž vidět, že body na disku hvězdy se stejnou hodnotou souřadnice y mají zároveň stejnou radiální rychlost a tedy i stejný Dopplerův posun středů spektrálních čar (více na obrázku 2.2). Dopplerův posun můžeme popisovat i pomocí jiných než délkových jednotek. Místo nich použijeme jednotky radiální rychlosti. V případě, že se střed hvězdy vzhledem k pozorovateli nepohybuje, tak je radiální rychlost ve středu čáry rovna nule. Od středu čáry směrem ke kratším vlnovým délkám radiální rychlost klesá, směrem k delším vlnovým délkám naopak roste. Její absolutní hodnota je pro stejné vzdálenosti od středu čáry oběma směry stejná. Při použití této notace můžeme Dopplerův posun přepsat takto

$$\Delta\lambda = -v_x = -y\Omega \sin i. \quad (2.14)$$

$\Delta\lambda$ dosahuje svého maxima $\Delta\lambda_L$ pro $y = R$

$$\Delta\lambda_L = R\Omega \sin i = v \sin i, \quad (2.15)$$

kde v je rotační rychlost. Pro tok \mathcal{F} platí

$$\mathcal{F}_\nu = \oint I_\nu \cos \theta \, d\omega. \quad (2.16)$$

I_ν nyní závisí na Dopplerově posunu. Přepíšeme-li si teď $d\omega = dA/R^2$, kde A je přírůstek povrchu, který normujeme poloměrem hvězdy R . Vraťme se ale k našim původním souřadnicím a pomocí $dy \, dz = dA \cos \theta$ dostaneme

$$\mathcal{F}_\nu = \iint I_\nu \frac{dy \, dz}{R^2}. \quad (2.17)$$

Dále si definujeme funkci $H(\lambda)$ jako podíl specifické intenzity a specifické intenzity v kontinuu

$$H(\lambda) = I_\nu(\lambda)/I_c(\lambda). \quad (2.18)$$

Analogicky pro podíl toků platí

$$\frac{\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{F}_c} = \frac{\oint H(\lambda) I_c \cos \theta \, d\omega}{\oint I_c \cos \theta \, d\omega}. \quad (2.19)$$

Pokud $H(\lambda)$ nezávisí na poloze na povrchu hvězdy, potom se dá vztah 2.19 zjednodušit do podoby

$$\mathcal{F}_\nu/\mathcal{F}_c = H(\lambda). \quad (2.20)$$

Pokud ale hvězda rotuje, pak se ve vyjádření \mathcal{F}_ν objeví Dopplerův posun

$$\mathcal{F}_\nu = \oint H(\lambda - \Delta\lambda) I_c \cos \theta \, d\omega. \quad (2.21)$$

Nyní si přepíšeme rovnici 2.21 do tvaru rovnice 2.17

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu &= \iint H(\lambda - \Delta\lambda) I_c \frac{dy \, dz}{R^2} = \left| \begin{array}{l} \Delta\lambda/\Delta\lambda_L = y/R \\ d\Delta\lambda/\Delta\lambda_L = dy/R \end{array} \right| = \\ &= \int_{-R}^R H(\lambda - \Delta\lambda) \int_{-z_1}^{z_1} I_c \frac{dz \, d\Delta\lambda}{R \, \Delta\lambda_L}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Integrační meze druhého integrálu jsou rovny

$$z_1 = (R^2 - y^2)^{1/2} = R \left[1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_L} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Definujeme si funkci $G(\Delta\lambda)$

$$\begin{aligned} G(\Delta\lambda) &= \frac{1}{\Delta\lambda_L} \frac{\int_{-z_1}^{z_1} I_c dz/R}{\oint I_c \cos\theta d\omega}, \quad \text{pro } |\Delta\lambda| \leq \Delta\lambda_L, \\ G(\Delta\lambda) &= 0, \quad \text{pro } |\Delta\lambda| > \Delta\lambda_L, \end{aligned} \quad (2.23)$$

kteřá je pro $|\Delta\lambda| > \Delta\lambda_L$ rovna 0. Nyní se dostáváme k dalšímu velmi důležitému závěru. Můžeme totiž přepsat podíl toků a tedy i normovaný profil spektrální čáry

$$\frac{\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{F}_c} = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda - \Delta\lambda) G(\Delta\lambda) d\Delta\lambda = H(\lambda) \otimes G(\lambda) \quad (2.24)$$

jako konvoluci profilu nerotující hvězdy s rotačním profilem (je použita notace $G(\lambda) \equiv G(\Delta\lambda)$).

Nyní se podívejme na kvantitativní popis rotačního profilu $G(\lambda)$. Disk hvězdy nezáří rovnoměrně, ale jeho jas klesá směrem od jeho středu k okraji. To můžeme pozorovat například u Slunce, ale ani v případě hvězd, které se jeví jako bodové zdroje, není možné tento efekt zanedbat. Jde o tzv. okrajové ztemnění (*limb darkening*) a popisuje se obvykle pomocí podílu specifické intenzity v daném bodě na disku ku specifické intenzitě uprostřed disku. Střed disku je bod, ve kterém je úhel θ mezi normálou k povrchu a směrem k pozorovateli nulový. Pro popis okrajového ztemnění zvolíme následující aproximaci

$$I_c/I_c^0 = 1 - \epsilon + \epsilon \cos\theta. \quad (2.25)$$

V této rovnici vystupuje koeficient okrajového ztemnění ϵ , který je ve skutečnosti funkcí vlnové délky. Mění se ale jen pozvolna, takže je možné považovat ho v rozsahu vlnových délek jedné spektrální čáry za konstantní. Kosinus úhlu normály k povrchu a směru k pozorovateli se také často přepisuje jako $\cos\theta = \mu$. Toto značení bude použito i v dalších kapitolách této práce. Podívejme se nyní, jak vypadá člen $\oint I_c \cos\theta d\omega$ z rovnice 2.23. S použitím závislosti 2.25 dostaneme

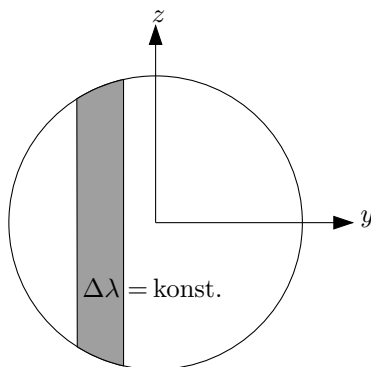
$$\begin{aligned} \oint I_c \cos\theta d\omega &= 2\pi \int_0^{\pi/2} I_c^0 (1 - \epsilon + \epsilon \cos\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta = \left| \begin{array}{l} \cos\theta = \mu \\ -\sin\theta d\theta = d\mu \end{array} \right| = \\ &= 2\pi I_c^0 \left[\int_0^1 \mu d\mu - \epsilon \int_0^1 \mu d\mu + \epsilon \int_0^1 \mu^2 d\mu \right] = \\ &= \pi I_c^0 \left(1 - \frac{\epsilon}{3} \right). \end{aligned}$$

Nyní se podívejme na člen $\int_{-z_1}^{z_1} I_c dz/R$ z téže rovnice (s použitím tabulkového integrálu $\int (A^2 - z^2)^{1/2} dz$),

$$\begin{aligned} \int_{-z_1}^{z_1} I_c dz/R &= \left| \cos \theta = [R^2 - (y^2 + z^2)]^{1/2} / R \right. \\ &\quad \left. \int (A^2 - z^2)^{1/2} dz = \frac{1}{2}[z(A^2 - z^2)^{1/2} + A^2 \sin^{-1}(z/A)] \right| = \\ &= 2I_c^0(1 - \epsilon)[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)^2]^{1/2} + \frac{1}{2}\pi\epsilon I_c^0[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)^2]. \end{aligned}$$

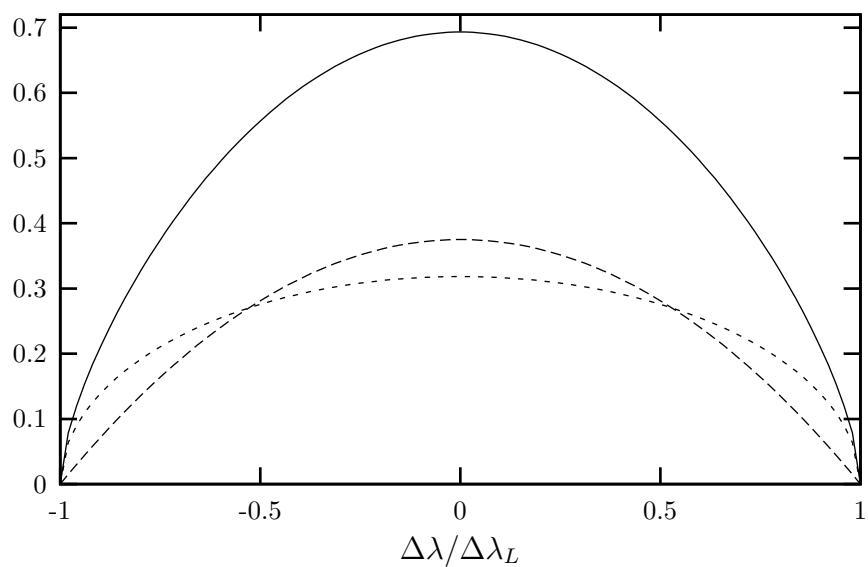
A nyní už máme vše potřebné pro vyjádření funkce $G(\lambda)$,

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{2(1 - \epsilon)[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)^2]^{1/2} + \frac{1}{2}\pi\epsilon[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)^2]}{\pi\Delta\lambda_L(1 - \epsilon/3)} = \\ &= c_1[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)^2]^{1/2} + c_2[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)^2]. \end{aligned} \quad (2.26)$$



Obrázek 2.2: Na tomto obrázku je schematicky znázorněn disk pozorované hvězdy spolu se souřadnými osami. Jak bylo ukázáno, hodnota Dopplerova posunu středu čáry závisí pouze na souřadnici y . Tyto body na disku tedy tvoří svislé úsečky. U skutečných spektroskopických měření jsme ale omezeni rozlišovací schopností detekční soustavy a namísto úsečky jsou body se stejným posunem shromážděny ve svislém pásu (na obrázku je symbolicky vyznačen šedou barvou). Čím vyšší je rozlišení spektra, tím je ale tento pás užší a blíží se ideálnímu případu.

Pokud zanedbáme okrajové ztemnění, tj. $\epsilon = 0$, tak druhý člen v rovnici 2.26 bude roven nule a $G(\Delta\lambda)$ bude rovnice elipsy, což je ukázáno i na obrázku 2.3, kde je vynesena funkce $G(\Delta\lambda)$ pro $\epsilon = 0,6$ (první a druhý člen, jejich součet).



Obrázek 2.3: Na obrázku jsou vyneseny tvary křivek používaných pro výpočet rotačního profilu. Tvar výsledného rotačního profilu $G(\Delta\lambda)$ je vykreslen plnou čarou. Tečkovanou čarou je vykreslen první člen z rovnice 2.26 (má tvar elipsy, jak je uvedeno v textu), čárkovanou potom člen druhý. Koeficient okrajového ztemnění ϵ byl zvolen 0,6.

Kapitola 3

Základní model pro výpočty

3.1 Souřadnice popisující povrch hvězdy

Na obrázku 3.1 jsou vyneseny všechny potřebné informace, které budeme používat v této kapitole. Začneme ale nejprve fundamentální definicí souřadnic, které popisují povrch hvězdy. Podobně jako na zemském glóbu, můžeme definovat i na povrchu hvězdy úhlové souřadnice korotující spolu s hvězdou. Mějme tedy obdobu zemské zeměpisné šířky (dále jen šířka) ϑ a zeměpisné délky (dále opět jen délka) φ . Pomocí nich lze snadno popsat polohu bodu na povrchu, když známe poloměr hvězdy. Ten budeme značit R . Z těchto sférických souřadnic můžeme přejít do souřadnic kartézských

$$\begin{aligned}x^* &= R \sin \vartheta \cos \varphi, \\y^* &= R \sin \vartheta \sin \varphi, \\z^* &= R \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{3.1}$$

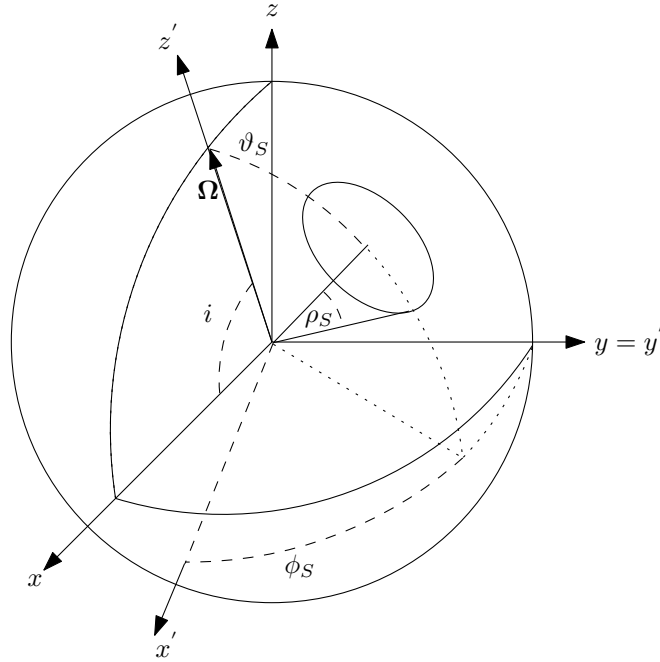
V soustavě (ϑ, φ) budeme popisovat i polohu povrchových skvrn. V našem zjednodušeném případě se budeme zabývat skvrnami kruhového tvaru. Geometrii skvrny na povrchu hvězdy (ve většině případů bude na povrchu hvězdy pouze jedna skvrna) můžeme popsat trojicí čísel. Jsou to úhlové souřadnice středu skvrny (šířka ϑ_S a délka φ_S) a její úhlový poloměr ρ_S .

Vedle souřadnic korotujících spolu s hvězdou budeme používat i souřadnou soustavu spojenou s pozorovatelem. Tu zavedeme pomocí veličiny fáze f , jejíž hodnota se pohybuje v intervalu $[0, 1]$ a určuje, v jakém okamžiku rotačního cyklu se hvězda nachází. Úhel φ je v této soustavě nahrazen úhlem ϕ , pro nějž platí

$$\phi = \varphi + 2\pi f.$$

Máme tedy sférickou soustavu (ϑ, ϕ) a kartézskou (x', y', z')

$$\begin{aligned}x' &= R \sin \vartheta \cos \phi, \\y' &= R \sin \vartheta \sin \phi, \\z' &= R \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{3.2}$$



Obrázek 3.1: Souřadnice použité v numerickém modelu pro výpočet profilů spektrálních čar. Sklon rotační osy hvězdy je i . Na povrchu je jedna kruhová skvrna popsána dvojicí souřadnic a úhlovým poloměrem $\vartheta_S, \phi_S, \rho_S$.

Poslední používanou soustavou je kartézský souřadný systém (x, y, z) , jehož osa y splývá s osou y' , osa x směřuje k pozorovateli a úhel mezi ní a osou z' je zároveň sklon rotační osy hvězdy i . Její hlavní účel tkví v tom, že umožňuje snadno rozhodnout, zda je bod P v daný časový okamžik (v dané fázi) na viditelné hemisféře. Pokud ano, tak je jeho souřadnice x_P nezáporná. V případě, že je $i = 90^\circ$, pak tato soustava splývá se soustavou (x', y', z') .

3.2 Radiální rychlost, výpočet profilu spektrální čáry

Dopplerovská tomografie je postavená na faktu, že různé body na povrchu hvězdy mají různou radiální rychlost. Ve skutečnosti není rychlostní pole tolik obecné a body se stejnou souřadnicí y na viditelné polokouli mají i stejnou radiální rychlost, jak bylo ukázáno v předchozí kapitole. Mějme tedy na povrchu hvězdy bod se souřadnicemi ϑ, ϕ . Jeho radiální rychlost je dána vztahem

$$v_R(\vartheta, \phi) = \frac{2\pi}{P} R \sin \vartheta \sin \phi \sin i. \quad (3.3)$$

P v předchozím vztahu je rotační perioda a výraz $\frac{2\pi}{P} R$ udává rovníkovou rotační rychlost v a její průmět do směru k pozorovateli $v \sin i$ je jednou z důležitých spektrálních charakteristik rotujících hvězd. Pokud je λ_0 laboratorní vlnová délka středu spektrální čáry, pak

je Dopplerovsky posunutá vlnová délka téže čáry z povrchu hvězdy

$$\lambda_{0,R}(\vartheta, \phi) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_R(\vartheta, \phi)}{c} \right). \quad (3.4)$$

V každém bodě povrchu hvězdy je střed spektrální čáry posunutý podle vztahu 3.4. Výsledný profil je pak dán integrálem lokálních profilů $\mathcal{H}(\lambda, \Delta\lambda(\vartheta, \phi))$ přes viditelnou hemisféru hvězdy

$$\frac{\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{F}_c} = \int_{\text{vis}} \mathcal{H}(\lambda, \Delta\lambda(\vartheta, \phi)) d\mathbf{S} = \int_{\text{vis}} \mathcal{H}(\lambda, \Delta\lambda(\vartheta, \phi)) \cos \theta dS. \quad (3.5)$$

V oblastech hvězdy, které se k nám přibližují, jsou lokální profily posunuté směrem ke kratším vlnovým délkám, zatímco v oblastech vzdalujících se od nás, jsou profily posunuté k delším vlnovým délkám. Výsledkem integrace 3.5 je rozšířený profil charakteristického tvaru (viz dále).

V praxi se integrál 3.5 počítá numericky. Výpočet je výsledkem diskretizace výše popsaného modelu skloněného rotátoru. Celý povrch hvězdy se rozdělí na malé elementy, v jejichž středech se spočítají hodnoty radiálních rychlostí, lokální dopplerovské posuny a integrace se nahradí sčítáním přes ty elementy, které se v dané fázi nacházejí na viditelné polokouli.

Podívejme se nyní na použité dělení povrchu hvězdy. V práci jsem použil ekvidistantní síť, která vznikne rozdělením povrchu podle ϑ, ϕ s konstantním krokem stejným v obou souřadnicích. Její hlavní výhodou je jednoduchá implementace. V literatuře (např. Vogt, Penrod & Hatzes, 1987) je uvedeno složitější dělení, které odstraňuje nejvýznamější nedostatek mnou uvedené sítě. To je proměnná plocha jednotlivých elementů, která dosahuje maxima pro $\vartheta = 90^\circ$ a směrem k pólům klesá. V uvedené práci autoři použili dělení, pro něž je plocha všech povrchových elementů přibližně stejná. Jeho implementace je ale mnohem náročnější, než v případě ekvidistantní sítě.

Vraťme se ale k výpočtu rotačně rozšířeného profilu spektrální čáry. Po diskretizaci dostaneme namísto integrálu 3.5

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{F}_c} &= \sum_{\vartheta} \sum_{\phi} \mathcal{H}(\lambda, \Delta\lambda(\vartheta, \phi)) R^2 \cos \theta \sin \vartheta \Delta\phi \Delta\vartheta \\ &= \sum_{\vartheta} \sum_{\phi} \mathcal{H}(\lambda, \Delta\lambda(\vartheta, \phi)) R^2 \mu \sin \vartheta \Delta\phi \Delta\vartheta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Integraci přes viditelnou polokouli zajistíme správně zvolenou množinou ϑ, ϕ , nebo přechodem ke kartézským souřadnicím (x, y, z) . Souřadnice x všech bodů na viditelné hemisféře dosahuje nezáporných hodnot. Další možnost je následující definice

$$\mu = \begin{cases} \cos \theta, & \text{pro } \theta \leq 90^\circ \\ 0, & \text{pro } \theta > 90^\circ \end{cases} \quad (3.7)$$

3.3 Okrajové ztemnění

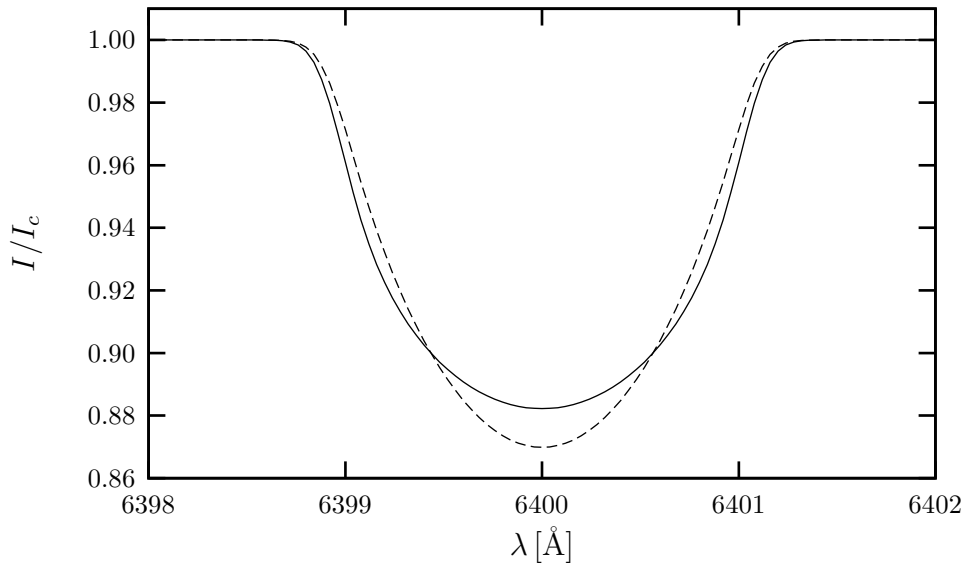
Ve vztahu 3.6 byl zanedbán jeden důležitý efekt. Disk hvězdy (nejlépe je to patrné při pozorování Slunce) nezáří rovnoměrně, ale směrem k okraji je tmavší. To je způsobeno tím, že záření, které k nám z různých míst disku přichází, vzniká v různých optických hloubkách a tedy i v prostředích s rozdílnými teplotami. Tomuto jevu se říká okrajové ztemnění a při výpočtech profilů jsem ho bral do úvahy (zanedbal jsem ho až při výpočtu inverze profilů v poslední kapitole). Okrajové ztemnění je možné popsat pomocí několika různých aproximací, z nichž zde popíšu lineární přiblížení. Zavedeme si funkci okrajového ztemnění $W(\mu)$, která je rostoucí v $\mu = \cos \theta$

$$W(\mu) = 1 - \epsilon + \epsilon\mu. \quad (3.8)$$

Koeficient okrajového ztemnění ϵ je ve výpočtech zvolen 0,7. Po aplikaci tohoto efektu se změní vztah pro výpočet výsledného profilu do následující podoby

$$\frac{\mathcal{F}_\nu}{\mathcal{F}_c} = \sum_{\vartheta} \sum_{\phi} \mathcal{H}(\lambda, \Delta\lambda(\vartheta, \phi)) W(\mu) R^2 \mu \sin \vartheta \Delta\phi \Delta\vartheta. \quad (3.9)$$

Na obrázku 3.2 je pak porovnání profilu počítaného se zanedbáním okrajového ztemnění a



Obrázek 3.2: Rotačně rozšířené profily. Plnou čarou je vynesena profil bez okrajového ztemnění, čárkovanou pak s jeho započtením. Podíl I/I_c označuje intenzitu pozorovaného záření. Nejde tedy o specifickou intenzitu uvedenou v kapitole o výpočtu rotačního rozšíření. Vlnová délka středu čáry je 6400 Å.

s jeho započítáním. Popis výpočtu výsledného tvaru rotačně rozšířeného profilu následuje za touto podkapitolou. Pokud nebude uvedeno jinak, jsou všechny následující profily počítány pro $v \sin i = 50,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.4 Lokální a výsledné profily, povrchové skvrny

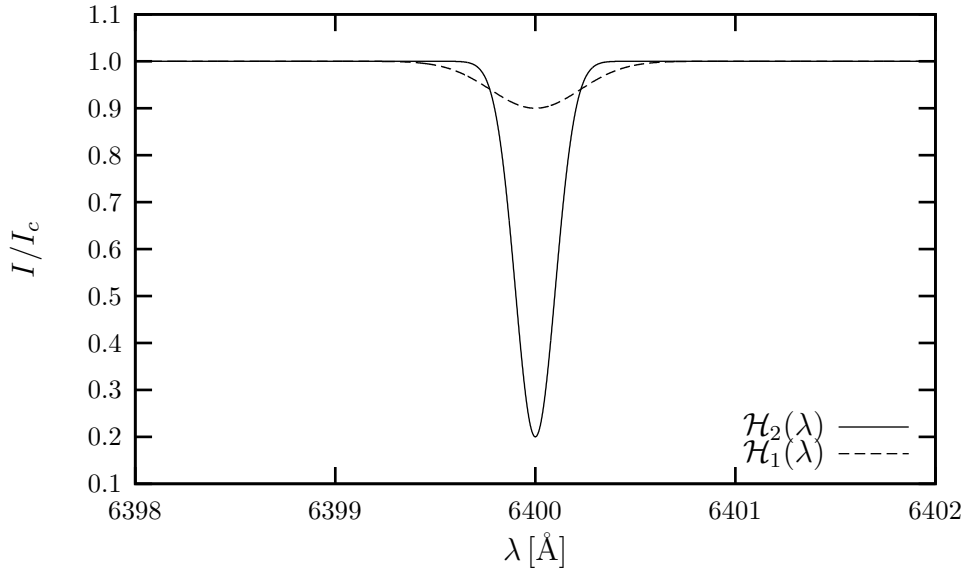
Nyní se podívejme na jádro celého dopplerovského mapování – povrchové skvrny. Jak jsem již zmínil výše, omezíme se na skvrny kruhového tvaru. V diskrétním modelu je nutné rozhodnout, zda bod na použité síti leží uvnitř nebo vně skvrny. Pro body uvnitř skvrny platí jednoduchá trigonometrická relace (viz Rektorys, 2000)

$$\cos \vartheta_S \cos \vartheta + \sin \vartheta_S \sin \vartheta \cos(\varphi_S - \varphi) \geq \cos \rho_S. \quad (3.10)$$

V případě chemicky pekuliárních hvězd jsou povrchové skvrny místa, která mají jiné chemické složení než okolní fotosféra. To se může projevit změnou lokálního profilu spektrální čáry nějakého prvku. V mém modelu jsem použil dva různé lokální profily. \mathcal{H}_2 pro body uvnitř skvrny a \mathcal{H}_1 pro body vně. Oba profily jsou absorpční a ve tvaru Gaussovy funkce (jsou vykresleny i na obrázku 3.3) a jsou centrovány na $\lambda_0 = 6400 \text{ \AA}$. Podobný popis lokálních profilů byl použit například v Falk & Wehlau (1974).

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\lambda) &= 1 - A_1 \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{w_1}}, \\ \mathcal{H}_2(\lambda) &= 1 - A_2 \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{w_2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

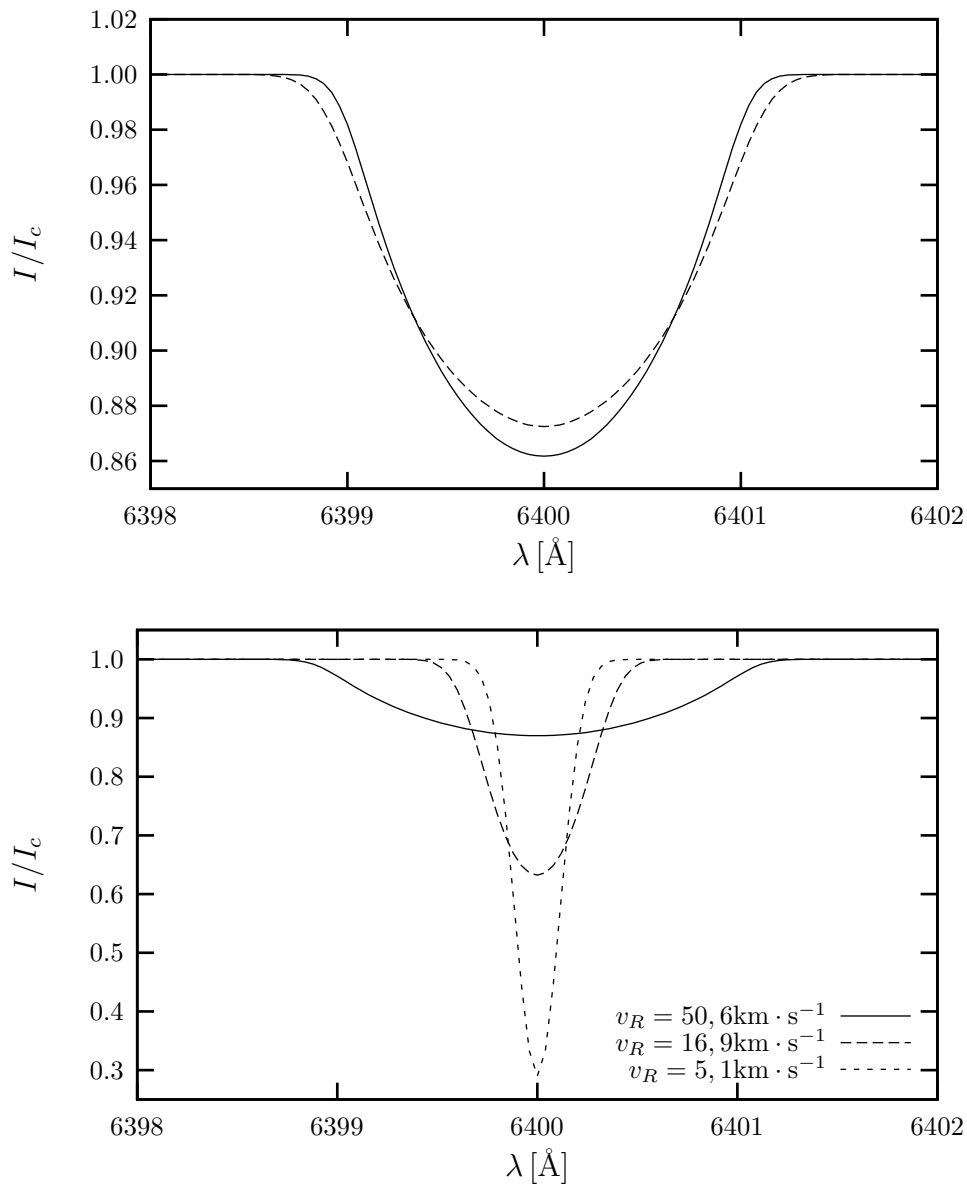
Hodnoty parametrů jsou $A_1 = 0,8$, $A_2 = 0,1$, $w_1 = 2 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ a $w_2 = 10^{-21} \text{ m}^2$.



Obrázek 3.3: Lokální profily čar pro skvrnu (čárkovaně) a mimo skvrnu (plnou čarou).

Ted' už máme všechny potřebné informace k tomu, abychom mohli počítat výsledné rotačně rozšířené spektrální čáry. Nejprve se podívejme na tvar výsledného profilu, který můžeme srovnat s rotačním profilem vypočítaným pomocí konvoluce lokálního profilu spektrální

čáry s rotačním profilem. Ten je vygenerován programem ROTIN [18]. Oba výsledné profily ukazuje obrázek 3.4. Na spodním obrázku 3.4 je pak porovnání rotačně rozšířených profilů pro různé rovníkové rychlosti. Na obou obrázcích jsou profily hvězd bez povrchových skvrn.



Obrázek 3.4: Na horním panelu jsou vykresleny rotačně rozšířené spektrální profily. Plnou čarou je počítaný integrací pomocí mého programu pro výpočet čar, profil vykreslený čárkovaně je výsledek konvoluce lokálního a rotačního profilu počítaný programem ROTIN. Na spodním panelu jsou ukázány rotačně rozšířené profily v závislosti na rychlosti rotace.

Kapitola 4

Přímé zobrazování

Přímé zobrazování (Direct Doppler imaging) je jednou z metod mapování rozložení skvrn na povrchu hvězdy. Není to ale řešení inverzního problému. Je možné ho provést díky silným omezujícím podmínkám. Předpokládáme, že množina řešení je určena několika parametry. V našem případě, kdy uvažujeme model hvězdy s jednou kruhovou skvrnou, jsou těmito parametry úhlové souřadnice skvrny (ϑ_S, φ_S) a její poloměr ρ_S . Budeme tedy hledat takové hodnoty těchto parametrů, pro které bude minimální suma kvadrátů odchylek vypočteného výsledného souboru čar (dále jen modelu) M_0 z množiny modelů M od vstupních dat D . Tedy platí

$$M_0(\vartheta'_S, \varphi'_S, \rho'_S) \in M(\vartheta, \varphi, \rho) \longrightarrow \{\chi^2(D, M_0(\vartheta'_S, \varphi'_S, \rho'_S))\} = \min. \quad (4.1)$$

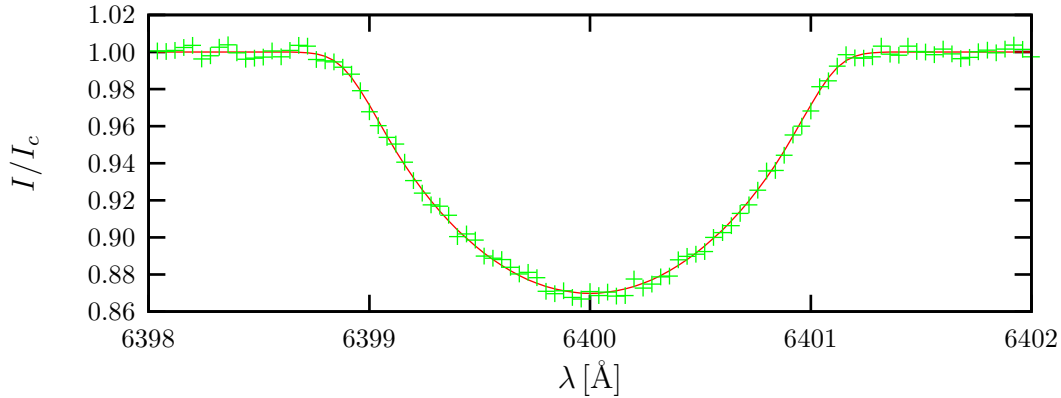
Jde tedy o minimalizaci v konfiguračním prostoru \mathbb{R}^n (prostoru parametrů), kde n je rovno třem. Jako vstupní data pro přímé zobrazování jsou použity vypočítané profily se zadanou kombinací $\vartheta_S, \varphi_S, \rho_S$, zašumněné aditivním šumem se střední hodnotou 0 a amplitudou 0,004 získaným pomocí generátoru pseudonáhodných čísel (viz obrázek 4.1).

Nejistota určení výsledků pro redukované minimalizace

Přesnost určení hodnot parametrů, které hledáme, je dána přesností nalezení minima funkce χ^2 . Ta byla ve všech případech počítána na diskretní síti s krokem 5° pro ϑ_S a φ_S a krokem 2° pro ρ_S . Jak ale bude vidět, tak skutečné hodnoty parametrů mohou ležet mimo chybové rozsahy jejich nalezených hodnot dané rozlišením sítě. Funkce χ^2 bude v následujících případech vizualizována jako 2D mapa, kde jsou její hodnoty reprezentovány stupni šedé a isoliniemi. Jejich absolutní škála není podstatná (vesměs se liší pro různé situace), ale tmavší odstíny odpovídají nižším hodnotám χ^2 než odstíny světlé. Nejtmavší místo pak odpovídá minimální funkční hodnotě. Profily jsou počítány pro $v \sin i = 50,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.1 Minimalizace pro konstantní φ_S

Pokud jeden z parametrů nastavíme na jeho správnou hodnotu, pak se problém redukuje na minimalizaci v prostoru s dimenzí o jedna nižší. Podívejme se nyní na to, jak se změní



Obrázek 4.1: Ukázka syntetických zašuměných dat sloužících jako vstup pro minimalizace. Jsou vynesena zelenými křížky. Červenou čarou pak model bez šumu pro stejné parametry ($v \sin i = 50,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, bez skvrny na povrchu)

čáry při změně φ_S . V případě, že zbylé dva parametry zůstanou stejné, tak jediné, k čemu dojde, je posun profilů ve fázi. Jejich tvar bude ale stejný. Proto má smysl zabývat se případem, kdy je délka středu skvrny φ_S pevně zadána.

Parametr φ_S je tedy zafixován na hodnotě 180° . Cílem je nalézt hodnoty zbývajících parametrů, tj. ϑ_S a ρ_S pomocí minimalizace $\chi^2(\vartheta, \rho)$. Na následujících stranách uvedu výsledky numerických experimentů pro několik typů povrchových skvrn (různá poloha i poloměr skvrny).

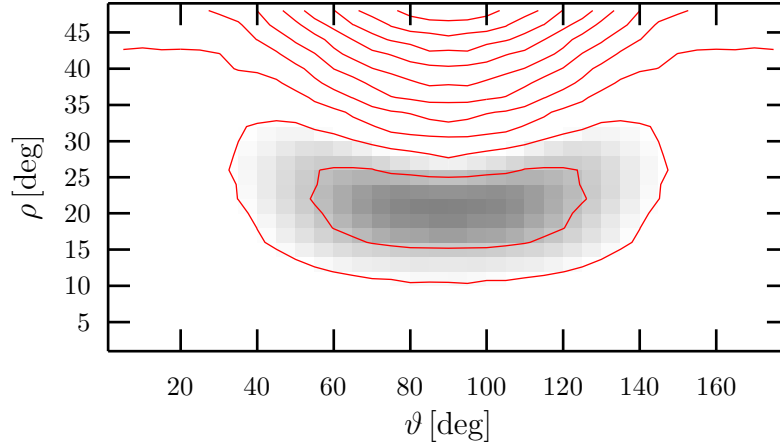
Menší skvrna na rovníku ($i = 90^\circ$)

První případ je hvězda se skvrnou o poloměru 20° , která leží na rovníku ($\vartheta_S = 90^\circ$). Rotační osa hvězdy je kolmá na směr k pozorovateli ($i = 90^\circ$). Na obrázku 4.2 je vykreslena funkce χ^2 . Nabývá výrazného minima pro $\vartheta'_S = 85^\circ$ a $\rho'_S = 20^\circ$, což je ve velmi dobré shodě s parametry, pro které byl testovací soubor čar generován (profily jsou na obrázku 4.4).

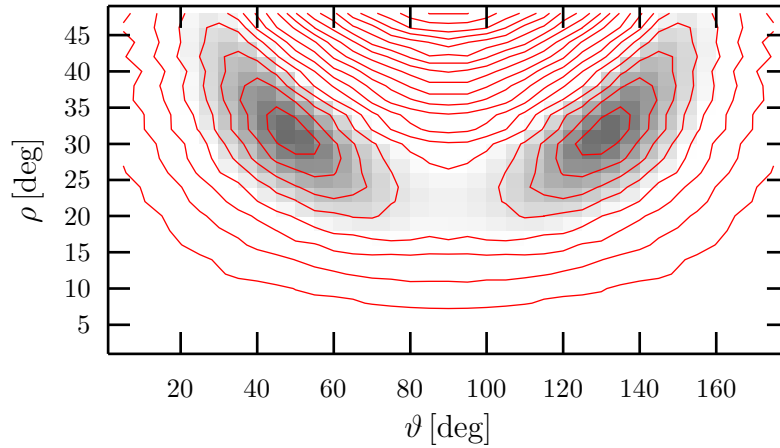
Větší skvrna ležící na rovnoběžce 50° ($i = 90^\circ$)

Dalším případem je hvězda se skvrnou s parametry $\vartheta_S = 50^\circ$, $\varphi_S = 180^\circ$, $\rho_S = 30^\circ$. Plocha χ^2 je složitější než v prvním případě (obrázek 4.3). Vzhledem k tomu, že sklon rotační osy je 90° , tak jsou profily čar pro tento případ identické profily, kdy leží skvrna na $\vartheta_S = 130^\circ$. Proto jsou v grafu χ^2 dvě prakticky stejně výrazná lokální minima. Globální minimum nastává pro parametry $\vartheta'_S = 130^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$, $\rho'_S = 32^\circ$ (diskriminace jednoho z lokálních minim je důsledkem přítomnosti šumu ve vstupních datech).

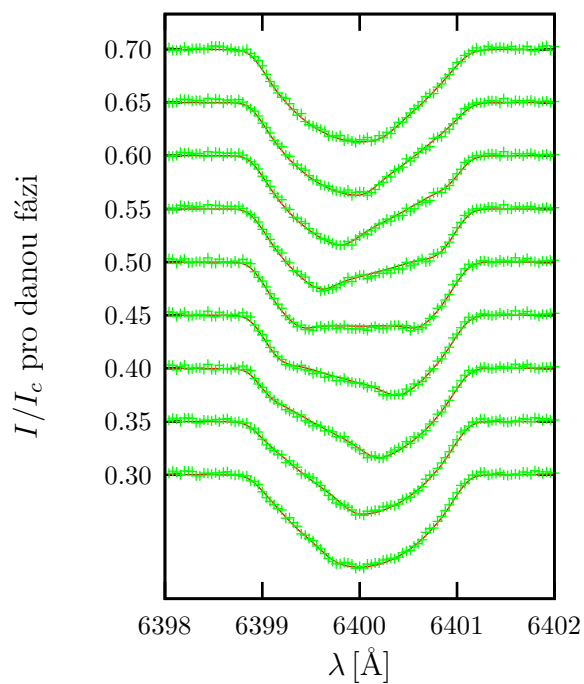
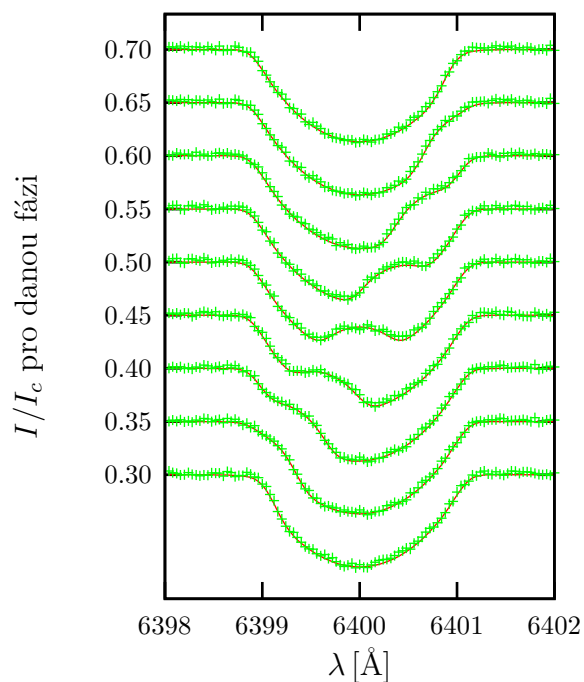
Na obrázcích 4.4 jsou tvary vstupních profilů a profilů vypočítaných na základě určených parametrů. V obou případech je nalezený výsledek v dobré shodě s hodnotami parametrů, pro které byla simulovaná data počítána.



Obrázek 4.2: Vrstvicový graf funkce χ^2 počítané pro vstupní soubor čar s parametry $\vartheta_S = 90^\circ$, $\varphi_S = 180^\circ$, $\rho_S = 20^\circ$. Stupně šedi označují hodnotu χ^2 . Tmavší odstíny odpovídají nižším hodnotám. Minimum nastává pro $\vartheta'_S = 85^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$, $\rho'_S = 20^\circ$



Obrázek 4.3: Funkce χ^2 počítaná pro vstupní soubor čar s parametry $\vartheta_S = 50^\circ$, $\varphi_S = 180^\circ$, $\rho_S = 30^\circ$, minimum nastává pro $\vartheta'_S = 130^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$, $\rho'_S = 32^\circ$ (dvě velmi podobná lokální minima jsou důsledkem symetrie)

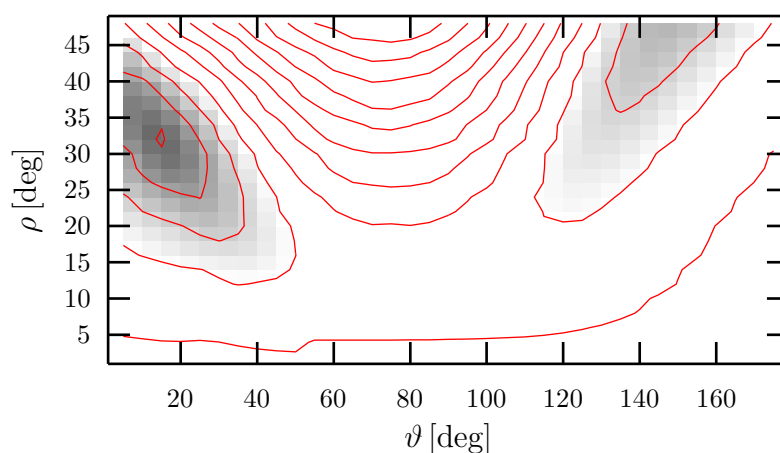


Obrázek 4.4: Profil čar v jednotlivých rotačních fázích (fáze je uvedena na svislé ose). Posun jednotlivých profilů je v intenzitní škále roven 0,075. Zelenými křížky jsou vykreslena vstupní data, červenou čarou vypočtený model. Nahoře případ ($\vartheta'_S = 90^\circ, \rho'_S = 20^\circ$), dole ($\vartheta'_S = 50^\circ, \rho'_S = 30^\circ$)

Skvrny s parametry $\vartheta_S = 15^\circ, \rho_S = 30, 20, 10^\circ, (i = 70^\circ)$

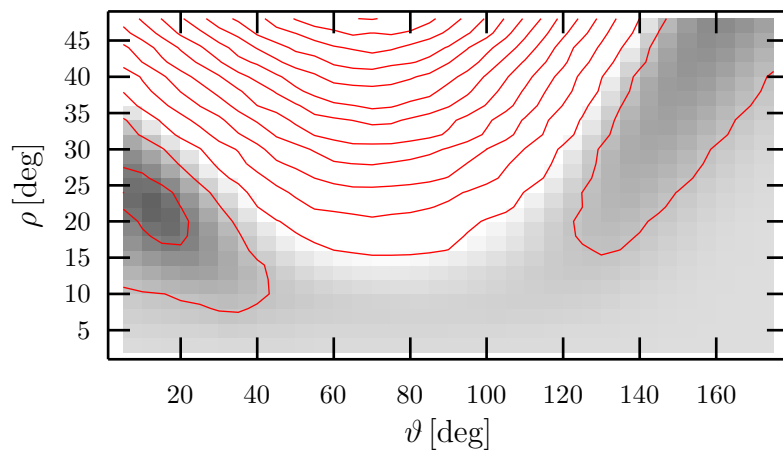
Nyní se podíváme na situace, kdy je sklon osy rotace hvězdy různý od pravého úhlu, konkrétně 70° . Tvar χ^2 (obrázek 4.5) se podobá předchozímu případu, ale tady je jedno z minim výraznější, protože v důsledku sklonu osy rotace došlo k narušení symetrie. Výsledek pro tuto situaci je $\vartheta'_S = 15^\circ$ a $\rho'_S = 32^\circ$, tedy opět ve shodě se vstupem.

V dalším případě je skvrna menší. Má poloměr $\rho_S = 20^\circ$. Opět můžeme pozorovat na průběhu funkce χ^2 pozorovat dvě lokální minima (viz obrázek 4.6), i když tentokrát jsou již méně výrazná. Hlubší z nich odpovídá hledanému řešení, a nastává pro hodnoty parametrů $\vartheta'_S = 10^\circ, \rho'_S = 22^\circ$.

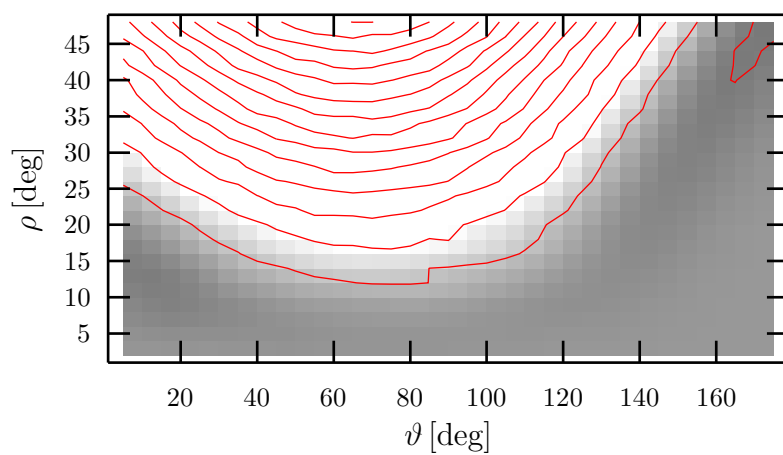


Obrázek 4.5: χ^2 pro $\vartheta_S = 15^\circ, \varphi_S = 180^\circ, \rho_S = 30^\circ$ dosahuje minima pro $\vartheta'_S = 15^\circ, \varphi'_S = 180^\circ, \rho'_S = 32^\circ$

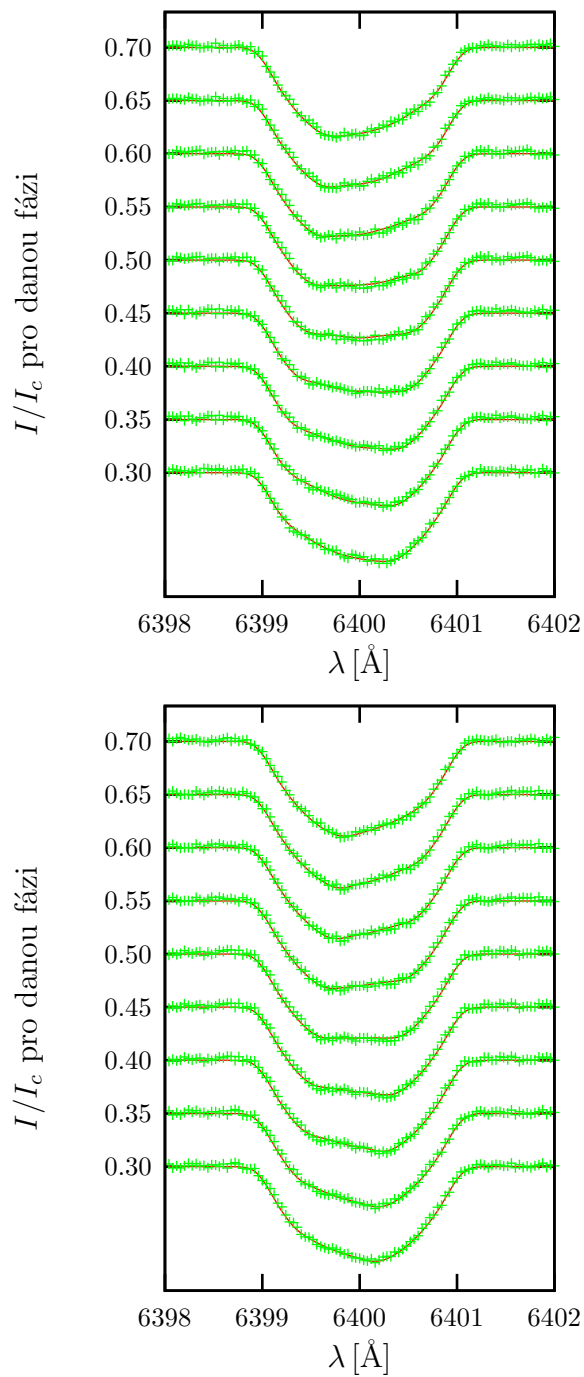
Poslední model z této série s konstantními souřadnicemi je skvrna o poloměru $\rho_S = 10^\circ$. Zde už jsou minima, která byla pozorovatelná v předchozích případech, téměř nezatelná (obrázek 4.7). Takto malá skvrna v poloze poblíž pólu (tedy s nízkou radiální rychlostí) se ve tvaru profilu téměř neprojeví, proto je prakticky nemožné identifikovat její polohu pomocí přímého zobrazování. Tomu odpovídá i naprostý neúspěch při určení správných parametrů pomocí nalezení minima funkce χ^2 . Výsledné parametry jsou $\vartheta'_S = 175^\circ$ a $\rho'_S = 48^\circ$. Vstupní profily a profily vypočítané na základě určených parametrů jsou na obrázcích 4.8 a 4.9.



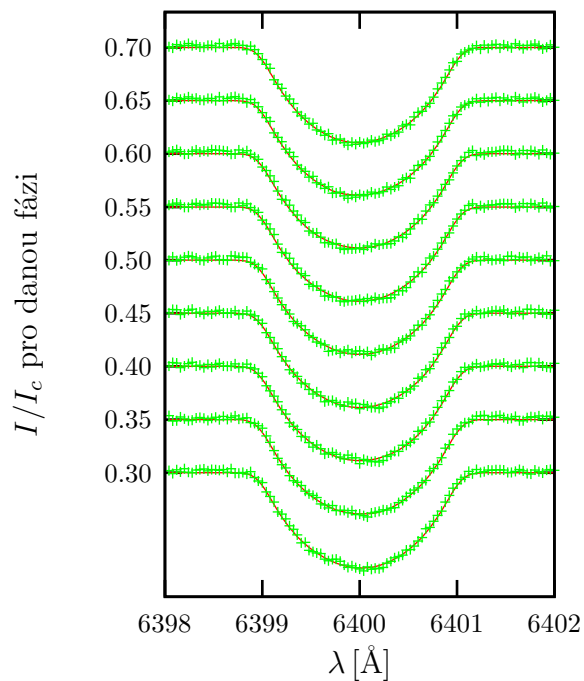
Obrázek 4.6: χ^2 pro $\vartheta_S = 15^\circ, \varphi_S = 180^\circ, \rho_S = 20^\circ, \vartheta'_S = 15^\circ, \varphi'_S = 180^\circ, \rho'_S = 22^\circ$



Obrázek 4.7: χ^2 pro $\vartheta_S = 15^\circ, \varphi_S = 180^\circ, \rho_S = 10^\circ, \vartheta'_S = 175^\circ, \varphi'_S = 180^\circ, \rho'_S = 48^\circ$



Obrázek 4.8: Profily čar pro modely s $\vartheta_S = 15^\circ$, $i = 70^\circ$ (nahore $\rho_S = 30^\circ$, dole $\rho_S = 20^\circ$).



Obrázek 4.9: Profily čar pro nejmenší skvrnu z této skupiny ($\rho_S = 10^\circ$). Syntetická data a modelové profily získané pro parametry určené jako minimum χ^2 jsou v dobré shodě, přestože nalezené řešení je zcela špatné. To je způsobeno tím, že skvrna je malá a leží v polární oblasti (její radiální rychlost nedosahuje velké amplitudy).

4.2 Minimalizace pro konstantní ρ_S

Dalším zajímavým problémem je opět redukovaná minimalizace tentokrát se známou hodnotou úhlového poloměru hvězdy ρ_S . V předchozích příkladech jsme viděli, že pokud je poloha skvrny na povrchu hvězdy stejná a mění se pouze její poloměr, tak celkový charakter χ^2 se příliš nemění, liší se pouze hloubka minim (vyjma případu s nejmenším poloměrem skvrny $\rho_S = 10^\circ$). V následujících případech se podíváme, jak vypadá minimalizace pro poloměr poloměr skvrny a mění se ϑ_S, φ_S .

Skvrna na rovníku s poloměrem $\rho_S = 30^\circ$ pro $i = 90^\circ$

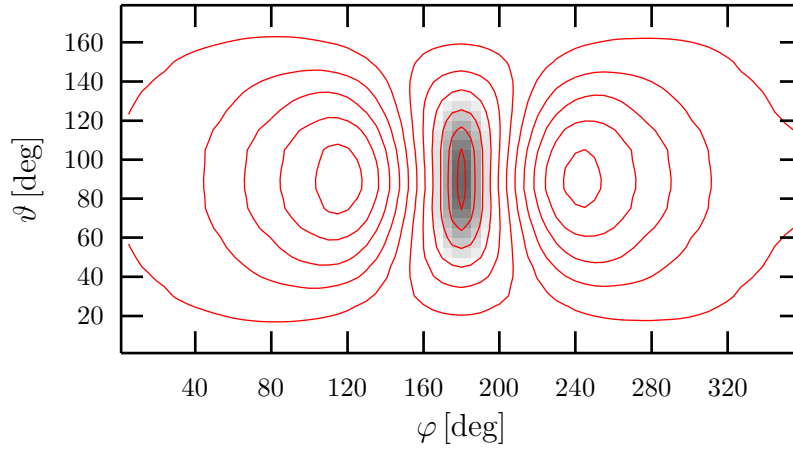
Funkce χ^2 pro tento případ je na obrázku 4.10. Můžeme na něm vidět dvě výrazná maxima a jedno minimum odpovídající správné kombinaci parametrů. Přesněji funkce dosahuje svého minima pro $\vartheta'_S = 90^\circ$ a $\varphi'_S = 180^\circ$. Na obrázku 4.12 nahoře jsou pak profily spektrálních čar pro tento případ.

Skvrna s $\rho_S = 20^\circ$ ležící na $\vartheta_S = 50^\circ$ pro $i = 90^\circ$

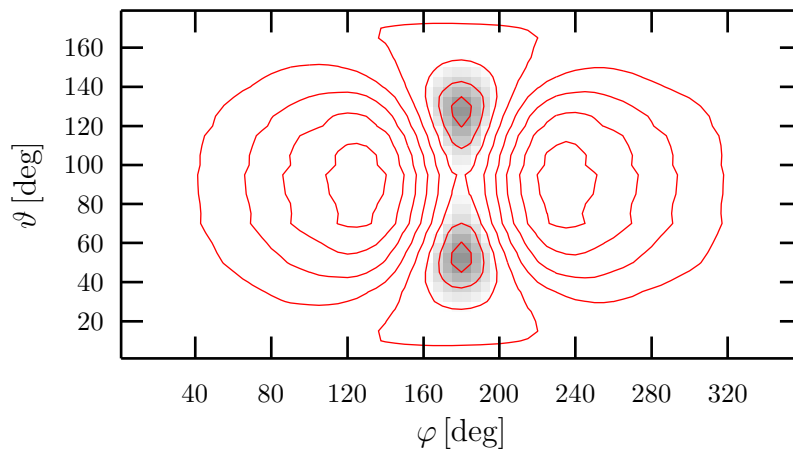
Zde se dá očekávat opět symetrický tvar χ^2 . V důsledku toho, že sklon rotační osy je roven 90° , tak není možné rozlišit polohu skvrny nad a pod rovníkem. To potvrzuje graf 4.11. Ten se do jisté míry podobá předchozímu případu. Jediným rozdílem je rozštěpení na dvě rovnocenná lokální minima pro polohy skvrny na obou hemisférách. Globálního minima dosahuje funkce pro $\vartheta'_S = 50^\circ, \varphi'_S = 180^\circ$. Spektrální čáry pro tuto situaci ukazuje obrázek 4.12 (dolní soubor čar).

Polární skvrna s úhlovým poloměrem $\rho_S = 30^\circ$ pro $i = 70^\circ$

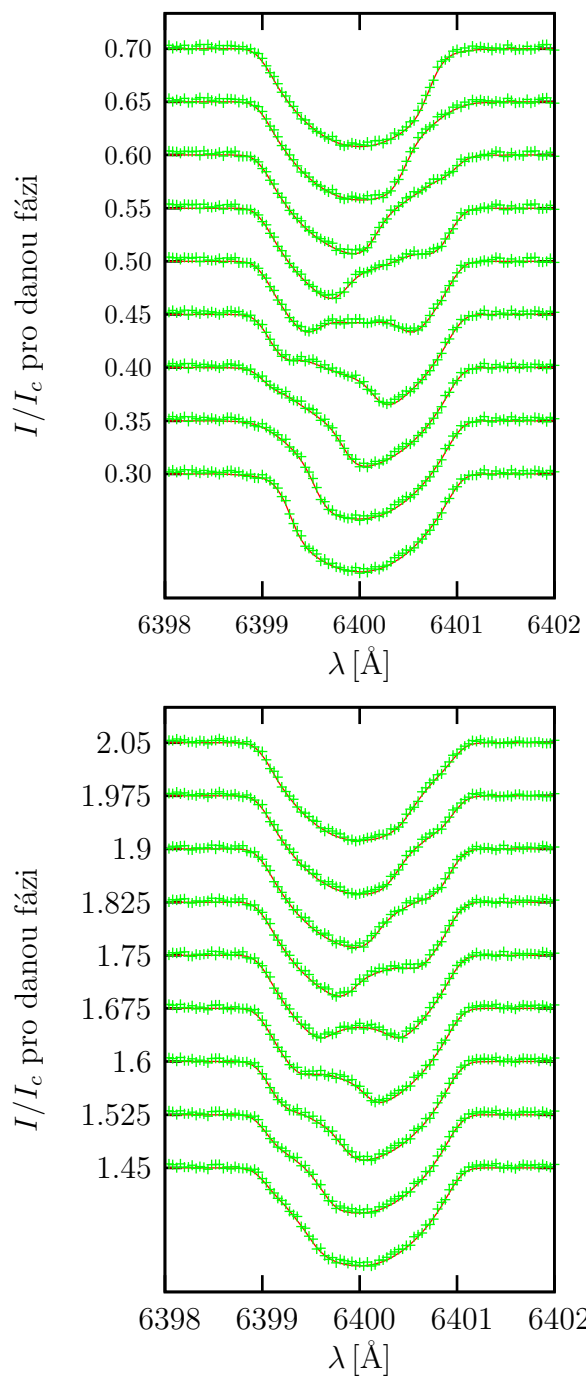
Další zajímavou konfigurací parametrů je situace, kdy je střed skvrny na pólu hvězdy. Pro jednoznačné rozlišení, který pól je zvolen, je sklon osy rotace různý od 90° . Na tvaru funkce χ^2 můžeme pozorovat dvě minima. Jedno je poměrně nevýrazné, to hlubší je pak centrováno právě na pól ($\vartheta'_S = \varphi'_S = 0^\circ$). Situaci ukazuje obrázek 4.13 a profily spektrálních čar, které jsou shodné pro všechny fáze, obrázek 4.14. Pozornost si zaslouží i skutečnost, že profil čáry je neproměnný v čase (proto i stejný ve všech fázích). Bez znalosti jeho formování není možné skvrnu identifikovat.



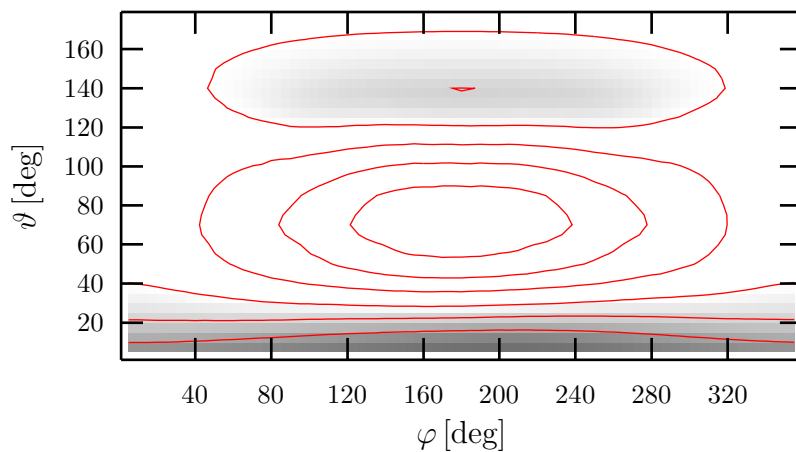
Obrázek 4.10: Funkce χ^2 počítaná pro rovníkovou skvrnu o poloměru $\rho_S = 30^\circ$, která dosahuje minima pro $\vartheta'_S = 90^\circ, \varphi'_S = 180^\circ$.



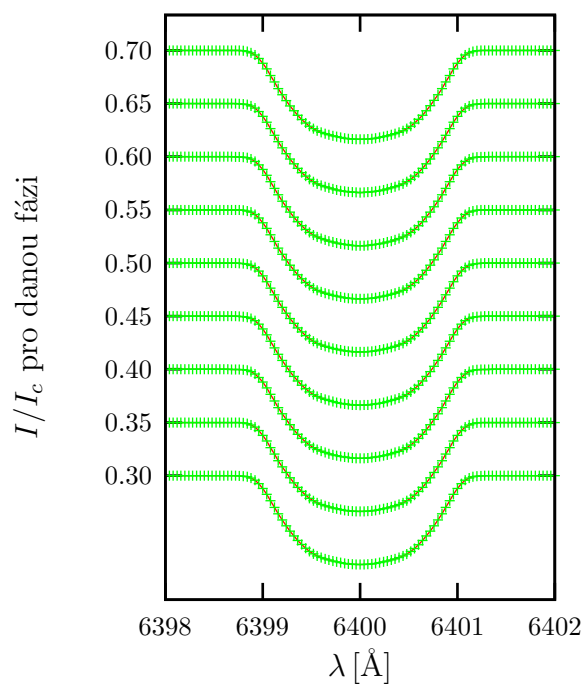
Obrázek 4.11: Při sklonu $i = 90^\circ$ opět není možné rozlišit mezi skvrnami ležícími oběma směry od rovníkové roviny (minimum nastává pro $\vartheta'_S = 50^\circ$ a $\varphi'_S = 180^\circ$).



Obrázek 4.12: Profily čar pro předchozí modely. Nahoře profily pro hvězdu s parametry $\vartheta_S = 90^\circ, \rho = 30^\circ$ (skvrna na rovníku), profily na spodním obrázku jsou počítané pro hodnoty parametrů $\vartheta'_S = 50^\circ, \rho_S = 20^\circ$.



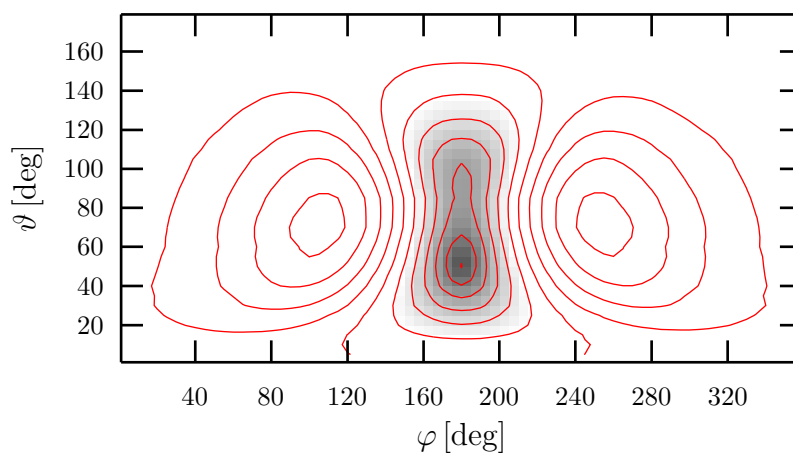
Obrázek 4.13: χ^2 pro polární skvrnu (protože jde o projekci sférické plochy do roviny, tak pól odpovídá celé spodní hraně grafu)



Obrázek 4.14: Profily čar pro případ polární skvrny

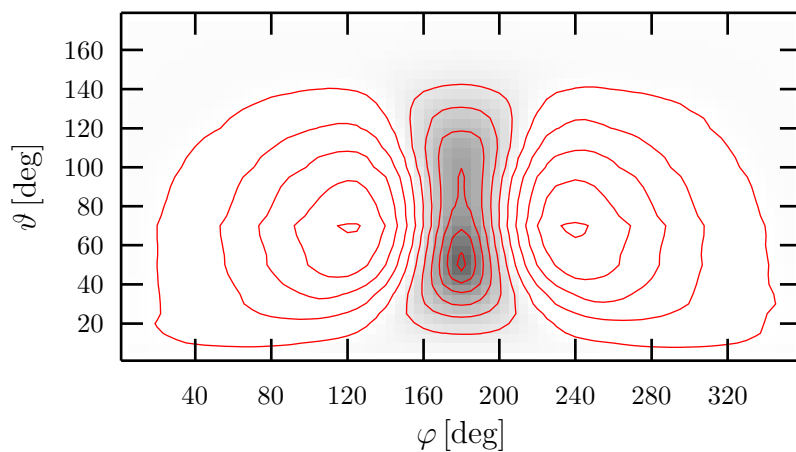
Skvrny ležící na $\vartheta_S = 50^\circ$ s poloměry $\rho_S = 10, 20, 30^\circ$ (sklon rotační osy $i = 70^\circ$)

Poslední skupina příkladů jsou skvrny různých průměrů s $\vartheta_S = 50^\circ$, $\varphi_S = 180^\circ$. Charakter χ^2 je pro $\rho_S = 30, 20, 10^\circ$ velice podobný, pozorujeme jedno lokální minimum a dvě maxima. Pro nejmenší poloměr je minimum stejně jako v podobných předchozích případech méně výrazné.

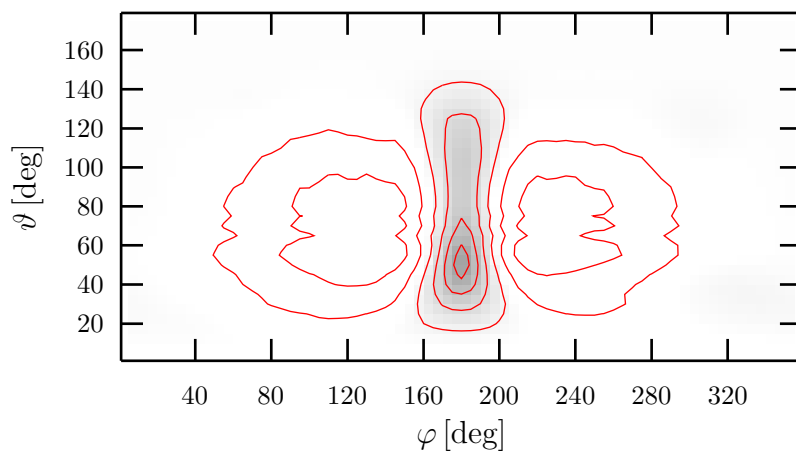


Obrázek 4.15: Funkce χ^2 pro případ s největší skvrnou z této skupiny (minima dosahuje pro hodnoty $\vartheta'_S = 50^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$.)

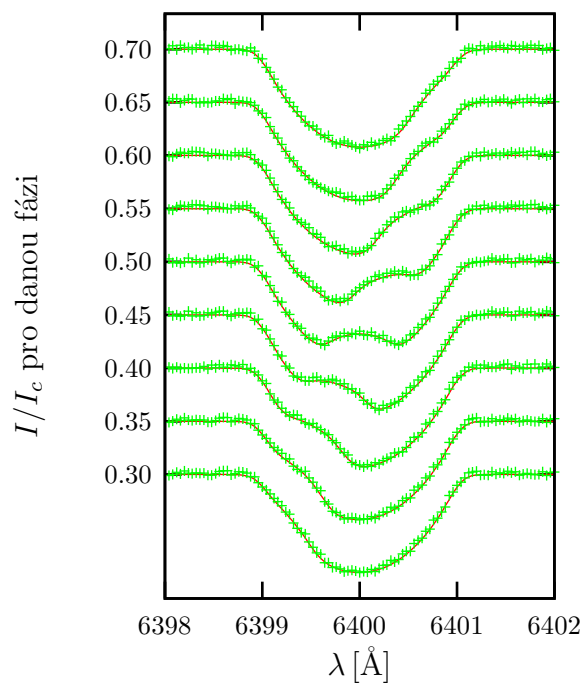
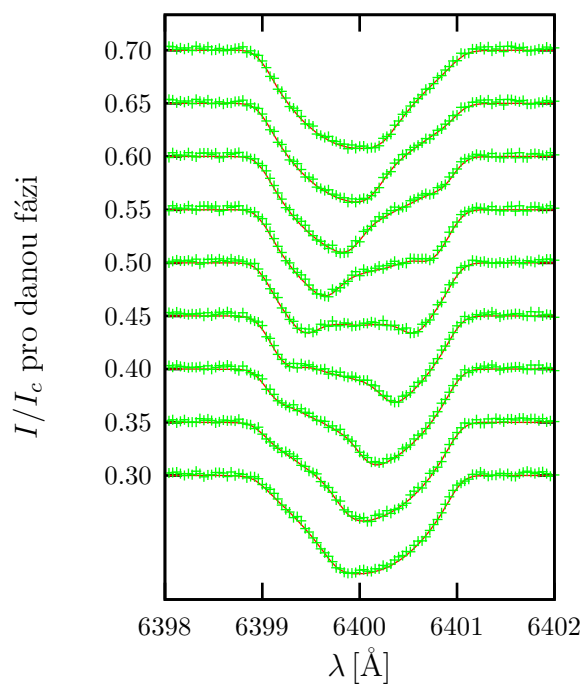
Shrňme si nyní výsledky minimalizace. Pro první případ ($\rho_S = 30^\circ$) získáme $\vartheta'_S = 50^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$. Pro skvrnu s $\rho_S = 20^\circ$ dostaneme opět $\vartheta'_S = 50^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$ a pro nejmenší skvrnu ($\rho_S = 10^\circ$) je výsledek $\vartheta'_S = 50^\circ$, $\varphi'_S = 180^\circ$. Ve všech případech tedy minimalizace vedla k nalezení správných hodnot hledaných parametrů. Průběhy χ^2 a tvary profilů jsou vyneseny na obrázcích 4.15 až 4.19.



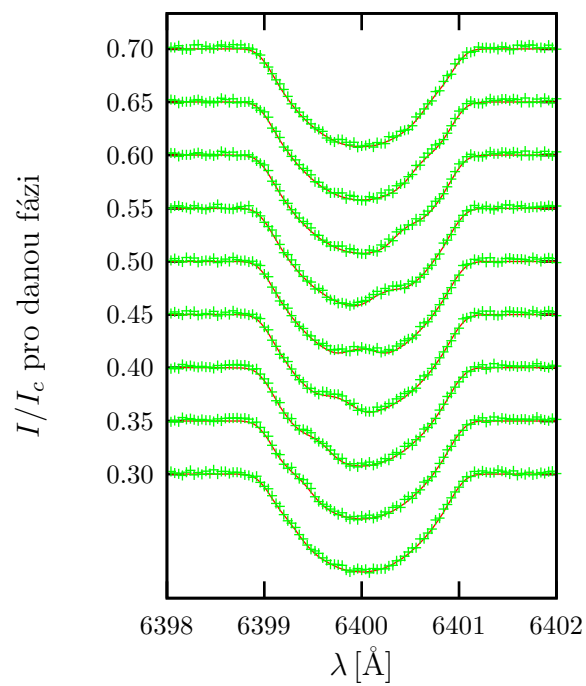
Obrázek 4.16: χ^2 pro hvězdu se skvrnou o poloměru $\rho_S = 20^\circ$ ($\vartheta'_S = 90^\circ, \varphi'_S = 180^\circ$)



Obrázek 4.17: Průběh χ^2 pro skvrnu s úhlovým poloměrem $\rho_S = 10^\circ$ je podobný jako pro předchozí dva případy (obrázky 4.15, 4.16). Shodná je i poloha minima.



Obrázek 4.18: Tvary čar pro modely s $\vartheta_S = 50^\circ$, $i = 70^\circ$ (nahore skvrna s $\rho_S = 30^\circ$, dole pro $\rho_S = 20^\circ$).



Obrázek 4.19: Profily spektrálních čar pro $\vartheta_S = 50^\circ$, $i = 70^\circ$, $\rho_S = 10^\circ$. Distorze je zde minimální, ale stále je dobře pozorovatelná.

4.3 Obecná minimalizace

Nyní se podívejme na přímé zobrazování obecnějším pohledem. Můžeme hledat minimum funkce χ^2 i bez znalosti hodnoty jednoho (nebo více) parametrů. Jediné, co se v tomto případě změní, je dimenze prohledávaného konfiguračního prostoru. V našem případě tedy hledáme vektor $(\vartheta_S, \varphi_S, \rho_S)$ pro nějž dosahuje suma kvadrátů odchylek od pozorovaných dat minima. Do podobné situace bychom se dostali i v případě, že by náš model byl složitější a závisel by na větším počtu volných parametrů. Musíme tedy použít nějaký numerický optimalizační algoritmus.

V práci jsem používal následující optimalizační metody. První z nich je jednoduchý algoritmus, který hledá v sousedních bodech diskretní sítě (6-sousedství pro třírozměrnou síť) bod, ve kterém dosahuje χ^2 minimální hodnoty a v případě, že je tato hodnota menší než hodnota χ^2 v aktuálním bodě, tak se do tohoto bodu přesune. V opačném případě nahlásí nalezení lokálního minima a skončí. Druhou používanou metodou je simplexová metoda (popis například v Press a kol., 2002). V případě simplexové metody je na diskretní (obecně nemusí být nutně diskretní) síti umístěn simplex, tedy objekt s $n + 1$ vrcholy (n je dimenze prohledávaného prostoru). Pro minimalizaci v \mathbb{R}^2 by to byl trojúhelník, v našem případě je to čtyřstěn. Hodnota minimalizované funkce se počítá ve vrcholech simplexu. Ten se pomocí expanzí, kontrakcí a zrcadlení pohybuje v konfiguračním prostoru, dokud jeden jeho vrchol neleží v hledaném minimu (nebo v jeho dostatečné blízkosti). Testoval jsem obě výše popsané metody, ale při výpočtech jsem používal metodu hledání v sousedních bodech. Oba algoritmy jsem implementoval sám.

V předchozích případech byly jako vstupní data použity profily zašuměné aditivním šumem. V této části práce jsem šum záměrně potlačil, protože se nedá předem odhadnout charakter funkce χ^2 a nechtěl jsem, aby na ní z důvodu přítomnosti šumu měla funkce lokální minima, která by mohla ovlivnit průběh a výsledek minimalizační procedury. Ukázalo se, že i přesto končily často optimalizační algoritmy mimo očekávaný bod, χ^2 tedy i bez šumu má více lokálních minim.

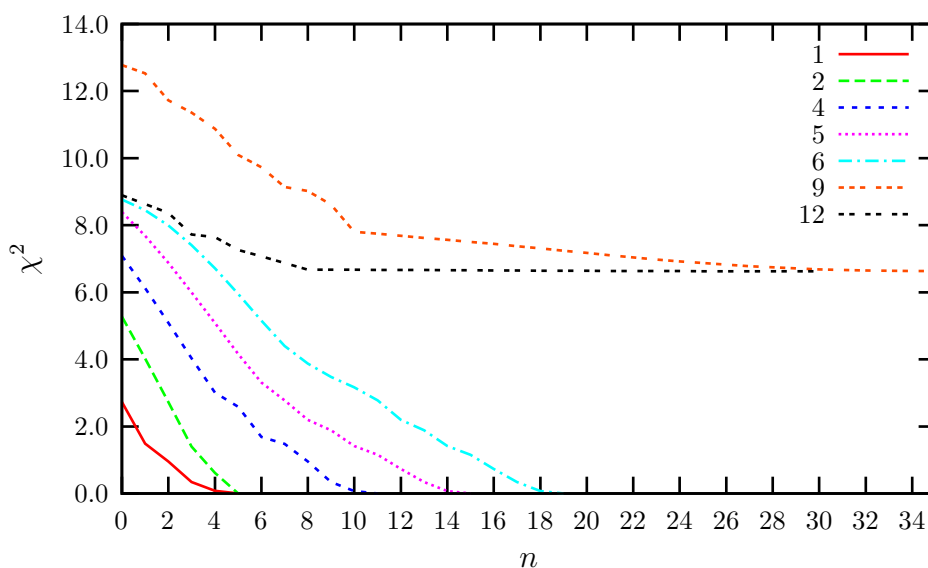
Shrňme si nyní výhody a nevýhody obou výše zmíněných minimalizačních procedur. V případě simplexové metody závisí do velké míry výsledek na parametrech výchozího simplexu, hlavně na jeho poloze. Její hlavní výhodou je urychlená konvergence díky možnosti expanze simplexu. To naznačuje, že by bylo možné poměrně rychle nalézt minimum i při inicializaci ve větší vzdálenosti od něho. Ve většině případů se bohužel podařilo nalézt pouze lokální minima, která neodpovídala tomu hledanému. Z toho důvodu jsem používal pouze první uvedenou metodu (hledání v sousedních bodech sítě) i přes její hlavní nevýhodu. Tou je skutečnost, že čas potřebný k nalezení minima je úměrný vzdálenosti (resp. 6-vzdálenosti¹) počátečního odhadu od hledaného minima. podívejme se nyní na výsledky obecného přímého zobrazování.

¹Nejde o Euklidovskou vzdálenost, ale o vzdálenost při používání 6-sousedství. Tato vzdálenost je rovna délce cesty (path) mezi danými body sítě. Tato cesta sestává ze 6-sousedících bodů.

Přímé zobrazování hvězdy s rovníkovou skvrnou $\rho = 30^\circ$ a sklonem rotační osy 90° ($\varphi_S = 180^\circ$)

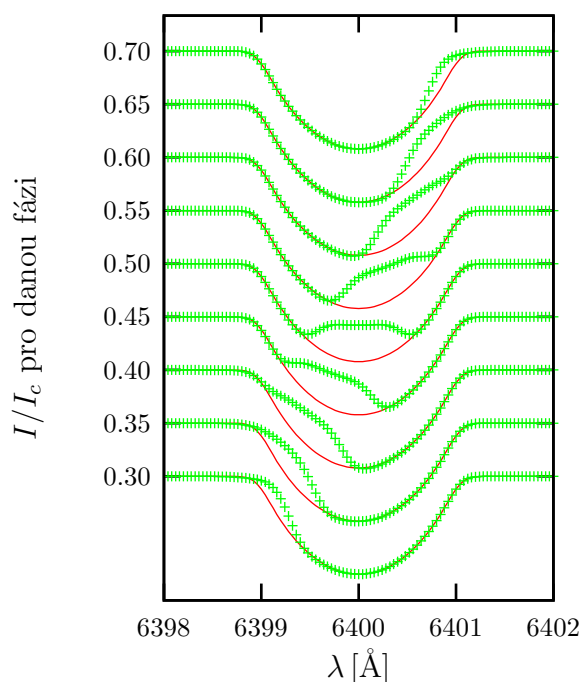
První konfigurací, na které jsem testoval přímé zobrazování, je hvězda se skvrnou o poloměru 30° ležící na rovníku. Její rotační osa je kolmá ke směru k pozorovateli. Minimalizační algoritmus jsem spustil z sedmi různých počátečních bodů. Výsledky minimalizace shrnuje tabulka. V prvním sloupci jsou souřadnice bodu, ve kterém byla inicializována optimalizační procedura, následuje nalezený bod, hodnota χ^2 v tomto bodě a označení dané minimalizace v grafu 4.20, který graficky znázorňuje průběh procedury.

inicializace $(\vartheta, \varphi, \rho)$	výsledek $(\vartheta_S, \varphi_S, \rho_S)$	χ^2	označení
(100, 170, 28)	(90, 180, 30)	0,00	1
(90, 160, 28)	(90, 180, 30)	0,00	2
(80, 150, 24)	(90, 180, 30)	0,00	4
(70, 140, 24)	(90, 180, 30)	0,00	5
(70, 130, 20)	(90, 180, 30)	0,00	6
(90, 240, 34)	(95, 360, 14)	6,64	9
(80, 250, 20)	(80, 360, 4)	6,63	12



Obrázek 4.20: Grafické znázornění průběhů minimalizační procedury. Na vodorovné ose (označené n) jsou vyneseny iterace, na svislé ose pak hodnota χ^2 pro danou iteraci. Je patrné, že výsledkem většiny iterací bylo správné řešení, pouze ve dvou případech skončila minimalizace v jiných lokálních minimech. Číslování jednotlivých průběhů koresponduje s tabulkou.

Při inicializaci v prvních pěti bodech bylo nalezené minimum správné hledané. V posledních dvou uvedených procedurách, které startovaly z jiné oblasti konfiguračního prostoru se podařilo nalézt pouze lokální minima, kterých bylo ve skutečnosti ještě více. Je tedy zřejmé, že funkce χ^2 má složitý průběh a přímé zobrazování je v tomto případě citlivé na počáteční odhad minima. Na následujícím obrázku 4.21 jsou profily čar vstupních dat spolu s vypočtenými profily pomocí nesprávných hodnot parametrů nalezených pomocí minimalizace ($\vartheta_S = 95^\circ, \varphi_S = 360^\circ, \rho_S = 14^\circ$). Tvar profilů pro druhé špatné řešení je velmi podobný.



Obrázek 4.21: Profily čar pro tuto konfiguraci skvrny ($\vartheta_S = 90^\circ, \varphi_S = 180^\circ, \rho_S = 30^\circ, i = 90^\circ$). Zelenou barvou jsou vstupní data, červenou model vypočtený na základě nalezených parametrů (záměrně uvádím nesprávně nalezené řešení).

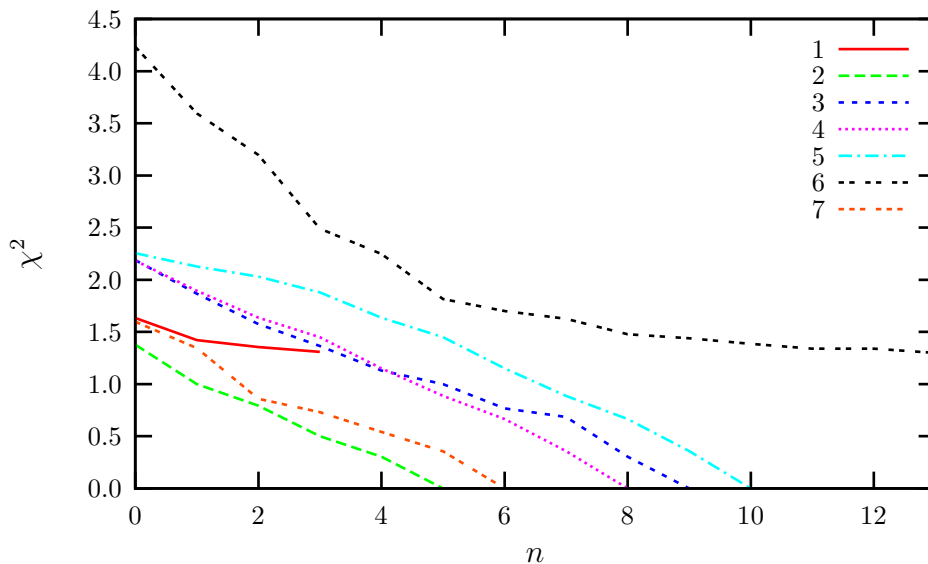
Hvězda se skvrnou s parametry $\vartheta_S = 60^\circ, \varphi_S = 170^\circ, \rho_S = 20^\circ$ (sklon rotační osy 90°)

Nyní se podíváme na hvězdu s menší skvrnou než v minulém případě, která ale leží mimo rovník. To má spolu se sklonem rotační osy, který je roven 90° , za následek shodnost profilů pro konfiguraci, kdy je úhel ϑ_S roven 120° . To by se mělo promítnout i do výsledků minimalizace v závislosti na její inicializaci.

Opět jsem provedl sedm minimalizačních běhů. Za pozornost stojí zejména ten s označe-

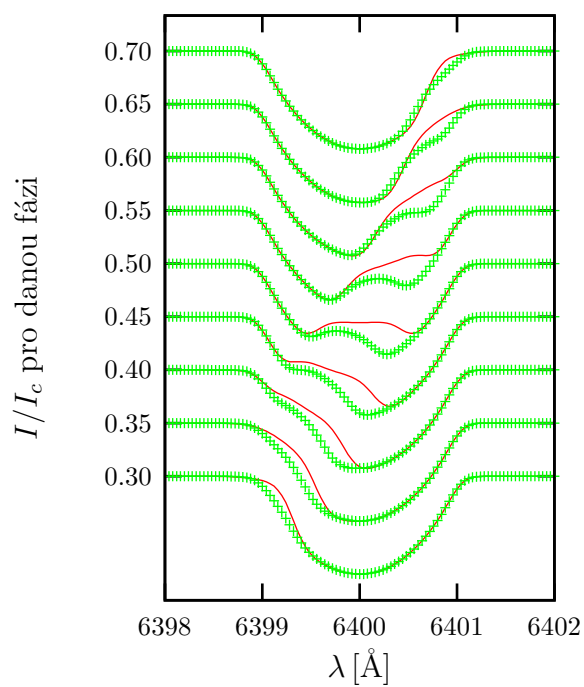
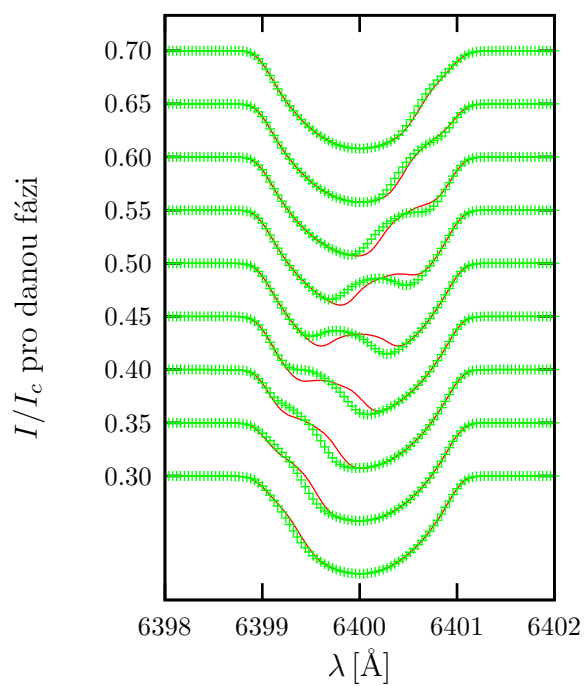
ním 7. Ten byl inicializován v blízkosti zmíněného symetrického minima a jeho výsledkem je opravdu toto minimum (s nulovou hodnotou χ^2). Výsledky pro tuto hvězdu shrnuje následující tabulka a doprovodný graf. V pěti případech se podařilo nalézt správné (nebo symetrické) řešení, při dvou pokusech byla nalezena pouze lokální minima.

inicializace (ϑ, φ, ρ)	výsledek ($\vartheta_S, \varphi_S, \rho_S$)	χ^2	označení
(70, 180, 20)	(55, 180, 20)	1,31	1
(60, 160, 18)	(60, 170, 20)	0,00	2
(45, 150, 16)	(60, 170, 20)	0,00	3
(40, 150, 20)	(60, 170, 20)	0,00	4
(30, 150, 20)	(60, 170, 20)	0,00	5
(90, 240, 34)	(80, 180, 30)	1,30	6
(125, 160, 26)	(120, 170, 20)	0,00	7



Obrázek 4.22: Minimalizace pro hvězdu s parametry skvrny $\vartheta_S = 60^\circ$, $\varphi_S = 170^\circ$, $\rho_S = 20^\circ$. Průběhy minimalizací s čísly 2, 3, 4, 5 našly úspěšně hledané minimum, u průběhu 7 jde o minimum symetrické. V ostatních případech nebyla minimalizace úspěšná.

Na obrázku 4.23 jsou vstupní data společně s modelovými profily počítanými z nalezených parametrů. Jde o výsledky obou neúspěšných optimalizací. I přesto, že jde o chybné hodnoty parametrů, některé vypočtené křivky se od vstupních dat výrazně neodlišují, jako tomu bylo v předchozím případě.



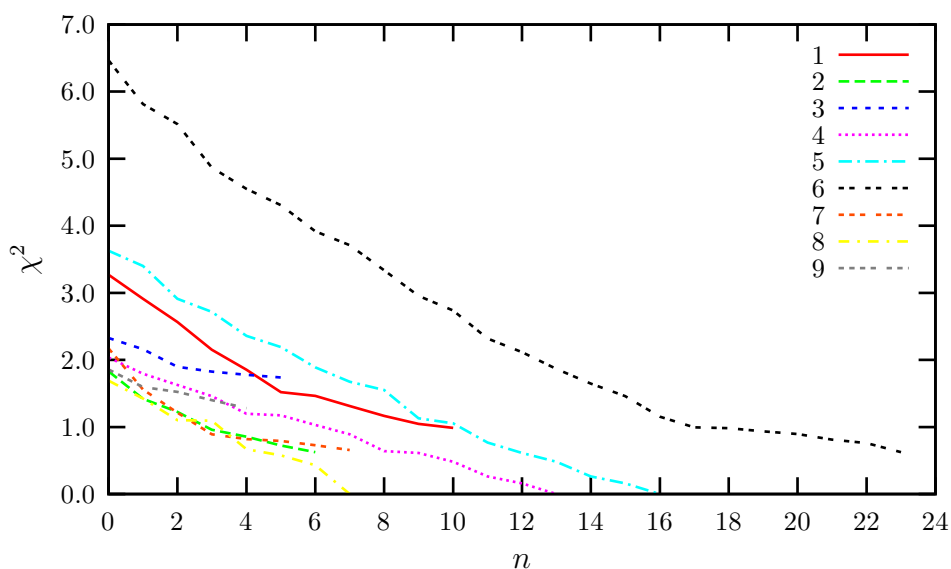
Obrázek 4.23: Profily pro vstupní data s parametry $\vartheta_S = 60^\circ, \varphi_S = 170^\circ, \rho_S = 20^\circ$ a modely počítané na základě určených hodnot parametrů (minimalizace číslo 1 horní graf, číslo 2 spodní graf).

Hvězda se skvrnou s parametry $\vartheta_S = 60^\circ, \varphi_S = 170^\circ, \rho_S = 20^\circ$ (sklon rotační osy 70°)

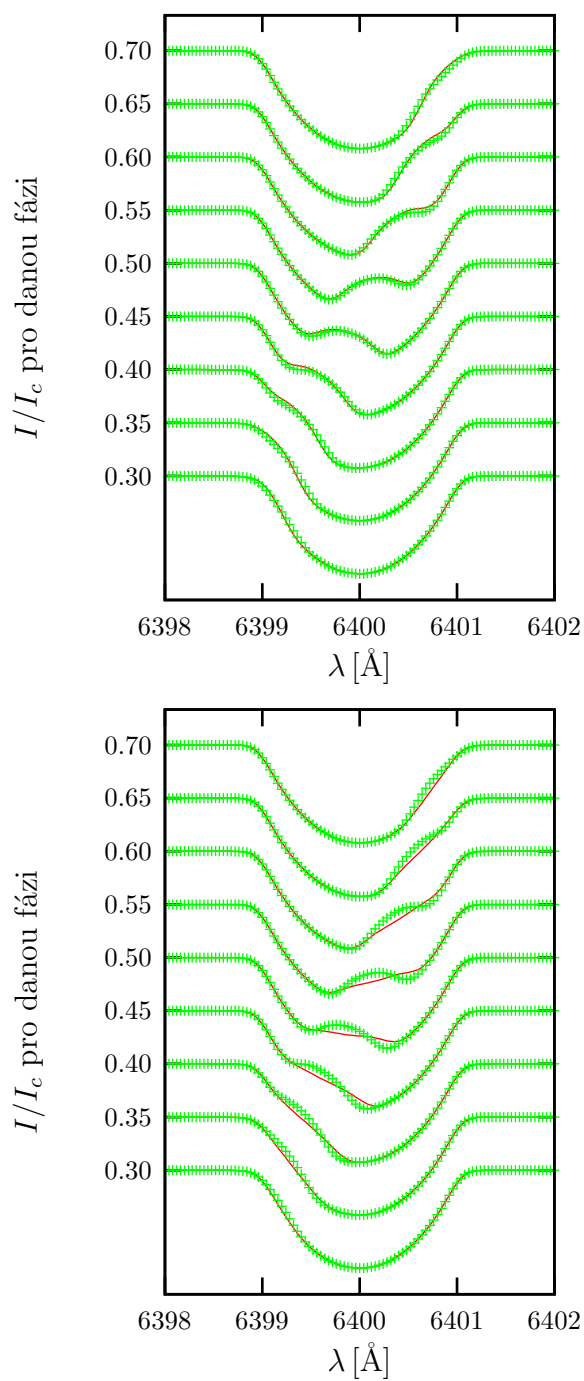
Další testovaná konfigurace se lišila od té předchozí pouze sklonem rotační osy hvězdy, který byl v tomto případě odlišný od pravého úhlu. Dojde tedy k porušení symetrie a druhé minimum, které bylo v předchozím případě rovnocenné s očekávaným minimem, bude méně výrazné. Ale i zde se dá očekávat citlivost na nastavení inicializace minimalizačního procesu.

Pro tuto konfiguraci jsem provedl minimalizaci celkem devětkrát. Pouze ve třech případech se však podařilo nalézt správné řešení. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce.

inicializace $(\vartheta, \varphi, \rho)$	výsledek $(\vartheta_S, \varphi_S, \rho_S)$	χ^2	označení
(90, 160, 30)	(92, 170, 22)	0,99	1
(70, 160, 18)	(70, 170, 20)	0,62	2
(70, 180, 24)	(68, 180, 16)	1,74	3
(50, 160, 14)	(60, 170, 20)	0,00	4
(54, 150, 26)	(60, 170, 20)	0,00	5
(80, 150, 36)	(70, 170, 20)	0,62	6
(66, 174, 26)	(60, 174, 18)	0,66	7
(60, 160, 16)	(60, 170, 20)	0,00	8
(126, 174, 26)	(118, 174, 26)	1,28	9



Obrázek 4.24: Minimalizace pro hvězdu s parametry skvrny $\vartheta_S = 60^\circ, \varphi_S = 170^\circ, \rho_S = 20^\circ$.



Obrázek 4.25: Profily pro vstupní data s parametry $\vartheta_S = 60^\circ, \varphi_S = 170^\circ, \rho_S = 20^\circ$ a modely počítané na základě určených hodnot parametrů (minimalizace 2 a 6 horní graf, minimalizace 9 spodní graf).

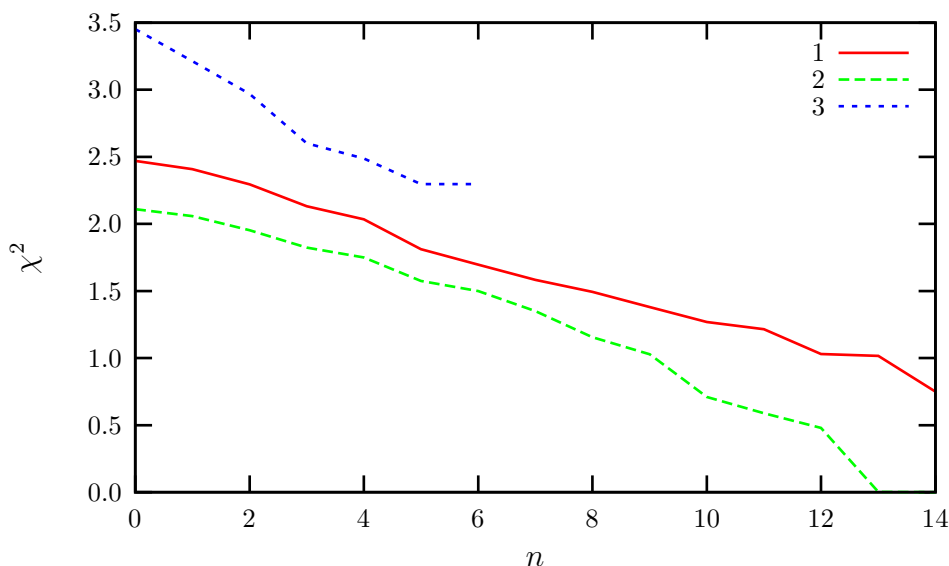
Zajímavé je, že ve dvou případech skončily minimalizace ve stejném (nesprávném) bodě. Jedna minimalizace byla také inicializována v blízkosti očekávaného méně významného symetrického minima. Modely pro oba zmíněné výsledky spolu se vstupními daty jsou vykresleny na grafech v obrázku 4.25.

Polární skvrna o poloměru $\rho_S = 30^\circ$

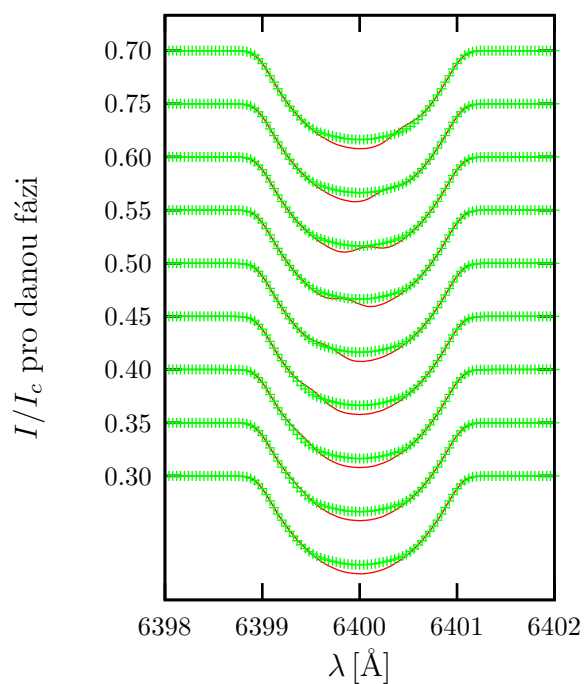
Poslední testovanou konfigurací byla skvrna ležící na pólu hvězdy, jejíž osa rotace je skloněná pod úhlem 70° . Optimalizační algoritmus jsem inicializoval třikrát. V prvních dvou případech byly určeny akceptovatelné hodnoty parametrů (první lze považovat za správně nalezené řešení), neboť byla zvolena inicializační hodnota $\vartheta_S = 0^\circ$, poslední minimalizace dopadla výrazně hůře.

inicializace $(\vartheta, \varphi, \rho)$	výsledek $(\vartheta_S, \varphi_S, \rho_S)$	χ^2	označení
(30, 0, 40)	(8, 0, 34)	0,75	1
(20, 0, 20)	(0, 0, 28)	0,00	2
(40, 150, 20)	(40, 150, 8)	2,30	3

Tabulku shrnující průběhy minimalizací doplňuje ještě následující graf a tvary profilů počítaných pro výsledky běhu číslo 3 jsou na obrázku 4.27.



Obrázek 4.26: Minimalizace pro hvězdu s polární skvrnou.



Obrázek 4.27: Vstupní data společně s modelem pro parametry $\vartheta_S = 40^\circ$, $\varphi_S = 150^\circ$, $\rho_S = 8^\circ$ (minimalizace číslo 3). Model počítá profily pro malou skvrnku (viz nalezené parametry), která má za následek vlnku, která se přesunuje po profilu ve fázi.

Kapitola 5

Řešení inverze spektrálních profilů

5.1 Formulace inverzního problému

V předchozí kapitole byl popsán způsob, jak nalézt hodnoty hledaných parametrů, které budou splňovat určité kvantitativní kritérium. Nelze však říci, že hledané řešení je správné. Šlo pouze o nalezení takových parametrů modelu, aby se výsledné profily čar lišily co možná nejméně od profilů pozorovaných. V této části práce se ale budeme zabývat skutečnou inverzní metodou, která by měla být schopná nalézt rozložení hledané veličiny po povrchu, nebo pro každý povrchový element určit, zda se jedná o skvrnu, nebo ne. Dále popsán model inverzního problému byl vyvinut na základě diskuse s N. Piskunovem (Piskunov, 2008).

Nejprve si opět musíme zadefinovat podmínky, které aplikujeme jako vstupní předpoklad pro formulaci inverzní procedury. Mějme tedy dva lokální čárové profily $I^1(\lambda)$ a $I^2(\lambda)$, jeden může být pro povrch a druhý pro skvrnu stejně jako v předchozím případě (nahrazují zde lokální profily $\mathcal{H}_1(\lambda)$ a \mathcal{H}_2). Definujme si koeficient α_j , který určuje pro j -tý element povrchu zastoupení obou druhů profilů. Přesněji výslední lokální profil vznikne lineární kombinací $(1 - \alpha_j)I_j^1(\lambda) + \alpha_j I_j^2(\lambda)$. Celý povrch hvězdy tedy můžeme popsat jedním vektorem $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$ s počtem prvků n rovným počtu povrchových elementů. Soubor pozorovaných dat můžeme zapsat ve tvaru $R(\lambda, \phi)$, protože jde o závislost na vlnové délce λ a fázi ϕ . Pro tato pozorování se snažíme najít takový vektor α , pro který bude nabývat následující funkcionál minima

$$\Phi = \sum_{\lambda, \phi} \left\{ R(\lambda, \phi) - \sum_j \mu_j(\phi) [(1 - \alpha_j)I_j^1(\lambda, \phi) + \alpha_j I_j^2(\lambda, \phi)] \Delta\delta_j \right\}^2. \quad (5.1)$$

V lokálních profilech $I_j^1(\lambda, \phi)$ a $I_j^2(\lambda, \phi)$ je započten v každé fázi dopplerovský posun. Význam dalších výrazů je jasný z předchozího textu, zbývá jen $\mu_j(\phi)$, což je člen popisující geometrii. Může v něm být zahrnuto například okrajové ztemnění, ale pro začátek je nejvhodnější zvolit jeho hodnotu rovnu jedné, pokud je j -tý element ve fázi ϕ na viditelné hemisféře a nule v opačném případě. $\Delta\delta_j$ je plocha daného plošného elementu. Ta není v případě použité sítě konstantní, ale klesá směrem k pólům. Nutný požadavek na mini-

mum můžeme formulovat následujícím způsobem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0. \quad (5.2)$$

Derivace výrazu 5.1 má následující podobu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = & 2 \sum_{\lambda, \phi} \{ R(\lambda, \phi) - \sum_j \mu_j(\phi) [(1 - \alpha_j) I_j^1(\lambda, \phi) + \alpha_j I_j^2(\lambda, \phi)] \Delta \delta_j \} \times \\ & \times \mu_i(\phi) [I_i^1(\lambda, \phi) - I_i^2(\lambda, \phi)] \Delta \delta_i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Derivaci položíme rovnu nule. Po úpravách dostaneme soustavu lineárních rovnic, kterou můžeme symbolicky zapsat takto

$$\sum_j Q_{ij} \alpha_j = S_i. \quad (5.4)$$

Nyní si rozepišme matici soustavy \mathbf{Q} a pravou stranu \mathbf{S}

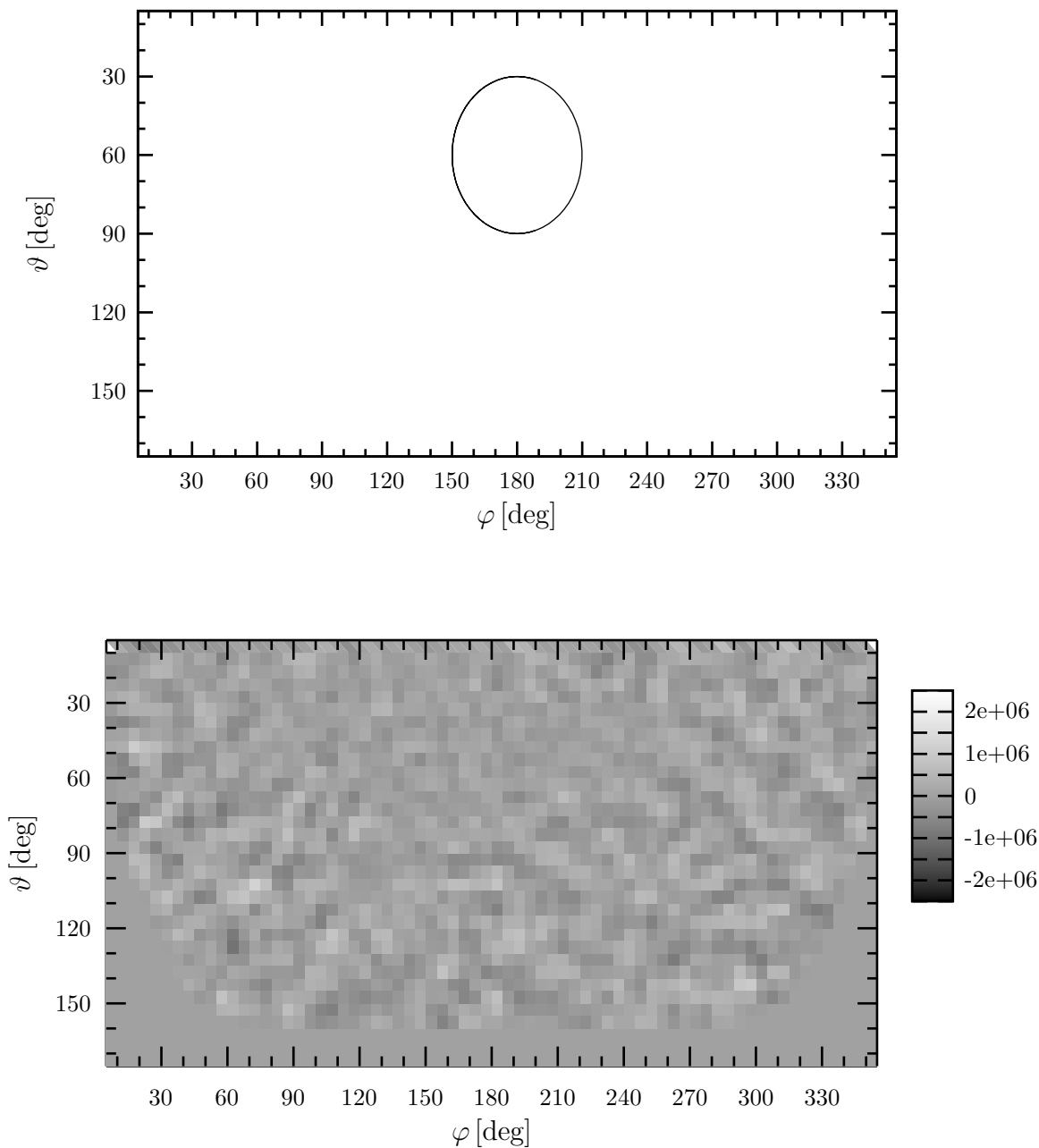
$$\begin{aligned} Q_{ij} = & \sum_{\lambda, \phi} \mu_i(\phi) \mu_j(\phi) [I_j^2(\lambda, \phi) - I_j^1(\lambda, \phi)] [I_i^1(\lambda, \phi) - I_i^2(\lambda, \phi)] \Delta \delta_i \Delta \delta_j, \\ S_i = & \sum_{\lambda, \phi} \mu_i(\phi) R(\lambda, \phi) [I_i^1(\lambda, \phi) - I_i^2(\lambda, \phi)] \Delta \delta_i - \\ & - \mu_i(\phi) \sum_j \mu_j(\phi) \sum_{\lambda, \phi} I_j^1(\lambda, \phi) [I_i^1(\lambda, \phi) - I_i^2(\lambda, \phi)] \Delta \delta_i \Delta \delta_j. \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2 Výsledky získané pomocí inverze

Jak bylo zmíněno v kapitole o výpočetním modelu, povrch hvězdy jsem rozdělil na elementy po 5° v úhlové šířce i délce. Celkový počet povrchových elementů je 2522. Matice soustavy je tedy poměrně velká, nicméně má blokovou strukturu a většina prvků je nulových.

Při stejné hodnotě $v \sin i$ je tato matice v případě, že zanedbáme okrajové ztemnění, shodná pro libovolnou konfiguraci skvrny. Popisuje totiž geometrii problému a nezávisí na tvaru vstupních profilů. To samé ale neplatí pro pravou stranu. V té vystupují vstupní data (viz 5.5) a je tedy nutné počítat jí pro každý případ znovu. Jako vstupní data sloužily vypočtené profily, v tomto případě opět bez degradace šumem.

Bohužel výsledky této metody nenaplnily očekávání. Nepodařilo se numericky korektně vyřešit danou soustavu, resp. nalezené řešení bylo zcela nesprávné. Neznamená to ovšem, že je tato metoda nevhodná pro použití k řešení zadaného problému. Jen je nejspíš náročnější odladit ji do podoby použitelné k reálnému nasazení. Její teoretické pozadí je dobrým základem pro další vývoj, který ale přesahuje rámec této práce. Na obrázku 5.1 je získaná mapa povrchu mapované hvězdy (počítáno pro $v \sin i = 50,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$). Vstupní data byla počítána pro kruhovou skvrnu o poloměru 30° ležící na souřadnicích $\vartheta_S = 60^\circ$, $\varphi_S = 180^\circ$.



Obrázek 5.1: Na horním grafu je schematicky znázorněna poloha a velikost skvrny, pro kterou byla počítána vstupní data. Na spodním grafu je zrekonstruovaná mapa povrchu získaná pomocí inverze spektrálních profilů. Ve stupních šedi nejsou vyneseny přímo hodnoty α , ale jsou naškálvány. V každém případě nelze tvrdit, že by se na takto spočítané mapě povrchu nacházely nějaké struktury odpovídající hornímu grafu.

Závěr

Diplomová práce se věnuje dopplerovskému zobrazování povrchu chemicky pekuliárních hvězd, na kterém pozorujeme skvrny se zvýšenou, nebo sníženou abundancí některých chemických prvků. Pro tyto účely byly v rámci práce vyvinuty a samostatně implementovány dvě metody: metoda přímého zobrazování a formalismus pro řešení inverze spektrálních profilů.

Metoda přímého zobrazování je založena na minimalizaci odchylek pozorovaných (vstupních) a modelových dat. Tuto minimalizaci lze provést se znalostí některého z parametrů modelu (v našem případě jsem provedl redukované minimalizace se znalostí úhlové délky skvrny φ_S , nebo jejího úhlového poloměru ρ_S), nebo zcela obecně. V případě těchto redukovaných minimalizací (ať již s předem známou hodnotou φ_S nebo ρ_S) se ve většině případů podařilo dosáhnout spolehlivých výsledků. Metoda nevede k věrohodným výsledkům při identifikaci skvrny o malém úhlovém poloměru zhruba 15° a menší. Dá se rovněž předpokládat, že při nižší kvalitě dat (nižší rozlišení ale hlavně vyšší míra šumu) by limitní úhlový poloměr skvrny, kterou je možné pomocí přímého zobrazování diagnostikovat, ještě vzrostl. Pro větší skvrny ale probíhá tento algoritmus bez větších problémů.

Dále se podařilo potvrdit, že pro dopplerovské mapování nejsou vhodné hvězdy se sklonem rotační osy blízkým 90° . Pokud je na povrchu takové hvězdy pouze jedna skvrna, pak není možné ze spektroskopie určit, na které polokouli se nachází. V případě, že bychom pozorovali skvrn více (na severní i jižní hemisféře), mohli bychom dostat zcela nesprávné výsledky.

Interpretace výsledků obecné minimalizace je komplikovanější. Průběh χ^2 je ve třírozměrném konfiguračním prostoru zřejmě mnohem složitější, než by se dalo vyvozovat z jejího tvaru při redukovaných minimalizacích. Byl zjištěn častý výskyt lokálních minim, které zkreslovaly výsledky. Zajímavé je, že zatímco hodnotu úhlové délky středu skvrny φ_S se téměř vždy podaří nalézt správnou, u šířky ϑ_S je rozptyl jejích hodnot výrazně vyšší. Podobně jako v případě asi všech minimalizačních postupů ve fyzice, je velmi důležité správně zvolit počáteční odhad parametrů. Je proto vhodné získat například odhad hodnot hledaných parametrů získaný jinou metodou. Důležité je zmínit, že i když modelované profily poměrně dobře souhlasí s vstupními daty, nalezené řešení nemusí být správné. Proto je nutné být při interpretaci určených hodnot parametrů opatrný a při aplikaci přímého zobrazování na reálná data si uvědomovat limity této metody.

Druhou studovanou metodou je metoda založená na inverzi spektrálních čar. Podařilo se vytvořit formalismus pro popis použitého modelu, který je konzistentní s modelovými

výpočty čar. Jde o variační metodu, která převádí minimalizační problém na řešení soustavy lineárních rovnic. Bohužel se nepodařilo získat pomocí této metody smyslupné výsledky. Nelze ovšem říci, že popsaná metoda je pro výpočet zcela nevhodná. Pouze by bylo potřebné provést její detailnější analýzu a navrhnout jiné numerické postupy, které by měly být schopné poskytovat použitelné výstupy.

Literatura

- [1] Ryabchikova, T. A., ASPC, 305, 181, 2003
- [2] Khokhlova, V. L. & Ryabchikova, T. A., Ap&SS, 34, 403, 1975
- [3] Stibbs, D. W. N., MNRAS, 110, 395, 1950
- [4] Deutsch, A. J., IAUS, 6, 209, 1958
- [5] Deutsch, A. J., ApJ, 159, 985, 1970
- [6] Goncharsky, A. V. a kol., SvA, 26, 690, 1982
- [7] Vogt, S. S., Penrod, G. D., PASP, 95, 565
- [8] Vogt, S. S., Penrod, G. D. & Hatzes, A. P., ApJ, 321, 496
- [9] Kürster, M., A&A, 274, 815, 1993
- [10] Cameron, A. C., Lecture Notes in Physics, 397, 33, 1992
- [11] Piskunov, N., Societa Astronomica Italiana, Memorie, 1990
- [12] Rice, J. B., IAUS, 176, 19, 1996
- [13] Hatzes, A. P., IAUS, 176, 305, 1996
- [14] Piskunov, N. & Kochukhov, O., A&A, 389, 420, 2002
- [15] Babel, J., Michaud, G., ApJ, 366, 560, 1991
- [16] Turcotte, S., ASPC, 305, 199, 2003
- [17] Falk, A. E. & Wehlau, W. H., ApJ, 192, 409, 1974
- [18] <http://nova.astro.umd.edu>
- [19] Hubený, I., *Stellar Atmospheres Theory: An Introduction*, 1997
- [20] Rutten, R. J., *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*, 1993

- [21] Gray, D. F., *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, 1992
- [22] Press, W. H. a kol., *Numerical Recipes in C++*, 2002
- [23] Piskunov, N., *osobní sdělení*, 2007
- [24] Rektorys, K. a kol., *Přehled užití matematiky I*, 2000
- [25] Mikulášek, Z., Krtička, J., *Fyzika horkých hvězd* (skripta), 2007
- [26] Khokhlova, V. L. a kol., *AstL*, 26, 177, 2000
- [27] Krtička, J. a kol., *A&A*, 470, 1089
- [28] Semenova, A. A., *Doppler Imaging of Starspots: Spectral Diagnostics. A Case Study of the RS CVn Star σ Geminorum* (disertační práce), 2006
- [29] Michaud, G., Mègessier, C. & Charland, Y., *A&A*, 103, 244, 1981
- [30] Borsenberger, J., Michaud, G. & Praderie, F., *ApJ*, 243, 533, 1981
- [31] Alecian, G., Stift, M. J., *A&A*, 387, 271, 2002
- [32] Balmforth, N. J. a kol., *MNRAS*, 323, 362, 2001
- [33] Vauclair, S., Dolez, N. & Gough, D. O., *A&A*, 252, 618, 1991