

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně  
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Martin Zatloukal

**Modelování světelných křivek  
magnetických chemicky  
pekuliárních hvězd**

Diplomová práce

Brno 2004

Čestně prohlašuji, že jsem diplomovou práci napsal samostatně a pouze s použitím citované literatury.

.....

Děkuji za cenné rady vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Zdeňku Mikuláškoví, CSc. a dále Zdeňku Zvěřinovi za pomoc se skriptovacím jazykem PHP. Práce byla vykonána jako součást projektu GAČR 205/02/0445.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Základní charakteristiky CP hvězd</b>	<b>6</b>
2.1	Stručný popis CP hvězd . . . . .	6
2.2	Dělení CP hvězd . . . . .	7
2.3	Spektrální charakteristiky . . . . .	7
2.4	Rotace . . . . .	8
2.5	Poloměry CP hvězd . . . . .	9
2.6	Magnetické pole . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Spektroskopická a fotometrická proměnnost</b>	<b>11</b>
3.1	Model šikmého rotátoru . . . . .	11
3.2	Spektroskopická proměnnost, rozložení prvků po povrchu . . . . .	12
3.3	Fotometrická proměnnost . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Modelování světelných křivek CP hvězd</b>	<b>14</b>
4.1	Světelné křivky . . . . .	14
4.2	Algoritmus na generování světelných křivek . . . . .	14
4.3	Modely světelných křivek prokládané harmonickým polynomem . . . . .	19
4.3.1	Skvrna s 30% pokrytím hvězdného povrchu . . . . .	19
4.3.2	Skvrna s 40% pokrytím hvězdného povrchu . . . . .	24
4.3.3	Skvrna s 50% pokrytím hvězdného povrchu . . . . .	29
4.3.4	Srovnání světelných křivek pro $i = 90, 60$ a $30^\circ$ . . . . .	34
4.3.5	Shrnutí . . . . .	36
4.3.6	Pás se sklonem $45^\circ$ vůči rovině rovníku . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Srovnání s naměřenými světelnými křivkami</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>46</b>
<b>7</b>	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>48</b>

# 1 Úvod

Chemicky pekuliární (CP) hvězdy jsou hvězdy horní části hlavní posloupnosti nacházející se právě ve stadiu velmi klidného vývoje, který umožňuje, aby na jejich povrchu došlo k vytvoření obrovských skvrn z těžších prvků. Tyto skvrny pak ovlivňují pozorované světelné křivky, kde vytvářejí deformace v závislosti na svém jas, chemickém složení a velikosti.

Tato diplomová práce má za úkol objasnit pozorované anomálie na světelných křivkách těch CP hvězd, které mají velmi silná magnetická pole. Ty stabilizují hvězdnou látku a ovlivňují rozložení skvrn na povrchu hvězdy. V první části této práce se budu zabývat vysvětlením povahy proměnnosti magnetických chemicky pekuliárních hvězd. V části druhé budu pomocí vlastního programu modelovat světelné křivky za předpokladu výskytu fotometrických skvrn vázaných ke geometrii magnetického pole. Zde budu postupovat podle modelu skloněného rotátoru, který dává nejlepší výsledky při modelování magnetických polí hvězd. V závěru práce se pokusím o interpretaci pozorovaných světelných křivek a předpověď jejich charakteristik v jiných oborech spektra.

## 2 Základní charakteristiky CP hvězd

### 2.1 Stručný popis CP hvězd

Chemicky pekuliární hvězdy jsou hvězdy horní části hlavní posloupnosti HR diagramu s anomálním chemickým složením svých povrchových vrstev. To je příčinou jejich neobvyklých (pekuliárních) spekter. Efektivní teploty těchto hvězd se pohybují v rozmezí 7000 – 30 000 K, čemuž odpovídají spektrální třídy F2 až B0.

Tyto hvězdy byly známy již od konce 19. století, mechanismy jejich proměnnosti však zůstávaly záhadou. Neexistovala totiž ještě ani teorie záření atomů, ani teoretický výklad hvězdných spekter. Teprve roku 1925 zjistila Cecilie Payne-Gaposhkinová, že chemické složení vnějších vrstev většiny hvězd je v podstatě shodné a podobné slunečnímu, pozorované odlišnosti spekter hvězd jsou pak dány především efektivní teplotou jejich atmosfér.

V roce 1947 objevil Babcock Zeemanovým analyzátozem u několika Ap hvězd proměnnou podélnou složku magnetického pole. Model takovéto hvězdy propracoval v roce 1950 Stibs. Ten předpokládal, že osa magnetického dipólu je obecně skloněna k rotační a magnetické pole je zamrzlé do plazmatu hvězdy. V okolí magnetických pólů se pak mohou nacházet místa s různou abundancí jednotlivých prvků, která se projevují jako fotometrické skvrny s odlišným rozložením energie ve spektru. Tyto skvrny jsou potom příčinou deformovaných světelných křivek.

Ukazuje se, že chemické složení atmosfér CP hvězd se skutečně odlišuje od normálního. Proto byl v roce 1974 zaveden pojem *chemicky pekuliární hvězda*. Další charakteristiky, jako například hmotnosti, poloměry a zářivé výkony, jsou u CP hvězd a normálních hvězd hlavní posloupnosti o téže efektivní teplotě identické.

Proč se ovšem CP hvězdy vyskytují v intervalu 7000 – 30 000 K? Hvězdy v tomto intervalu efektivních teplot se totiž vyznačují relativně klidnými vnějšími vrstvami, které jsou navíc u magnetických hvězd stabilizovány magnetickým polem. U hvězd s nižší teplotou jsou povrchové vrstvy promíchávány konvekcí, u hvězd teplejších jsou pak obrušovány hvězdným větrem – *hvězdný peeling*. Tyto jevy v konečném důsledku zabraňují dostatečnému rozvinutí chemické anomálie.

Dalším důležitým faktorem ovlivňujícím rozvoj CP jevu je rychlost rotace. Rovníková rotační rychlost menší než 90 km/s je pro CP hvězdy nezbytnou podmínkou, v opačném případě totiž dochází k rozvinutí tzv. meridionálních proudů, které promíchávají povrchové vrstvy podobně jako konvekce. Navíc u takřka všech metalických Am hvězd nacházejících se v dvojhvězdách existuje díky vzájemné slapové interakci vázaná rotace. Ta je oproti rotaci samostatných hvězd podstatně pomalejší, což zaručuje vhodné podmínky pro vznik chemické pekuliárnosti.

## 2.2 Dělení CP hvězd

Existuje několik typů CP hvězd. Prestonova a Maitzenova klasifikace rozděluje CP hvězdy do sedmi skupin podle rostoucí teploty.

**CP1** – metalické Am hvězdy bez měřitelného magnetického pole, s výraznými spektrálními čarami kovů, např. Fe, Cr, Ti. Fotometricky se nijak nemění, většinou jde o složky dvojhvězd. Z teplotního hlediska jsou nejchladnější.

**CP2** – nazývané též magnetické hvězdy jsou spektrálně i fotometricky proměnné Ap a Bp (pozdní B) hvězdy od typu SrCrEu až po nejteplejší křemíkové hvězdy.

**CP3** – rtuťovo-manganové hvězdy, vysokoteplotní varianta CP1 hvězd.

**CP4, 5** – heliově slabé hvězdy, vysokoteplotní varianta CP2 hvězd se zjevným nedostatkem helia a nadbytkem  $\text{He}^3$ . Heliové čáry bývají proměnné.

**CP6, 7** – heliově silné hvězdy s přebytkem  $\text{He}^4$ , ještě teplejší než CP2.

## 2.3 Spektrální charakteristiky

Spektra CP hvězd jsou velmi komplikovaná s vysokým počtem spektrálních čar. V prvním kroku zpracování takového spektra je nutné identifikovat jednotlivé spektrální čáry a určit kterému iontu patří. To je u CP hvězd obzvláště náročné, protože

1. v jejich spektrech nejsou čáry takřka nikdy čisté, většinou jde o překryvy několika čar,
2. běžně se zde vyskytují čáry exotických prvků,
3. čáry jsou v důsledku působení magnetického pole rozštěpeny,
4. jejich vzhled se mění v důsledku nerovnoměrného rozložení prvků po povrchu.

Díky těmto faktorům se ještě nepodařilo najít dvě CP hvězdy s podobnými spektry. Identifikace čar probíhala v několika krocích. Nejdříve se pomocí systému srovnávacích čar z laboratorního zdroje provedl první odhad radiální rychlosti. Pak byly ze seznamů hvězdných čar s pozorovanými vlnovými délkami vybírání potenciální kandidáti na tu kterou čáru, přičemž došlo k dalšímu zpřesnění radiálních rychlostí. V dalším kole byla brána v úvahu už nejen koincidence pozorovaných a předpovězených vlnových délek, ale i jejich intenzita a zejména se kontrolovala tzv. kompletnost multipletů jednotlivých spektrálních čar.

Při této časově náročné práci se badatelé setkávali s řadou problémů pramenících z uvedeného výčtu vlastností spekter CP hvězd. Byly pokusy provádět tuto práci automaticky, ale v současnosti se hvězdní astronomové snaží detailní identifikaci spektrálních čar pro její pracnost pokud možno vyhnout, a skutečně pro řadu úloh není tento krok ani nutný.

## 2.4 Rotace

Rychlost rotace je u CP hvězd mimořádně důležitou charakteristikou, protože dokáže vysvětlit periodicitu většiny pozorovaných změn (magnetických, spektroskopických, světelných) a navíc pomalá rotace je důležitou podmínkou pro vznik chemické peculiárnosti.

Rotační perioda  $P$  se většinou vyjadřuje ve dnech, udává zároveň periodu, se kterou dochází k většině pozorovaných změn. Rotační rychlostí je míněna rovníková rychlost, vyjadřuje se v  $\text{km/s}^1$ . Sklon osy rotace vůči pozorovateli je  $i$ , poloměr hvězdy  $R$  (za předpokladu kulových hvězd). Model tuhého rotátoru pak předpovídá následující vztah mezi zmíněnými veličinami:

$$V_{rot} = 50,613 \left( \frac{R}{R_{\odot}} \right) \left( \frac{1\text{den}}{P} \right). \quad (1)$$

Tento vztah po dosazení dává rotační rychlost v  $\text{km/s}$ .

Na povrchu CP hvězd nacházíme spektroskopické a fotometrické skvrny, které jsou díky rotaci natáčeny pod různým úhlem k pozorovateli a v důsledku toho pozorujeme změny spektra, jasnosti a efektivního magnetického pole. Rotační periody CP hvězd jsou od poloviny dne u horkých CP hvězd po desítky až stovky dní u chladnějších CP2 hvězd. CP hvězdy rotují v průměru pomaleji, což se vykládá jako důsledek magnetického brzdění, které je ovšem účinné jen u méně hmotných a tedy i v průměru absolutně starších CP hvězd.

V důsledku Dopplerova jevu dochází k rotačnímu rozšíření spektrálních čar. Tento způsob rozšíření hraje u některých hvězd dominantní úlohu. Při měření rotační rychlosti se porovnávají pozorované profily jedné (tradičně Mg II 448,1 nm) či více spektrálních čar s modelovým profilem spektrální čáry (čar) rozšířených rotací.

Měření však neposkytují přímo rotační rychlost, ale pouze její průmět  $V \sin i$ . Sklon  $i$  nelze ze spektra hvězdy s určitostí stanovit. Řada prací ukazuje, že rotační rychlosti CP hvězd jsou v průměru viditelně menší, naprostá většina má rotační rychlost  $V_{rot}$  menší než  $100 \text{ km/s}$ . Pomalá rotace je nezbytnou podmínkou pro vznik a rozvoj chemické anomálie, která by se zde jinak neudržela vinou poledníkového

<sup>1</sup>Horké hvězdy rotují zpravidla jako tuhé těleso.



proudění, jehož rychlost silně závisí na rotačním zploštění hvězdy. U rychle rotujících hvězd není totiž rozdělení toku záření z nitra izotropní díky jejímu rotačnímu zploštění a hvězda je tak na pólech teplejší než na rovníku. Díky tomuto teplotnímu rozdílu pak vzniká zmíněné meridionální proudění.

## 2.5 Poloměry CP hvězd

Poloměry proměnných CP hvězd lze odvodit ze statistiky použitím modelu šikmého rotátoru, tak ovšem dostaneme pouze střední hodnotu. Pokud nás zajímají jednotlivé hvězdy, je třeba volit jiný postup:

1. Poloměr odhadneme z pozorovaného spektrálního typu, absolutní hvězdné velikosti, popřípadě hmotnosti, je-li známa, musíme se však smířit s tím, že zde zůstává nejistota v poměru 1:2. To je dáno skutečností, že i CP hvězdy se jako hvězdy hlavní posloupnosti vyvíjejí. Střední poloměr CP hvězd vychází na  $3,2 R_{\odot}$ .
2. Ze zářivého výkonu  $L$  a efektivní teploty  $T_{\text{ef}}$ :

$$L = \sigma 4\pi R^2 T_{\text{ef}}^4 \quad (2)$$

Problém je zde však jak v určení zářivého výkonu, tak i efektivní teploty. U CP hvězd je to obzvláště problematické, neboť na ně lze aplikovat standardní vztahy mezi barevnými indexy a teplotou jen s velkou rezervou. Sporné je i užití bolometrických korekcí, u CP hvězd je neznáme dostatečně spolehlivě.

3. Metoda Shallisova-Blackwellova (1977, 1979) je založena na znalosti celkového zářivého toku měřeného na Zemi  $F_E$ , hustoty spektrálního toku  $F_{E,\lambda}$  ve vzdálenější infračervené oblasti (2 až 10  $\mu\text{m}$ ). Zde je málo spektrálních čar a množství energie přenesené odjinud je zanedbatelné. Hustota spektrálního toku v IČ oboru jen málo závisí na chemickém složení a gravitačním zrychlení. Použitím iterací rychle dospějeme k hodnotě efektivní teploty a úhlového průměru. Známe-li vzdálenost hvězdy, můžeme určit i geometrickou hodnotu jejího poloměru. Poloměry měřených CP hvězd jsou zřejmě poněkud větší, než normálně.

## 2.6 Magnetické pole

Pro CP hvězdy s výjimkou CP1 a CP3 je příznačná přítomnost relativně silného, stabilního, víceméně dipólového magnetického pole vmrzlého do plazmatu hvězdy.

Vnitřek horkých hvězd můžeme díky vysoké teplotě považovat vlastně za supra-  
vodič. Velká koncentrace elektronů a iontů v nitru hvězdy má za následek to, že  
magnetické pole postupem času nedisipuje. Magnetické pole hraje velmi důležitou  
roli při vzniku povrchových chemických anomálií díky tomu, že usměrňuje pohyb  
elektronů a iontů, které jsou nuceny se pohybovat podél magnetických siločar, a  
také stabilizuje atmosféru magnetických CP hvězd.

Pozorování magnetického pole se děje spektroskopicky, síla pole se zjišťuje po-  
mocí Zeemanova jevu: je-li atom v magnetickém poli, dochází k rozštěpení energio-  
vých hladin atomu, což má za následek také rozštěpení jak emisních tak absorpčních  
spektrálních čar.

Pozorujeme-li hvězdu, sčítáme příspěvky přes celou viditelnou polokouli, pozo-  
rujeme tzv. efektivní magnetické pole  $B_e$ . Pokud je toto pole dipólové a dipól je  
umístěn ve středu, pak platí:

$$B_e = \frac{2}{5} B_p (\cos \beta \cos i + \sin \beta \sin i \cos \frac{2\pi t}{P}) \quad (3)$$

kde  $B_p$  je indukce na magnetických pólech a  $\beta$  je úhel mezi magnetickou osou a osou  
rotace.

Magnetické pole CP hvězd je prakticky dipólové. Dipól však nemusí být umístěn  
přesně ve středu hvězdy, ale může být posunut o 0,1 až 0,36 poloměru hvězdy.  
Magnetická indukce na severním a jižním pólu pak může být velice různá, čímž by  
se dalo objasnit i to, proč se u některých hvězd severní a jižní magnetický pól tak  
diametrálně různí v anomálním chemickém složení.

## 3 Spektroskopická a fotometrická proměnnost

### 3.1 Model šikmého rotátoru

Spektroskopická a fotometrická pozorování CP hvězd nasvědčují tomu, že pozorované změny lze vysvětlit pomocí *modelu skloněného rotátoru*. Aplikace tohoto modelu je velmi rozšířená; byla publikována řada prací, ve kterých se na základě pozorovaných změn odvozují závěry o rozložení jasu a chemických prvků na povrchu hvězdy. Vhodnou volbou rozložení určitých charakteristik povrchu lze vymodelovat prakticky jakoukoliv pozorovanou křivku změn intenzity světla či spektrálních čar, popřípadě křivku radiálních rychlostí.

U magnetických CP hvězd předpokládáme obecný sklon osy magnetického pole k ose rotační. Pro další výklad budeme tento úhel označovat  $\beta$ . Model byl poprvé navržen Babcockem (1949) a rozpracován Stibbsem (1950), jenž pomocí něho dokázal vysvětlit změny magnetického pole s proměnnou i konstantní polaritou. Zavedením určitých spektroskopických skvrn vázaných na magnetické póly bylo možno vysvětlit změny intenzity čar i křivek radiálních rychlostí.

Z pozorování lze u individuálních hvězd odhadnout současně projekci rotační rychlosti  $V \sin i$  a periodu  $P$ . Předpokládáme-li navíc, že existuje něco jako střední hodnota poloměru hvězdy  $\langle R \rangle$ , pak platí:

$$V \sin i \leq \frac{50,6 \langle R \rangle}{P} \quad (4)$$

Grafem nerovnosti je hyperbola a prostor pod ní. Nalezená závislost plně podporuje model.

Odhadneme-li například z efektivní teploty hvězdy její poloměr  $R$ , lze vypočítat sklon osy:

$$\sin i = \frac{R \sin i}{R} = \frac{PV \sin i}{50,6R} \quad (5)$$

Znalost sklonu je nezbytná k interpretaci a případnému modelování pozorovaných spektroskopických, magnetických a fotometrických změn. Někdy je možné rozhodnout i o délce periody  $P$ , neboť by mělo platit

$$P \leq \frac{50,6R}{V \sin i} \quad (6)$$

## 3.2 Spektroskopická proměnnost, rozložení prvků po povrchu

Už od roku 1913 je známo, že změny intenzity spektrálních čar u CP2 hvězd jsou v kvadratuře se změnami radiální rychlosti; týká se to hlavně anomálně silných čar prvků Sr, Cr, Eu, Si a dalších. Tyto změny se dějí s periodou rotace hvězdy. Kvalitativní vysvětlení i kvantitativní odhady ukazují, že vše lze lehce vysvětlit předpokladem existence spektroskopických skvrn na rotující hvězdě s osou rotace skloněnou pod úhlem  $i$ . Dosud přesně nevíme, jak tyto nehomogenity vznikají.

Je-li na povrchu hvězdy chemická nehomogenita (nadbytek nebo deficit určitého prvku vzhledem ke zbytku povrchu), projeví se to jako vlnka v intenzitě spektrální čáry postupující od jejího modrého konce ke konci červenému, pak vlnka na určitou dobu zmizí, aby se opět objevila na modrém křídle. Vyšetřováním fázových změn profilů určitých čar si lze učinit představu o poloze skvrnky, případně skvrnek. Lze tak nakonec za určitých předpokladů zmapovat rozložení daného prvku po celé hvězdě, ovšem mimo tu oblast, která s ohledem na sklon hvězdy není nikdy pozorovatelná.

Dnes už pozorujeme zjevnou návaznost (nikoli však přísnou) spektroskopických skvrn na geometrii magnetického pole. To zřejmě sehrává rozhodující roli při jejich vytvoření a dlouhodobé stabilizaci.

## 3.3 Fotometrická proměnnost

K rozvoji fotometrických výzkumů CP hvězd došlo až v šedesátých letech minulého století, díky zvýšení citlivosti fotonásobičů a zavedení standardních fotometrických systémů. Nejvýhodnějším pro pozorování CP hvězd se ukázal být Strömgenův fotometrický systém a další středněpásmové systémy, v současnosti se pozoruje i v červené oblasti spektra. CCD technika se pro pozorování využívá jen velmi málo, neboť většina zkoumaných CP hvězd patří do kategorie jasnějších hvězd, pro něž bývá při malých zorných polích CCD kamer obtížné najít vhodné srovnatelně jasné srovnávací hvězdy.

Výsledky pozorování ukázaly, že:

- všechny magnetické CP hvězdy se spektrální proměnností jsou proměnné, přičemž perioda změn souhlasí s jejich rotační periodou.
- amplitudy světelných změn jsou většinou setiny magnitudy, vyjimečně desetiny magnitudy.

- světelné křivky s jednou nebo dvěma vlnami jsou zpravidla dobře popsateľné harmonickým polynomem 2. stupně. Tvar světelných křivek určuje jedna nebo dvě dominantní fotometrické skvrny na povrchu. Extrémy, co do fáze souhlasí s extrémy změn efektivního magnetického pole, resp. spektroskopických změn. Lokalizace fotometrických skvrn na povrchu šikmého rotátoru jen z fotometrických pozorování ovšem není a ani nemůže být jednoznačná. Vždy je nutno alespoň něco předpokládat o geometrii skvrn. V roce 1970 navrhl Peterson, že pozorované fotometrické změny jsou svázány s existencí spektroskopických skvrn s nehomogéním rozložením prvků na povrchu hvězdy.
- světelné křivky v jednotlivých barvách se od sebe někdy i velmi výrazně liší, v některých případech probíhají světelné změny i v antifázi. Například při pozorování nejjasnější CP hvězdy  $\alpha^2$  CVn v UV oboru bylo zjištěno, že v oblasti pod 298,5 nm probíhají světelné změny v antifázi, přičemž celkový zářivý tok hvězdy se nemění. Fotometrické skvrny tak nejsou ani světlé, ani tmavé, vůči okolnímu povrchu jsou „barevné“.

CP hvězdy zčásti spadají i do pásu nestability osídleného na hlavní posloupnosti pulzujícími hvězdami typu  $\delta$  Sct. Pulzující CP hvězdy mají též krátké periody o délce asi deset minut, amplitudy typicky 0,02 mag. Tyto hvězdy jsou popisovány pomocí *modelu šikmého pulzátoru*, kde symetrie neradiálních pulzací je dána osou magnetického dipólu: největší amplituda pulzací je pozorována v okolí magnetických pólů. Pohyb elektricky nabitého plazmatu je možný jen podél magnetických siločar, ty kolmo vstupují do hvězdy jen v oblasti pólů.

Pulzace odpovídají velmi vysokým harmonickým modům, vztahují se tak jen k těm nejvyšším vrstvám a v zásadě neničí dílo difúze. Není jasné, jak jsou buzeny, něco však mohou napovědět o vnitřní stavbě podpovrchových vrstev hvězdy; mohou být i dalším nezávislým nástrojem pro stanovení její periody.

## 4 Modelování světelných křivek CP hvězd

### 4.1 Světelné křivky

Světelná křivka je závislost pozorované hvězdné velikosti dané hvězdy na čase. Analýzou světelných křivek se můžeme dozvědět mnoho užitečných informací o hvězdě, u zákrytových proměnných hvězd z ní můžeme určit elementy soustavy. Měření mohou být prováděna v různých fotometrických systémech. To je zvláště důležité pro chemicky pekulární hvězdy, neboť jejich světelné křivky se v různých barvách chovají odlišně. Hvězdná velikost se udává v magnitudách, ale do grafu se častěji vynáší poměr jasnosti pozorované hvězdy a srovnávací hvězdy, která by proto měla být neproměnná. Na vodorovnou osu se pak vynáší časový údaj, a to buď fáze nebo juliánské datum.

Světelná křivka je ovlivněna různými efekty podmíněnými tím, že jas není po disku hvězdy rozložen rovnoměrně, což způsobí „zaoblení“ křivky. V našem případě bude rozhodující roli při modelování světelných křivek hrát nejen geometrie a rozložení fotometrických skvrn na hvězdném povrchu, ale také jejich jasnost v dané oblasti spektra. Také se pokusíme do modelů zabudovat okrajové ztmavnutí hvězdného disku.

### 4.2 Algoritmus na generování světelných křivek

Nedílnou součástí této diplomové práce je program na generování světelných křivek magnetických CP hvězd. Tento program je napsaný ve skriptovacím jazyku PHP a nachází se na adrese [www.physics.muni.cz/~marzat](http://www.physics.muni.cz/~marzat). Jde o skript, jehož vstupními hodnotami jsou hvězdná velikost hvězdy, hvězdné velikosti a rozložení skvrn na hvězdném povrchu, okrajové ztemnění a sklon rotační osy hvězdy vzhledem k zornému paprsku. Do tohoto programu lze zadat libovolný počet skvrn, musíme ale počítat s tím, že s počtem a velikostí skvrn se rychlost výpočtu světelné křivky bude snižovat. Výstupem programu jsou údaje potřebné k vykreslení světelné křivky a vlastní křivka. V této části si funkci tohoto skriptu postupně popíšeme.

1. Nastavení funkce časovače. Časovač zaznamená začátek a konec spuštění skriptu a do výstupu uloží jejich rozdíl, což nám dává možnost zjištění celkového času běhu programu. Ten se potom zobrazí na výstupu a je tak možné porovnat náročnost skriptu na systémové prostředky pro různé vstupní parametry a pro různý hardware.
2. Zavedení konstant a vstupních parametrů. Na začátku skriptu jsou deklarované

hodnoty pro hvězdnou velikost hvězdy, hvězdné velikosti a rozložení skvrn na hvězdném povrchu, okrajové ztemnění a sklon rotační osy hvězdy vzhledem k zornému paprsku. Dále se zde také zavádí fyzikální a geometrické konstanty potřebné v dalších krocích.

3. Výpočet úhlů mezi původními a nakloněnými kartézskými souřadnicemi ze zadaného náklonu rotační osy směrem k pozorovateli. Osa kartézské souřadné soustavy tohoto systému jsou zavedeny následovně. Osa  $x$  míří směrem k pozorovateli a je tedy zorným paprskem podél kterého hvězdu pozorujeme. Osa  $z$  míří k hornímu, nebo lépe severnímu rotačnímu pólu hvězdy a osa  $y$  je kolmá na obě dvě. To ovšem platí jen pro začátek, tj. pro sklon  $0^\circ$ , ze kterého vycházíme.
4. Definice skvrn. Nezbytnými vstupními parametry jsou hvězdná velikost hvězdy a hvězdné velikosti a rozložení skvrn na hvězdném povrchu. V tomto kroku zavádíme na základě těchto vstupních parametrů pro jednotlivé skvrny jejich počáteční a koncové souřadnice  $\phi$  a  $\theta$  a jejich hvězdnou velikost. Takto můžeme zadat libovolný počet skvrn s odlišnou velikostí i jasností. Na základě zadané hvězdné velikosti je možné spočítat zářivý tok od jednotlivých elementů skvrn. Rozdělení hvězdného povrchu na jednotlivé elementy je popsáno v dalším kroku. Zářivý tok spočteme podle vztahu

$$E = 10^{-\frac{m}{2,5}} \quad (7)$$

a v dalším ho budeme sčítat přes celý povrch hvězdy pro každé otočení, čímž pak zpětně dostaneme hvězdnou velikost hvězdy v daném otočení se zadanými skvrnami.

5. Geometrický popis hvězdy jako ideální koule.
  - Nyní určíme souřadnice průsečíků jednotlivých poledníků a rovnoběžek pro úhel sklonu  $0^\circ$ . K tomu využijeme sférických souřadnic jednotlivých průsečíků a z nich vypočteme jejich kartézské souřadnice podle

$$x = R \cos \phi \sin \theta \quad (8)$$

$$y = R \sin \phi \sin \theta \quad (9)$$

$$z = R \cos \theta \quad (10)$$

Po naklonění rotační osy směrem k pozorovateli se nové souřadnice dají zjistit z následujících vztahů:

$$x' = x \cos \alpha_1 \ y \cos \beta_1 \ z \cos \gamma_1 \quad (11)$$

$$y' = x \cos \alpha_2 \ y \cos \beta_2 \ z \cos \gamma_2 \quad (12)$$

$$z' = x \cos \alpha_3 \ y \cos \beta_3 \ z \cos \gamma_3 \quad (13)$$

kde čárkované souřadnice jsou nové kartézské souřadnice po naklonění rotační osy o úhel  $\gamma_3$ , který je také jedním ze vstupních parametrů a v dalším výkladu jeho doplněk do  $90^\circ$  budeme označovat jako  $i$ . Dále platí, že mezi osou  $x$  a  $x'$  je úhel  $\alpha_1$ , mezi osou  $y$  a  $x'$  je úhel  $\beta_1$ , mezi osou  $z$  a  $x'$  je úhel  $\gamma_1$ , atd... Takto tedy můžeme najít souřadnice všech bodů na hvězdném povrchu, nás budou v dalším zejména zajímat souřadnice průsečíků hlavních poledníků a rovnoběžek (tj. takových, které jsou celistvými násobky kroku dělení zadaného na začátku programu). Z nich totiž zavedeme jednotlivé elementy hvězdného povrchu tak, jak je vidí pozorovatel. Tyto elementy budou mít tvar obecných lichoběžníků, s nimiž budeme v dalších výpočtech pracovat.

- Výpočet okrajového ztemnění. Do našeho modelu také zabudujeme okrajové ztemnění, což je závislost jasnosti jednotlivých elementů na úhlové vzdálenosti od okraje hvězdného kotouče. Okrajové ztemnění se vypočte dle následujícího vztahu

$$I = I_0(1 - u + u \cos \eta), \quad (14)$$

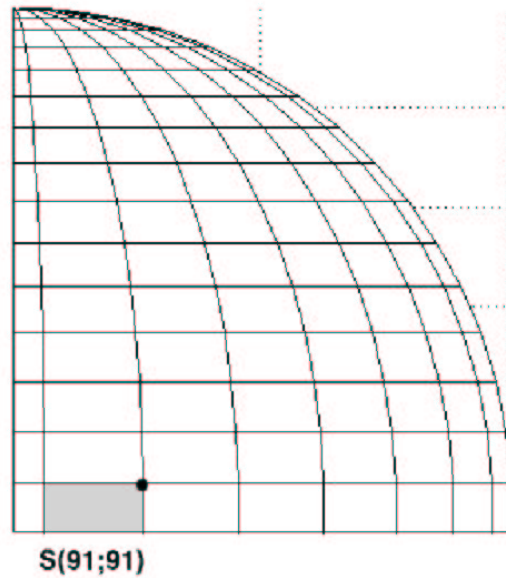
kde  $u$  je koeficient okrajového ztemnění, který se do programu zadává na jeho začátku a pro chemicky pekulární hvězdy dosahuje typicky hodnoty 0,5. Zde  $\eta$  je úhel mezi zorným paprskem a průvodičem daného bodu. Takto můžeme pro každý element nalézt poměr mezi jeho zářivým tokem uprostřed hvězdného kotouče ( $I_0$ ) a mezi jeho aktuálním zářivým tokem ( $I$ ), který je závislý na úhlu  $\eta$ .

- Nyní zavedeme jednotlivé elementy povrchu. Budou se nám vlastně jevit jako lichoběžníky s vrcholy v průsečících sousedních poledníků a rovnoběžek (viz. obr. 1.). V tomto kroku tedy zavedeme pole všech elementů povrchu hvězdy s vrcholy o souřadnicích  $\phi$  a  $\theta$  převedených na kartézské souřadnice dle vzorců 8.-13., určíme pozorovaný obsah každého elementu v  $km^2$  podle vzorce

$$S = \frac{(a + b)v}{2}, \quad (15)$$

dále pro každý element určíme jeho okrajové ztemnění (vztah 14.) a pozorovaný zářivý tok (vztah 7.).





Obrázek 1: Rozdělení povrchu hvězdy sítí sférických souřadnic

6. Nyní máme vše pro výpočet celkového zářivého toku a obsahu pozorovaného hvězdného kotouče. Vytvoříme proto dva cykly, jeden pro  $0 \leq \phi \leq 359$  a  $0 \leq \theta \leq 179$  jimiž vypočteme celkový povrch a zářivý tok od celé hvězdy. Musíme zde také uvažovat podmínku viditelnosti, která nám výpočet omezí pouze na pozorovatelné elementy, tj. takové, které mají  $x$  souřadnici větší než nula.
7. Zavedení skvrn. V této části zavedeme opět dva cykly, které budou probíhat hodnoty  $\theta$  a  $\phi$ , ale teď pouze v rámci elementů náležejících skvrnám. Tímto způsobem dle vstupních parametrů zaneseme do pole všech elementů povrchu hvězdy elementy, které náležejí skvrnám a tudíž mají odlišnou hvězdnou velikost.
8. Nyní máme celou „mapu“ povrchu hvězdy a nezbývá nic jiného, než celou hvězdu rozrotovat a v každém pootočení spočítat celkový zářivý tok od viditelného povrchu hvězdy a z něho potom celkovou hvězdnou velikost hvězdy.
  - Nejprve vypočteme celkový zářivý tok od hvězdy se započtením okrajového ztemnění. Toho dosáhneme součtem původního pole elementů beze skvrn přes všechna  $\phi$  a  $\theta$ .
  - Dále na základě podmínky viditelnosti stanovíme, jestli lze daný element pozorovat, či nikoliv. Pokud ano, a element současně náleží skvrně, je

zářivý tok od tohoto elementu nahrazen zářivým tokem odpovídajícím hvězdné velikosti skvrny. Pokud ne, daný element neuvažujeme.

- Nakonec vypočteme celkový zářivý tok od hvězdy se skvrnami a se započtením okrajového ztemnění pro jednotlivá potočení ve  $\phi$ . Tím dostaneme vstupní data pro namodelování světelné křivky dané hvězdy.

9. Generování světelné křivky. Hodnoty hvězdné velikosti, které dostaneme z tohoto programu přeneseme do programu Matlab, ve kterém světelnou křivku vykreslíme a v dalším ji budeme prokládat harmonickým polynomem vhodného řádu.

### 4.3 Modely světelných křivek prokládané harmonickým polynomem

V této části se pokusíme pomocí metody nejmenších čtverců proložit různé typy světelných křivek harmonickým polynomem. Vezmeme harmonický polynom 5. řádu a určíme, kolikátý řád je nejvhodnější z hlediska přesnosti proložení světelné křivky harmonickým polynomem s přihlédnutím na chyby měření při reálném pozorování.

Harmonický polynom má tvar:

$$F = A_0 + \sum_{i=1}^k B_i \cos 2\pi i f + \sum_{i=1}^k C_i \sin 2\pi i f, \quad (16)$$

kde  $F$  bude hvězdná velikost,  $A_0$ ,  $B_i$  a  $C_i$  jsou koeficienty harmonického polynomu,  $k$  je jeho řád (v našem případě 5) a  $f$  je fáze natočení hvězdy.

#### 4.3.1 Skvrna s 30% pokrytím hvězdného povrchu

V tomto oddíle se budeme věnovat tomu, jak vypadá světelná křivka proložená polynomem 5. řádu pro pokrytí 30% hvězdného povrchu skvrnou, pro různé úhly sklonu rotační osy hvězdy  $i$  a pro různé polohy skvrny. Okrajové ztemnění nechť je  $u = 0,5$ , hvězdná velikost hvězdy nechť je 0 mag a hvězdná velikost skvrny nechť je 0,1 mag.

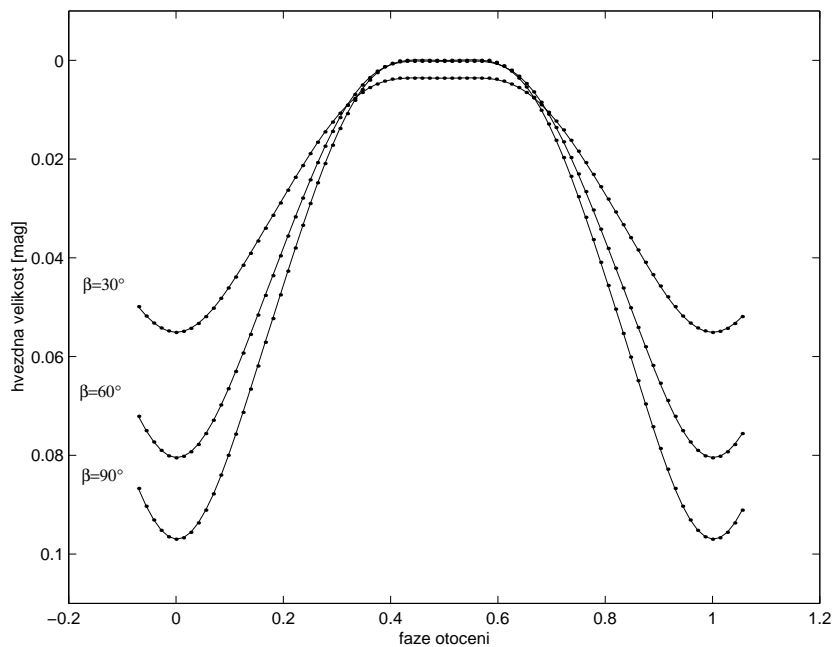
Namodelujme si nejprve světelné křivky pro případ  $90^\circ$  sklonu rotační osy vzhledem k zornému paprsku a různé polohy skvrny na hvězdném povrchu. Budeme uvažovat případy, kdy střed skvrny je vzdálen 30, 60 a  $90$  stupňů od severního rotačního pólu, tj. kdy magnetická osa je skloněna pod těmito úhly k ose rotační. Úhel sklonu magnetické osy k ose rotační označme  $\beta$ .

Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 2.

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0235 \\ B_1 &= 0,0237 & C_1 &= 0,0002 \\ B_2 &= 0,0053 & C_2 &= 0,0001 \\ B_3 &= -0,0001 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0005 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0,0001 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:



Obrázek 2: 30% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 90^\circ$

$$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0312 \\ B_1 &= 0,0400 & C_1 &= 0,0006 \\ B_2 &= 0,0083 & C_2 &= 0,0003 \\ B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0008 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0,0001 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 8,6 \cdot 10^{-5}$$

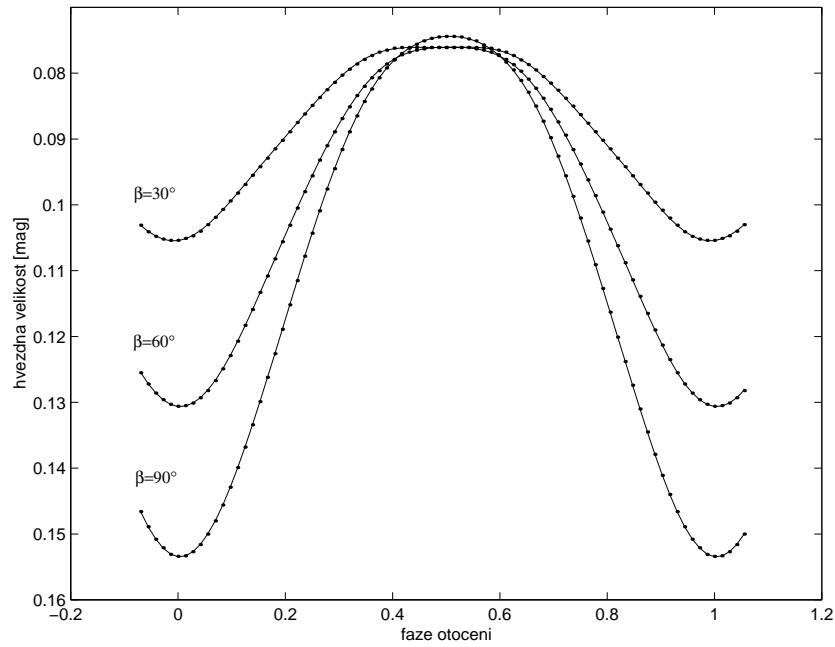
Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0374 \\
 B_1 &= 0,0483 & C_1 &= 0,0007 \\
 B_2 &= 0,0100 & C_2 &= 0,0003 \\
 B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0010 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0,0001 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 1,1 \cdot 10^{-4}$$

Dále si namodelujeme světelné křivky pro případ  $i = 60^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 3.



Obrázek 3: 30% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 60^\circ$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0,0878 \\
B_1 &= 0,0146 & C_1 &= -0,0007 \\
B_2 &= 0,0026 & C_2 &= -0,0002 \\
B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\
B_4 &= 0,0004 & C_4 &= 0 \\
B_5 &= 0 & C_5 &= 0
\end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylna proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 4,9 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0,0987 \\
B_1 &= 0,0272 & C_1 &= 0,0009 \\
B_2 &= 0,0043 & C_2 &= 0,0003 \\
B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
B_4 &= 0,0004 & C_4 &= 0 \\
B_5 &= 0 & C_5 &= 0
\end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylna proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

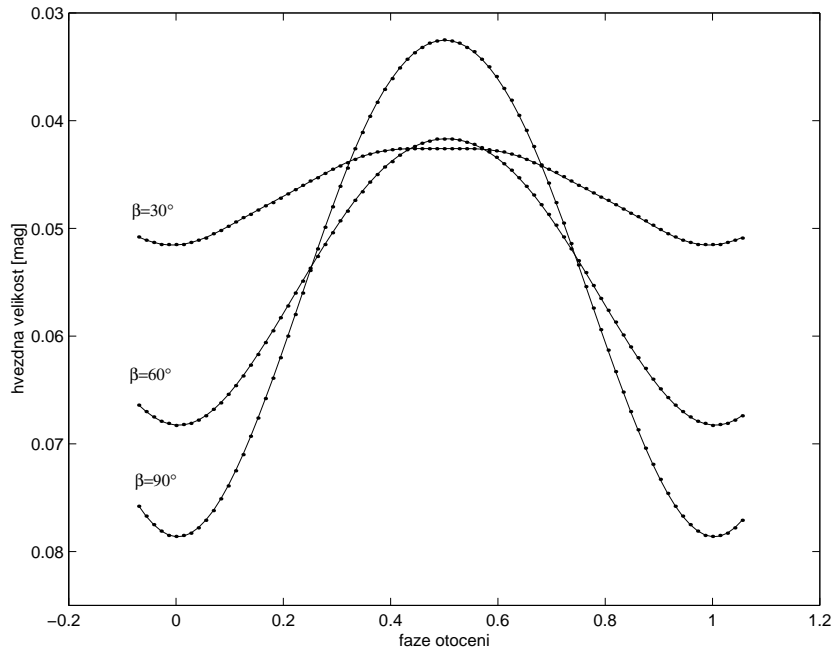
$$\sigma = 4,2 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0,1082 \\
B_1 &= 0,0394 & C_1 &= 0,0012 \\
B_2 &= 0,0054 & C_2 &= 0,0003 \\
B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\
B_4 &= 0,0003 & C_4 &= 0 \\
B_5 &= 0,0001 & C_5 &= 0
\end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylna proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,3 \cdot 10^{-5}$$



Obrázek 4: 30% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 30^\circ$

Nakonec si namodelujeme světelné křivky pro případ  $i = 30^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 4.

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0463 \\
 B_1 &= 0,0044 & C_1 &= -0,0002 \\
 B_2 &= 0,0006 & C_2 &= 0 \\
 B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0002 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,1 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0,0541 \\
B_1 &= 0,0132 & C_1 &= 0,0004 \\
B_2 &= 0,0008 & C_2 &= 0,0001 \\
B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\
B_4 &= 0 & C_4 &= 0 \\
B_5 &= 0 & C_5 &= 0
\end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,0 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0,0545 \\
B_1 &= 0,0230 & C_1 &= 0,0003 \\
B_2 &= 0,0010 & C_2 &= 0,0001 \\
B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
B_4 &= 0,0001 & C_4 &= 0 \\
B_5 &= 0 & C_5 &= 0
\end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,0 \cdot 10^{-5}$$

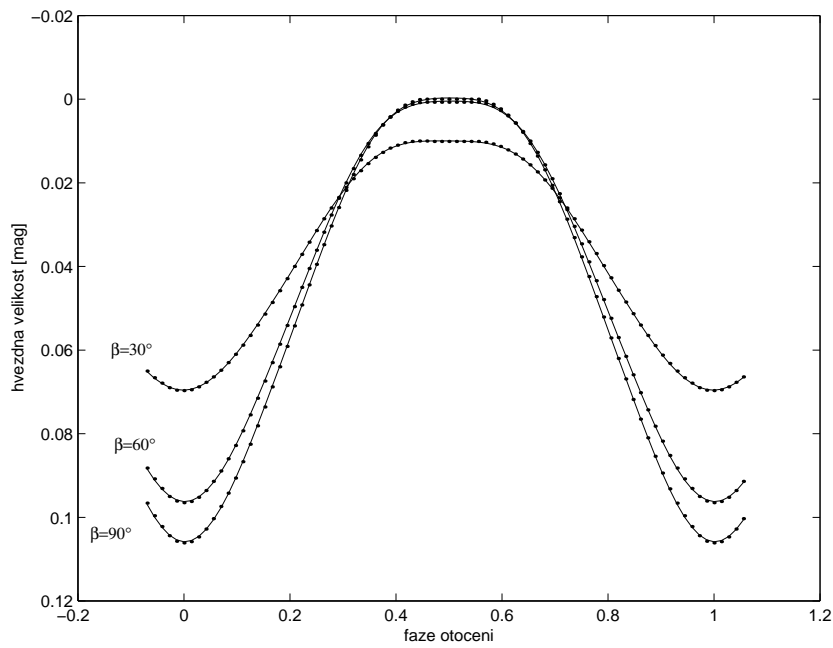
### 4.3.2 Skvrna s 40% pokrytím hvězdného povrchu

V této kapitole si ukážeme, jak vypadá světelná křivka proložená polynomem 5. řádu pro pokrytí 40% hvězdného povrchu skvrnou, pro různé úhly sklonu rotační osy hvězdy  $i$  a pro různé polohy skvrny. Další parametry hvězdy a skvrny nechtě jsou stejné jako v předešlé kapitole.

Nejprve tedy  $90^\circ$  sklon rotační osy vzhledem k zornému paprsku a různé polohy skvrny na hvězdném povrchu. Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 5.

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :





Obrázek 5: 40% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 90^\circ$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0351 \\
 B_1 &= 0,0303 & C_1 &= -0,0001 \\
 B_2 &= 0,0042 & C_2 &= 0,0001 \\
 B_3 &= -0,0005 & C_3 &= -0,0001 \\
 B_4 &= 0,0005 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 1,1 \cdot 10^{-4}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0411 \\
 B_1 &= 0,0483 & C_1 &= 0,0007 \\
 B_2 &= 0,0064 & C_2 &= 0,0002 \\
 B_3 &= -0,0004 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0008 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 1,8 \cdot 10^{-4}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0448 \\ B_1 &= 0,0533 & C_1 &= 0,0008 \\ B_2 &= 0,0070 & C_2 &= 0,0003 \\ B_3 &= -0,0003 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0010 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 2,1 \cdot 10^{-4}$$

Dále si namodelujeme světelné křivky pro případ  $i = 60^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 6.

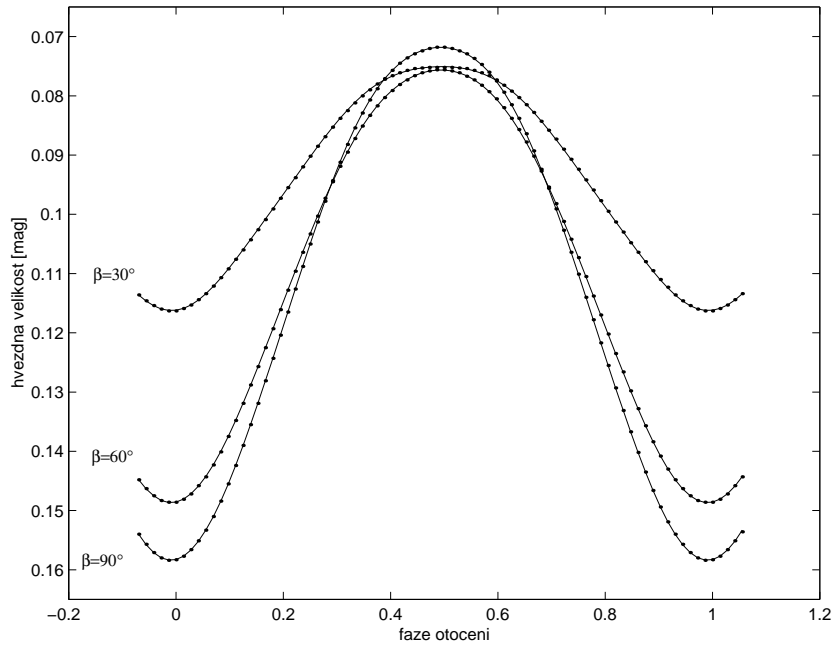
Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0931 \\ B_1 &= 0,0203 & C_1 &= -0,0011 \\ B_2 &= 0,0021 & C_2 &= -0,0002 \\ B_3 &= 0,0002 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0004 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 7,2 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :



Obrázek 6: 40% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 60^\circ$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,1085 \\
 B_1 &= 0,0363 & C_1 &= -0,0020 \\
 B_2 &= 0,0034 & C_2 &= -0,0004 \\
 B_3 &= 0,0002 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0002 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 4,3 \cdot 10^{-5}$$

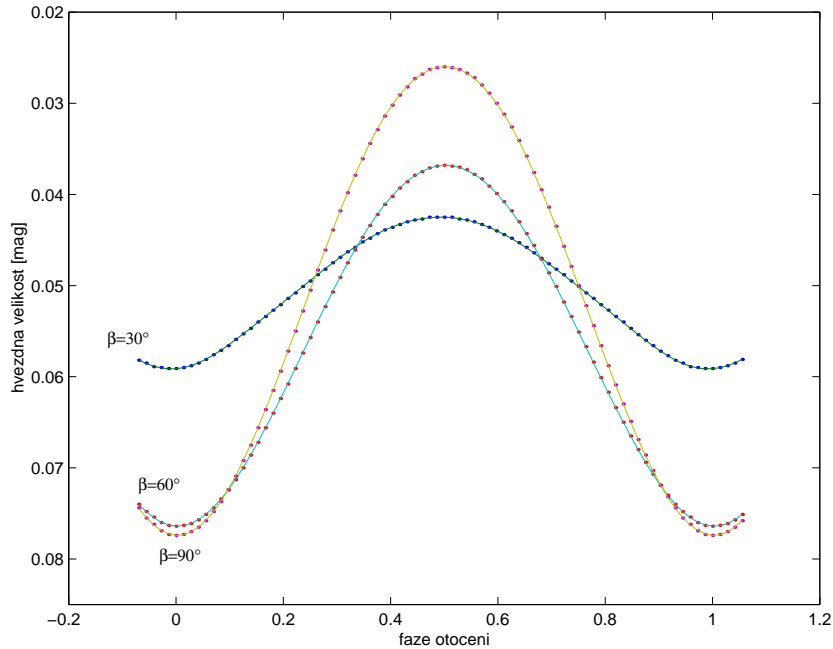
Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,1110 \\
 B_1 &= 0,0433 & C_1 &= 0,0012 \\
 B_2 &= 0,0038 & C_2 &= 0,0002 \\
 B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0003 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,5 \cdot 10^{-5}$$

Nakonec si namodelujeme světelné křivky pro případ  $i = 30^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 7.



Obrázek 7: 40% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 30^\circ$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0502 \\ B_1 &= 0,0081 & C_1 &= -0,0004 \\ B_2 &= 0,0005 & C_2 &= 0 \\ B_3 &= 0,0002 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0001 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,2 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0559 \\ B_1 &= 0,0197 & C_1 &= 0,0003 \\ B_2 &= 0,0006 & C_2 &= 0,0001 \\ B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0001 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,3 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0509 \\ B_1 &= 0,0257 & C_1 &= 0,0003 \\ B_2 &= 0,0007 & C_2 &= 0,0001 \\ B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0001 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

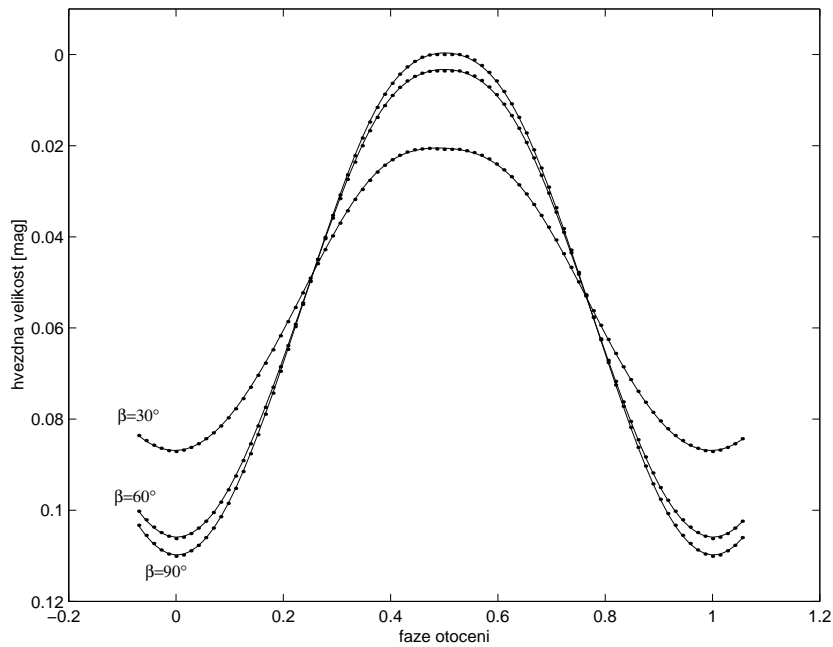
$$\sigma = 3,6 \cdot 10^{-5}$$

### 4.3.3 Skvrna s 50% pokrytím hvězdného povrchu

Nyní si ukážeme, jak vypadá světelná křivka proložená polynomem 5. řádu pro pokrytí poloviny, tj. 50% hvězdného povrchu skvrnou, pro různé úhly sklonu rotační osy hvězdy  $i$  a pro různé polohy skvrny. Další parametry hvězdy a skvrny nechť jsou opět stejné jako v předešlé kapitole.

Světelné křivky pro případ sklonu rotační osy  $90^\circ$  a různé polohy skvrny na hvězdném povrchu jsou na obrázku číslo 8.

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :



Obrázek 8: 50% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 90^\circ$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0513 \\
 B_1 &= 0,0341 & C_1 &= -0,0005 \\
 B_2 &= 0,0021 & C_2 &= 0,0001 \\
 B_3 &= -0,0009 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0003 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0,0001 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 9,5 \cdot 10^{-4}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0514 \\
 B_1 &= 0,0522 & C_1 &= 0,0006 \\
 B_2 &= 0,0028 & C_2 &= 0,0001 \\
 B_3 &= -0,0008 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0004 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0,0001 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 1,1 \cdot 10^{-4}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 90^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0514 \\ B_1 &= 0,0558 & C_1 &= 0,0009 \\ B_2 &= 0,0029 & C_2 &= 0,0001 \\ B_3 &= -0,0005 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0004 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0,0002 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 1,2 \cdot 10^{-4}$$

Dále si namodelujeme světelné křivky pro případ  $i = 60^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 9.

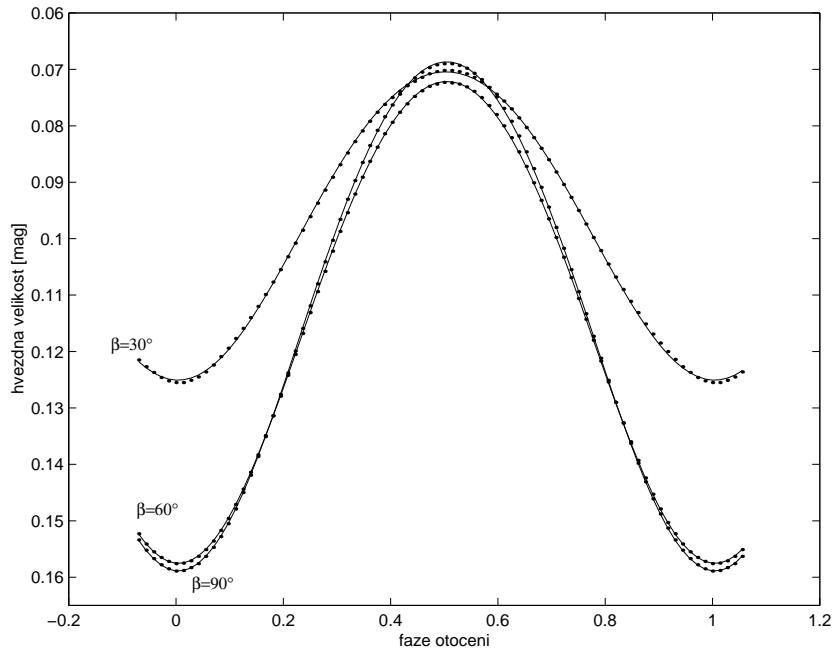
Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0966 \\ B_1 &= 0,0272 & C_1 &= -0,0009 \\ B_2 &= 0,0011 & C_2 &= 0 \\ B_3 &= 0,0002 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0,0001 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0,0002 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 4,6 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :



Obrázek 9: 50% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 60^\circ$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,1133 \\
 B_1 &= 0,0427 & C_1 &= 0,0013 \\
 B_2 &= 0,0016 & C_2 &= 0,0001 \\
 B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= -0,0001 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= -0,0001 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,2 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 60^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

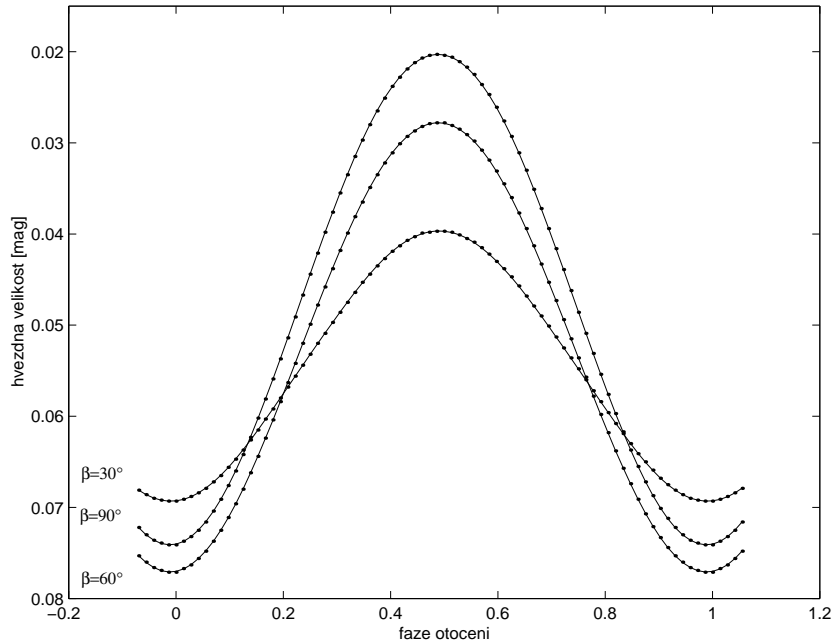
$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,1122 \\
 B_1 &= 0,0451 & C_1 &= 0,0013 \\
 B_2 &= 0,0016 & C_2 &= 0,0001 \\
 B_3 &= -0,0001 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0001 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= -0,0001 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$



Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,1 \cdot 10^{-5}$$

Nakonec si namodelujeme světelné křivky pro případ  $i = 30^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 10.



Obrázek 10: 50% pokrytí hvězdy skvrnou a sklon rotační osy  $i = 30^\circ$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 30^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0542 \\ B_1 &= 0,0146 & C_1 &= -0,0009 \\ B_2 &= 0,0002 & C_2 &= 0 \\ B_3 &= 0,0003 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 2,8 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 60^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0521 \\ B_1 &= 0,0245 & C_1 &= -0,0018 \\ B_2 &= 0,0003 & C_2 &= 0 \\ B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,4 \cdot 10^{-5}$$

Úhel sklonu rotační osy  $i = 30^\circ$ , sklon magnetické osy k ose rotační  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0468 \\ B_1 &= 0,0268 & C_1 &= -0,0021 \\ B_2 &= 0,0004 & C_2 &= 0 \\ B_3 &= 0,0001 & C_3 &= 0 \\ B_4 &= 0 & C_4 &= 0 \\ B_5 &= 0 & C_5 &= 0 \end{aligned}$$

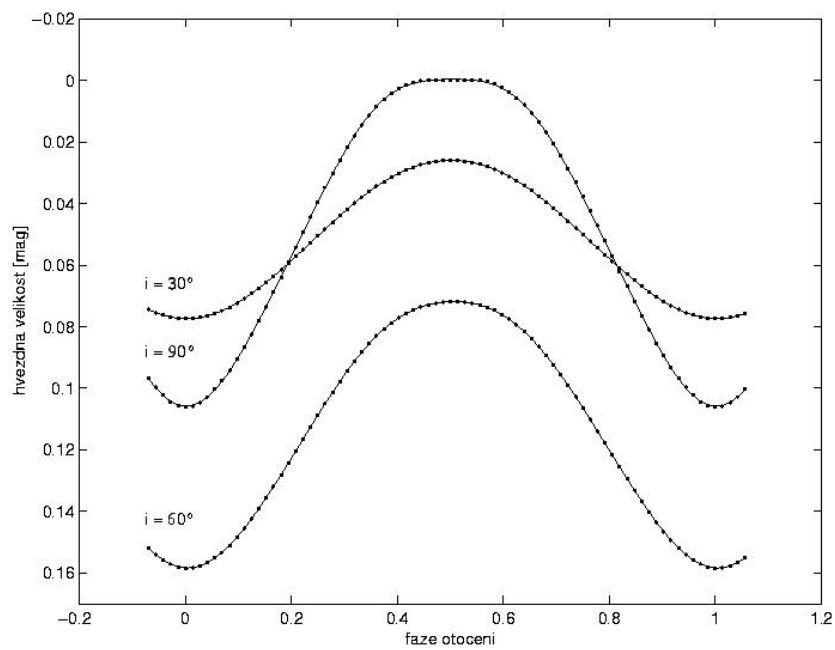
Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,2 \cdot 10^{-5}$$

#### 4.3.4 Srovnání světelných křivek pro $i = 90, 60$ a $30^\circ$

V předchozích kapitolách jsme viděli, jak se chovají světelné křivky pro různé polohy skvrn na hvězdném povrchu, které jsou dány úhlem  $\beta$ . Nyní si do jednoho obrázku vyneseme světelné křivky pro různé sklony rotační osy vzhledem k zornému paprsku a ostatní parametry necháme konstantní. Tento případ budeme uvažovat pro 40% pokrytí hvězdy skvrnou a pro úhel  $\beta = 90^\circ$ . Světelné křivky pro tento případ jsou na obrázku číslo 11.

Zde vidíme, že se nám světelné křivky s klesajícím úhlem  $i$  vyhlazují. To ovšem platí jen pro skvrnu, jejíž střed se pohybuje okolo magnetického pólu, když je magnetická osa skloněna o úhel  $\beta = 90^\circ$  k ose rotační. Amplituda hvězdné velikosti je totiž největší pro skvrnu, která se pozorovateli jeví přecházet přes hvězdný kotouč



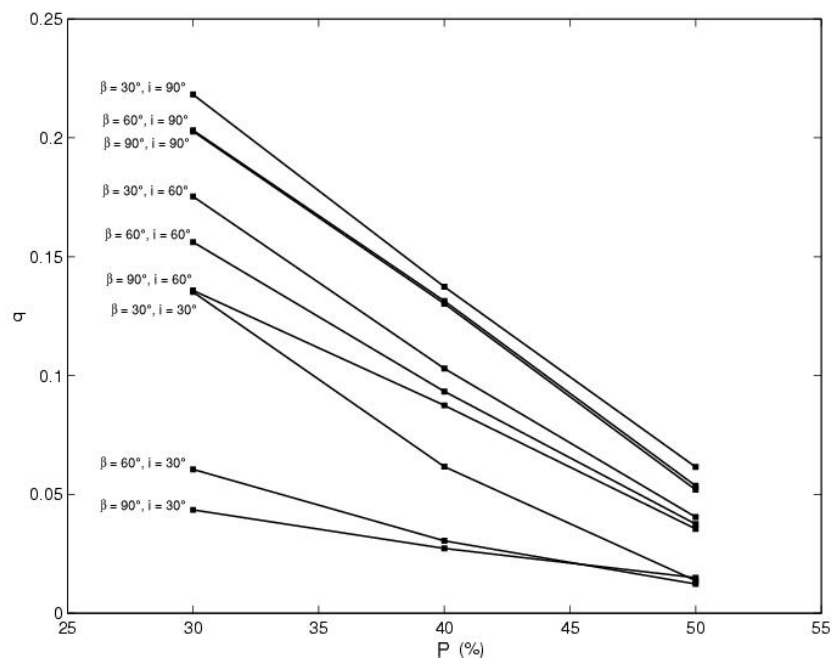
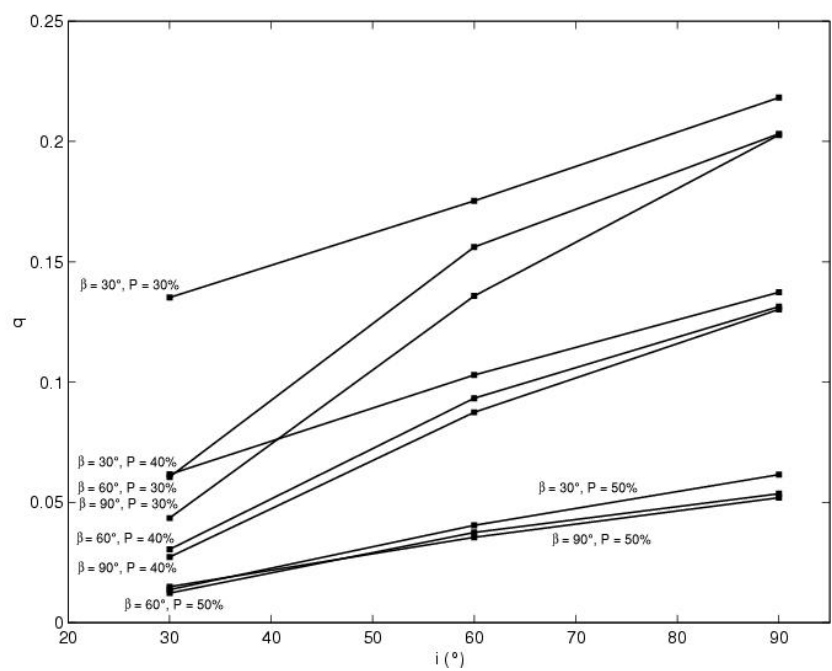
Obrázek 11: 40% pokrytí hvězdy skvrnou a úhel  $\beta = 90^\circ$

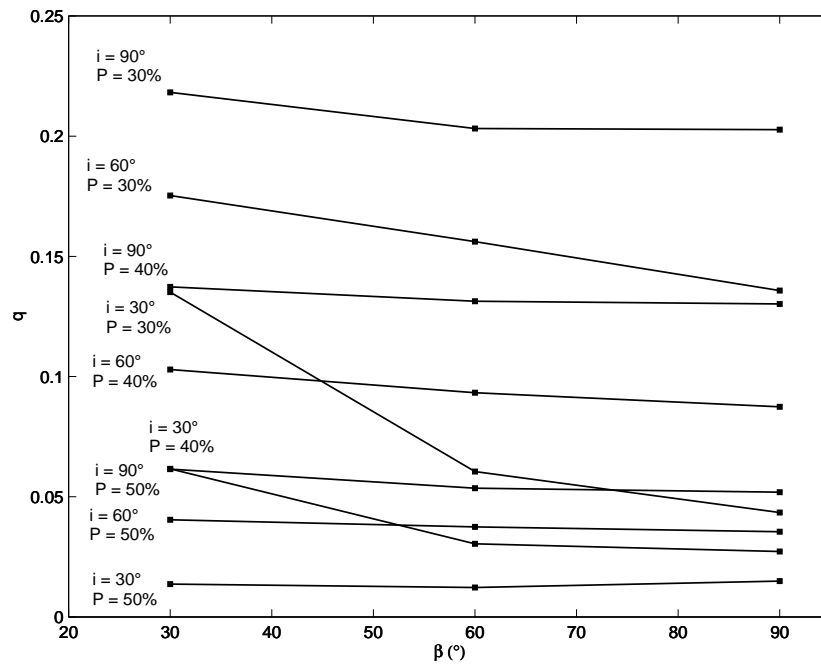
a zase beze zbytku zapadá. To je právě splněno pro úhel  $\beta = 90^\circ$  a skvrnu, která pokrývá méně, než jednu polovinu hvězdy. Světelné křivky pro jiné úhly  $\beta$  budou samozřejmě podobné, ale amplituda hvězdné velikosti bude menší než pro případ, kdy  $\beta = 90^\circ$ .

## 4.3.5 Shrnutí

P (%)	$i$ (°)	$\beta$ (°)	$B_1$	$B_2$	$\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$	$q = \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$
30	90	30	0,0237	0,0053	0,0243	0,2182
30	90	60	0,0400	0,0083	0,0409	0,2032
30	90	90	0,0483	0,0100	0,0493	0,2027
30	60	30	0,0146	0,0026	0,0148	0,1753
30	60	60	0,0272	0,0043	0,0275	0,1561
30	60	90	0,0394	0,0054	0,0398	0,1358
30	30	30	0,0044	0,0006	0,0044	0,1351
30	30	60	0,0132	0,0008	0,0132	0,0605
30	30	90	0,0230	0,0010	0,0230	0,0434
30	0		0	0	0	-
40	90	30	0,0303	0,0042	0,0306	0,1373
40	90	60	0,0483	0,0064	0,0487	0,1314
40	90	90	0,0533	0,0070	0,0538	0,1302
40	60	30	0,0203	0,0021	0,0204	0,1029
40	60	60	0,0363	0,0034	0,0365	0,0933
40	60	90	0,0433	0,0038	0,0435	0,0874
40	30	30	0,0081	0,0005	0,0081	0,0616
40	30	60	0,0197	0,0006	0,0197	0,0304
40	30	90	0,0257	0,0007	0,0257	0,0272
40	0		0	0	0	-
50	90	30	0,0341	0,0021	0,0342	0,0615
50	90	60	0,0522	0,0028	0,0523	0,0536
50	90	90	0,0558	0,0029	0,0559	0,0519
50	60	30	0,0272	0,0011	0,0272	0,0404
50	60	60	0,0427	0,0016	0,0427	0,0374
50	60	90	0,0451	0,0016	0,0451	0,0355
50	30	30	0,0146	0,0002	0,0146	0,0137
50	30	60	0,0245	0,0003	0,0245	0,0122
50	30	90	0,0268	0,0004	0,0268	0,0149
50	0		0	0	0	-

Tato tabulka představuje přehled všech koeficientů  $B_1$ ,  $B_2$ , efektivní amplitudy  $\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$  a koeficientu  $q = \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$  pro různé hvězdné parametry. P je velikost pokrytí povrchu hvězdy skvrnou. Koeficient  $q$  nám charakterizuje tvar světelné křivky. Do grafů si nyní vyneseme závislost koeficientu  $q$  na různých parametrech hvězdy.

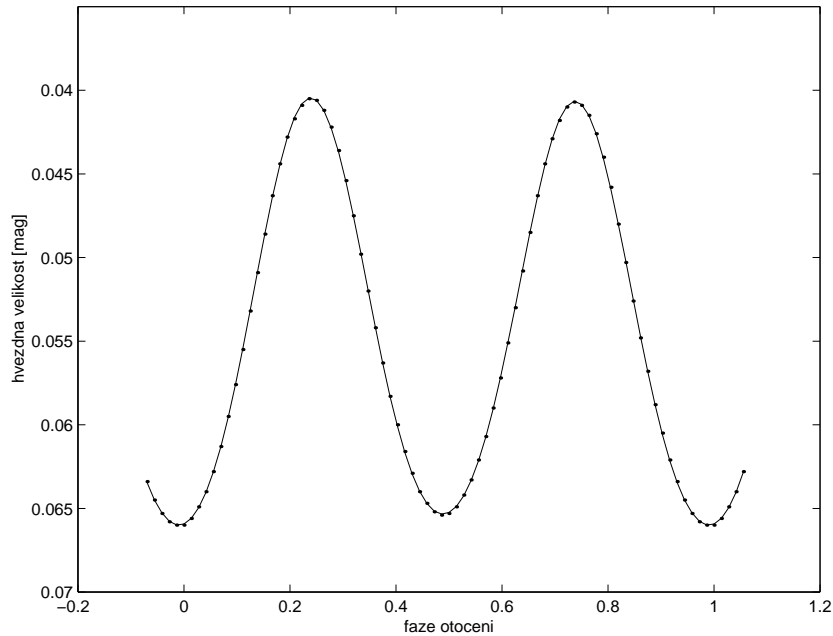
Obrázek 12: Závislost koeficientu  $q$  na pokrytí hvězdy skvrnouObrázek 13: Závislost koeficientu  $q$  na sklonu  $i$

Obrázek 14: Závislost koeficientu  $q$  na úhlu  $\beta$ 

Na obrázcích 12., 13. a 14. jsou grafy závislostí koeficientu  $q$  na jednotlivých hvězdných parametrech. Vidíme, že se v některých případech spojnice bodů protínají. Protože koeficient  $q$  nám charakterizuje tvar světelné křivky, nemůžeme jednoznačně rozhodnout, pro jaké hvězdné parametry jsme světelnou křivku naměřili.

### 4.3.6 Pás se sklonem $45^\circ$ vůči rovině rovníku

Další zajímavou možností, jak může vypadat skvrna na hvězdném povrchu, je pás. Tento případ budeme modelovat tak, že na hvězdě budeme uvažovat přesně na proti sobě dvě stejné skvrny. Jejich hvězdné velikosti ale obrátíme, aby pás mezi nimi byl tmavší v souladu s předešlými modely. Takže pás bude mít hvězdnou velikost 0,1 mag, jeho sklon vůči rovině rovníku bude  $45^\circ$  a jeho pokrytí hvězdného povrchu bude asi 40%. Světelnou křivku pro případ  $i = 90^\circ$  můžeme vidět na obrázku 15. Koeficienty harmonického polynomu pro tento případ jsou:

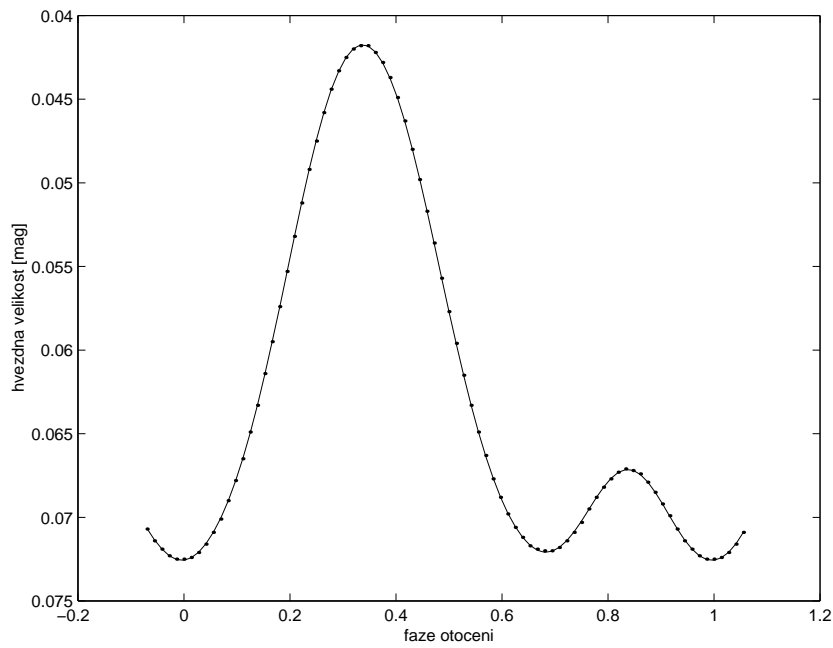


Obrázek 15: Pokrytí hvězdy skvrnou ve tvaru pásu pro  $i = 90^\circ$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0540 \\
 B_1 &= 0,0003 & C_1 &= -0,0001 \\
 B_2 &= 0,0124 & C_2 &= 0,0008 \\
 B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= -0,0008 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 6,7 \cdot 10^{-5}$$



Obrázek 16: Pokrytí hvězdy skvrnou ve tvaru pásu pro  $i = 60^\circ$

Světelnou křivku pro případ  $i = 60^\circ$  můžeme vidět na obrázku 16. Koeficienty harmonického polynomu pro tento případ jsou:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0618 \\
 B_1 &= 0,0072 & C_1 &= -0,0111 \\
 B_2 &= 0,0032 & C_2 &= 0,0062 \\
 B_3 &= 0,0003 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0,0002 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$

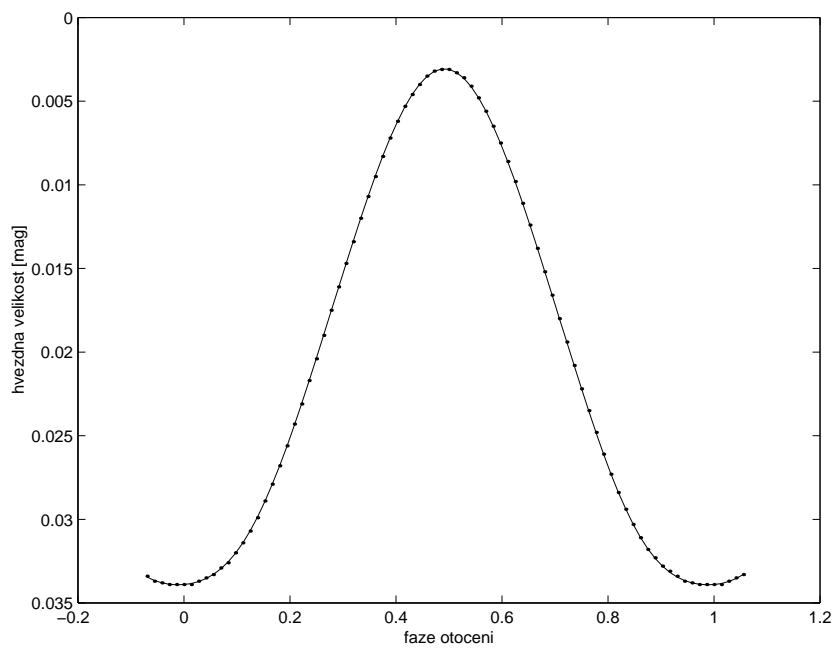
Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,9 \cdot 10^{-5}$$

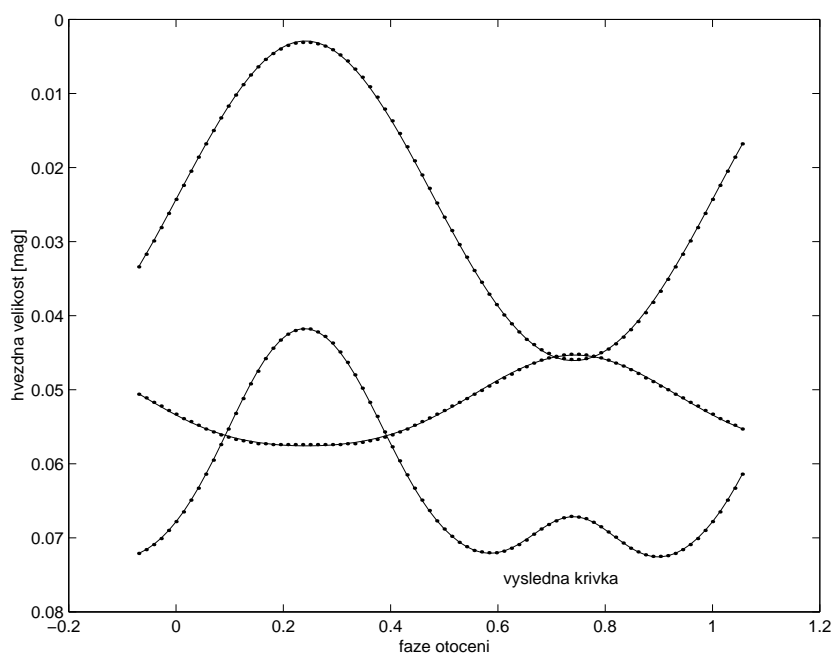
Světelnou křivku pro případ  $i = 30^\circ$  můžeme vidět na obrázku 17. Koeficienty harmonického polynomu pro tento případ jsou:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0,0200 \\
 B_1 &= 0,0155 & C_1 &= -0,0009 \\
 B_2 &= -0,0014 & C_2 &= 0 \\
 B_3 &= 0 & C_3 &= 0 \\
 B_4 &= 0 & C_4 &= 0 \\
 B_5 &= 0 & C_5 &= 0
 \end{aligned}$$





Obrázek 17: Pokrytí hvězdy skvrnou ve tvaru pásu pro  $i = 30^\circ$

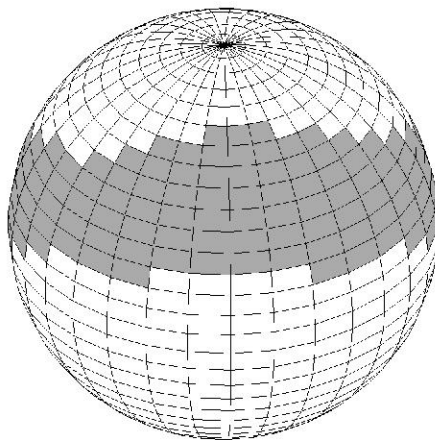


Obrázek 18: Světelná křivka pásu složená ze světelných křivek skvrn

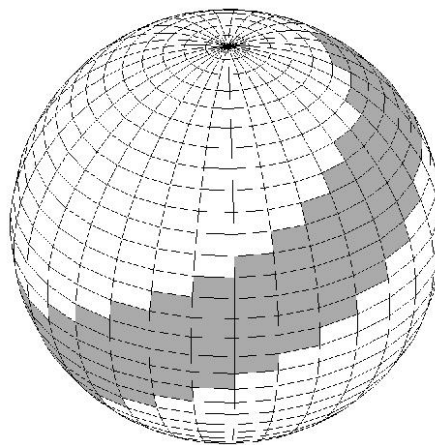
Střední kvadratická odchylka proložení těchto dat harmonickým polynomem je:

$$\sigma = 3,2 \cdot 10^{-5}$$

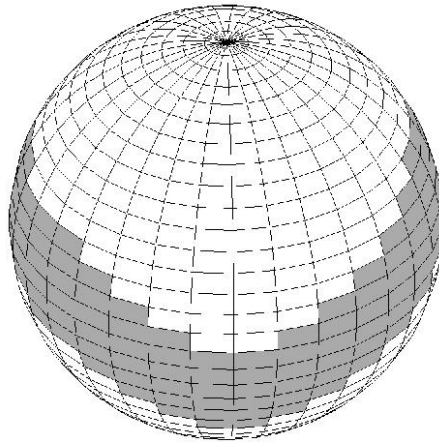
Na tomto modelu se dá také pěkně ukázat, že světelné křivky pro různé kombinace skvrn na hvězdném povrchu můžeme dostat sčítáním světelných křivek pro jednotlivé skvrny. Názorně je to ukázáno na obrázku 18., kde je světelná křivka našeho modelu pásu pro úhel  $i = 60^\circ$  složena ze světelných křivek jednotlivých skvrn. Na obrázcích 19. - 22. je názorně ukázán pás na hvězdném povrchu, tak jak je v našem modelu poskládán z jednotlivých elementů.



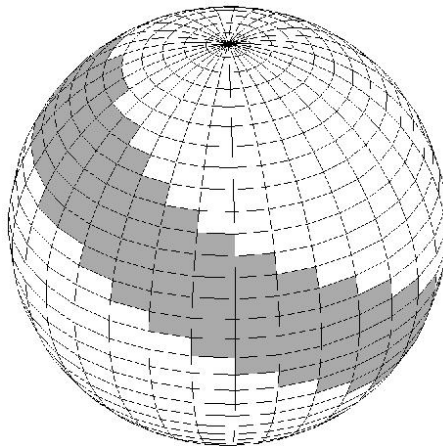
Obrázek 19: Sekundární maximum



Obrázek 20: Minimum na světelné křivce

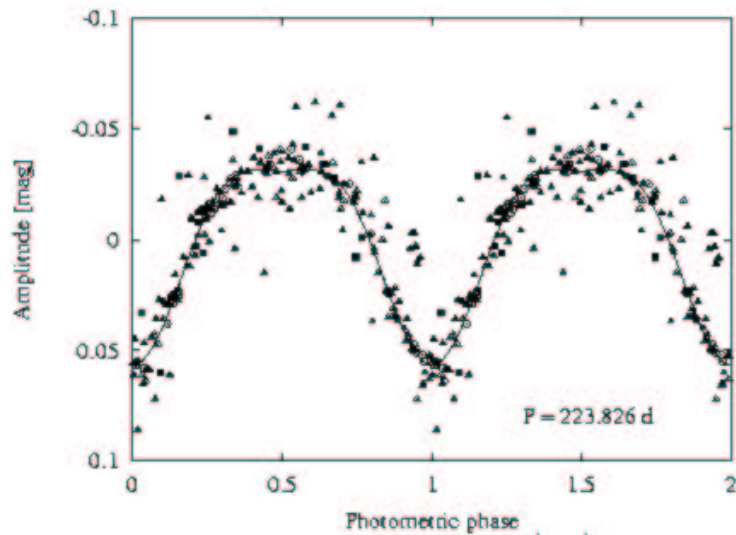


Obrázek 21: Primární maximum



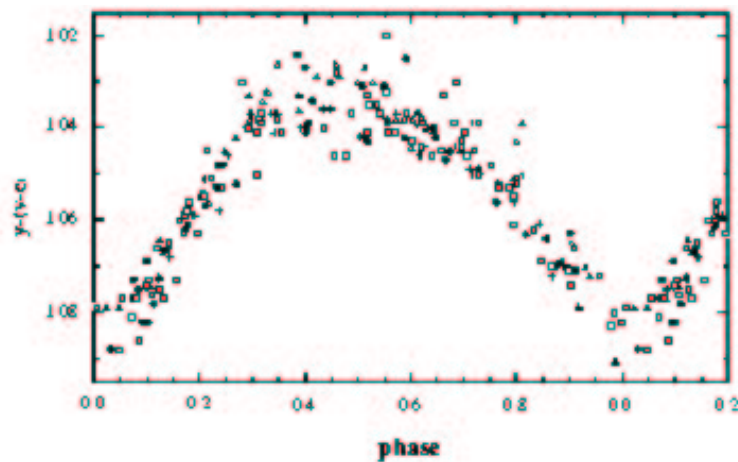
Obrázek 22: Druhé minimum na světelné křivce

## 5 Srovnání s naměřenými světelnými křivkami



Obrázek 23: Světelná křivka hvězdy HD188041

Na obrázku 23. je naměřená světelná křivka chemicky pekulární hvězdy HD188041. Jak můžeme vidět, tato světelná křivka se nápadně podobá světelné křivce z obrázku 2, tj. odpovídá hvězdě s 30% pokrytím hvězdného povrchu skvrnou. V tomto případě je ovšem hvězdná velikost posunutá asi o 0,05 mag směrem k menší hvězdné velikosti. Nicméně tvar světelné křivky je velmi podobný.



Obrázek 24: Světelná křivka hvězdy 20 Eri

Na obrázku 24. je světelná křivka chemicky pekuliární hvězdy 20 Eri. Můžeme si povšimnout, že tvar světelné křivky je nápadně podobný světelné křivce pro  $\beta = 60^\circ$  z obrázku 3. Tato světelná křivka má ovšem trochu velký rozptyl naměřených hvězdných velikostí okolo svého maxima, z čehož můžeme usuzovat na možnou existenci dvou skvrn, které jsou blízko u sebe, mohou se i překrývat, a mají různou hvězdnou velikost.

Podobných výsledků můžeme dosáhnout srovnáním světelných křivek i u dalších CP hvězd v různých spektrálních filtrech. Na závěr můžeme tedy říci, že uvedený postup bude fungovat pro všechny CP hvězdy, jejichž světelnou křivku formuje jedna skvrna o různém pokrytí hvězdného povrchu.

## 6 Závěr

Při modelování světelných křivek magnetických chemicky pekuliárních hvězd jsem vycházel z několika předpokladů. Prvním bylo, že změny hvězdné velikosti určuje pouze jedna velká skvrna na hvězdném povrchu víceméně kruhového tvaru, která se nachází v oblasti jednoho z magnetických pólů. Dalším předpokladem bylo, že tato skvrna má pouze jednu hodnotu hvězdné velikosti, tj. že se její hvězdná velikost v daném spektrálním oboru nijak neliší od jedné části skvrny ke druhé, a že je ostře ohraničená, což znamená, že hvězdná velikost skvrny na okrajích nepřechází spojitě ve hvězdnou velikost hvězdného povrchu bez skvrny. Posledním předpokladem bylo, že hodnota okrajového ztemnění, které významným způsobem vstupuje do modelu, je  $u = 0,5$ . Z těchto předpokladů jsem tedy vycházel při modelování světelných křivek pro různé hodnoty hvězdných parametrů.

Namodelovaná data jsem pak prokládal harmonickým polynomem 5. řádu. Pro každý případ jsem vypočítal koeficienty harmonického polynomu a také střední kvadratickou odchylku. Střední kvadratická odchylka proložení syntetických dat harmonickým polynomem se v mém případě pohybuje mezi  $10^{-4}$  a  $10^{-5}$ . Velikost této odchylky je dána přesností, s jakou jsou namodelována data pro jednotlivé případy, tj. zejména velikostí kroku po kterém rozdělujeme hvězdný povrch na jednotlivé elementy (v našem případě to je  $5^\circ$ ) a také řádem harmonického polynomu.

Ve všech případech jsem použil 5. řád harmonického polynomu. Při bližším pohledu na jednotlivé koeficienty harmonického polynomu je vidět, že 5. řád harmonického polynomu je více než dostatečný a že koeficienty harmonického polynomu se od 2. řádu již významně blíží nule. Ve většině případů tedy stačí při prokládání dat vzít harmonický polynom 2. řádu. Střední kvadratická odchylka se nám v tomto případě zvýší asi o jeden řád, tj. na hodnoty mezi  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$ . Největší amplituda změn hvězdné velikosti chemicky pekuliárních hvězd se pohybuje okolo 0,2 magnitudy, a dnes ji můžeme měřit s přesností řádově na tisíce magnitudy. Z toho plyne, že se nedopustíme větší nepřesnosti, když místo harmonického polynomu pátého řádu vezmeme polynom řádu druhého.

Jak je vidět, tvar a amplitudu světelných křivek magnetických chemicky pekuliárních hvězd nám tedy ovlivňují tyto parametry: hvězdná velikost hvězdy a skvrny v daném spektrálním filtru, velikost skvrny, okrajové ztemnění  $u$ , sklon rotační osy k zornému paprsku  $i$  a úhel mezi rotační a magnetickou osou  $\beta$ . Světelná křivka určená těmito parametry se dá ovšem proložit polynomem 2. řádu, kde sinové členy budou nulové. Takže matematicky může být popsána pouze třemi parametry:  $A_0$ ,  $B_1$  a  $B_2$ . Toto je důvod, proč při pozorování světelné křivky nemůžeme jednoznačně určit rozložení a hvězdnou velikost skvrn na povrchu hvězdy.

V kapitole 5. jsem srovnával syntetické světelné křivky s naměřenými světelnými křivkami skutečných chemicky pekuliárních hvězd. Při bližším srovnání syntetických a naměřených světelných křivek můžeme říci, že se velmi podobají. Z této podobnosti plyne, že náš program na modelování světelných křivek podle modelu skloněného rotátoru neobsahuje žádnou hrubou chybu a také že naše předpoklady o fyzikálních parametrech platí pro většinu chemicky pekuliárních hvězd.

## 7 Seznam použité literatury

1. Balek, Vl.: 1986, Prečo svietia hviezdy?
2. Bartsch, H. J.: 1996, Matematické vzorce
3. Böhm-Vitense, E.: 1989, Introduction to stellar astrophysics – Basic stellar observations and data
4. Böhm-Vitense, E.: 1989, Introduction to stellar astrophysics – Stellar atmospheres
5. Carrol, B. W., Ostlie, D. A.: 1996, An introduction to modern astrophysics
6. Castagnetto, J., Rawat, H., Schumann, S., Scollo, C., Veliath, D.: 2002, PHP Programujeme profesionálně
7. Kosek, J.: 1998, PHP Tvorba interaktivních internetových aplikací
8. Mikulášek, Z.: 1980, Studium pekuliární hvězdy CQ UMa, kandidátská disertační práce
9. Mikulášek, Z.: 1999, Úvod do fyziky hvězd
10. Mikulášek, Z.: 2002, Proměnné hvězdy
11. Mikulášek, Z., Krtička, J.: 2003, Fyzika horkých hvězd
12. Polášková, M.: 2003, Proměnnost chladných chemicky pekuliárních hvězd, bakalářská práce
13. Rektorys, K. a spolupracovníci: 1996, Přehled užití matematiky I, II
14. Šolc, M., Švestka, J., Vanýsek, Vl.: 1983, Fyzika hvězd a vesmíru
15. Tayler, R. J.: 1970, The stars: Structure and evolution
16. Van Hamme, W., 1993, New limb-darkening coefficients for modelling binary star light curves
17. Vanýsek, Vl.: 1980, Základy astronomie a astrofyziky