



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY



Analýza chaotických procesů v astronomii

Diplomová práce

Patrik Žilka

Vedoucí práce: Mgr. Filip Hroch, Ph.D. Brno 2016

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Patrik Žilka Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce:	Analýza chaotických procesů v astronomii
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Teoretická fyzika a astrofyzika
Vedoucí práce:	Mgr. Filip Hroch, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16
Počet stran:	xii + 39
Klíčová slova:	Kelvin-Helmholtzova nestabilita; výtrysk; AGN; program Pluto; magnetohydrodynamika

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Patrik Žilka Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Názov práce:	Analýza chaotických procesov v astronómii
Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	Teoretická fyzika a astrofyzika
Vedúci práce:	Mgr. Filip Hroch, Ph.D.
Akademický rok:	2015/16
Počet strán:	xii + 39
Kľúčové slová:	Kelvin-Helmholtzova nestabilita; výtrysk; AGN; program Pluto; magnetohydrodynamika

Bibliographic Entry

Author: Bc. Patrik Žilka
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Theoretical Physics and Astrophysics

Title of Thesis: Analysis of chaotic processes in astronomy

Degree Programme: Physics

Field of Study: Theoretical physics and astrophysics

Supervisor: Mgr. Filip Hroch, Ph.D.

Academic Year: 2015/16

Number of Pages: xii + 39

Keywords: Kelvin-Helmholtz instability; jet; AGN; software Pluto; magnetohydrodynamics

Abstrakt

Hlavním cílem této práce je zlepšit chápání chaoticky nestabilních procesů ve výtryscích aktivních galaktických jader. K tomu byly nelineární rovnice ideální magnetohydrodynamiky popisující statický, nerotující a válcový výtrysk vyřešeny analyticky k získání disperzní relace Kelvin-Helmholtzových nestabilit v axiálním magnetickém poli. Disperzní relace byla následně řešena hlavně pro nulté azimutální a radiální módy. Nakonec byly výsledky porovnány s numerickými simulacemi válcových osovo-symetrických výtrysků pro různé parametry.

Abstrakt

Hlavným cieľom tejto práce je zlepšiť chápanie chaoticky nestabilných procesov vo výtryskoch aktívnych galaktických jadier. K tomu boli nelineárne rovnice ideálnej magneto-hydrodynamiky opisujúce statický, nerotujúci a válcový výtrysk analyticky vyriešené k získaniu disperznej relácie Kelvin-Helmholtzových nestabilít v axiálnom magnetickom poli. Disperzná relácia bola následne riešená hlavne pre nulté azimutálne a radiálne módy. Nakoniec boli výsledky porovnané s numerickými simuláciami válcových osovo-symetrických výtryskov pre rôzne parametre.

Abstract

The main aim of this work is to improve an understanding of chaotic unstable processes in active galactic nuclei jets. The nonlinear equations of ideal magnet hydrodynamics, describing steady, non-rotating and cylindrical jet, were analytically solved to obtain dispersion relation of Kelvin-Helmholtz instabilities in the axial magnetic field. Dispersion relation was subsequently numerically solved, mainly for fundamental pinching modes. Finally, results were compared to numerical simulations of cylindrical axisymmetric jets for different parameters.



Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student : Bc. Patrik Žilka, učo 379626

Studijní program : Fyzika

Studijní obor : Teoretická fyzika a astrofyzika

Ředitel Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky PŘF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Analýza chaotických procesů v astronomii

Analysis of chaotic processes in astronomy

Zásady pro vypracování: Fenomén chaosu provází astronomický výzkum již od samého počátku, kdy lidstvo rozeznalo zákony pohybu ve sluneční soustavě. Otázka její stability pak dala vzniknout mnoha novým myšlenkám, avšak samotnou podstatu se podařilo odhalit až teprve s příchodem číslicových počítačů v minulém století. Tím nabrala chaotická věda zcela nový směr.

Cílem práce je studium charakteristik chaosu v astronomii. Jde o vytváření jednoduchých chaotických modelů, jejich kvantitativní popis i o aplikaci na reálná data.


K úspěšné realizaci práce je třeba běžná rutina v použití pokročilých metod matematické statistiky, příslušných fyzikálních oblastí a především pak nelineární analýzy chaotických procesů.

Jazyk závěrečné práce : český, anglický nebo slovenský
Vedoucí diplomové práce : Mgr. Filip Hroch, Ph.D.
Datum zadání diplomové práce : leden 2014
Datum odevzdání diplomové práce : dle harmonogramu ak. roku 2014/2015

V Brně leden 2014


Rikard von Unge
ředitel ÚTFA

Zadání diplomové práce převzal dne:


Podpis studenta

PodĎakovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poĎakovať vedúcemu tejto práce Filipovi Hrochovi, za jeho pomoc a podporu pri jej písaní.

Tiež Ďakujem za prístup k výpočtovým a uchovávacím zariadeniam vlastnených stranami a projektami prispievajúcimi do Národnej infraštruktúry MetaCentra, poskytnutých pod programom „Projects of Large Research, Development, and Innovations Infrastructures“ (CESNET LM2015042).

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji magisterskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 11. května 2016

.....
Patrik Žilka

Obsah

Úvod	1
Kapitola 1. Nestability vo výtryskoch	3
1.1 Stručný úvod do magnetohydrodynamiky	5
1.1.1 Rovnice hydrodynamiky	6
1.1.2 Rovnice elektrodynamiky	7
1.1.3 Rovnice ideálnej MHD	9
1.2 Riešenie MHD rovníc pre model výtrysku	10
1.2.1 Prevod do válcových súradníc	11
1.2.2 Dosadenie porúch a linearizácia	12
1.2.3 Riešenie sústavy rovníc	13
1.3 Kelvin-Helmholtzova nestabilita	16
1.3.1 Disperzná relácia	17
1.3.2 Škálová invariantnosť	18
1.3.3 Numerické riešenie disperznej relácie	19
Kapitola 2. Numerické simulácie výtryskov	22
2.1 Program PLUTO	22
2.1.1 Základné a ďalšie nastavenia	23
2.1.2 Počiatočné podmienky a vizualizácia	23
2.2 Výsledky simulácií	24
2.2.1 Základné charakteristiky	24
2.2.2 Porovnanie s disperznou reláciou	26
2.2.3 Závislosť na parametroch	27
2.2.4 Porovnanie s reálnymi objektami	32
Záver	34

Zoznam použitých zdrojov	38
---------------------------------------	-----------

Úvod

Chaos. Tento pojem je tak všeobecný, že si pod ním každý predstaví niečo iné. Niektorí si pod tým predstaví neporiadok vo svojom šuflíku, iní možno aj neporiadok vo svojej hlave. Málokto si predstaví chaos napríklad v oblakoch, kde je tvorcom ich rozmanitých tvarov alebo aj nepredvídateľného správania. Chaos sa vyskytuje aj ešte ďalej – vo vesmíre.

Nemusíme ísť však ďaleko a veľa ho nájdeme aj v našej Slnnej sústave. Dráhy všetkých telies môžu byť ovplyvnené chaosom a dobré je to vidieť hlavne na tých menších – u planétkach, ktoré vplyvom chaosu vytvorili aj Kirkwoodove medzery v hlavnom pásu, v prstencoch planét, kde sú podobné rezonančné medzery, alebo napríklad aj u niektorých mesiacoch, kde ich dráhy sú viditeľne nepredvídateľné (ako napríklad u niektorých mesiacoch Pluta). Okrem dráh sa chaoticky správajú aj spomínané atmosféry planét, rotácie niektorých telies (napr. rotácia Saturnovho mesiaca Hyperion), geologické procesy alebo aj niektoré procesy na Slnku, hviezde našej Slnnej sústavy.

Keď opustíme našu sústavu, na chaos môžeme znovu natrafiť pri pohybe jednotlivých hviezd, pri nepravidelne premenlivej jasnosti v niektorých z nich (dobré je vidieť hlavne u hviezd typu RV Tauri) alebo je tiež príčinou toho, prečo vo viachviezdnych systémoch sú pri sebe len dve hviezdy a ďalšie sú výrazne ďalej. Mnoho príkladov chaosu by sa našlo aj mimo našej galaxie a dalo by sa pokračovať až k chaotickej inflácii, ktorá zrejme hrala významnú rolu pri vzniku nášho vesmíru.

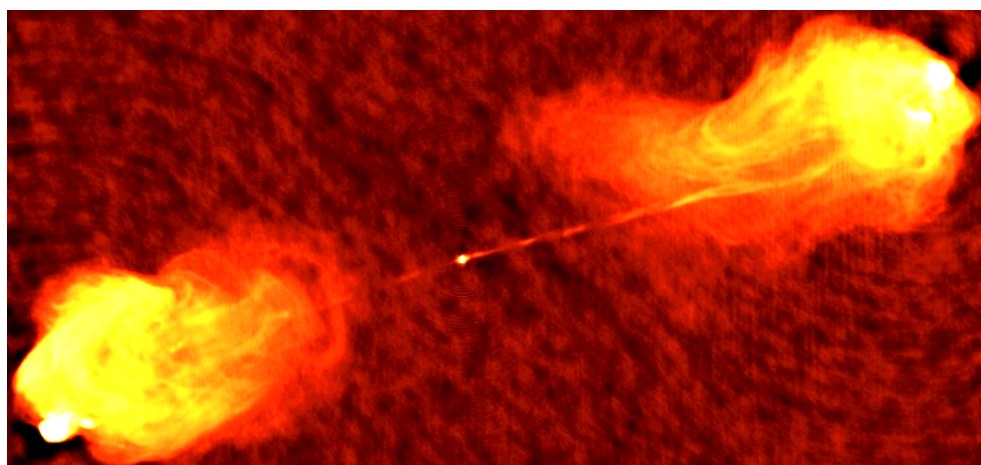
Táto práca sa však nezaobrá všetkými vymenovanými typmi chaosu, ale konkrétne len jedným – chaosom, ktorý vzniká vo výtryskoch hmoty do voľného priestoru vychádzajúceho napríklad z blízkeho okolia čiernej diery. Príkladom môžu byť výtrysky v aktívnych galaktických jadrách, ktoré sú od nás nepredstaviteľne ďaleko, ale vzhľadom na veľkosť a silu výtrysku sme ich schopní stále detekovať. Práca tak nadväzuje na autorovu bakalársku prácu [17], ktorá sa zaoberala opisom chaotického správania svetelných kriviek u blazaroch, kvasaroch nasmerovaných smerom na nás. Svetelné krivky majú pravdepodobne pôvod vo výtryskoch a keďže na nich nebolo úplne vylúčené chaotické správanie, snahou tejto práce je priblížiť sa k problematike nestabilit vo výtryskoch.

Základné informácie o chaose a aj o aktívnych galaktických jadrách boli opísané v bakalárskej práci a do tejto práce preto neboli vložené. V prvej kapitole sú napísané základné informácie o výtryskoch a o nestabilitách a snaha o ich opísanie pomocou rovníc magnetohydrodynamiky. Práca sa zameriava špeciálne na Kelvin-Helmholtzove nestability, ktoré vznikajú na rozhraní dvoch prúdení s rozličnou rýchlosťou. Výsledkom budú numerické riešenia disperznej relácie a tie budú v ďalšej kapitole porovnávané s numerickými simuláciami magnetohydrodynamických rovníc pre rôzne parametre.

Kapitola 1

Nestability vo výtryskoch

Pred niekoľkými desiatkami rokov sme ešte poriadne nevedeli ani to, že čo sú aktívne galaktické jadrá (AGN) a bolo okolo toho veľa záhad. Postupne sa však získavali dáta z rôznych družíc a následná analýza dát viedla k stále lepšiemu chápaniu týchto objektov. Dnes sa aktívne galaktické jadrá berú ako samozrejmosť a pozornosť sa uprednostňuje na ich jednotlivé časti – na magneticky nabitú rotujúcu čiernu dieru, jej okolitý akrečný disk, výtrysky hmoty vychádzajúce z jej pólov alebo aj na okolité mračná, torus a iné oblasti.



Obr. 1: Snímka zachytáva zdroj rádiovej galaxie Cygnus A vzdialenej od nás 600 miliónov svetelných rokov. Získaná je pomocou rádiových teleskopov VLA (NRAO/AUI [19]).

Štúdium výtryskov je dnes rozsiahlou oblasťou vo fyzike a okrem výtryskov v AGN sa skúmajú aj iné astrofyzikálne výtrysky. Podľa jednej z najnovších prác a jej referencií [15, Singh et al., 2016] by sa dali tieto výtrysky rozdeliť podľa ich rýchlosti na niekoľko kategórií: stredne relativistické ($v \approx 0,26c$) ako napríklad u mikrokvasara Cyg X-3 alebo u menej žiarivých AGN, vysoko relativistické ($v \approx 0,92c$) ako napríklad u mikrokvasara GRS 1915+105, extrémne relativistické ($v \approx 0,99c$) v niektorých veľmi žiarivých AGN

(napr. blazaroch) a ultra-relativistické ($v \approx 0,9999c$) v zábleskoch gama žiarenia (GRB). Jeden z takýchto výtryskov z AGN ($v \approx 0,5c$, [16]) je vidieť na obrázku č. 1. Vo svetlom bode uprostred snímky sa pravdepodobne nachádza supermasívna čierna diera. Z tejto oblasti vychádzajú dva protichodné výtrysky, ktoré sú spočiatku veľmi úzke a postupne sa roztvárajú do rádiových lalokov (angl. „lobes“). Vo výtrysku je vidieť aj opakujúce svetlé zjasnenia, ktoré sa označujú ako uzly (angl. „knots“).

Príčina vzniku týchto výtryskov stále nie je veľmi jasná, respektíve odhaduje sa, že v tom majú prsty dva hlavné mechanizmy. Prvým je Blandford-Znajekov mechanizmus, ná základe ktorého výtrysk čerpá energiu a moment hybnosti z elektromagnetického poľa generovaného magneticky nabitou rotujúcou čiernou dierou. Druhým je Blandford-Payne mechanizmus, pri ktorom výtrysk získava energiu magneto-odstredivým mechanizmom z rotačnej energie pri akrecii hmoty. [15]

Okrem zistenia príčiny vzniku výtryskov sa súčasné štúdiá snažia odhaliť príčiny ich rôznych tvarov (morfológie). To tiež nie je také jednoduché ako to vyzerá. Nedá sa napríklad s istotou tvrdiť, že úzka dlhá časť výtrysku je spôsobená silným magnetickým poľom, v ktorom sú nabité častice uviaznuté a kolimované. Silné magnetické pole môže totiž tiež vyvolať nestability, ktoré túto kolimáciu ľahko narušia. Rovnako aj ďalšie štruktúry závisia od toho, či môžu alebo nemôžu vzniknúť nejaké nestability. Preto pre odôvodnenie morfológie je potrebné analyzovať aj rôzne podmienky stability výtryskov. Ako sa uvidí v tejto kapitole, ani analytický opis jedného z hlavných typov týchto nestabilit nie je veľmi jednoduchý a preto sa veľa štúdií sústreďujú čisto na modelovanie výtryskov a tieto modely sa potom porovnávajú s reálnymi dátami a zisťujú sa tak možné parametre výtrysku (napríklad ich hustota).

Podľa prác [15, Singh et al., 2016] a [12, Longaretti, 2008] rozlišujeme vo výtryskoch niekoľko druhov nestabilit. Konkrétnejšie sa jedná o:

- Kelvin-Helmholtzove nestability, ktoré vznikajú na rozhraní dvoch rozdielne sa pohybujúcich prostredí,
- prúdom riadené (angl. „current-driven“) nestability, pri ktorých sa v dôsledku silného elektrického prúdu a jeho magnetického poľa ohýba výtrysk a môžu sa tak tvoriť magnetické rekonexie,
- tlakom riadené (angl. „pressure-driven“) nestability, ktoré vznikajú v prípade vysokého tlaku na rozhraní dostatočne zakriveného výtrysku
- a ďalšie nestability ako napríklad radiačné nestability spôsobené interakciou radiácie

s plazmou.

Táto práca bude smerovaná k analýze Kelvin-Helmholtzových nestabilít. Medzi hlavné zdroje informácií k napísaniu tejto kapitoly sú knihy [4], [8], [11] a [2].

1.1 Stručný úvod do magnetohydrodynamiky

Ak chceme aspoň približne opísať správanie hmoty vo výtryskoch, potom je potrebné požiadať o pomoc magnetohydrodynamiku (MHD). Jedná sa o oblasť fyziky, ktorá sa zaoberá opisom elektricky vodivej tekutiny v magnetickom poli a k takému opisu spája hlavne znalosti hydrodynamiky a elektrodynamiky. Príkladom takej vodivej tekutiny môže byť plazma, ktorá je zložením voľných nabitých a neutrálnych častíc, pričom ako celok sa správa kvázineutrálne (počet kladných a záporných nábojov je v každom makroskopickom objeme rovnaký). Pohyb jej voľných nábojov vytvára magnetické pole, ktoré môže ovplyvniť pohyb vzdialenejších nábojov a vytvorí tak u nich ďalšie magnetické polia. Opis takého správania je často dosť komplikovaný a preto sa pre jednoduchosť uvažujú rôzne aproximácie a predpoklady.

Jedným zo základných predpokladov MHD je považovanie tekutiny (plazmy) za kontinuum. To znamená, že v tekutine výrazne dominujú zrážky a teda stredná voľná dráha častíc λ_c je omnoho menšia ako charakteristický rozmer pozorovaného systému L . Rovnako aj stredná doba zrážok častíc τ_c je omnoho menšia ako charakteristická doba systému T :

$$\lambda_c \ll L, \quad \tau_c \ll T. \quad (1.1)$$

Tento predpoklad potom vedie k odvodeniu hydrodynamických rovníc pre tekutiny (existujú však aj bezzrážkové MHD modely, ktoré vychádzajú priamo z kinetických rovníc).

Ďalším častým predpokladom je uvažovanie len o jednotekutinovom modeli, keď nerozlišujeme jednotlivé komponenty tekutiny (elektrónovú, iónovú a neutrálnu časť) a namiesto rýchlosti jednotlivých komponent používame len ťažiskovú rýchlosť \vec{v} a hustotu prúdu \vec{j} :

$$\vec{v} = \frac{\sum m_\alpha \vec{v}_\alpha}{\sum m_\alpha}, \quad \vec{j} = \sum Q_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha. \quad (1.2)$$

Nakoniec, pre jednoduchosť MHD rovníc je vhodné začínať s nerelativistickou aproximáciou a teda s nerelativistickými rýchlosťami u všetkých druhov častíc:

$$|\vec{v}_\alpha| \ll c, \quad (1.3)$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

Za týchto podmienok je možné použiť nerelativistické rovnice hydrodynamiky a elektrodynamiky, ktoré sú vysvetlené v ďalších podkapitolách.

1.1.1 Rovnice hydrodynamiky

V prípade, že sa v tekutine zachováva hmotnosť, potom sa dá ľahko odvodiť pomocou Gaussovej vety, že musí platiť aj rovnica kontinuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.4)$$

kde ρ je hustota tekutiny. Ďalšia rovnica sa získa z určenia zrýchlenia nejakého elementu tekutiny o malom objeme. Vzhľadom na to, že tento element sa pohybuje v priestore, tak nestačí parciálna derivácia rýchlosti podľa času, ale je potrebná úplná derivácia vektorového poľa (takzvaná substancionálna derivácia):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (1.5)$$

Toto zrýchlenie podľa 2. Newtonovho zákona závisí od síl, ktoré pôsobia na daný element tekutiny. Tieto sily je možné rozdeliť na plošné sily od okolitej tekutiny, ktoré sú dané divergenciou tenzoru napätia, a na objemové sily, ktoré sú spôsobené napríklad gravitačným alebo elektromagnetickým poľom. V prípade ideálnej viskózne tekutiny sa divergencia tenzoru napätia rovná zápornej divergencii tlaku a viskózneho člena $\mu \Delta \vec{v}$ (v prípade stlačiteľnej tekutiny sú prítomné aj ďalšie viskózne členy). Po rozpísaní spomínaných síl sa dopracujeme k Navier-Stokesovej rovnice:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad (1.6)$$

kde ľavá strana rovnice vyjadruje spomínané zrýchlenie (inerciálny člen), \vec{f} sú objemové hustoty síl, P prislúcha tlaku a μ je v tomto prípade konštantná kinematická viskozita. Dôležitosť člena s viskozitou je možné vyjadriť pomocou Reynoldsovho čísla R , ktoré vyjadruje pomer medzi inerciálnym členom a viskóznym členom:

$$R = \frac{\rho(\partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v})}{\mu |\Delta \vec{v}|} \approx \frac{\rho L^2}{\mu T} \approx \frac{\rho v L}{\mu}. \quad (1.7)$$

Čím je teda Reynoldsovo číslo väčšie, tým menej dôležitý je viskózný člen a pre $R \gg 1$ môžeme tento člen úplne zanedbať. Vzhľadom na to, že viskozita je úmerná tlaku a strednej dobe zrážok častíc $\mu \approx P\tau_c$, potom je možné odhadnúť inverzné Reynoldsovo číslo:

$$R^{-1} \approx \frac{\mu}{\rho v L} \approx \frac{P\tau_c}{\rho v L} \approx \frac{c_s \lambda_c}{v L}, \quad (1.8)$$

kde pomer λ_c/L by mal byť podľa rovnice (1.1) veľmi malý, teda $\lambda_c/L \ll 1$ a z toho vyplýva veľké Reynoldsovo číslo $R \gg 1$ a možnosť zanedbať viskózne členy v Navier-Stokesovej rovnici.

Zostáva rozpísať pôsobiace hustoty síl \vec{f} . V prípade MHD sa jedná hlavne o hustotu Lorentzovej sily, ktorá je dôsledkom pôsobenia elektromagnetického poľa na voľne nabitú časticu:

$$\vec{f} = \vartheta \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (1.9)$$

kde $\vartheta = Qn$ je hustota náboja. Ak sa tieto častice nachádzajú aj v dostatočne silnom gravitačnom poli, tak sa do rovnice započítava aj hustota gravitačnej sily $\rho \vec{g}$, kde \vec{g} je gravitačné zrýchlenie.

1.1.2 Rovnice elektrodynamiky

Úlohou elektrodynamiky je opis elektromagnetického poľa a k tomu jej najlepšie slúžia Maxwellove rovnice, sústava štyroch rovníc odvodená Maxwellom už v roku 1865. Jedná sa o Ampérovu-Maxwellovu rovnicu (1.10), Faradayov indukčný zákon (1.11) a Gaussove zákony elektrostatiky (1.12) a magnetického poľa (1.13), ktoré vo vákuu ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) a v jednotkách SI vyzerajú nasledovne:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (1.10) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\vartheta}{\epsilon_0}, \quad (1.12) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.13)$$

kde \vec{E} je intenzita elektrického poľa, \vec{B} indukcia magnetického poľa, μ_0 permeabilita vákuua a ϵ_0 permitivita vákuua.

V rovnici (1.10) sa často zanedbáva Maxwellov posuvný prúd $\epsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)$ a dá sa to jednoducho ukázať pri znalosti definičného vzťahu medzi permitivitou a permeabilitou a

z odhadu intenzity elektrického poľa za pomoci Faradayovho zákona (1.11):

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad (1.14) \quad |\vec{E}| \approx \frac{L}{T} |\vec{B}|. \quad (1.15)$$

Za použitia týchto rovníc je možné odhadnúť pomer medzi Maxwellovým posuvným prúdom a ľavou stranou rovnice (1.10):

$$\frac{|\epsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)|}{|(\nabla \times \vec{B})/\mu_0|} \approx \frac{\epsilon_0 |\vec{E}|/T}{|\vec{B}|/\mu_0 L} = \frac{|\vec{E}|L}{c^2 T |\vec{B}|} \approx \left(\frac{L}{cT}\right)^2 \ll 1. \quad (1.16)$$

Posuvný prúd je teda možné zanedbať ak charakteristická doba systému T je omnoho väčšia ako L/c , kde L je charakteristický rozmer systému. Tejto aproximácii sa hovorí aj ako kvázistatická aproximácia (podľa knihy [14]).

Pri odvodzovaní MHD rovníc je dôležitý aj Ohmov zákon:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.17)$$

kde σ je skalárna elektrická vodivosť a je definovaná z predpokladanej izotropnej relácii $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$, kde \vec{E}' je intenzita elektrického poľa z pohľadu pohybujúceho sa elementu tekutiny. V nerelativistickom priblížení by mali platiť vzťahy $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ a $\vec{j}' = \vec{j}$ a po ich dosadení sa dostane spomínaný Ohmov zákon.

Za použitia Ampérovej-Maxwellovej rovnice (1.10) so zanedbaním posuvného prúdu môžeme vyjadriť hustotu prúdu \vec{j} , dosadiť do Ohmovho zákona a vyjadriť \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.18)$$

Po dosadení do rovnice (1.11) dostaneme indukčnú rovnicu magnetickej indukcie, ktorá patrí medzi najzákladnejšie rovnice magnetohydrodynamiky:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.19)$$

kde vodivosť σ sa predpokladá za konštantnú. Prvý člen na pravej strane rovnice súvisí s difúziou magnetického poľa do okolitého priestoru a druhý člen s pohybom magnetických indukčných čiar spolu s pohybom tekutiny. Vzájomnú dôležitosť týchto dvoch členov a teda

ich pomer vyjadruje magnetické Reynoldsovo číslo R_m :

$$\frac{\sigma\mu_0|\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})|}{|\nabla^2 \vec{B}|} \approx \sigma\mu_0\nu L \equiv R_m. \quad (1.20)$$

Čím je charakteristický rozmer L väčší, tým je aj väčšie magnetické Reynoldsovo číslo a tým menší vplyv má difúzny člen. Pri $L \rightarrow \infty$ sa tento člen úplne zanedbáva a toto zjednodušenie sa používa aj v rovniciach ideálnej MHD.

Nakoniec môžeme ešte využiť znalosti elektrodynamiky k zjednodušeniu hustoty Lorentzovej sily (1.9). Na základe nasledovných aproximácií za použitia rovníc (1.10), (1.12), (1.14) a (1.15) je možné zanedbať člen s intenzitou elektrického poľa (rovnako ako v prípade zanedbania posuvného prúdu):

$$\frac{|\vartheta \vec{E}|}{|\vec{j} \times \vec{B}|} \approx \frac{|\varepsilon_0 \nabla \vec{E}|}{|(\nabla \times \vec{B})/\mu_0|} \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} \approx \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} \right)^2 \approx \left(\frac{L}{cT} \right)^2 \ll 1. \quad (1.21)$$

Ak sa ešte vyjadří hustota prúdu pomocou rovnice (1.10) a pri zanedbaní posuvného prúdu, potom upravená hustota Lorentzovej sily bude mať nasledovný tvar:

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (1.22)$$

Získané rovnice z tejto a aj z predchádzajúcej podkapitoly je potom možné poskladať do sústavy rovníc ideálnej magnetohydrodynamiky.

1.1.3 Rovnice ideálnej MHD

Medzi základné aproximácie ideálnej MHD patrí dominantnosť zrážok, kvázineutralita tekutiny (plazmy), nerelativistické priblíženie, zanedbanie Maxwellovho posuvného prúdu a vysoké magnetické Reynoldsovo číslo. Za týchto podmienok boli odvodené rovnice, podľa ktorých by sa mala správať sledovaná tekutina.

Podľa hydrodynamiky sa jedná hlavne o skalárnu rovnicu kontinuity (1.4):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.23)$$

a o vektorovú Navier-Stokesovu rovnicu (1.6), v ktorej sa zanedbali viskózne členy a

dosadila sa hustota Lorentzovej sily (1.22):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (1.24)$$

Potom z elektrodynamiky bola odvodená vektorová indukčná rovnica mag. poľa (1.19), v ktorej sa zanedbal difúzny člen:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.25)$$

Dosiahli sme tak 7 rovníc (1 skalárnu a 2 vektorové), pričom v nich vystupuje 8 veličín (\vec{v} , \vec{B} , ρ , P). Ak chceme uzavrieť túto sústavu rovníc, tak potrebujeme ešte jednu nezávislú rovnicu, kde nebudú vystupovať ďalšie veličiny. Možností uzatvorenia je veľa a jednou z možností je napríklad predpokladanie nestlačiteľnosti tekutiny a použitie rovnice $\nabla \vec{v} = 0$. Častejšie sa však k uzatvoreniu používa nejaká stavová rovnica $s = s(P, \rho)$, ktorá by sa mala zachovávať vzhľadom na pohybujúci sa element tekutiny. Toto zachovanie sa dá vyjadriť tak, že jej substancionálna derivácia (analogická s rovnicou (1.5)) by mala byť rovná nule:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) s = 0 \quad (1.26)$$

Pričom za dostatočne všeobecnú stavovú rovnicu ideálneho plynu je možné považovať polytropickú závislosť $s = P\rho^{-\gamma}$.

Keď už máme takto uzatvorenú sústavu magnetohydrodynamických rovníc, teoreticky je možné vyjadriť jednotlivé veličiny a určiť ich hodnoty v závislosti od času a súradníc. Analyticky je to avšak stále veľmi náročné a preto je potrebné použiť ďalšie aproximácie, tentokrát také, aby čo najlepšie vystihovali daný fyzikálny problém. V našom prípade výtrysk v aktívnom galaktickom jadre.

1.2 Riešenie MHD rovníc pre model výtrysku

Táto práca sa zameriava hlavne na Kelvin-Helmholtzovu nestabilitu, ktorá vzniká na rozhraní dvoch pohybujúcich sa vrstiev. Preto v prípade extragalaktického výtrysku budeme uvažovať o zjednodušenom modeli, kde výtrysk bude vyjadrený nerotujúcim válcom s pohybujúcou sa tekutinou. V tomto válci by mohlo byť prúdenie laminárne alebo až turbulentné, ale vzhľadom na nedostatočný opis a komplikovanosť turbulentného prúdenia sa uvažuje len laminárne prúdenie tekutiny v smere osi tohto válca a pri pevne danej rýchlosti.

V okolí tohto válca bude nepohybujúca sa tekutina a na rozhraní týchto dvoch prostredí bude vrstva, v ktorej by mali vznikáť hľadané nestability. V tejto nestabilnej vsrtve by mali byť sledované veličiny minimálne funkciou r , vzdialenosti od osi válca. Jedná sa hlavne o rýchlostné pole $\vec{v}(r)$, tlak $P(r)$, hustotu $\rho(r)$ a magnetické pole $\vec{B}(r)$.

K určení nestabilit sa použijú rovnice ideálnej MHD, pričom za 8. rovnicu sa použije stavová rovnica polytropickej závislosti. Postup riešenia je rozpísaný v nasledovných podkapitolách.

1.2.1 Prevod do válcových súradníc

Prvým najdôležitejším krokom pre zjednodušenie tohto problému je prepis rovníc do válcovej sústavy súradníc. Nasledovné rovnice vyjadrujú transformačné vzťahy medzi kartézskymi a válcovými súradnicami a taktiež ortonormálne bázové vektory válcového súradnicového systému:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi & \hat{e}_r &= (\cos \phi, \sin \phi, 0) \\ y &= r \sin \phi & \hat{e}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \\ z &= z & \hat{e}_z &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Každý vektor je potom možné vyjadriť ako lineárnu kombináciu uvedených bázových vektorov. V matematických tabuľkách (napr. v dodatkoch [11]) je tiež možné dohľadať operátory gradientu a rotácie vyjadrené vo válcových súradniciach:

$$\nabla f = \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (1.28)$$

$$\nabla \times \vec{f} = \hat{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z} \right) + \hat{e}_\phi \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right) + \hat{e}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r f_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \phi} \right). \quad (1.29)$$

Na základe týchto znalostí je možné rovnice transformovať. Na znázornenie postupu je zobrazený prevod konvektívnej derivácie $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$, ktorá sa vyskytuje aj v Navier-Stokesovej

rovnici (1.24):

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla})\vec{v} &= \left[(v_r \hat{e}_r + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z) \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (v_r \hat{e}_r + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z) = \\
&= v_r \hat{e}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \hat{e}_\phi \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_r \hat{e}_z \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi v_r}{r} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} + \frac{v_\phi}{r} \hat{e}_r \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\phi^2}{r} \frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} \\
&= \hat{e}_\phi \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \hat{e}_z \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \hat{e}_r v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \hat{e}_\phi v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \hat{e}_z v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\
&= \hat{e}_r \left[(\vec{\nabla})v_r - \frac{v_\phi^2}{r} \right] + \hat{e}_\phi \left[(\vec{\nabla})v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} \right] + \hat{e}_z (\vec{\nabla})v_z.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Analogicky sa prevedú aj ostatné časti MHD rovníc. Keďže tento a ani nasledovné kroky nie sú až tak analyticky náročné, nebude tu rozpísaná úprava všetkých 8 rovníc, ale len upravená jedna rovnica, na ktorej sa budú robiť ďalšie úpravy. Ostatné rovnice sú upravované analogicky. Za príkladnú rovnicu bola zvolená Navier-Stokesová rovnica (1.24), ktorej jedna zložka (\hat{e}_r) má vo válcových súradniciach tento tvar:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{\nabla})v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\rho \mu_0} \left[\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) B_z - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) B_\phi \right]. \tag{1.31}$$

1.2.2 Dosadenie porúch a linearizácia

Ďalším krokom na ceste k analytickému odhadu je použitie klasických metód lineárnej analýzy nestabilit (Drazin & Reid, 1981, [5]). Podľa nich môžeme jednotlivé veličiny f rozpísať ako súčet nemiacej sa hodnoty f_0 a poruchy f_1 , ktorá je k nej relatívne malá ($f_1 \ll f_0$). Keď sa veličiny v rovniciach rozpíšu do tohto súčtu $f = f_0 + f_1$, roznásobia sa jednotlivé členy, ďalším krokom môže byť linearizácia rovníc. Pri nej sa zanedbajú všetky nelineárne členy, kde je súčin dvoch porúch (prípadne aj ich derivácií), keďže ich veľkosť by mala byť omnoho menšia. Naša Navier-Stokesova rovnica (1.31) po tejto úprave vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (v_{r_0} + v_{r_1})}{\partial t} + \left(v_{r_0} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial r} + \frac{v_{\phi_0}}{r} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial \phi} + v_{z_0} \frac{\partial v_{r_1}}{\partial z} \right) - \frac{v_{\phi_0} v_{\phi_1}}{r} = \\
&-\frac{1}{(\rho_0 + \rho_1)} \frac{\partial (P_0 + P_1)}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0 (\rho_0 + \rho_1)} \left[\left(\frac{\partial (B_{r_0} + B_{r_1})}{\partial z} - \frac{\partial B_{z_0}}{\partial r} - \frac{\partial B_{z_1}}{\partial r} \right) (B_{z_0} + B_{z_1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_{\phi_0} + r B_{\phi_1}) - \frac{\partial (B_{r_0} + B_{r_1})}{\partial \phi} \right) (B_{\phi_0} + B_{\phi_1}) \right].
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Dostaneme tak sústavu rovníc o ôsmich neznámých porúch, pričom neporušené hodnoty f_0 by sme mali vopred poznať. V prípade nášho zjednodušeného modelu však nemá zmysel zohľadňovať všetky hodnoty f_0 . Napríklad rýchlostné pole vo výtrysku má významnú len z -ovú zložku $\vec{v}_0 = (0, 0, v_{z_0})$, keďže uvažujeme o tekutine prúdiacej len v osi z . Aj v prípade magnetického poľa by mala byť najvýraznejšia axiálna zložka $\vec{B} = (0, 0, B_{z_0})$, ale vhodné by bolo započítať aj ostatné zložky ako napríklad azimutálnu B_{ϕ_0} . Tá sa ale v rovnici (1.32) vyskytuje v člene $-B_{\phi_0}^2/r$, ktorý je jediný bez poruchy (podobné členy sú aj v ďalších rovniciach). Preto zanedbaním B_{ϕ_0} môžeme získať homogénnu sústavu rovníc a tým výrazne zjednodušiť riešenie. Treba ale zdôrazniť, že niektoré štúdie počítajú aj s touto zložkou, pričom používajú iné aproximácie. V našom prípade homogenita rovníc umožňuje predpokladať poruchové riešenia rovníc v tvare rovinných vln:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \\ \rho_1 &= \rho_1(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \\ \vec{v}_1 &= \vec{v}_1(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \\ \vec{B}_1 &= \vec{B}_1(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Po ich dosadení a zderivovaní sa rovnice znovu zjednodušia. Rovnica (1.32) sa upraví na rovnicu (1.34), ktorá je uvedená medzi ďalšími upravenými rovnicami v nasledujúcej podkapitole.

1.2.3 Riešenie sústavy rovníc

Dostali sme tak sústavu ôsmich lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc o ôsmich neznámých:

$$i(kv_{z_0} - \omega)v_{r_1} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d(P_0 + P_1)}{dr} + ik \frac{B_{z_0} B_{r_1}}{\mu_0 \rho_0} - \frac{B_{z_0}}{\mu_0 \rho_0} \frac{dB_{z_1}}{dr} - \frac{(B_{z_0} + B_{z_1})}{\mu_0 \rho_0} \frac{dB_{z_0}}{dr}, \quad (1.34)$$

$$(kv_{z_0} - \omega)v_{\phi_1} = -n \frac{P_1}{\rho_0} + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (krB_{\phi_1} - nB_{z_0}B_{z_1}), \quad (1.35)$$

$$i(kv_{z_0} - \omega)v_{z_1} = -ik \frac{P_1}{\rho_0} - \frac{dv_{z_0}}{dr} v_{r_1} + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \frac{dB_{z_0}}{dr} B_{r_1}, \quad (1.36)$$

$$i(kv_{z_0} - \omega)\rho_1 = -\frac{\rho_0}{r} v_{r_1} - \rho_0 \frac{dv_{r_1}}{dr} - in \frac{\rho_0}{r} v_{\phi_1} - ik\rho_0 v_{z_1} - \frac{d\rho_0}{dr} v_{r_1}, \quad (1.37)$$

$$i(kv_{z_0} - \omega)B_{r_1} = ikB_{z_0} v_{r_1}, \quad (1.38)$$

$$i(kv_{z_0} - \omega)B_{\phi_1} = ikB_{z_0}v_{\phi_1}, \quad (1.39)$$

$$-i\omega B_{z_1} = in\frac{v_{z_0}}{r}B_{\phi_1} + \frac{1}{r}\frac{d(rv_{z_0}B_{r_1})}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d(rB_{z_0}v_{r_1})}{dr} - in\frac{B_{z_0}}{r}v_{\phi_1}, \quad (1.40)$$

$$i(kv_{z_0} - \omega)\left(-\frac{\Gamma\rho_1}{\rho_0} + \frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{\Gamma}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}v_{r_1} - \frac{1}{P_0}\frac{dP_0}{dr}v_{r_1}. \quad (1.41)$$

Táto práca sa ďalej zaoberá Kelvin-Helmholtzovou nestabilitou, pre ktorú stačí v najjednoduchšom prípade predpokladať nekonečne tenkú nestabilnú vrstvu medzi konštantne sa pohybujúcim výtryskom a nepohybujúcim sa okolím. Tlak, axiálne magnetické pole a hustota sa v týchto prostrediach predpokladajú konštantné a teda $(dP_0/dr) = (dB_{z_0}/dr) = (d\rho_0/dr) = 0$. Rovnice sa znovu o dosť zjednodušia a osem rovníc sa dá jednoducho upraviť do jednej rovnice s jednou neznámou. Pre ukázanie toho, o koľko sa rovnice zjednodušia touto poslednou aproximáciou, výsledná rovnica je vypočítaná aj s nenulovým gradientom hustoty $(d\rho_0/dr) \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\left(c_A^2\left(c_S^2k^2\left(c_A^2k^2 - (kv_{z_0} - \omega)^2\right) + (kv_{z_0} - \omega)^4\right) + c_S^2\left(-c_A^2k^2 + (kv_{z_0} - \omega)^2\right)^2\right)\frac{d\rho_0}{dr}}{(c_Ak - kv_{z_0} + \omega)(c_Ak + kv_{z_0} - \omega)\left(c_A^2c_S^2k^2 - c_A^2(kv_{z_0} - \omega)^2 - c_S^2(kv_{z_0} - \omega)^2\right)\rho_0} + \frac{1}{r}} \right) \frac{dP_1}{dr} \\ & + \left(\frac{c_A^2c_S^2k^2\left(-r\left(-2c_A^2k^2 + 3(kv_{z_0} - \omega)^2\right)\left(\frac{d\rho_0}{dr}\right)^2 + \left(-c_A^2k^2 + (kv_{z_0} - \omega)^2\right)\rho_0\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho_0}{dr}\right)\right)}{r(c_Ak - kv_{z_0} + \omega)(c_Ak + kv_{z_0} - \omega)\left(c_A^2c_S^2k^2 - c_A^2(kv_{z_0} - \omega)^2 - c_S^2(kv_{z_0} - \omega)^2\right)\rho_0^2} \right. \\ & \left. - k^2 - \frac{n^2}{r^2} - \frac{(kv_{z_0} - \omega)^4}{c_A^2c_S^2k^2 - c_A^2(kv_{z_0} - \omega)^2 - c_S^2(kv_{z_0} - \omega)^2} \right) P_1 + \frac{d^2P_1}{dr^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

kde c_S je rýchlosť zvuku v prostredí a c_A je Alfvénova rýchlosť vyjadrujúca veľkosť magnetického poľa:

$$c_S = \left(\frac{\Gamma P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}, \quad c_A = \frac{B_0}{(\mu_0\rho_0)^{1/2}}. \quad (1.43)$$

Ak aj spomínaný gradient hustoty je nulový, dostávame Besselovu obyčajnú diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{d^2}{dr^2}P_1 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}P_1 + \left(\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)P_1 = 0, \quad (1.44)$$

kde κ je radiálne (modifikované) vlnové číslo:

$$\kappa = k \left(\frac{(kv_{z_0} - \omega)^4}{k^2(c_A^2 + c_S^2)(kv_{z_0} - \omega)^2 - c_A^2c_S^2k^4} - 1 \right)^{1/2}. \quad (1.45)$$

K rovnakému výsledku sa dopracoval aj Birkinshaw [8], ktorý použil podobný postup.

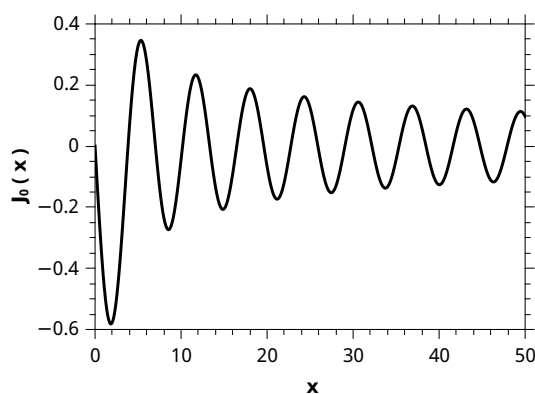
Podľa knihy [1] riešenie takejto rovnice odpovedá Besselovým $J_n(\kappa r)$ a Neumannovým funkciám $N_n(\kappa r)$ alebo ľubovoľnej lineárnej kombinácii týchto dvoch funkcií ako napríklad Hankelovým funkciám prvého druhu $H_n^{(1)}(\kappa r) = J_n(\kappa r) + iN_n(\kappa r)$ alebo druhého druhu $H_n^{(2)}(\kappa r) = J_n(\kappa r) - iN_n(\kappa r)$.

Voľba vhodného riešenia závisí od okrajových podmienok a preto je potrebné rozlišovať prostredie výtrysku a okolia. Tieto dve prostredia budú označované indexami „v“ a „o“. Pre veličiny vo výtrysku platí, že ich hodnota by sa mala blížiť k nule pri $r \rightarrow \infty$ a nemala by byť singulárna pre $r \rightarrow 0$. Touto vlastnosťou disponuje Besselova funkcia (prvého druhu) $J_n(\kappa r)$ a preto aj riešenie $P_1(r)$ je úmerné tejto funkcii. Ďalej je potrebné zachovať spojitosť riešenia na rozhraní a k tomu je vhodné normovanie, keď je porucha tlaku na rozhraní rovná konštante $P_1(R) = P_{1,r}$. Porucha tlaku vo výtrysku $P_{1,v}(r)$ je teda nasledovná:

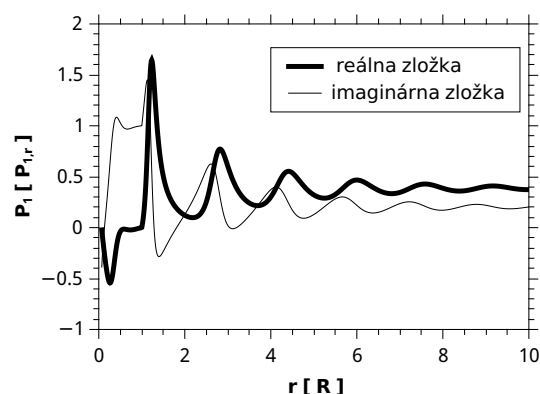
$$P_{1,v}(r) = P_{1,r} \frac{J_n(\kappa_v r)}{J_n(\kappa_v R)} \quad \text{pre } r < R. \quad (1.46)$$

V prípade okolitého prostredia by mala platiť podmienka, že radiálna fázová rýchlosť poruchy by mala byť pozitívna pre $r \rightarrow \infty$ (to znamená, že poruchy sú vyžarované z výtrysku, [8]). Túto vlastnosť spĺňa Hankelova funkcia prvého druhu, pre ktorú platí, že jej limita v $r \rightarrow \infty$ je úmerná hodnote $\sim e^{i\kappa r}$. Taktiež jej riešenie diverguje pre $r \rightarrow 0$, čo odpovedá zdroju vyžarovania týchto porúch. Pre poruchu tlaku v okolí teda najlepšie vyhovuje nasledovné riešenie:

$$P_{1,o}(r) = P_{1,r} \frac{H_n^{(1)}(\kappa_o r)}{H_n^{(1)}(\kappa_o R)} \quad \text{pre } r > R. \quad (1.47)$$



Graf 1.1: Znárodzenie Besselovej funkcie prvého druhu pre $n = 0$.



Graf 1.2: Príklad jedného z mnohých riešení pre poruchu tlaku (normované na 1 pre $R = 1$).

K týmto riešeniam je ešte potrebné pripomenúť, že číslo n , ktoré vyjadruje rád Besselovej alebo Hankelovej funkcie, musí byť celočíselné číslo. Je to dôsledkom toho, že riešenie porúch musí byť periodické v azimutálnom uhle θ . [1]

1.3 Kelvin-Helmholtzova nestabilita

V predchádzajúcej podkapitole sa odvodili približné analytické riešenia porúch, ktoré sú prítomné v našom skúmanom fyzikálnom systéme. Ak tieto poruchy smerujú k pokoju a zmenšujú svoju veľkosť, potom hovoríme, že systém je stabilný. Avšak v prípade, keď sa poruchy zväčšujú vo svojich rozmeroch, hovoríme o nestabilnom systéme. Vtedy môže dochádzať k zmene chovania celého systému a zvyčajne sa produkuje chaotické a turbulentné správanie. Prípadne môže vzniknúť aj nový stabilný prúd, v ktorom tiež môžu byť ďalšie nestability. V tejto práci sa jedná hlavne o poruchy na rozhraní dvoch prostredí s rozdielnou rýchlosťou prúdenia (pohybujúceho sa výtrysku s nepohybujúcim sa okolitým prostredím) a takto vzniknuté nestability sa označujú ako Kelvin-Helmholtzove.



Obr. 2: Kelvin-Helmholtzove nestability na rozhraní dvoch rozličných prúdení vzduchu zvýraznené kondenzáciou vodnej pary (Brooks Martner, NOAA/ETL [18]).

K určeniu, či je systém stabilný alebo nestabilný, sa používajú rôzne metódy analýzy lineárnej nestability. V rôznych literatúrach (napr. [8], [5]) sa pre detailnejší opis týchto metód odporúča preštudovať práce od Chandrasekhara (1961) alebo od Drazina a Reida (1981).

Najjednoduchšou metódou, ktorá je najčastejšie používaná a je použitá aj v tejto práci, je cez odvodenie disperznej relácie $D(\omega, \vec{k}) = 0$, čo je vzťah medzi uhlovou frekvenciou a vlnovým vektorom, pričom poruchy (napr. porucha tlaku) by mali byť úmerné exponenciále $\sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$. V tejto práci sa pracuje hlavne so z -ovou zložkou vlnového vektora a teda s exponenciálou $e^{i(kz - \omega t)}$.

Potom je možné z disperznej relácie získať komplexné vlnové číslo pri danej reálnej uhlovej frekvencii. Keď komplexné vlnové číslo rozpíšeme ako $k = k_R + ik_I$ a dosadíme do exponenciály, dostaneme:

$$P_1 \sim e^{i(kz - \omega t)} = e^{i((k_R + ik_I)z - \omega t)} = e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)}. \quad (1.48)$$

Z toho je vidieť, že zatiaľ čo reálna zložka k_I naďalej určuje vlnovú poruchu, imaginárna zložka k_I určuje zväčšovanie alebo zmenšovanie tejto poruchy. Keď sa porucha zväčšuje, vedie to k nestabilnejšiemu prostrediu. Aj preto sa za podmienku nestability považuje záporná imaginárna zložka vlnového čísla, teda podmienka $k_I < 0$. Keďže sledujeme komplexné vlnové číslo, skúmame vývoj nestabilit v priestore (jedná sa o priestorové nestability).

Keď chceme skúmať vývoj nestabilit v čase (časové nestability), potom z disperznej relácie určíme komplexnú uhlovú frekvenciu pre dané reálne vlnové číslo. Podmienkou týchto nestabilit je analogicky záporná imaginárna časť uhlovej frekvencii. V prípade výtryskov je však vhodnejšie sledovať tie priestorové nestability (podľa [8],[5]).

1.3.1 Disperzná relácia

K odvodeniu disperznej relácie je potrebné okrem získaných riešení (1.46) a (1.47) použiť ďalšie okrajové podmienky. Jednou z nich je podmienka rovnováhy celkového tlaku na rozhraní medzi výtryskom a okolím:

$$P_v + \frac{B_{z,v}^2}{2\mu_0} = P_o + \frac{B_{z,o}^2}{2\mu_0}. \quad (1.49)$$

Ďalšou podmienkou je spojitosť radiálnej polohy hmôt (ξ_r) na rozhraní, pričom platí $v_r = d\xi_r/dt$. Keď vieme, že $v_r(t) \sim e^{-i\omega t}$, radiálna poloha pre okolitú hmotu sa vyjadří nasledovne:

$$\xi_{r,o} = -i\omega v_{r_1,o}. \quad (1.50)$$

Pre hmotu vo výtrysku je uhlová frekvencia poruchy dopplerovsky posunutá podľa rýchlosti výtrysku:

$$\xi_{r,v} = -i(\omega - kv_{z_0})v_{r_1,v}. \quad (1.51)$$

Za použitia predchádzajúcich rovníc (1.34) a (1.49) sa dá vyjadriť radiálna rýchlosť:

$$v_{r_1} = \frac{i}{(kv_{z_0} - \omega)} \left(\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{B_{z_0}}{B_{z_1}} \right) \frac{dP_1}{dr} - ik \frac{B_{z_0} B_{r_1}}{\mu_0 \rho_0} \right). \quad (1.52)$$

Po vyjadrení B_{r_1} z rovnice (1.38), použití (1.43) a dosadení do (1.52) dostávame:

$$v_{r_1} = \frac{i}{(kv_{z_0} - \omega)} \left(\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{B_{z_0}}{B_{z_1}} \right) \frac{dP_1}{dr} - ik^2 \frac{c_{A,v}^2 v_{r_1}}{(kv_{z_0} - \omega)} \right). \quad (1.53)$$

Potom po použití podmienky $\xi_{r,v} = \xi_{r,o}$ a po dosadení riešení (1.46), (1.47) dostávame hľadanú disperznú reláciu:

$$\frac{J'_n(\kappa_v R)}{J_n(\kappa_v R)} - \frac{H'_n(\kappa_o R)}{H_n(\kappa_o R)} \frac{\kappa_o \rho_v}{\kappa_v \rho_o} \left(\frac{(\omega - kv_{z_0})^2 - k^2 c_{A,v}^2}{\omega^2 - k^2 c_{A,o}^2} \right) = 0. \quad (1.54)$$

Táto rovnica vyjadruje vzťah medzi uhlovou frekvenciou a vlnovým číslom poruchy v z -ovej osi na rozhraní medzi výtryskom a okolím. Je vidieť, že frekvencia alebo vlnové číslo sa nedajú explicitne vyjadriť a preto sa táto rovnica rieši ďalej už len numericky.

1.3.2 Škálová invariantnosť

Zaujímavosťou získaných rovníc je ich škálová invariantnosť. To znamená, že správanie výtrysku nie je ovplyvnené jeho rozmerom. Keby sme polomer výtrysku dvojnásobne zväčšili, dvojnásobne by sme zväčšili aj poruchy a teda tvar výtrysku by sa nezmenil. Preto môžeme zvoliť referenčný rozmer $R = 1$. Podobne sa volí aj referenčná rýchlosť (napríklad rýchlosť zvuku v okolitom prostredí $c_{S,o} = 1$) a aj hustota okolia $\rho_o = 1$ (alebo sa použije parameter $\eta \equiv (\rho_v/\rho_o) = \rho_v$). Vlnové číslo sa potom vyjadruje v jednotkách $[1/R]$ a uhlová frekvencia v jednotkách $[c_{S,o}/R]$.

V numerických modeloch sa nepredpokladá dôležitosť medzi počiatočným tlakom vo výtrysku a v jeho okolí, preto sa hneď volí rovnosť $P_v = P_o = 1/\Gamma$. Rýchlosť zvuku vo výtrysku sa vyjadri pomocou vzťahu (1.43) ako $c_{S,v} = c_{S,o} \eta^{-1/2}$. Keď sa referenčné hodnoty a parametre dosadia do disperznej relácie (1.54), po úprave dostaneme:

$$\frac{J'_n(\kappa_v)}{J_n(\kappa_v)} - \frac{H'_n(\kappa_o)}{H_n(\kappa_o)} \frac{\kappa_o \eta}{\kappa_v} \left(\frac{(\omega - kM)^2 - k^2 \zeta_v^2}{\omega^2 - k^2 \zeta_o^2} \right) = 0, \quad (1.55)$$

$$\kappa_v = k \left(\frac{\eta (kM - \omega)^4 k^{-2}}{(\eta \zeta_v^2 + 1) (kM - \omega)^2 - \zeta_v^2 k^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa_o = k \left(\frac{\omega^2 k^{-2}}{(\zeta_o^2 + 1) - \zeta_o^2 k^2 \omega^{-2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde $M \equiv (v_{z0}/c_{S,o})$ je Machovo číslo (pomer rýchlosti prúdu k rýchlosti zvuku), parametre $\zeta_o \equiv (c_{A,o}/c_{S,o})$ a $\zeta_v \equiv (c_{A,v}/c_{S,o})$ sú pomery Alfvénovej rýchlosti k rýchlosti zvuku v okolí.

Z disperznej relácie teda vyplýva, že k sledovaniu vývoja výtrysku a jeho nestabilit stačí v tomto prípade vhodne zvoliť len 4 parametre ($M, \eta, \zeta_v, \zeta_o$).

1.3.3 Numerické riešenie disperznej relácie

K numerickému riešeniu disperznej relácie (1.55) boli použité balíčky jazyka python a to konkrétne matematický balík NumPy a funkcia *optimize.fsolve* z fyzikálneho balíka SciPy. Táto funkcia *fsolve* hľadá korene danej funkcie pomocou modifikovanej Powellovej metódy, pri ktorej sa hľadá lokálne minimum funkcie. Pri tejto metóde nie je potrebné, aby funkcia bola diferencovateľná a aj to je dôvod, prečo bola zvolená.

Numerické riešenie pre dané 4 parametre je však zŕažené tým, že riešením disperznej relácie nie je len jedna funkcia (krivka), ale nekonečne mnoho kriviek. Niekoľko týchto kriviek pre časť disperznej relácie je vidieť na grafe 1.2. V literatúre (napr. [6]) sa tieto krivky označujú ako módy so celočíselnými hodnotami n a m .

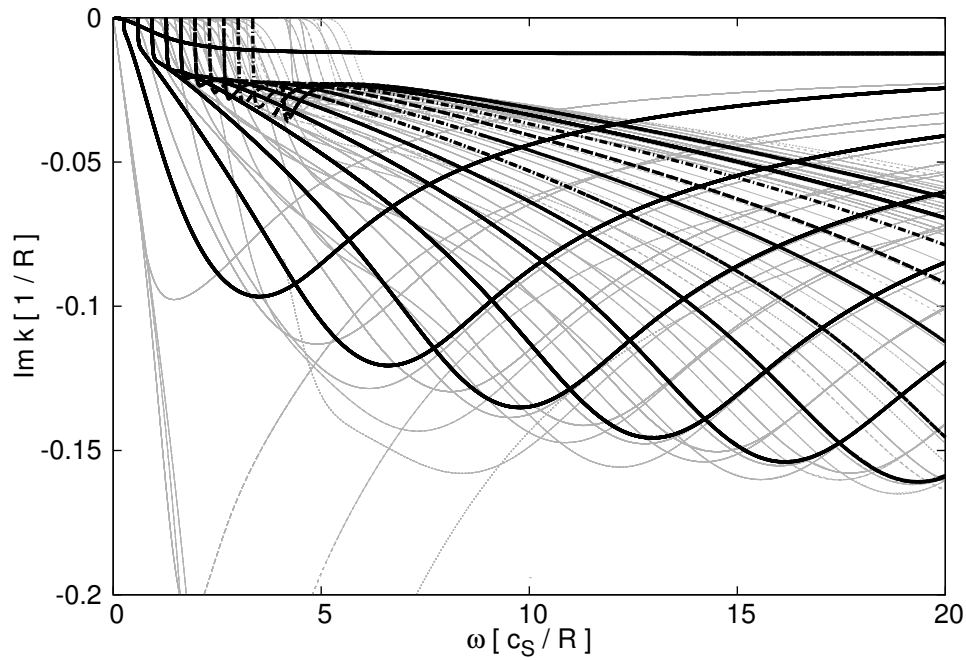
Módy s n (označované aj ako azimutálne módy) odpovedajú azimutálnemu vlnovému číslu (alebo aj rádu spomínaných Besselových funkcií). Módy s $n = 0$ majú vplyv na zväčšovanie alebo zmenšovanie polomeru výtrysku a označujú sa ako „pinching“ módy. Tieto módy sú taktiež jediné módy v prípade axisymetrických riešení. Módy s $n = 1$ majú vplyv na vychýlenie a stáčanie výtrysku, pričom výtrysk nadobúda špirálovitý tvar. Tieto módy sú preto označované ako „helical“ alebo „kink“ módy. Ďalšie módy s $n > 1$ sú označované ako „fluting“ a spôsobujú skôr žliabkovanie na povrchu výtrysku.

Módy s číslom m (radiálne módy) vyjadrujú počet nulových hodnôt Besselovej funkcie $J_n(\kappa r)$ na intervale $r \in (0, R)$. Krivky s rôznym módom m sú spôsobené hlavne kmitavosťou Besselovej funkcie a teda aj hľadaných porúch (ako je to vidieť napr. na grafe 1.2). Módy s $m = 0$ (bez nulovej hodnoty vo výtrysku) sú označované ako fundamentálne módy a ďalšie módy ako reflexné.

K nájdeniu daných riešení (pre danú uhlovú frekvenciu) bolo potrebné vhodne zvoliť počiatočné hodnoty reálnej a imaginárnej zložky vlnového čísla. Tieto počiatočné hodnoty boli najprv zvolené náhodne a určovalo sa, či odpovedajú hľadanému módu m . V prípade, že vlnové číslo bolo nájdené, hľadanie ďalšieho pokračovalo v čo najbližšom okolí predchádzajúceho a týmto spôsobom boli nájdené všetky potrebné vlnové čísla pre vygenerovanie hľadanej krivky.

Na grafe 1.3 je znázornených prvých päť azimutálnych módov n (0 až 4) a ku každému

azimutálnemu módu približne 13 radiálnych módov m . Radiálne módy pre $n = 0$ sú aj zvýraznené. Ďalšie módy pribúdajú smerom k vyšším uhlovým frekvenciám. Na y -ovej osi je vynesená imaginárna zložka vlnového čísla, ktorej záporné hodnoty vyjadrujú zväčšovanie porúch. Ako je však vidieť z grafu, pre všetky uhlové frekvencie sa nájdu poruchy, ktoré by sa mali zväčšovať. Preto sa týmto spôsobom nedajú poruchy rozdeliť na tie stabilné a nestabilné. Môžu sa však dominantnejšie poruchy odhadnúť na základe nižších týchto hodnôt.



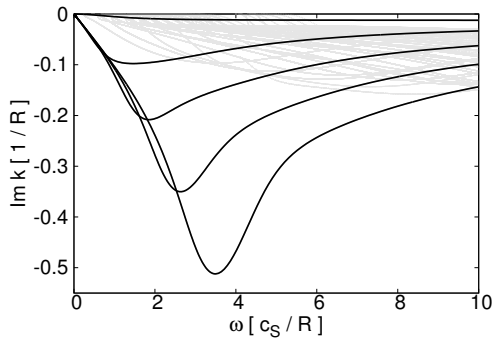
Graf 1.3: Časť disperznej relácie pre parametre $\eta = 1.0$, $M = 10.0$, $\zeta_v = \zeta_o = 0.001$. Zvýraznených je prvých 13 radiálnych módov pre $n = 0$.

Disperzné krivky, ktoré vychádzajú z dolného okraja grafu 1.3, patria fundamentálnym módom ($N = 0$), ktoré sú lepšie znázornené na grafe 1.4. Je vidieť, že tieto módy sa výrazne odlišujú od reflexných (smerom k vyšším módom ich vlnové číslo výraznejšie klesá k väčším záporným hodnotám).

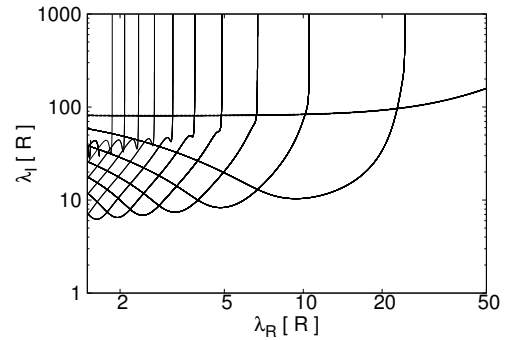
V týchto grafoch vidíme závislosť na uhlovej frekvencii. Keď však chceme skúmať priestorové veľkosti nestabilit, vhodnejšie je vyniesť závislosť na reálnej zložke vlnového vektora alebo ešte vhodnejšie na jej prevrátenej hodnoty, ktorá vyjadruje vlnovú dĺžku poruchy λ_R :

$$\lambda_R = \frac{2\pi}{k_R}, \quad \lambda_I = -\frac{1}{k_I}. \quad (1.56)$$

Veličina λ_I vyjadruje mieru rastu (angl. „growth rate“ poruchy pozdĺž z -ovej osi $P_1 \sim e^{z/\lambda_I}$).



Graf 1.4: Zvýraznenie prvých piatich fundamentálnych módov ($N = 0$).



Graf 1.5: Disperzná relácia (módy $n = 0$ a parametre $\eta = 1.0$, $M = 10.0$, $\zeta_v = \zeta_o = 0.001$)

Tvar výtrysku potom môžu ovplyvniť hlavne poruchy, ktoré majú dostatočnú mieru rastu a vhodnú vlnovú dĺžku (nie väčšiu ako výtrysk a dostatočne veľkú na to, aby sme ich vedeli rozlíšiť – teda rádovo ako polomer výtrysku R), ale je možné, že aj súbor viacerých porúch s malou vlnovou dĺžkou môže vytvoriť podmienky pre vznik nových nestabilití. Disperznú reláciu v týchto veličinách je vidieť na grafe 1.5, kde sú zobrazené len módy s $n = 0$. Interpretácia týchto grafov pre rôzne parametre bude podrobnejšie rozpísaná v ďalšej kapitole.

Kapitola 2

Numerické simulácie výtryskov

Pre získanie modelu výtrysku je potrebné vyriešiť magnetohydrodynamické rovnice. Ako bolo ukázané, tieto rovnice je veľmi náročné analyticky vyriešiť a je potrebné použiť mnoho vhodne zvolených aproximácií a zjednodušení, aby sme sa dopracovali aspoň k nejakým výsledkom. Precíznejším spôsobom by teda mohlo byť numerické riešenie už pôvodných nelineárnych rovníc na úkor použitia väčšieho množstva procesorového času.

Prvé programy, ktoré numericky riešili MHD rovnice, začali vznikať už v 80-tich minulého storočia a postupne ich začalo vznikať viac a viac. Tieto programy a ich metódy sú porovnávané napríklad v jednej z posledných štúdií z roku 2015 (Koldoba, [9]). Podľa nej a aj vzhľadom na svoju súčasnú popularitu bol v tejto práci použitý program PLUTO.

2.1 Program PLUTO

Program PLUTO [13, Mignone, 2007] je voľne dostupný program na numerické riešenie systému parciálnych diferenciálnych rovníc (zákonov zachovania) so zameraním hlavne na prúdenia s vysokým Machovým číslom. Program je napísaný v jazyku C a užívateľovi umožňuje zvoliť metódu riešenia rovníc alebo aj upravovať rovnice podľa vlastnej voľby. Všetky potrebné informácie ohľadom možností, jednoduchej inštalácie a aj používania programu sú dobre zhrnuté v dokumentácii zverejnenej na hlavnej stránke programu [20].

Rovnice MHD sú preddefinované a program ich umožňuje riešiť aj vo valcových súradniciach. Pokiaľ v nich nie sú doplnené ďalšie členy, jedná sa o rovnaké rovnice ako v predchádzajúcej kapitole. Medzi ukázkovými príkladmi programu sa nachádza aj jednoduchý model výtrysku, ktorý môže poslúžiť k lepšiemu pochopeniu používania programu pri definovaní vlastných modelov výtrysku.

2.1.1 Základné a ďalšie nastavenia

Základné nastavenia programu sú zadefinované v súbore „definitions.h“, ďalšie nastavenia v súboroch „pluto.ini“ alebo „init.c“. Okrem toho, že sa jedná o MHD vo válcových súradniciach, je nastavený axisymetrický model počítajúci s dvoma dimenziami (r, z).

Priestor je vytvorený lineárnou rekonštrukciou diskretných hodnôt pomocou Hartenovej numerickej metódy TVD („total variation diminishing“). V tejto práci bolo zvolené rozlíšenie v osi r a z ako 256×1024 bodov. Podľa odporúčania z práce [9] je k výpočtu vhodných časových krokov použitá TVD metóda Runge-Kutta druhého rádu (pri nej sa používa Taylorov polynóm rovnakého rádu) a „VANLEER LIM“ ako limitovanie v tejto metóde. K obmedzovaniu časových krokov je použitá podmienka Courant-Friedrichs-Levy s hodnotou $CFL = 0.4$, ktorá by mala dávať dostatočne stabilné riešenia.

V takýchto simuláciach sa odporúča kontrolovať podmienku $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$. K tomu bola zvolená metóda obmedzeného transportu („constrained transport“) s aritmetickým priemerovaním a to vyžaduje nastavenie vektorového potenciálu pre výtrysk a jeho okolie (ten bol nastavený tak, aby počiatočné magnetické pole bolo všade konštantné).

Ďalším nastavením je voľba metódy k riešeniu daných rovníc. V tejto práci bola zvolená linearizovaná Roe Riemannovská metóda, ktorá patrí medzi tie najprecíznejšie (najmenej difúzne), ale možno najrobustnejšie.

2.1.2 Počiatočné podmienky a vizualizácia

Počiatočné podmienky sú zadefinované v súbore „init.c“ pomocou jazyka C. Obsah tohto súboru je ukázaný aj v prílohe na konci tejto práce. Použité sú rovnaké referenčné jednotky ako v predchádzajúcej kapitole a teda výtrysk s polomerom R vychádza z roviny $z = 0$ v smere osi z rýchlosťou $v_z = Mc_S$ do válca s polomerom $10R$ a výškou $40R$. Nepoužila sa však heavisideova funkcia, ale o trochu hladšia $1/\cosh(R^8)$, ktorá má zaistiť plynulejší prechod na rozhraní medzi výtryskom a okolím na spodnom okraji válca. Na ostatných okrajoch skúmaného válca sa hmota neodráža, ale vychádza von a stráca sa.

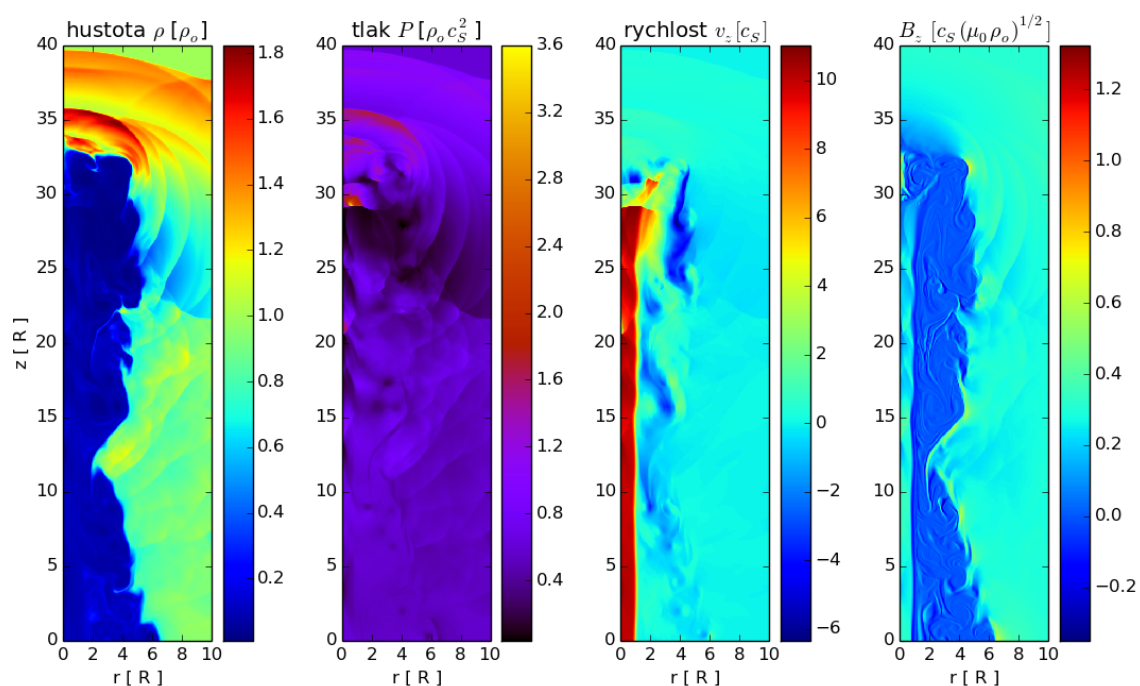
Získané modely boli ukladané vo formáte „double“ a k ich vizualizácii bol použitý gnuplot alebo Pythonovský balíček PyPluto, ktorý je súčasťou programu Pluto. K porovnávaniu sa potom použili dáta, pri ktorých výtrysk zaberá čo najväčší objem válca a neprechádza cez vrchný okraj.

2.2 Výsledky simulácií

Pri tejto práci bolo vygenerovaných vyše 100 simulácií axisymetrických výtryskov pre rôzne parametre podľa potreby ohľadom veľkosti nestabilít. K tomu bolo potrebných cez 100 dní procesorového času (priemerne 24 hodín na jednu simuláciu). V tejto práci sú ukázané len niektoré významné simulácie, ktoré sú zároveň porovnané s grafmi disperznej relácie odvodenéj v predchádzajúcej kapitole. Všetky simulácie (spolu aj s niektorými animáciami) sú uložené na disku priloženého k tejto práci.

2.2.1 Základné charakteristiky

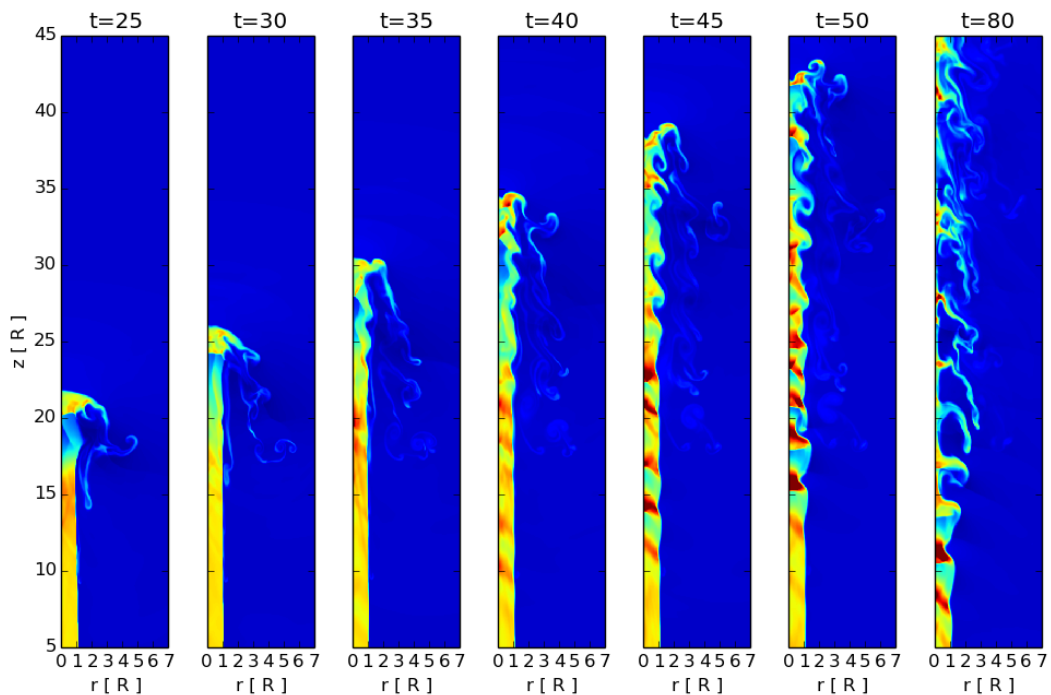
Na grafe č. 2.1 je pre typickú simuláciu riedkeho výtrysku znázornená hustota, tlak, rýchlosť v z -ovej osi a z -ová zložka magnetickej indukcie. Tieto veličiny sú vyjadrené v referenčných jednotkách (v prípade výpočtu tlaku bola použitá adiabatická konštanta $\Gamma = 5/3$).



Graf 2.1: Rôzne veličiny výtrysku v čase $26 R/c_S$ a s počiatočnými parametrami $\eta = 0.1$, $M = 10.0$, $\zeta_o = \zeta_v = 1.0$.

Pohybujúcu časť výtrysku je najlepšie vidieť na grafe s rýchlosťou v z -ovej zložke. Okrem hlavného prúdu s polomerom $R = 1$ je tam vidieť veľa menších prúdov, ktorých väčšina vznikla v dôsledku rôznych nestabilít pri interakcii s prostredím, ale okrem nich sa tam vytvára aj silnejší prúd smerujúci proti hlavnému prúdu (spätný prúd, angl. „backflow“), ktorý pravdepodobne vznikol v dôsledku odrazu od rázovej vlny pri veľkom gradiente

tlaku. Rázovú vlnu je dobre vidieť na grafe s hustotou a tlakom. V prednej časti rázovej vlny sú hustota a tlak väčšie, zatiaľčo v zadnej časti menšie. Ďalej si je možné všimnúť, že v spodnej časti výtrysku je už vyrovnaný tlak s okolím aj napriek tomu, že rozdiel hustôt je stále výrazný a z toho vyplýva aj vysoká teplota v týchto oblastiach (vzhľadom na to, že sa plazma považuje za ideálny plyn). Na grafe s magnetickou indukciou v z-ovej zložke je vidieť, že magnetické pole vo vyhrnutých častiach výtrysku je o niečo slabšie ako v okolí a najsilnejšie je v niektorých oblastiach rozhrania medzi výtryskom a okolím. K zobrazeniu výtryskov sú použité najmä grafy hustôt, v ktorých sa dajú dobre rozoznať rôzne turbulencie a nestability.



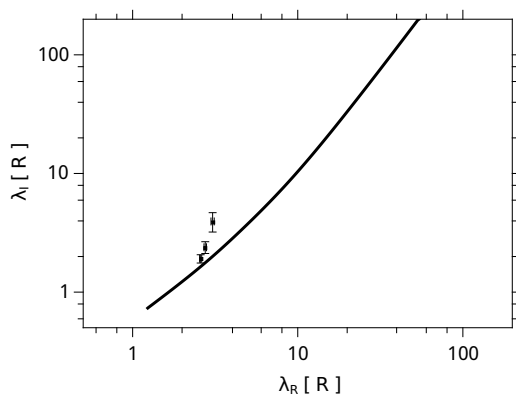
Graf 2.2: Grafy hustôt pre výtrysk s parametrami $\eta = 10.0$, $M = 1.3$, $\zeta_o = \zeta_v = 0.001$ zaznamenané v rôznych časoch v referenčných jednotkách t_0 .

Na grafe č. 2.2 je znázornený časový vývoj na ďalšom type výtrysku – tentokrát 10-krát hustejšieho ako okolie. Čas je rovnako uvedený v referenčných jednotkách $t_0 = R/c_s$. Na prvom snímku je vychádzajúci relatívne ešte stabilný výtrysk s laminárnym prúdením v dolnej časti. Na ďalšom sa čoraz viac deformuje predok výtrysku najmä vplyvom premiešavania jeho hmôt s okolím. Na treťom sa začína výraznejšie deformovať predná časť výtrysku zrejme vplyvom Kelvin-Helmholtzových nestabilit na rozhraní hlavného prúdu s okolím. Ich typický tvar je zreteľný hlavne na piatom snímku. Posun deformácie proti prúdu výtrysku prezrádza, že nestability nemusia pôsobiť len lokálne, ale môžu ovplyvniť globálne celý výtrysk. Tento efekt (známy ako „feedback“, [8]) sa vyskytuje hlavne v úz-

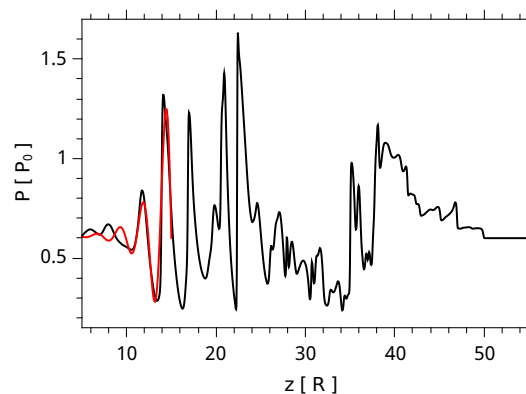
nych výtryskoch a bol pozorovaný aj v laboratórnych podmienkach. V prípade zobrazenej simulácie sa táto nestabilita taktiež rozšírila do celého výtrysku a spôsobila tak rozpad aj spočiatku pokojného laminárneho prúdenia. Namiesto neho sa hlavný prúd usporiadal skôr do vlny s opakujúcim sa zhustením a zriedením, v ktorej vznikajú ďalšie nestability a turbulencie. Jeho vlnová dĺžka je podrobnejšie preskúmaná v ďalšej podkapitole.

2.2.2 Porovnanie s disperznou reláciou

V prvej časti tejto práce sa odvodila disperzná relácia a tá by nám mala napovedať, či za daných podmienok môžu vznikáť nestability. Pre predchádzajúci výtrysk s parametrami $\eta = 10.0$, $M = 1.3$, $\zeta_o = \zeta_v = 0.001$ je na grafe č. 2.3 vynesena disperzná krivka nultého radiálneho (fundamentálneho) módu. Reflexné módy neboli nájdené pre zobrazenú oblasť disperznej relácie, ktorá nás zaujíma. Na y-ovej osi je vynesena miera rastu λ_I pre poruchy s vlnovou dĺžkou λ_R . Čím je miera rastu menšia, tým rýchlejšie sa daná porucha exponenciálne zväčší a tým bude viditeľnejšia. Disperzná krivka však naznačuje, že zviditeľňovať by sa mali poruchy s čo najmenšou vlnovou dĺžkou, ale ich maximálna vlnová dĺžka je obmedzená veľkosťou a dobou výtrysku.



Graf 2.3: Disperzná relácia fundamentálneho módu ($N = 0, n = 0$) pre výtrysk s parametrami $\eta = 10.0, M = 1.3, \zeta_v = \zeta_o = 0.001$ a so zobrazenými tromi výsledkami fitu.



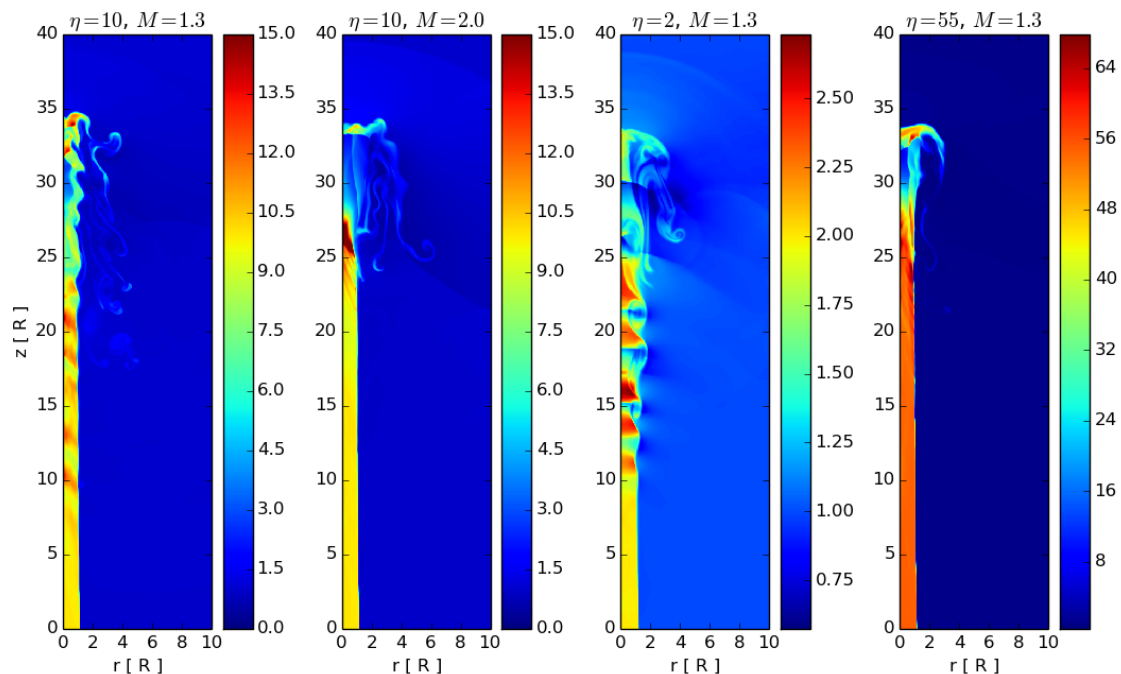
Graf 2.4: Profil tlaku v referenčných jednotkách pre rovnaký výtrysk, vo vzdialenosti $0.2R$ od z -ovej osi v čase $t = 45$. Červenou farbou je zvýraznený fit pre časť $(5 - 15)R$.

Z grafov 2.2 je tiež vidieť, že vo výtrysku sa vytvárajú vlnové poruchy s vlnovou dĺžkou približne $\lambda_R \approx 3 R$. Keď však chceme byť dôslednejší, lepšie je nafiťovať časť profilu tlaku (podobného profilu hustote) exponenciálne rastúcou harmonickou funkciou. Jeden takýto profil spolu aj s fitom pre časť krivky je zobrazený na grafe č. 2.4. Výsledkom fitu pre čas $t = 45 t_0$ je vlnová dĺžka poruchy $\lambda_R = (2.578 \pm 0.039)R$ a miera rastu $\lambda_I = (1.91 \pm 0.15)R$.

Tento bod je na grafe 2.3 zobrazený najnižšie. Ďalším fitom bol rovnaký profil, ale pre čas $t = 50 t_0$. Výsledkom bola vlnová dĺžka $\lambda_R = (3.046 \pm 0.069)R$ a miera rastu $\lambda_I = (3.94 \pm 0.73)R$. Tento bod je zobrazený na grafe 2.3 najvyššie. Výsledkom posledného fitu pre čas $t = 80 t_0$ bola vlnová dĺžka $\lambda_R = (2.749 \pm 0.049)R$ a miera rastu $\lambda_I = (2.39 \pm 0.27)R$ a bod vyznačený uprostred. Z výsledkov je vidieť, že disperznej relácii najlepšie vyhovuje porucha získaná v čase $t = 45 t_0$. Vzhľadom na počet aproximácií sa jedná o celkom dobrý výsledok. Z disperznej relácie sa však nedá priamo určiť najnestabilnejšiu vlnu, ale len približne odhadnúť. Použité aproximácie tiež nemusia platiť pre všetky parametre výtrysku.

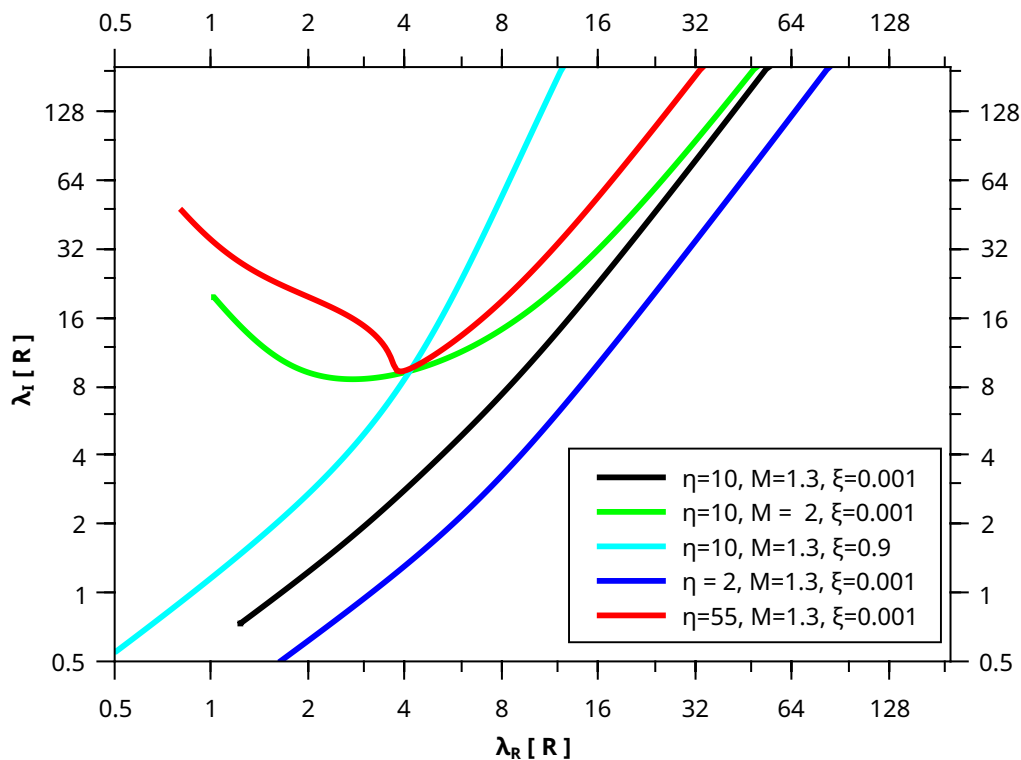
2.2.3 Závislosť na parametroch

Keď vieme, že ako čítať disperznú reláciu a čo si všímať v simuláciach, môžeme meniť jednotlivé parametre a všímať si zmeny. Na grafe č. 2.5 je predchádzajúca simulácia porovnaná s ďalšími tromi, pri ktorých sa zmenil jeden parameter (pri druhej sa zmenilo Machovo číslo a pri ďalších dvoch hustota). Disperzné krivky týchto simulácií sú vynesené na grafe 2.6, kde sú zobrazené len fundamentálne módy $N = 0$. Reflexné módy pre väčšinu kriviek neboli nájdené v danej časti disperznej relácie.



Graf 2.5: Zobrazenie hustoty v referenčných jednotkách pre výtrysky s rôznymi parametrami hustoty, Machovho čísla a pre rôzne časy (zľava $t = 40, 27, 52, 31$). Magnetické pole bolo v tomto prípade zvolené za veľmi slabé a teda $\zeta_o = \zeta_v = 0.001$.

Na týchto grafoch (2.5 a 2.6) je teda vidieť, že pri zväčšení Machovho čísla z 1.3 na 2.0 je výtrysk stabilnejší. Na simulácii sa to prejavilo tak, že prevláda rovnomerné laminárne prúdenie a do okolia sa dostáva menej hmoty ako v prvom prípade. Na zelenej disperznej krivke zase tak, že jej spodná časť pri malých vlnových číslach sa ohla k vyšším stabilnejším hodnotám. Pri ešte väčšom Machovom čísle by bol výtrysk ešte viac stabilnejší a nič zaujímavé by tam nebolo. Subsonickými rýchlosťami, rýchlosťami menšími ako je rýchlosť zvuku ($M < 1$), sa táto práca nezaoberala.

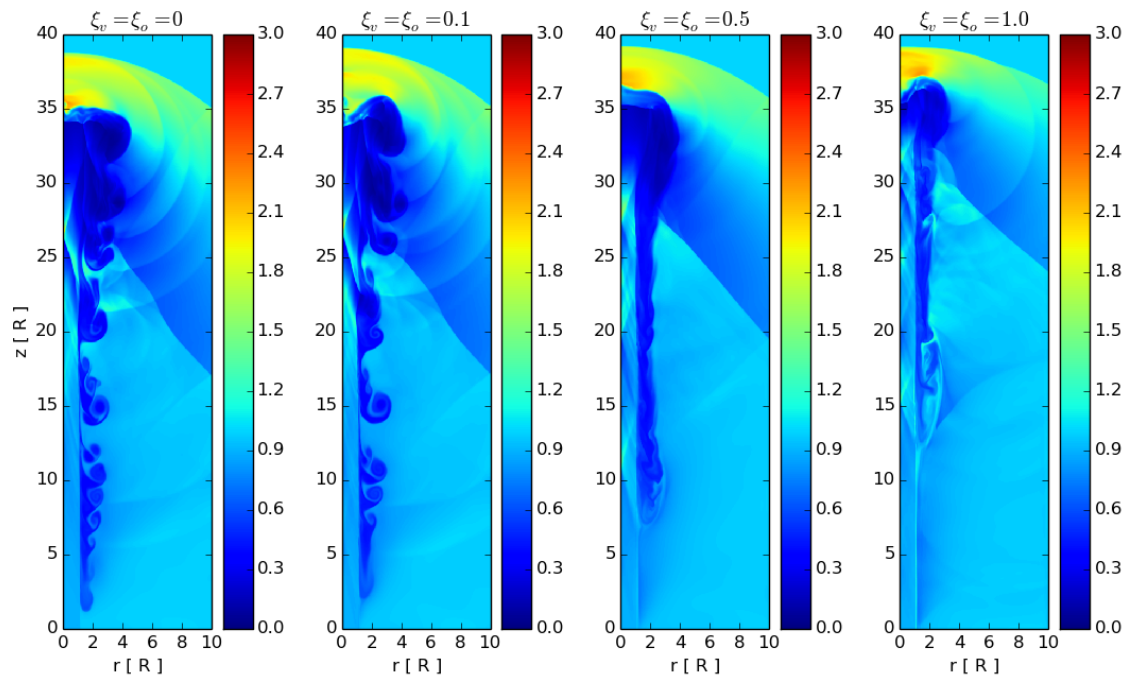


Graf 2.6: Zobrazenie fundamentálnych ($N = 0$) disperzných kriviek pre rôzne parametre uvedené vo vysvetlivkách, kde $\zeta = \zeta_v = \zeta_o$. Všetky krivky sa líšia len jedným parametrom od krivky vyznačeného čiernou farbou. Chýbajúce časti kriviek sú spôsobené nedokonalosťou použitých numerických metód pre menšie vlnové dĺžky. Tieto časti však nie sú pre nás dôležité.

V prípade rôznej hustoty je zrejmé, že čím je výtrysk hustejší ako prostredie, tým je aj viac stabilnejší. Rovnako to vyplýva aj z grafu disperznej relácie, kde sa krivka posúva buď k stabilnejším alebo menej stabilným hodnotám. Zaujímavosťou je, že disperzná krivka sa pri vyššej hustote aj výraznejšie ohýba.

V disperznej relácii (graf č. 2.6) je tiež zobrazená tyrkysová disperzná krivka odpovedajúca väčšiemu axiálnemu magnetickému poľu. Ako je vidieť, tiež stúpa k stabilnejším hodnotám a rovnako aj výtrysk v simulácii bol stabilný a nebolo na ňom nič zaujímavé.

Pre lepšiu názornosť je závislosť na magnetickom poli ukázaná na grafe č. 2.7. Na prvom snímku je vidieť výtrysk bez magnetického poľa. V hornej časti je zreteľná zelenomodrá rázová vlna a okrem nej je pre tieto parametre ($\eta = 0.9$ a $M = 5.0$) dobre vidieť typické Kelvin-Helmholtzove nestability – malé víry vystupujúce z rozhrania. Tentokrát to nie je z rozhrania medzi výtryskom a okolím (ako to bolo v prípade hustejších výtryskov), ale medzi okolím a spätným prúdom, ktorý tečie proti prúdu zrejme v dôsledku rázovej vlny.

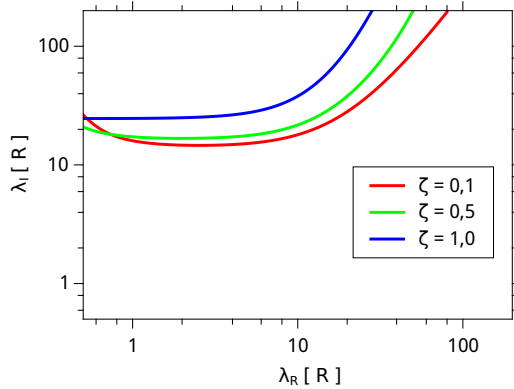


Graf 2.7: Zobrazenie hustoty v referenčných jednotkách pre výtrysk s parametrami $\eta = 0.9$, $M = 5.0$, $t = 7.8$ a pre rozdielne parametre ζ (teda rôzne počiatočné axiálne magnetické polia).

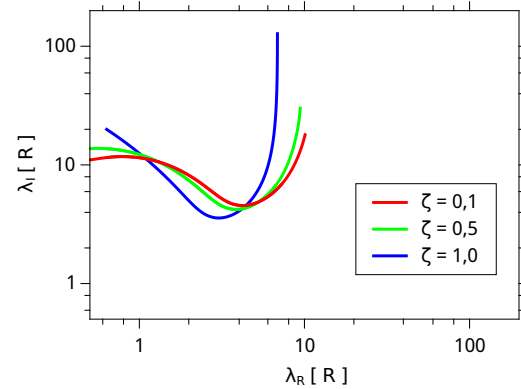
Keď sa teda axiálne magnetické pole zväčšuje, výtrysk je stabilnejší. Vyplýva to aj z toho, že v smere prúdu sa zosiľujú magnetické siločiar a plazma má tendenciu držať sa týchto siločiar. Preto aj keby vznikla nejaká nestabilita a hmota by si to nasmerovala opačným smerom, axiálne magnetické pole by ju vrátilo na miesto. Azimutálne magnetické pole by malo zase opačný efekt a pri jeho silnom poli na rozhraní by zrejme začali vznikať ďalšie nestability (takzvané prúdom riadené). Táto práca sa azimutálnym magnetickým poľom nezaobera hlavne kvôli absencii dostatočného analytického riešenia.

Podobný záver o axiálnom magnetickom poli je možné usúdiť aj z disperzných relácií na grafoch č. 2.8 a č. 2.9. Na prvom sú zobrazené fundamentálne módy ($N = 0$) a na druhom prvé reflexné módy ($N = 1$). Je vidieť, že reflexné módy sú nestabilnejšie a zatiaľčo pre veľké vlnové čísla je silné magnetické pole stabilnejšie, pre malé vlnové čísla je nestabilnejšie. To môže vysvetlovať dôvod, prečo je spätný prúd o dosť širší a

zjavne aj turbulentnejší. Nakoniec je možné si všimnúť, že aj rázová vlna je o niečo užšia v magnetickom poli.

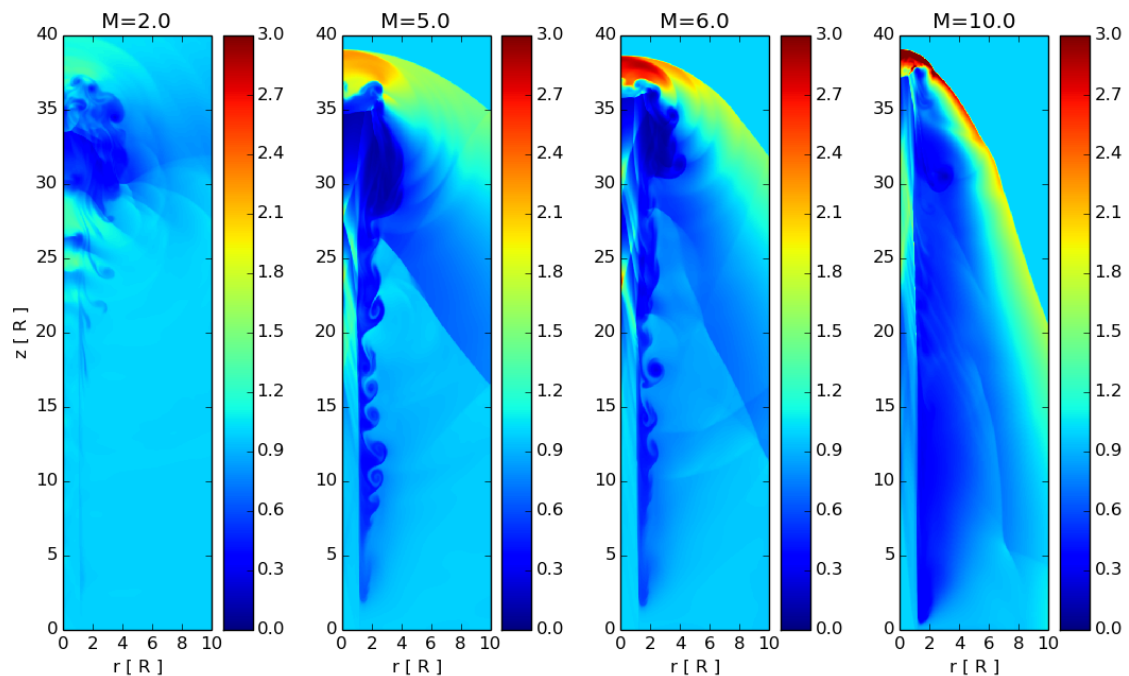


Graf 2.8: Fundamentálne ($N = 0$) disperzné krivky pre výtrysk s $n = 0$, $\eta = 0.9$, $M = 5$ a pre rôzne $\zeta = \zeta_v = \zeta_o$.



Graf 2.9: Reflexné ($N = 1$) disperzné krivky pre výtrysk s $n = 0$, $\eta = 0.9$, $M = 5$ a pre rôzne $\zeta = \zeta_v = \zeta_o$.

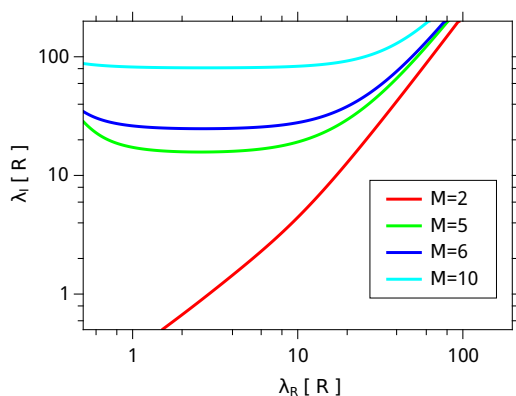
Ďalej by mohlo byť zaujímavé sledovať vyššie spomínané malé víry, ktoré vznikajú na rozhraní spätného prúdu s okolím. K tomu slúži graf č. 2.10, kde počiatková hustota výtrysku je rovnaká ako okolie, magnetické pole je slabé a mení sa Machovo číslo.



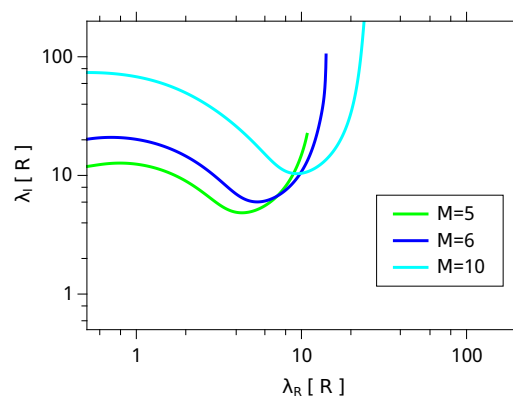
Graf 2.10: Hustota v referenčných jednotkách pre výtrysky s parametrami $\rho = 1.0$, $\zeta_o = \zeta_v = 0.001$ a pre rozdielne Machové čísla. Vyhodnotené boli v časoch $t = 50, 20, 15.4$ a $7.65 t_0$.

Na prvom snímku, kde je Machovo číslo $M = 2$, je vidieť ako predok výtrysku zanechal za sebou pokojné prostredie bez nestabilití, ktoré sa stihlo ustáliť. Pri vyššej rýchlosti ($M = 5$) sú už zreteľné spomínané Kelvin-Helmholtzove nestability. Tie však postupne miznú, ako sa zvyšuje Machovo číslo. Pri $M = 10$ ich už nie je takmer vidieť a výtrysk vyzerá byť stabilný. Pri ešte vyšších rýchlostiach by sa tvar výraznejšie nezmenil. Za povšimnutie stojí aj rôzny uhol sklonu rázovej vlny, ktorý závisí od Machovho čísla.

Disperzná relácia týchto výtryskov je zobrazená na grafoch 2.11 a 2.12. Na prvom sú zobrazené fundamentálne módy ($N = 0$), na druhom reflexné módy ($N = 1$). Pri fundamentálnych módoch je vidieť klesanie kriviek k nestabilnejším hodnotám λ_I podľa čísla M , čo vlastne odpovedá simuláciám. Podobný trend je vidieť aj u reflexných bodoch. Chýbajúce časti kriviek sú pravdepodobne spôsobené prudkým stúpaním hodnoty smerom k nekonečnu. Disperzná reflexná krivka pre $M = 2$ nebola nájdená v zobrazených vlnových dĺžkach.

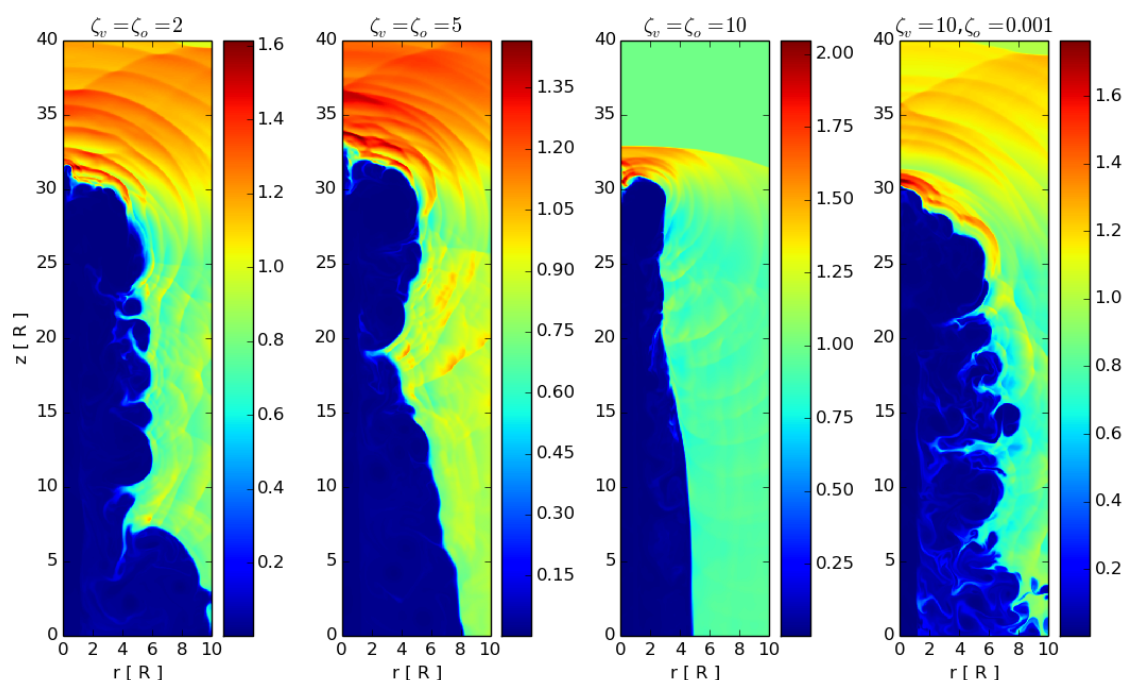


Graf 2.11: Disperzná relácia pre rozdielne M a pre $N = 0, n = 0, \eta = 1.0, \zeta_v = \zeta_o = 0.001$.



Graf 2.12: Disperzná relácia pre rozdielne M a pre $N = 1, n = 0, \eta = 1.0, \zeta_v = \zeta_o = 0.001$.

Nakoniec je vhodné ešte ukázať nejaké výtrysky s veľmi nízkou hustotou ($\eta = 0.01$). Tie sú zobrazené na grafe č. 2.13. Na prvom snímke je výtrysk so slabším magnetickým poľom, kde je vidieť, že spätný prúd je pri takto nízkej hustote omnoho väčší a preto celkom rýchlo vznikajú rôzne nestability a turbulencie. Na druhom snímku je axiálne magnetické pole 2,5-krát väčšie a už je vidieť, že výtrysk je omnoho hladší. Rovnaký trend je aj pri tretej snímke. Na štvrtej bola snaha o vytvorenie počiatočného magnetického poľa pre výtrysk s tým, že v okolí by nebolo takmer žiadne magnetické pole. To sa celkom nepodarilo, pretože magnetické pole sa hneď na začiatku dosť oslabilo a potom už nemalo veľký vplyv na tvar výtrysku.



Graf 2.13: Hustota v referenčných jednotkách pre výtrysky s parametrami $\rho = 0.01$, $M = 20$ a pre rozdielne veľké magnetické polia. Simulácie boli vyhodnotené v časoch $t = 30, 30, 21$ a $30 t_0$.

2.2.4 Porovnanie s reálnymi objektami

Vieme, že nulté azimutálne módy Kelvin-Helmholtzových nestabilít spôsobujú rozširovanie a zužovanie výtrysku a teda môžu vysvetlovať pozorované uzly v niektorých výtryskoch AGN (tieto uzly môžu však byť vysvetlené aj vyššími azimutálnymi módami, ktoré spôsobujú stáčanie, ohýbanie alebo iné poruchy. Už v roku 1971 boli prvé pokusy o porovnanie týchto módov s reálnymi výtryskami (podľa [8]). V roku 1982 sa Hardee [7] pokúšal o určenie parametrov výtrysku v galaxii M87 a to pomocou fitovania jeho napozorovaných uzlov (podobné fitovanie bolo ukázané v podkapitole 2.2.2). Hardeemu vyšlo, že poruchy vo výtrysku M87 majú vlnovú dĺžku približne $\lambda_R \approx 12R$, mieru rastu $\lambda_I \approx 10R$ a podľa toho usúdil, že výtrysk je približne 6-krát hustejší ako okolie a pohybuje sa s Machovým číslom $M \approx 15$. Jeho práca však nepočítala s magnetickým poľom a ako je z grafu 2.6 vidieť, podobné vlnové čísla by mohli byť dosiahnuté pri redšom výtrysku, ale pri silnejšom axiálnom magnetickom poli. Otáznym by potom bol vplyv azimutálneho magnetického poľa.

Ďalším príkladom môže byť výtrysk v rádiovkej galaxii Cygnus A, ktorý je zobrazený aj na obrázku č. 1. Podľa práce Perleyho z roku 1986 (uvedené v [8]) sa u neho však predpokladá výrazne nižšia hustota ako v okolí (rádovo $\eta \approx 0,001$). Pre takto riedky disk, ako bolo ukázané na posledných simuláciách, je charakteristický spätný prúd a na jeho

rozhraní môžu vznikáť rôzne Kelvin-Helmholtzove nestability. Tento spätný prúd môže byť príčinou aj veľkých lalokov na konci tohto výtrysku. V práci [10, Krause, 2003] boli ukázané hydrodynamické simulácie pre výtrysky s nízkymi hustotami $\eta = (10^{-5} - 10^{-3})$ a s Machovým číslom v rozmedzí $M = (2,6 - 26)$. Aj výsledkom tejto práce boli vysoko nestabilné a rozpadajúce sa výtrysky. Záverom bolo, že k stabilizovaniu by mohlo byť potrebné dostatočne silné magnetické pole alebo rázová vlna, ktorá by zriedila okolité prostredie.

Záver

Cieľom práce bolo lepšie pochopenie a analýza chaotických nestabilít vo výtryskoch aktívnych galaktických jadier a týmto smerom sa práca aj uberala. Vzhľadom na rozsiahlosť a komplikovanosť problematiky sa zamerala len na Kelvin-Helmholtzove nestability, ktoré sú spolu aj s prúdom riadenými nestabilitami zaradované k tým najdôležitejším v astrofyzikálnych výtryskoch.

V prvej kapitole boli odvodené rovnice ideálnej magnetohydrodynamiky a tie boli následne riešené vo válcových súradniciach pomocou lineárnej teórie nestabilít. K riešeniu v tvare Besselových funkcií, ktoré je uvedené v podkapitole 1.2.3, sa nakoniec dospelo až po zanedbaní relatívne dôležitej azimutálnej zložky magnetickej indukcie (aj napriek veľkej snahe k získaniu riešenia aj s touto zložkou). Riešenia boli potom použité k odvodeniu disperznej relácie Kelvin-Helmholtzovej nestability pri rovnováhe celkového tlaku. Disperzná relácia bola numericky riešená najmä pre nulté azimutálne módy a pre rôzne parametre výtrysku.

V druhej kapitole bol použitý program Pluto, pomocou ktorého boli numericky riešené ešte neupravené rovnice ideálnej magnetohydrodynamiky. Získané simulácie boli následne interpretované a porovnané s disperznými krivkami z prvej kapitoly. V podkapitole 2.2.2 bola nafitovaná porucha tlaku jedného modelu a jej vlnová dĺžka približne odpovedala danej disperznej krivke. Výsledkom simulácií a ďalšieho porovnávania bolo, že výtrysk je nestabilný iba pri určitých parametroch a poruchy z rozlíšiteľnou vlnovou dĺžkou boli viditeľné hlavne v hustejších výtryskoch ($\eta > 1$), kde to približne odpovedalo aj disperznej relácii. Pri redších výtryskoch sa vytváral najmä spätný prúd, ktorý spôsobil ďalšie nestability a turbulencie. Zaujímavým výstupom tejto kapitoly sú tiež animácie časového vývoja výtryskov, v ktorých je možné rozoznať rôzne javy pri vytváraní nestabilít. Jeden takýto časový vývoj je znázornený a interpretovaný v podkapitole 2.2.1.

Ako bolo napísané v poslednej podkapitole 2.2.4, niektorým autorom sa už podarilo odhadnúť parametre výtryskov na základe disperzných relácií. Väčšina výtryskov je však považovaná za riedke ($\eta \approx 0,001$), ktoré sú nestabilnejšie a vyžadujú tak ďalšie analýzy

a simulácie. Tie sa však nezaobídu bez prác ako je táto, pretože v tomto smere je dôležité hlavne dobre rozumieť správaniu výtryskov a používať vhodne zvolené aproximácie. Táto práca môže byť veľkým prínosom pre ďalší výskum v tejto problematike a použitá ako odrazový mostík k ďalším analytickým odvodeniam alebo významným trojrozmerným simuláciám výtryskov, pomocou ktorých by sa dali dobre odhadnúť základne veličiny astrofyzikálnych výtryskov nielen v AGN.

Príloha: init.c

```

#include "pluto.h"

void GetJetValues (double, double *);
static double Profile (double, double);

static double pa;

void Init (double *v, double x1, double x2, double x3)
{
    int nv;
    static double veq[NVAR];

    v[RHO] = 1.0;
    v[VX1] = v[VX2] = v[VX3] = 0.0;
    v[PRS] = pa = 0.6;

    EXPAND(v[BX1] = 0.0;
           v[BX2] = sqrt(g_inputParam[ETA])*g_inputParam[ZETA_V]; ,
           v[BX3] = 0.0;)

    v[AX1] = v[AX2] = 0.0;
    v[AX3] = 0.5*x1*v[BX2];
    v[TRC] = 0.0;
}

void Analysis (const Data *d, Grid *grid){
}

void UserDefBoundary (const Data *d, RBox *box,
                     int side, Grid *grid)
{
    int i, j, k, nv;
    double *x1, *x2, *x3;
    double vjet[256], vout[NVAR];

    x1 = grid[IDIR].xgc;
    x2 = grid[JDIR].xgc;
    x3 = grid[KDIR].xgc;

    if (side == 0) {
        DOMLOOP(k,j,i){}
    }

    if (side == X2_BEG){
        if (box->vpos == CENTER){
            BOX_LOOP(box,k,j,i){
                GetJetValues (x1[i], vjet);
                VAR_LOOP(nv) vout[nv] = d->Vc[nv][k][2*JBEG - j - 1][i];
                vout[VX2] *= -1.0;
                EXPAND(vout[BX1] *= -1.0; ,
                       ; ,
                       vout[BX3] *= -1.0;)

                VAR_LOOP(nv){
                    d->Vc[nv][k][j][i] = vout[nv]-(vout[nv]-vjet[nv])
                    *Profile(x1[i], nv);
                }
            }
        }
    }
}

```



```

    }
  }

  } else if (box->vpos == X1FACE){
    x1 = grid[IDIR].A;
    BOX_LOOP(box, k, j, i){
      vout[BX1] = -d->Vs[BX1s][k][2*JBEG - j - 1][i];
      d->Vs[BX1s][k][j][i] = vout[BX1]*
        (1.0 - *Profile(x1[i], BX1));
    }
  } else if (box->vpos == X3FACE){
  }
}
}

void GetJetValues (double R, double *vj)
{
  int nv;
  double Bz;

  if (fabs(R) < 1.e-9) R = 1.e-9;

  vj[RHO] = 1.0 + (g_inputParam[ETA] - 1.0);
  Bz = g_inputParam[ZETA_V];

  EXPAND( vj[BX1] = 0.0; ,
          vj[BX2] = Bz; ,
          vj[BX3] = 0.0;)
  vj[AX1] = vj[AX2] = 0.0;
  vj[AX3] = 0.5*R*Bz;

  EXPAND( vj[VX1] = 0.0; ,
          vj[VX2] = g_inputParam[MACH]; ,
          vj[VX3] = 0.0; )

  vj[PRS] = pa;
  vj[TRC] = 1.0;
}

double Profile (double R, double nv)
{
  double R8 = R*R*R*R*R*R*R*R;
  return 1.0/cosh(R8);
}

```

Zoznam použitých zdrojov

- [1] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. Mathematical methods for physicists, 6th edition. *Amsterdam; Boston : Elsevier*, 2005. ISBN: 0-12-088584-0.
- [2] BOYD, T. J. M.; SANDERSON J. J. The Physics of Plasmas. *Cambridge University Press*, 2003. ISBN: 978-0-521-45290-8.
- [3] CASEY, M. P. Numerical simulations of the extragalactic jet in M87. Halifax, Diplomová práca. Saint Mary's University.
- [4] CHEN F. F. Úvod do fyziky plazmatu. *Academia*, Praha, 2011.
- [5] COHN, H. The stability of a magnetically confined radio jet. *The Astrophysical Journal*, vol. 269, 1983. DOI: 10.1086/161059.
- [6] FERRARI, A.; TRUSSONI, E.; ZANINETTI, L. Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in astrophysics. II Cylindrical boundary layer in vortex sheet approximation. 1981. DOI: 10.1093/mnras/196.4.1051
- [7] HARDEE, P. E. Helical and pinching instability of supersonic expanding jets in extragalactic radio sources. *ApJS*, 1982. DOI: 10.1086/160008
- [8] HUGHES, P. A. Beams and Jets in Astrophysics. *Cambridge Astrophysics Series, No. 19*, 1991. ISBN: 0-521-33576-0.
- [9] KOLDOBA A. V. a spol. Numerical MHD Codes for Modeling Astrophysical Flows. *New Astronomy*, 2015. DOI: 10.1016/j.newast.2015.10.011
- [10] KRAUSE, M. Very light jets. I. Axisymmetric parameter study and analytic approximation. *Astronomy and Astrophysics*, 2003. DOI: 10.1051/0004-6361:20021649
- [11] KULHÁNEK, P. Úvod do teorie plazmatu. *Aldebaran Group for Astrophysics*, 2011. ISBN: 978-80-904582-2-2.

- [12] LONGARETTI, P. Y. Pressure-driven instabilities in astrophysical jets. *Jets From Young Stars III*, 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-76967-5_4
- [13] MIGNONE, A. a spol. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics. *ApJS*, 2007. DOI: 10.1086/513316
- [14] ROBERTS P. H. An Introduction to Magnetohydrodynamics. *American Elsevier Publishing Company, INC.*, New York, 1967.
- [15] SINGH C. B.; MIZUNO Y.; DAL PINO E. M. Spatial growth of current-driven instability in relativistic rotating jets and the search for magnetic reconnection. 2016. arXiv:1603.03276
- [16] STEENBRUGGE, K. C.; BLUNDELL, K. M. Multiwavelength study of Cygnus A - I. Precession and slow jet speeds from radio observations. 2008. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2007.12665.x
- [17] ŽILKA, P. Analýza světelných křivek blazarů. Brno, 2013. Bakalářská práce. Masarykova univerzita.
- [18] Zdroj obrázka: <http://www.ica.smu.ca/zeus3d/images/figkhclouds.jpg>
- [19] Zdroj obrázka: <http://images.nrao.edu/110>
- [20] Odkaz: <http://plutocode.ph.unito.it/>

