

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



DIPLOMOVÁ PRÁCE

DYNAMIKA DRAH PLANETEK

JINDŘICH ŽIŽKA

Školitel: RNDr. Jan Janík, Ph.D.

Brno, květen 2009

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Brněnci dne.....

Podpis:.....

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu diplomové práce RNDr. Janu Janíkovi, Ph.D., který mi pomohl s řadou problémů, jak odborných, tak i typografických, jež byly s diplomovou prací spojeny.

Dále bych rád poděkoval Mgr. Miroslavu Brožovi, Ph.D., doc. RNDr. Davidovi Vokrouhlickému, DrSc. a Bc. Miloši Tichému za podnětné odborné rady, které přispěly ke zkvalitnění práce. Rovněž děkuji Mgr. Štěpánu Ledvinkovi, Ph.D. za cenné připomínky, Bc. Davidu Kovalovi, Mgr. Tomášovi Záležákovi, Hvězdárně a planetáriu Mikuláše Koperníka v Brně, p. o. za vstřícnost a Mgr. Josefu Hufovi.

Velký dík patří i mé přítelkyni Romaně Lipovské za neskutečnou trpělivost, kterou během psaní této práce projevila.

Jindřich Žižka

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá Dynamikou drah planetek, především časovou evolucí jejich orbitálních elementů. Určení vývoje dráhových elementů hraje stěžejní roli při studiu chování malých těles sluneční soustavy, jako jsou planetky, komety, ale i meziplanetární hmota. Své aplikace nalézá nebeská mechanika také v kosmonautice, kde zastává důležitou úlohu při výpočtech drah umělých družic i meziplanetárních sond.

Autor v této práci podrobně rozebírá základní teorii nebeské mechaniky. Důraz je kladen jednak na Gaussovu metodu určení elementů dráhy ze tří pozorování, analytickou teorii poruch, ale hlavně na vlastní numerický výpočet orbitálního vývoje planetek 1998 HZ7, 1999 RR214 a 2004 RT109 na 10 000 let do budoucnosti Runge-Kuttovou metodou 4. řádu. Pro účely předložené diplomové práce byly autorem vyvinuty dva programy `gauss.m` a `evoluce.m`. První je určen pro výpočet dráhových elementů Gaussovou metodou, druhý pro stanovení orbitálního vývoje studovaného tělesa metodou Runge-Kutta 4. řádu. Data získaná pomocí programu `evoluce.m` byla jednak porovnána s integrátory balíku *Swift* (Levison & Duncan 1999), ale následně patřičně autorem diskutována a interpretována.

Planetce 1998 HZ7 byla přisouzena dráha, která odpovídá 2:1 rezonanci s planetou Jupiter, planetka 1999 RR214 se nachází na dráze ve 3:2 rezonanci s Jupiterem, a poslední těleso 2004 RT109, může být jednak planetkou, ale také kometou Jupiterovy rodiny. Všechna studovaná tělesa se vyznačují dlouhodobě nestabilními dráhami.

Klíčová slova: *nebeská mechanika, Gaussova metoda, dráhové elementy, orbitální vývoj.*

Abstract

My thesis deals with the Dynamics of asteroids' orbits, especially the time orbital evolution of their orbital elements. The determination of the evolution of orbital elements is a key factor in studying of behaviour of small bodies of the solar system, such as asteroids, comets, and interplanetary matter. Celestial mechanics is also applied in astronautics, where it plays a significant role in calculations of trajectories of artificial satellites and interplanetary probes.

The author discusses the basic theory of celestial mechanics in detail. Firstly he emphasises the Gauss method of determination of orbital elements from three observations, secondly analytical theory of perturbations and his own numerical computation of time orbital evolution of asteroids 1998 HZ7, 1999 RR214 and 2004 RT109 for 10 000 years into the future with Runge-Kutta method of 4th order. For the purpose of submitted thesis two programmes (`gauss.m` and `evoluce.m`) were developed by the author. The former is intended for computation of orbital elements with Gauss method, the latter is intended for determination of time orbital evolution of studied body with Runge-Kutta method of 4th order. The data acquired with `evoluce.m` programme were first compared with integrators of *Swift* package (Levison & Duncan 1999), and then discussed and interpreted by the author.

Asteroid 1998 HZ7 was assigned to the orbit which corresponds to 2:1 resonance with Jupiter, asteroid 1999 RR214 is situated in orbit in 3:2 resonance with Jupiter, and the final body 2004 RT109, could be either an asteroid or a comet of Jupiter family. All studied bodies exhibit permanent unstable orbits.

Keywords: *celestial mechanics, Gauss method, orbital elements, time orbital evolution.*

Obsah

1	Pojem centrální síly	6
1.1	Zákon ploch	6
1.2	Diferenciální rovnice trajektorie, Binetův vzorec	8
1.3	II. Newtonův zákon a jeho důsledky	9
2	Problém dvou těles	12
2.1	Elementy dráhy	13
2.1.1	První trojice elementů dráhy	13
2.1.2	Druhá trojice elementů dráhy	15
3	Určení elementů dráhy z pozorování	17
3.1	Vztah mezi geocentrickými a heliocentrickými souřadnicemi	17
3.2	Gaussova metoda	18
3.2.1	Rozvoje poměrů ploch trojúhelníků v řady	19
3.2.2	Určení geocentrických vzdáleností	19
3.2.3	První aproximace geocentrických vzdáleností ρ_i	20
3.2.4	Přesné hodnoty geocentrických vzdáleností	21
3.2.5	Výpočet dráhových elementů	23
4	Evoluce dráhových elementů v čase	27
4.1	Analytický přístup	27
4.1.1	Zavedení poruchové funkce, rozvoje do orbitálních elementů	28
4.1.2	Rozvoje poruchové funkce do druhého řádu	37
4.1.3	Lagrangeovy planetární rovnice	44
4.1.4	Rezonance	45
5	Vlastní numerický přístup a orbitální vývoj vybraných planetek	48
5.1	Diskuse výsledků	62
	Závěr	64
	Literatura	66

Úvod

Pokud bychom se snažili definitivně vymezit pojem nebeské mechaniky, potom můžeme říci, že se jedná o obor na rozhraní mezi teoretickou mechanikou a astronomií, který se zabývá studiem pohybů nebeských těles a jejich příčinami. Je taktéž zářným příkladem trendu konce dvacátého století, kdy se astronomie začíná dělit na astronomii praktickou a teoretickou. Díky moderním automatům, které pořizují obrovská množství dat, se potom těžiště činnosti přenáší k počítači a k interpretaci získaných dat.

Nebeská mechanika je v dnešní době již teoretickým oborem, který vychází z astrometricky naměřených údajů o polohách nebeských objektů. Ty jsou potom rozličnými numerickými metodami zpracovány, vyhodnoceny, interpretovány a zároveň slouží k modelování časového vývoje drah daných těles (často se jedná o tělesa ve sluneční soustavě). Práce nebeské mechaniky se tudíž soustřeďuje převážně u počítače. Pomocí numerických modelů lze sledovat gravitační i negravitační poruchy drah vybraných těles, dynamický vývoj rodnin asteroidů¹, chování prachových částic ve sluneční soustavě, ale také můžeme nahlédnout do minulosti a do budoucnosti, což nám mnohé napoví o jejím zrodu a dalším vývoji. Je taktéž potřeba poznamenat, že přímé aplikace nebeské mechaniky se týkají nejenom přírodních těles sluneční soustavy, ale také výtvorů lidských. Úžasnou aplikací nebeské mechaniky jsou přesné výpočty drah umělých družic Země, meziplanetárních sond a jistě najde uplatnění i v nadcházejících výpravách do vesmíru s živou posádkou. Myslím si, že tato partie teoretické astronomie bude v dalších letech nabývat stále většího významu.

Z výše uvedeného je jasné, že bouřlivý rozvoj nebeské mechaniky proběhl ruku v ruce s nástupem moderní výpočetní techniky, která umožňuje dříve jen těžko řešitelné problémy efektivně a rychle vyřešit.

Předložená diplomová práce s názvem *Dynamika drah planetek* se zabývá dynamickým vývojem planetek 1998 HZ7, 1999 RR214 a 2004 RT109 na 10 000 let do budoucnosti, kdy je důraz kladen převážně na časovou evoluci orbitálních elementů těchto těles. To také bylo hlavním zadáním práce.

V prvních čtyřech kapitolách se čtenář seznámí s nutnými teoretickými znalostmi. Pátá kapitola pak shrnuje autorem provedené simulace, diskusi získaných výsledků a také některé autorovy myšlenky a interpretace. V příloze diplomové práce jsou také dva mnou vytvořené programy `gauss.m` a `evoluce.m`, které numericky řeší zadané problémy. Více se o jejich funkci čtenář dočte v *kapitole 3* a *kapitole 5*.

V Brněnci dne 6.5.2009

Jindřich Žižka

¹Jedná se o skupiny planetek s podobnými dráhovými elementy.

Kapitola 1

Pojem centrální síly

Mějme hmotný bod (částici, planetku) o polohovém vektoru \mathbf{r} a hybnosti \mathbf{p} , na níž působí síla \mathbf{F} o které předpokládáme, že v libovolný okamžik prochází pevným bodem. Tento bod nechť je počátkem souřadnicové soustavy. Centrálním silovým polem rozumíme takové pole, pro které lze sílu \mathbf{F} psát ve tvaru

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = F(r)\mathbf{r}. \quad (1.1)$$

Užitím potenciální energie $U(r)$ lze vztah vyjádřit následovně

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(r) = F(r)\mathbf{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}\mathbf{r}. \quad (1.2)$$

Definujme vektor momentu hybnosti \mathbf{L} hmotného bodu vztahem

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}_0. \quad (1.3)$$

Z derivace podle času ihned plyne zákon zachování momentu hybnosti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_0. \quad (1.4)$$

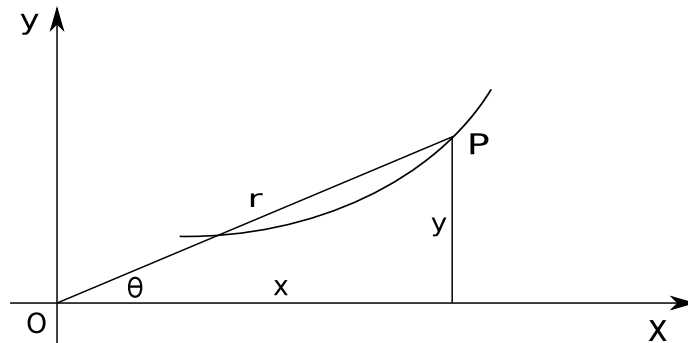
Je-li moment hybnosti \mathbf{L} roven konstantnímu vektoru \mathbf{L}_0 , znamená to, že vektory \mathbf{r} a \mathbf{p} budou ležet v rovině kolmé k vektoru momentu hybnosti. *Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli je tedy rovinný.*

1.1 Zákon ploch

V následujícím odstavci odvodíme tzv. *zákon ploch* nebo, chceme-li, *II. Keplerův zákon*. Poznámenejme, že Keplerovy zákony byly ve své podstatě zákony empirickými, jejich rigorózní fyzikální odvození přišlo až záhy po objevu gravitačního zákona. Uvažujme hmotný bod vystavený působení centrální síly procházející bodem O . Z předchozího odstavce již víme, že se pohyb děje v rovině. Nechť f představuje velikost zrychlení hmotného bodu. Pohybové rovnice podél os x a y následují

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mp f \cos \theta = \mp f \frac{x}{r}, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mp f \sin \theta = \mp f \frac{y}{r}. \quad (1.6)$$



Obrázek 1.1: Rovinný pohyb.

Již pohledem zjistíme, že záporné znaménko odpovídá přitažlivé síle, kdežto kladné znaménko síle odpudivé. Vynásobíme-li první rovnici $-y$ a druhou rovnici $+x$, po sečtení obdržíme

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (1.7)$$

Integrací této jednoduché rovnice dojdeme k následujícímu vztahu

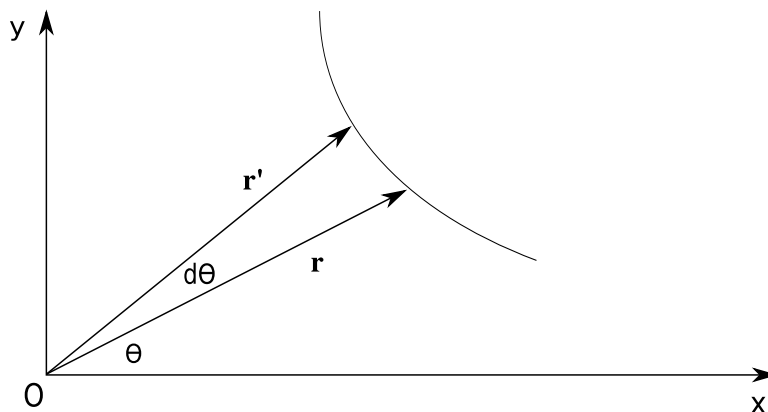
$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h, \quad (1.8)$$

kde h je integrační konstanta.

Přejdeme-li do polárních souřadnic $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y = r(t) \sin \theta(t)$, dostaneme po příslušných derivacích

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{const}. \quad (1.9)$$

Rozeberme situaci podrobněji. Uvažujme rovinný pohyb hmotného bodu po rovinné křivce jako na následujícím obrázku. Bude nás zajímat jakou plochu opíše průvodič \mathbf{r} za infi-



Obrázek 1.2: Rovinný pohyb po křivce.

nitesimální časový okamžik dt , při němž se přesune do bodu \mathbf{r}' . Přitom opíše úhel $d\theta$. V této aproximaci vektory společně s křivkou opisují trojúhelník. Jeho obsah spočteme pomocí vektorového součinu vektorů \mathbf{r} a \mathbf{r}' . Jistě tedy pro plochu ΔA opsanou průvodičem \mathbf{r} platí

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{r}'| = \frac{rr'}{2} \sin(\Delta\theta), \quad (1.10)$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{rr'}{2} \cdot \frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (1.11)$$

Důsledkem $\Delta t \rightarrow 0$ jsou následující vztahy

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 1, \quad (1.12)$$

$$r \rightarrow r'. \quad (1.13)$$

Potom tedy pro plošku dA opsanou průvodičem \mathbf{r} za čas dt platí

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}h. \quad (1.14)$$

Tedy

$$A = \frac{1}{2}ht + c. \quad (1.15)$$

Ohled vidíme tvar *II. Keplerova zákona*.

1.2 Diferenciální rovnice trajektorie, Binetův vzorec

Vydeme z pohybových rovnic (1.5) a (1.6) pro přitažlivou sílu

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -f \frac{x}{r}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -f \frac{y}{r}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Pohyb pod taktem centrální síly je rovinný, přejdeme tedy do polárních souřadnic. Rovnice po jednoduchém výpočtu nabydou tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= -f, \\ r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Po transformaci souřadnic a provedení příslušných derivací bylo potřeba vynásobit rovnice střídavě $\sin\theta$ (resp. $\cos\theta$), druhou $\cos\theta$ (resp. $\sin\theta$), a následně je sečíst. Rovnice rovinné křivky, po které se objekt pohybuje zřejmě pozbývá časové závislosti. Eliminujme tedy nejdříve z první z nich výraz $\frac{d\theta}{dt}$ s užitím vztahu (1.9)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - f. \quad (1.18)$$

Diferenciální rovnici řešíme substitucí $r = \frac{1}{u}$. Příslušné derivace následují

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Známe-li $u(\theta)$, není již problém zjistit $r(\theta)$ a provést příslušné derivace. Dosadíme-li zpět do vztahu (1.18), po úpravě dojdeme k vyjádření

$$f = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right). \quad (1.20)$$

Vztah (1.20) je diferenciální rovnicí trajektorie $r(\theta)$. V literatuře jej můžeme nalézt jako *Binetův vzorec*. Známe-li polární rovnici kuželosečky nebo rovnici křivky $r(\theta)$, lze spočítat zrychlení částice f . Naopak, známe-li vyjádření pro sílu, můžeme (jen pro určité případy) zpětně určit trajektorii $r(\theta)$.

1.3 II. Newtonův zákon a jeho důsledky

Jak bylo zmíněno v předcházejícím paragrafu, Binetův vzorec nám umožňuje zjistit vyjádření síly při znalosti rovnice trajektorie a naopak. V tomto odstavci odvodíme *I. Keplerův zákon* (dále jen *I. KZ*) jako důsledek *II. Newtonova zákona* (dále jen *II. NZ*).

Je třeba poznamenat, že díky Binetově vzorci *II. NZ* vyhlíží zpětně jako důsledek *I. KZ*. Pro naše účely nyní zatím vystačíme se skalární podobou *II. NZ*

$$F = \chi \frac{M_1 M_2}{r^2}. \quad (1.21)$$

Tedy zrychlení

$$f = \frac{k^2}{r^2}, \quad (1.22)$$

kde $k = \text{const}$. Po dosazení do Binetova vzorce obdržíme

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k^2}{h^2}. \quad (1.23)$$

Jedná se o lineární nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu, jejíž řešení provedeme metodou variace konstant. Nejdříve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0. \quad (1.24)$$

Předpokládáme řešení ve tvaru $u(\theta) = e^{\lambda\theta}$. Derivováním dojdeme k charakteristické rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad (1.25)$$

kteřá má dva komplexně sdružené kořeny $i, -i$. Fundamentální systém s komplexními funkcemi je $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$. Fundamentální systém s reálnými funkcemi můžeme získat například tak, že vezmeme vhodné lineární kombinace stávajících funkcí. Výsledné funkce musí být opět nezávislé. Nejjednodušší bude vzít následující lineární kombinace

$$\frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta, \quad \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \sin \theta. \quad (1.26)$$

Fundamentální systém s reálnými funkcemi tedy je $u_1 = \cos \theta, u_2 = \sin \theta$. Poznamenejme, že obecně pro komplexně sdružené jednoduché kořeny $a + ib, a - ib$ obdržíme stejným postupem reálný fundamentální systém $e^{a\theta} \cos b\theta, e^{a\theta} \sin b\theta$. Z teorie diferenciálních rovnic je známo, že obecný integrál nehomogenní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_p, \quad (1.27)$$

kde c_1, c_2 jsou libovolně konstanty a u_p je jakékoliv řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice. Rovnice může být řešena v nejobecnější formě metodou variace konstant, avšak v tomto případě bude jistě rychlejší *metoda neurčitých koeficientů*, kdy řešení předpokládáme ve tvaru polynomu $u(\theta) = A\theta^2 + B\theta + C$. Tento předpoklad dosadíme do rovnice (1.23)

a po příslušných derivacích porovnáme koeficienty na levé a pravé straně. Dospěli bychom k výsledku, kdy je partikulární integrál roven

$$u_p = \frac{k^2}{h^2}. \quad (1.28)$$

Obecné řešení rovnice (1.23) následuje

$$u = \frac{k^2}{h^2} + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta. \quad (1.29)$$

Po substituci obdržíme

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta}. \quad (1.30)$$

Nyní bez újmy na obecnosti můžeme položit $c_1 = A \cos \theta_0$, $c_2 = A \sin \theta_0$, kde A , θ_0 jsou konstanty. Rovnice (1.30) následně přechází na tvar

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (1.31)$$

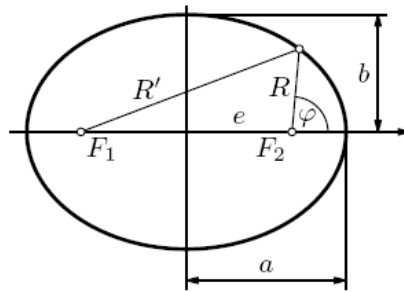
Jistě snadno nahlédneme, že $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ je kladná konstanta. Po jejím výpočtu a zpětném dosazení do rovnic pro c_1 a c_2 můžeme následně určit θ_0 . Velmi důležité je však to, že rovnice (1.31) je *polární rovnicí kuželosečky* s počátkem v *ohnisku*.

Pohybuje-li se tedy těleso obecně po kuželosečce, je vystaveno působení síly nepřímou úměrné čtverci vzdálenosti a naopak.

Nechť p je parametr kuželosečky a ϵ její číselná výstřednost (numerická excentricita). Potom nahrazením získáme

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \quad (1.32)$$

kde φ představuje úhel zakreslený na následujícím obrázku



Obrázek 1.3: Elipsa.

Snadno nahlédneme, že mezi námi zvolenými konstantami h, k, θ_0 a konstantami ve výrazu (1.32) platí

$$\begin{cases} p &= \frac{h^2}{k^2}, \\ \epsilon &= \frac{h^2}{k^2} A, \\ \varphi &= \theta - \theta_0. \end{cases} \quad (1.33)$$

Jistě je vidět, že těleso, které putuje po kuželosečce (1.31), se opožďuje za tělesem, které by se řídilo rovnicí (1.32), o úhel θ_0 . Pokud tedy chceme měřit úhlovou polohu tělesa od *pericentra*, nutně musí platit, že $\theta_0 = 0$. Konstanty jsou určeny vhodně zvolenými okrajovými podmínkami. Dle numerické výstřednosti můžeme klasifikovat typ kuželosečky

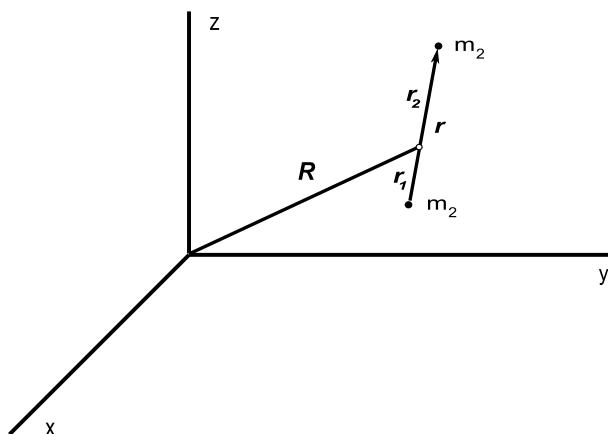
$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon < 1 \text{ elipsa,} \\ \epsilon = 1 \text{ parabola,} \\ \epsilon > 1 \text{ hyperbola,} \\ \epsilon = 0 \text{ kružnice.} \end{array} \right.$$

V tomto odstavci jsme tedy nedospěli k ničemu jinému než k *I. Keplerovu zákonu*. K jeho odvození bylo užito *Binetova vzorce* a *II. Newtonova zákona*.

Kapitola 2

Problém dvou těles

Jednou z nejzákladnějších úloh nebeské mechaniky je obecný problém dvou těles. Jeho rozbor je nezbytný k zavedení důležitých veličin a pojmů, jež se v práci (a celé nebeské mechanice) často objevují. Situaci osvětluje obrázek.



Obrázek 2.1: Problém dvou těles.

Uvažujme dva hmotné body m_1 a m_2 o polohových vektorech \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 vůči těžišti soustavy \mathbf{R} . Jsou-li hmotnosti obou bodů srovnatelné, lze právem tvrdit, že hmotný bod m_1 obíhá kolem bodu m_2 , stejně jako m_2 obíhá okolo m_1 . Kinetická energie je dána vztahem

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2. \quad (2.1)$$

Teorie ukazuje (viz dále), že je výhodné při řešení problému dvou těles převést absolutní pohyb dvou hmotných bodů na jejich vzájemný pohyb relativní. Zavedme relativní vektor \mathbf{r} druhé částice vůči první, pro který platí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (2.2)$$

Užitím vztahu pro polohu těžiště

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.3)$$

dostaneme příslušné transformační rovnice

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r} m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r} m_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.4)$$

Ztotožníme-li počátek soustavy souřadnic s těžištěm ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$), potom nabývá rovnice (2.1) této podoby

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.5)$$

kde μ je tzv. *redukovaná hmotnost*. Lagrangeova funkce soustavy má tudíž tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - \Phi(r). \quad (2.6)$$

Potenciální energie soustavy těchto dvou hmotných bodů splňuje relaci $\Phi(r) = -\chi\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Lagrangeova funkce vypadá posléze takto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \chi\frac{\mu\mathcal{M}}{r}, \quad \mathcal{M} = m_1 + m_2. \quad (2.7)$$

Je zřejmé, že úloha je převedena na problém oběhu tělesa s redukovanou hmotností okolo nehybného bodu s hmotností \mathcal{M} . Dosazením do Lagrangeových rovnic druhého druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (2.8)$$

odvodíme pohybové rovnice ve tvaru

$$\ddot{\mathbf{r}} + \chi\frac{\mathcal{M}}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Nalezení dráhy částice μ okolo nehybného středu o hmotnosti \mathcal{M} je tedy ekvivalentní s problémem integrace předchozí rovnice. Výsledkem by byla opět rovnice kuželosečky. Je na místě poznamenat, že řešení předchozí rovnice je poměrně zdouhavé – jako kratší a schůdnější se jeví užití Binetova vzorce (viz kapitola 1). Transformací (2.4) pak zjistíme polohové vektory obou hmotných bodů v těžišťové soustavě.

2.1 Elementy dráhy

Elementy dráhy¹ jsou nepostradatelné parametry, podle nichž určujeme polohu tělesa na trajektorii a také její orientaci v prostoru. Vzhledem k zaměření a tématu této práce, je přímo nutností o nich důkladně pojednat.

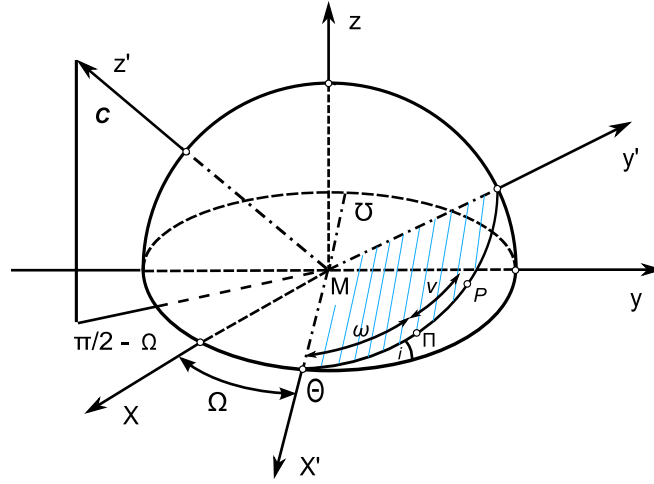
2.1.1 První trojice elementů dráhy

Znásobíme-li rovnici (2.9) μ , následně zleva vektorově \mathbf{r} a zintegrujeme, dojdeme ke známému zákonu zachování momentu hybnosti

$$\mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} = \mathbf{konst}. \quad (2.10)$$

Je dobré si povšimnout, že jsme řešením pohybových rovnic získali celkem tři integrační konstanty, neboť $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = \mathbf{konst}$. Ty budou v dalším výkladu hrát důležitou roli. Pro důkladnější pochopení jsem vytvořil obrázek (2.2). Bod s hmotností μ obíhá okolo nehybného centra \mathcal{M} v jedné rovině. Zvolme kouli o jednotkovém poloměru se středem v bodě \mathcal{M} .

¹V literatuře se někdy vyskytuje také pojem *orbitální elementy*. Autor v diplomové práci užívá obou těchto sousloví.



Obrázek 2.2: Elementy dráhy.

Proložme sféru referenční rovinou (v praxi se často jedná o ekliptiku) o rovnici $z = 0$, osa x zpravidla směřuje k jarnímu bodu γ . Rovina oběhu tělesa (v dalším budeme mluvit o planetce) necht' je skloněna k referenční rovině pod *inklinačním úhlem* i (často nazývaný *sklon dráhy*). Kolmo k ní je orientován vektor momentu hybnosti \mathbf{C} .

Pohyb, kdy $i < 90^\circ$ nazýváme *přímý* a planetka se pohybuje ve stejném smyslu jako je kladný smysl na hlavní kružnici definované na referenční rovině. V případě, že $i > 90^\circ$, mluvíme o pohybu *retrográdním*.

Při každém svém oběhu se planetka (mimo oběh v referenční rovině) dostává nad ($z > 0$) a pod ($z < 0$) tuto rovinu (dále budeme mluvit o ekliptice). Uvažujeme-li pohyb planetky v kladném smyslu, pak je ihned vidět, že se v bodě Θ planetka dostává nad ekliptiku. Toto místo na trajektorii se uvádí jako *výstupný uzel*. Analogickým způsobem definujeme i *sestupný uzel* Υ . Dalším důležitým elementem je *délka výstupného uzlu* Ω . Třetím elementem je následně *argument pericentra (perihelu)*¹ ω .

I když pojmů bylo v této podkapitole definováno poměrně hodně, první trojici elementů dráhy budeme rozumět pouze Ω, i, ω . Jedná se prakticky o první trojici integračních konstant rovnice (2.9).

Promítneme-li vektor momentu hybnosti \mathbf{C} do roviny ekliptiky, skutečně nahlédneme, že úhel sevřený s kladným směrem osy x je $\pi/2 - \Omega$. K tomu lze dojít i jednoduchou úvahou, kdy si představíme, že by průmět vektoru \mathbf{C} ležel na záporné části osy y a v ose x by ležela *přímka apsid*². Následně otočením okolo osy z v kladném smyslu o úhel Ω dojdeme k obecné situaci znázorněné na předešlém obrázku. Pro souřadnice vektoru \mathbf{C} pak platí

$$\begin{aligned} C_x &= C \sin \Omega \sin i, \\ C_y &= -C \cos \Omega \sin i, \\ C_z &= C \cos i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Lze tedy usoudit, že *první trojice elementů určuje orientaci dráhy v prostoru*. Při obecném otočení souřadné soustavy $[x, y, z]$ se mění každý z nich. Polohu planetky na obrázku pak určuje *pravá anomálie* ν , která udává hodnotu úhlové vzdálenosti od perihelu. Pro zjištění tvaru dráhy a polohy planetky v daný čas je pak třeba zavést další trojici elementů dráhy.

¹Někdy se také zavádí *délka perihelu* $\bar{\omega} = \omega + \Omega$.

²Průsečnice ekliptiky a roviny oběhu planetky. Prochází výstupným a sestupným uzlem.

2.1.2 Druhá trojice elementů dráhy

Zabývejme se pouze pohybem eliptickým. Při řešení pohybových rovnic (2.9) by mělo vystupovat celkem 6 integračních konstant. To znamená, že je třeba určit a interpretovat zbývající tři z nich. Pohyb bodu s redukovanou hmotností jistě splňuje

$$F = \mu f = \chi \frac{\mu \mathcal{M}}{r^2}, \quad (2.12)$$

kde $f = \chi \frac{\mathcal{M}}{r^2} = \frac{k^2}{r^2}$ je příslušné zrychlení (viz kapitola 1). Uvážíme-li pohybové rovnice (1.5) a (1.6) pro přitažlivou sílu a nahradíme-li je patřičným zrychlením f pro pohyb bodu μ , získáme tuto soustavu

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \chi \frac{\mathcal{M}x}{r^3} &= 0, \\ \ddot{y} + \chi \frac{\mathcal{M}y}{r^3} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ta odpovídá pohybovým rovnicím (2.9). Zmíněná soustava je řešena v paragrafu (1.3), kde ve vztahu (1.31) vystupují další integrační konstanty h, k a θ_0 . Pokusme se interpretovat jejich význam.

Velká poloosa a jako integrační konstanta

Z analytické geometrie jsou známy tyto vztahy

$$p = a(1 - \epsilon^2), \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (2.14)$$

kde a je velká a b malá poloosa elipsy. Je-li dle (1.33) $p = \frac{h^2}{k^2}$, pak srovnáním máme

$$p = \frac{h^2}{k^2} = \frac{h^2}{\chi \mathcal{M}}. \quad (2.15)$$

Potom s užitím rovnice (2.14) dojdeme k vyjádření velké poloosy a

$$a = \frac{h^2}{\chi \mathcal{M}(1 - \epsilon^2)}. \quad (2.16)$$

Numerická excentricita ϵ jako integrační konstanta

Nyní přejdeme k vyjádření další integrační konstanty ϵ . Vezmeme-li v úvahu, že $k^2 = \chi \mathcal{M}$, potom lze vztah (1.31) přepsat následovně

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + \frac{Ah^2}{k^2} \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + \frac{Ah^2}{\chi \mathcal{M}} \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (2.17)$$

Potom

$$\epsilon = \frac{Ah^2}{\chi \mathcal{M}} = Ap. \quad (2.18)$$

Je vhodné vzhledem k zaměření práce stručně interpretovat fyzikální podstatu konstanty A a uvést její důsledky na tvar dráhy. Vyjděme ze zákona zachování energie ve tvaru

$$E = T + \Phi = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - \chi \frac{\mu \mathcal{M}}{r} = \text{const.} \quad (2.19)$$

Častěji bývá tento pohybový integrál vyjádřen ve tvaru

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}} = \frac{GM}{r} + c \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2) = \frac{\chi\mathcal{M}}{r} + c. \quad (2.20)$$

Někdy jej v literatuře nalezneme pod názvem *vis via* integrál. Jednoduchým, ale již pracnějším výpočtem se dá ukázat, že při vhodném přetransformování předešlého vztahu [1] lze dospět k vyjádření ϵ v tomto tvaru

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2ch^2}{\chi^2\mathcal{M}^2}. \quad (2.21)$$

Tedy, je-li $0 < \epsilon < 1$ (pohyb po elipse), potom je celková energie záporná. Dále je již triviální nahlédnout, že pro parabolu je nulová a hyperbolu kladná.

Okamžik průchodu perihelem jako integrační konstanta

Nechť A_0 představuje plochu opsanou průvodičem v době průchodu perihelem t_0 . Potom jistě platí

$$t_0 = \frac{2(A_0 - c)}{h}. \quad (2.22)$$

Skutečně jsme v tomto paragrafu poukázali na to, že druhá trojice elementů dráhy odpovídá vhodně zvoleným integračním konstantám patřičných pohybových rovnic.

Kapitola 3

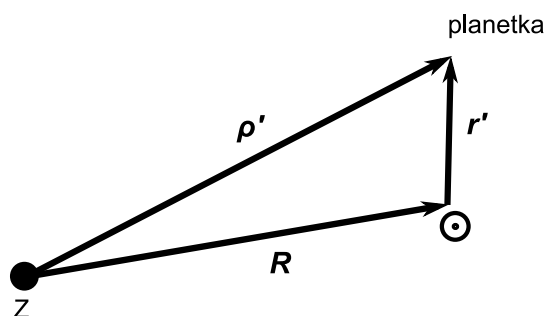
Určení elementů dráhy z pozorování

V praxi zpravidla stojíme před problémem určení elementů dráhy nikoliv ze známých geocentrických souřadnic, ale z napozorovaných dat, jimiž jsou příslušné rovníkové souřadnice (II. druhu) planety pro určité ekvinokcium společně s časy těchto měření.

To řeší tzv. *Gaussova metoda* určování elementů dráhy ze tří pozorování¹. Dá se ukázat, že již ze tří pozorování $(\alpha_i, \delta_i), i = 1, 2, 3$ pořázených v okamžicích t_i je problém v principu řešitelný.

3.1 Vztah mezi geocentrickými a heliocentrickými souřadnicemi

Uvažme následující obrázek



Obrázek 3.1: Vztah mezi geocentrickými a heliocentrickými souřadnicemi.

Dle obrázku platí triviální transformace

$$\boldsymbol{\rho}' = \mathbf{r}' + \mathbf{R}. \quad (3.1)$$

Přechodem do rovníkových souřadnic II. druhu pro dané ekvinokcium předešlá rovnice přechází na soustavu

$$\begin{aligned} \rho'_x &= \rho' \cos \delta \cos \alpha = x' + X_{\odot}, \\ \rho'_y &= \rho' \cos \delta \sin \alpha = y' + Y_{\odot}, \\ \rho'_z &= \rho' \sin \delta = z' + Z_{\odot}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹Na zmíněném problému se však významně podíleli i další. Např. Euler, Lagrange, Lambert a další.

Přechodem k ekliptikálním souřadnicím (vynecháme-li pro přehlednost čárky) lze soustavu vyjádřit následovně

$$\begin{aligned}\rho \cos \beta \cos \lambda &= x - R \cos B \cos L, \\ \rho \cos \beta \sin \lambda &= y - R \cos B \sin L, \\ \rho \sin \beta &= z - R \sin B.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Poznamanejme, že β a λ jsou ekliptikální souřadnice, R vzdálenost Země od Slunce a L a B heliocentrická délka a šířka Země. (B, L, R) a $(X_\odot, Y_\odot, Z_\odot)$ jsou pro příslušný den uvedeny v astronomické ročence. Necht jsou dána tři pozorování planety v časech $t_1 < t_2 < t_3$. Zavedeme-li příslušné směrové kosiny λ, μ, ν v (3.2), potom zmíněná soustava pro tato tři pozorování vypadá takto

$$\begin{aligned}x_i &= \lambda_i \rho_i - X_i, \\ y_i &= \mu_i \rho_i - Y_i, \\ z_i &= \nu_i \rho_i - Z_i.\end{aligned}\quad i = 1, 2, 3\tag{3.4}$$

3.2 Gaussova metoda

V tomto paragrafu vyjdeme z faktu, že se planeta pohybuje v rovině procházející Sluncem. Potom její heliocentrické souřadnice pro tři pozorování musí splňovat

$$Ax_i + By_i + Cz_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.\tag{3.5}$$

Předešlou soustavu lze zapsat i maticově (např. $\mathbf{XA} = \mathbf{0}$). Pohyb v rovině klade na příslušnou soustavu podmínku vyloučení netriviálního řešení pro A, B, C . Z toho ihned plyne

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.\tag{3.6}$$

Rozvineme-li determinant podle jednotlivých sloupců, dojdeme k těmto třem rovnicím

$$\begin{aligned}(y_2 z_3 - z_2 y_3)x_1 - (y_1 z_3 - z_1 y_3)x_2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)x_3 &= 0, \\ (x_2 z_3 - z_2 x_3)y_1 - (x_1 z_3 - z_1 x_3)y_2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)y_3 &= 0, \\ (x_2 y_3 - y_2 x_3)z_1 - (x_1 y_3 - y_1 x_3)z_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)z_3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Vzhledem k tomu, že normála k rovině dráhy planety je dána vztahem

$$\mathbf{n} = (\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i),\tag{3.8}$$

pak jistě pro vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 platí $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| \mathbf{n} = 2[r_1, r_2] \mathbf{n}$, kde $[r_1, r_2]$ značí plochu trojúhelníku, který určují vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Rozepsáno do složek

$$\begin{aligned}y_1 z_2 - z_1 y_2 &= 2[r_1, r_2] \sin i \sin \Omega, \\ x_1 z_2 - z_1 x_2 &= 2[r_1, r_2] \sin i \cos \Omega, \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 &= 2[r_1, r_2] \cos i.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Analogickým postupem dojdeme k vyjádřením kombinací $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3$. Díky těmto úvahám pak soustava (3.7) přechází na tvar

$$\begin{aligned}[r_2, r_3]x_1 - [r_1, r_3]x_2 + [r_1, r_2]x_3 &= 0, \\ [r_2, r_3]y_1 - [r_1, r_3]y_2 + [r_1, r_2]y_3 &= 0, \\ [r_2, r_3]z_1 - [r_1, r_3]z_2 + [r_1, r_2]z_3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

3.2.1 Rozvoje poměrů ploch trojúhelníků v řady

Definujeme-li Gaussovu konstantu pomocí konstanty gravitační vztahem $G = k^2$, pak lze patřičné poměry ploch trojúhelníků rozvést v následující řady. Jelikož je to postup poměrně zdoluhavý a pracný, případný zájemce necht' se obrátí například na [8]. Zavedme následující proměnné

$$\begin{aligned} k(t_3 - t_2) &= \tau_1, \\ k(t_3 - t_1) &= \tau_2, \\ k(t_2 - t_1) &= \tau_3, \\ \tau_1 + \tau_3 &= \tau_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Podělme rovnice (3.10) výměrou $[r_1, r_3]$ a definujme

$$n_1 = \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]}, \quad n_3 = \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]}. \quad (3.12)$$

Pak soustava (3.10) přejde na tvar

$$\begin{aligned} n_1 x_1 - x_2 + n_3 x_3 &= 0, \\ n_1 y_1 - y_2 + n_3 y_3 &= 0, \\ n_1 z_1 - z_2 + n_3 z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Kombinací (3.4) a (3.13) získáme

$$\begin{aligned} n_1 \lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + n_3 \lambda_3 \rho_3 &= n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3, \\ n_1 \mu_1 \rho_1 - \mu_2 \rho_2 + n_3 \mu_3 \rho_3 &= n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3, \\ n_1 \nu_1 \rho_1 - \nu_2 \rho_2 + n_3 \nu_3 \rho_3 &= n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Patřičné rozvoje n_1 a n_3 následují [8]

$$n_1 = \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3(\tau_2 + \tau_1)}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_3(\tau_3^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right\}, \quad (3.15)$$

$$n_3 = \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_1(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)}{r_2^4} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right\}. \quad (3.16)$$

3.2.2 Určení geocentrických vzdáleností

Rovnice (3.14) obsahují celkem pět neznámých (n_1, n_3, ρ_i). Pokud je budeme řešit vzhledem k ρ_i , pak ρ_i budou vyjádřeny pomocí známých veličin, ale také jistě pomocí n_1 a n_3 . Je tedy jasné, že s kvalitnější aproximací n_1 a n_3 obdržíme lepší výsledky pro ρ_i . Ukazuje se, že pro výpočet je výhodnější eliminovat přímo $n_1 \rho_1$ a $n_3 \rho_3$. Užitím Cramerova pravidla¹ máme

$$-D\rho_2 = d, \quad (3.17)$$

kde

$$d = \begin{vmatrix} \lambda_1 & n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3 & \lambda_3 \\ \mu_1 & n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3 & \mu_3 \\ \nu_1 & n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = n_1 \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_1 & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_1 & \nu_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_2 & \nu_3 \end{vmatrix} + n_3 \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_3 & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_3 & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_3 & \nu_3 \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

¹Nechť $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Potom pro řešení x_i platí $x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}$, kde \mathbf{A}_i je matice vzniklá z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} .

Využijeme zkrácený zápis

$$d = n_1 d_1 - d_2 + n_3 d_3, \quad (3.19)$$

kde d_i jsou odpovídající determinanty. Determinant D závěrem splňuje

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}. \quad (3.20)$$

3.2.3 První aproximace geocentrických vzdáleností ρ_i

Definujeme

$$n_1^\circ = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad n_3^\circ = \frac{\tau_3}{\tau_2}. \quad (3.21)$$

Vezměme jen první členy rozvoju (3.15) a dosadíme do nich z rovnic (3.21)

$$n_1 = n_1^\circ + \frac{c_1}{r_2^3}, \quad n_3 = n_3^\circ + \frac{c_3}{r_2^3}, \quad (3.22)$$

kde

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_3 (1 + n_1^\circ), \quad c_3 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_3 (1 + n_3^\circ). \quad (3.23)$$

Poznamenejme, že v prvním přiblížení zatím nemusíme znát derivace $\frac{dr}{d\tau}$. Kombinací (3.22) a (3.14) dostaneme soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých ρ_1, ρ_2, ρ_3 a r_2 . Další potřebný vztah získáme umocněním a následným sečtením rovnic (3.4). Potom

$$r_i^2 = \rho_i^2 + 2C_0 \rho_i + R_i^2, \quad (3.24)$$

kde $C_0 = -(\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i)$. Vztah dokonce připomíná tvar kosinovy věty a skutečně jde odvodit i geometrickými úvahami. Více čtenář nalezne například v [19]. Problém je tedy v této fázi již v principu řešitelný. Vezměme (3.22) a dosadíme do (3.19). Výsledkem bude

$$d = n_1^\circ d_1 - d_2 + n_3^\circ d_3 + \frac{c_1 d_1 + c_3 d_3}{r_2^3} = -D \rho_2, \quad (3.25)$$

resp.

$$\rho_2 = P - \frac{Q}{r_2^3}, \quad (3.26)$$

kde

$$P = \frac{n_1^\circ d_1 - d_2 + n_3^\circ d_3}{-D}, \quad Q = \frac{c_1 d_1 + c_3 d_3}{D}. \quad (3.27)$$

Řešením problému první aproximace geocentrických vzdáleností je tedy soustava rovnic

$$\rho_i = P - \frac{Q}{r_i^3}, \quad r_i^2 = \rho_i^2 + 2C_0 \rho_i + R_i^2. \quad (3.28)$$

Soustavu (3.28) nazýváme *Lagrangeovou soustavou*. Tuto soustavu lze převést na jedinou rovnici osmého stupně vzhledem k r_i . Uvážíme-li, že analytické řešení takové rovnice až na výjimky neexistuje, je třeba problém řešit numerickými metodami. Jelikož pro náš problém určení geocentrických vzdáleností užíváme aproximativního přístupu, je záhodno uvést, jaká je přesnost aproximativního určení ρ_i . Lze ukázat [8] [19], že platí následující věty.

- Jsou-li n_1 a n_2 zatíženy chybou h -tého řádu vzhledem ke změřeným časovým intervalům τ_i , potom výsledným geocentrickým vzdálenostem odpovídá chyba $(h - 2)$ -ho řádu.
- Jsou-li n_1 a n_2 zatíženy chybou h -tého řádu, a zároveň jejich součet $n_1 + n_2$ pouze chybou $(h + 1)$ -ho řádu, potom chyba výsledných geocentrických vzdáleností je řádu $(h - 1)$.
- Pokud jsou k dispozici časově symetrická pozorování ($\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{2}\tau_2$) a veličinám n_1 a n_2 odpovídá chyba $(2h + 1)$ -ho řádu, pak výsledným geocentrickým vzdálenostem odpovídá chyba $(2h)$ -tého řádu.

3.2.4 Přesné hodnoty geocentrických vzdáleností

V této kapitole rozebereme metodu, pomocí níž budeme schopni určit geocentrické vzdálenosti teoreticky s libovolnou přesností. Je důležité poznamenat, že praxe je vždy poněkud jiná a přesnost určení geocentrických vzdáleností přirozeně závisí na vstupních údajích, jež jsou vždy zatíženy chybami. Postup, jímž Lagrange rozpracoval odvození *Lagrangeovy soustavy*, dále rozpracoval Gauss. Princip metody je účinný a velmi jednoduchý. Definujme následující veličiny \bar{y}_i

$$\bar{y}_1 = \frac{(r_2, r_3)}{[r_2, r_3]}, \quad \bar{y}_2 = \frac{(r_1, r_3)}{[r_1, r_3]}, \quad \bar{y}_3 = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]}. \quad (3.29)$$

Výrazy v kulatých závorkách představují výměry sektorů opsaných patřičnými průvodiči (omezené eliptickým obloukem a příslušnými vektory). Jistě také platí, že

$$n_1 = \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} = \frac{(r_2, r_3)\bar{y}_2}{(r_1, r_3)\bar{y}_1}, \quad n_3 = \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]} = \frac{(r_1, r_2)\bar{y}_2}{(r_1, r_3)\bar{y}_3}. \quad (3.30)$$

Z Keplerova zákona ploch, kdy jsou příslušné výměry eliptických sektorů úměrné času¹ ihned plyne

$$n_1 = \frac{\tau_1 \bar{y}_2}{\tau_2 \bar{y}_1} = n_1^{\circ} \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}, \quad n_3 = \frac{\tau_3 \bar{y}_2}{\tau_2 \bar{y}_3} = n_3^{\circ} \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}. \quad (3.31)$$

Přesnost nově spočtených veličin n_1 a n_3 je lepší než v první aproximaci. Nalezení \bar{y}_i a následné zpřesnění geocentrických vzdáleností jistě není zanedbatelnou částí nebeské mechaniky.

Výpočet poměru sektoru a trojúhelníku

Jednoduchým, ale poměrně pracným výpočtem [1], [8] lze ukázat, že problém nalezení $\bar{y} = \frac{(r, r')}{[r, r']}$, pro dané heliocentrické polohy \mathbf{r} a \mathbf{r}' , vede na řešení soustavy

$$x = m/\bar{y}^2 - l, \quad \bar{y}^3 - \bar{y}^2 = mX(x), \quad (3.32)$$

kde

$$m = \frac{\tau^2}{(2\sqrt{rr'} \cos f)^3}, \quad l = \frac{r + r'}{4\sqrt{rr'} \cos f} - \frac{1}{2}, \quad (3.33)$$

přičemž $\tau = k(t' - t)$ a $2f = (v' - v)$ je úhel sevřený vektory \mathbf{r}' a \mathbf{r} . Funkci $X(x)$ lze rozvinout následovně [8]

$$X(x) = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 \dots \right). \quad (3.34)$$

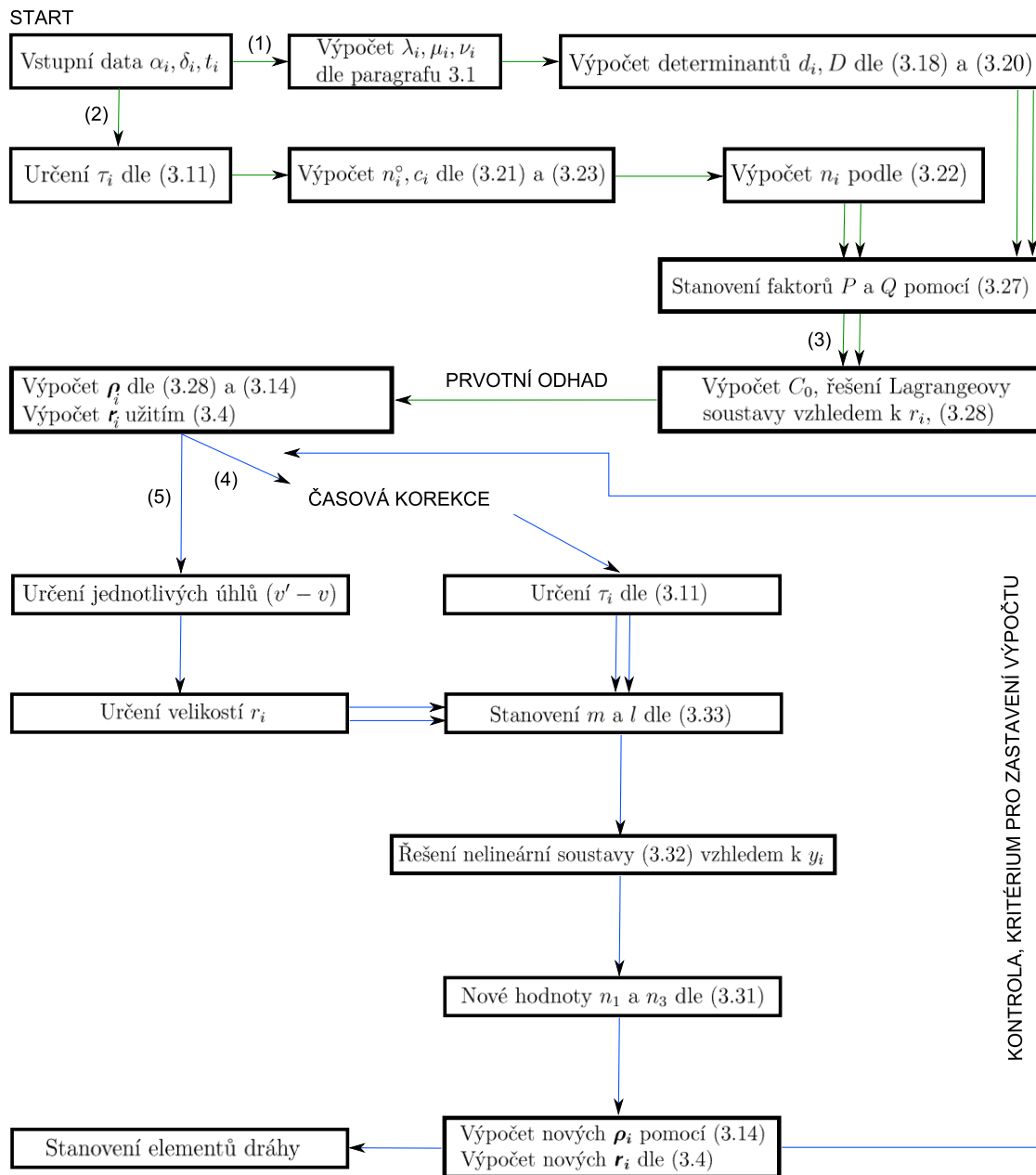
Soustavu je výhodné řešit iterační metodou, a to tak, že

¹Jedná se o čas, který uplyne při přemístění planety z bodu \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 , resp. do bodu \mathbf{r}_3 .

- v prvním přiblížení klademe $\bar{y}_{(1)} = 1$ a z první z rovnic spočteme $x_{(1)} = m - l$,
- získanou hodnotu $x_{(1)}$ dosadíme do druhé z rovnic $y_{(2)} = \frac{mX(x_{(1)})}{\bar{y}_{(1)}^2} + 1$,
- spočteme novou hodnotu $x_{(2)} = \frac{m}{\bar{y}_{(2)}} - l$ a následně opět $\bar{y}_{(3)}$.

Cyklus opakujeme celkem n -krát, kdy $(n + 1)$ -ní přiblížení již nepřináší nic nového.

Schéma výpočtu



Obrázek 3.2: Schéma výpočtu efemerid Gaussovou metodou.

Výše uvedené schéma jsem vytvořil kvůli velkému počtu svízelných kroků, jež jsou pro stanovení geocentrických vzdáleností Gaussovou metodou třeba. K tomuto účelu jsem taktéž

sestavil výpočetní skript `gauss.m`¹ v programu Matlab v.7.1, který je přiložen k diplomové práci. Poznamenejme, že správnost výpočtů lze zpětně porovnat se vstupními daty užitím vztahů

$$\begin{aligned}\rho_i \cos \delta_i \cos \alpha_i &= X_i + x_i, \\ \rho_i \cos \delta_i \sin \alpha_i &= Y_i + y_i, \\ \rho_i \sin \delta_i &= Z_i + z_i.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Kritérium pro zastavení výpočtu určují právě tyto formule, konkrétně jsem použil tato kritéria

$$|\alpha_i - \bar{\alpha}_i| < \epsilon_\alpha, \quad |\delta_i - \bar{\delta}_i| < \epsilon_\delta,\tag{3.36}$$

kde $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\delta}_i\}$ jsou spočtené hodnoty ze získaných geocentrických vzdáleností, $\{\alpha_i, \delta_i\}$ vstupní hodnoty, a $\epsilon_\delta, \epsilon_\alpha$ přesnosti vstupních veličin.

3.2.5 Výpočet dráhových elementů

Nyní přistoupíme k vůbec nejdůležitějšímu paragrafu této kapitoly, a to je finální určení elementů dráhy planety.

Určení parametru dráhy p

Z první kapitoly snadno nahlédneme, že platí následující relace

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = kp^{1/2}.\tag{3.37}$$

Uvážíme-li tvar Keplerova zákona ploch, potom plocha eliptického sektoru ohraničeného vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 a eliptickým obloukem splňuje

$$S = \frac{1}{2}h(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}kp^{1/2}(t_2 - t_1),\tag{3.38}$$

kde p je *parametr dráhy*. Vezmeme-li navíc v úvahu plochu trojúhelníku S_0 vytyčenou vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2

$$S_0 = \frac{1}{2}r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}r_1 r_2 \sin 2f,\tag{3.39}$$

potom s uvážením (3.29) získáme

$$\bar{y}_3 = \frac{kp^{1/2}(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2f}.\tag{3.40}$$

Pro určení parametru dráhy p uijme (3.40) a vybereme kupříkladu poslední člen z následující rovnice

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}{\tau_2} \bar{y}_2 = \frac{r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2)}{\tau_1} \bar{y}_1 = \frac{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)}{\tau_3} \bar{y}_3.\tag{3.41}$$

¹Součástí práce je i soubor `gauss.o` pro volně šiřitelný jazyk Octave.

Výpočet číselné výstřednosti ϵ

Vyjděme z rovnice kuželosečky (1.32) a označme

$$q_j = \frac{p}{r_j} - 1, \quad j = 1, 3. \quad (3.42)$$

Obdržíme ihned soustavu

$$\epsilon \cos v_1 = \frac{p}{r_1} - 1 = q_1, \quad \epsilon \cos v_3 = \frac{p}{r_3} - 1 = q_3. \quad (3.43)$$

Označme, poněkud uměle $v_3 = v_1 + (v_3 - v_1)$, a přepišme poslední z rovnic dle součtových vzorců na tvar

$$\epsilon \cos v_1 \cos (v_3 - v_1) - \epsilon \sin v_1 \sin (v_3 - v_1) = q_3. \quad (3.44)$$

Pro naše účely bude významný tento výraz

$$\epsilon \sin v_1 = \frac{q_1 \cos (v_3 - v_1) - q_3}{\sin (v_3 - v_1)}. \quad (3.45)$$

Kombinací (3.43) a (3.45) spočteme ϵ a pravé anomálie v_1 a v_3 .

Stanovení velké poloosy a

Velikost hlavní poloosy a se následně snadno určí pomocí známého vztahu

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}. \quad (3.46)$$

Výpočet střední anomálie M a doby průchodu pericentrem T

Dále by nás mohla zajímat *střední anomálie* M . Tu snadno určíme z *Keplerovy rovnice* [1]

$$M_i = E_i - \epsilon \sin E_i \quad i = 1, 3, \quad (3.47)$$

kde E_i jsou patřičné *excentrické anomálie* splňující známé relace

$$E_i = 2 \arctan \left[\left(\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \right)^{1/2} \tan \frac{1}{2} v_i \right]. \quad (3.48)$$

Pro střední anomálii M navíc platí [1]

$$M_i = n(t_i - T), \quad (3.49)$$

kde $n = \frac{2\pi}{P}$ (P je perioda oběhu) je tzv. *střední denní pohyb*. Ihned tedy máme rovnost vhodnou pro výpočet n

$$n = \frac{M_3 - M_1}{t_3 - t_1}. \quad (3.50)$$

Určení T je již triviální záležitostí

$$T = t_1 - \frac{M_1}{n} = t_3 - \frac{M_3}{n}. \quad (3.51)$$

Poslední rovnice může též sloužit ke kontrole získané hodnoty T .

Výpočet i, ω, Ω

K výpočtu se užívá tzv. vektorových elementů \mathbf{P} a \mathbf{Q} . Bylo by nevhodné nepojednat o jejich podstatě a funkci, kterou v nebeské mechanice zastupují. Uvažme problém, kdy chceme transformovat pravoúhlé heliocentrické souřadnice v rovině dráhy (označujeme je závorkou) na pravoúhlé heliocentrické rovníkové souřadnice. Aplikací matice otočení okolo osy (x) resp. x o úhel ϵ získáme transformační vztahy

$$\begin{aligned}x &= (x), \\y &= (y) \cos \epsilon - (z) \sin \epsilon, \\z &= (y) \sin \epsilon + (z) \cos \epsilon,\end{aligned}\tag{3.52}$$

kde ϵ je úhel sevřený mezi ekliptikou a světovým rovníkem. Jednoduchým, ale již pracnějším výpočtem [1] lze ukázat, že můžeme příslušnou transformaci zapsat následovně

$$\mathbf{r} = \mathbf{P}(x) + \mathbf{Q}(y) = \mathbf{P}r \cos v + \mathbf{Q}r \sin v.\tag{3.53}$$

Uvedme identity, které pro vektorové elementy platí

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{Q}| = 1, \quad \mathbf{P}\mathbf{Q} = 0.\tag{3.54}$$

Pro naše účely budou stačit tyto dvě rovnice

$$x_1 = P_x r_1 \cos v_1 + Q_x r_1 \sin v_1,\tag{3.55}$$

$$x_3 = P_x r_3 \cos v_3 + Q_x r_3 \sin v_3.\tag{3.56}$$

Po úpravě máme

$$P_x = \frac{x_1 r_3 \sin v_3 - x_3 r_1 \sin v_1}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}, \quad Q_x = \frac{x_3 r_1 \cos v_1 - x_1 r_3 \cos v_3}{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}.\tag{3.57}$$

Po substituci $v_3 = v_1 + (v_3 - v_1)$ a pár úpravách získáme

$$P_x = x_1 \frac{\cos v_1}{r_1} - \left[x_3 - \frac{x_1 r_3 \cos(v_3 - v_1)}{r_1} \right] \frac{\sin v_1}{r_3 \sin(v_3 - v_1)},\tag{3.58}$$

$$Q_x = x_1 \frac{\sin v_1}{r_1} + \left[x_3 - \frac{x_1 r_3 \cos(v_3 - v_1)}{r_1} \right] \frac{\cos v_1}{r_3 \sin(v_3 - v_1)}.\tag{3.59}$$

Analogicky spočítáme P_y, P_z, Q_y, Q_z . Odvození závěrečných vztahů pro výpočet dráhových elementů není nikterak těžké, avšak vzhledem k rozsahu práce příliš zdlouhavé. Případného zájemce odkazují na [1], [8], [31].

$$\sin i \sin \omega = P_z \cos \epsilon - P_y \sin \epsilon,\tag{3.60}$$

$$\sin i \cos \omega = Q_z \cos \epsilon - Q_y \sin \epsilon,\tag{3.61}$$

$$\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \epsilon,\tag{3.62}$$

$$\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega,\tag{3.63}$$

$$\cos i = -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \csc \Omega.\tag{3.64}$$

Alternativní metoda pro určení i , ω , Ω

Postup této metody uvádí například [1]. Neuvažujme již transformaci uvedenou v předešlém oddílu a pracujme s heliocentrickými souřadnicemi v rovině dráhy. Jednotkový vektor kolmý k rovině dráhy má složky

$$\sin i \sin \Omega, \quad -\sin i \cos \Omega, \quad \cos i. \quad (3.65)$$

Uvažme dále vektorový součin $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ a označme velikost tohoto vektoru $2[r_1, r_2]$. Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} y_1 z_2 - y_2 z_1 &= 2[r_1, r_2] \sin i \sin \Omega, \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 &= -2[r_1, r_2] \sin i \cos \Omega, \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 &= 2[r_1, r_2] \cos i, \end{aligned} \quad (3.66)$$

kde $[r_1, r_2] = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)$. Výpočet i a Ω je pak již triviální záležitostí.

Posledním chybějícím elementem je vzdálenost perihelu ω . K jeho stanovení můžeme použít vztahy tak, jak jsou uvedeny v [1]

$$\begin{aligned} r_i \cos(v_i + \omega) &= x_i \cos \Omega + y_i \sin \Omega, \\ r_i \sin(v_i + \omega) &= z_i \csc i. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Tímto považuji tuto kapitolu za uzavřenou, neboť výpočet orbitálních elementů dráhy ze tří pozorování je již s užitím dnešní výpočetní techniky lehkou záležitostí. K diplomové práci je opět přiložen autorem vytvořený skript v programu Matlab, verze 7.1, který dané výpočetní úkony provádí. Závěrem uvedu vzor zápisu parametrů dráhy jak jej uvádí *Minor planet center* (MPC) [28].

(11134) Ceske Budejovice

[Display all designations for this object](#) / [Show naming citation](#)

Epoch 2008 Nov. 30.0 TT = JDT 2454800.5			MPC		
M 244.24244	(2000.0)	P	Q		
n 0.19840913	Peri. 139.51573	+0.76005239	+0.64986181		T = 2455383.92859 JDT
a 2.9113535	Node 179.95306	-0.60438596	+0.70688085		q = 2.8495895
e 0.0212149	Incl. 1.87938	-0.23882626	+0.27928319		
P 4.97	H 13.9	G 0.15	U 0		

From 281 observations at 9 oppositions, 1991-2004, mean residual 0".64.

Last observed on 2008 May 8. Perturbed ephemeris below based on elements from *MPO* 62180.

Object has only observed on only one night at the latest opposition.

Discovery date : 1996 12 04

Discovery site : Klet

Discoverer(s) : Tichy, M., Moravec, Z.

Obrázek 3.3: Vzor výstupu orbitálních elementů tak jak je udává MPC.

V hlavičce je uvedená příslušná epocha pro niž platí níže uvedené parametry dráhy. Následuje rovněž zápis epochy *JDT* v juliánském datu. Dále zde nalezneme datum posledního pozorování objektu. Následně pak M , n , a , e jsou příslušné dráhové elementy (e má význam ϵ), *Peri.* vzdálenost perihelu ω , *Node.* délka výstupného uzlu Ω , *Incl.* sklon dráhy i , P a Q složky vektorových elementů, P perioda oběhu, H absolutní jasnost tělesa a G jeho odrazivost.

Kapitola 4

Evoluce dráhových elementů v čase

Problém dvou těles rozebraný v kapitole 2 je jistým přiblížením reálných systémů, obsahujících obecně N těles. V případě, kdy chceme popsat chování planet nebo planetek ve sluneční soustavě, je nutné přejít k poněkud obecnějším úvahám. V dalším textu budeme uvažovat rušený pohyb planety okolo Slunce.

V takovéto reálné situaci platí, že orbitální elementy a, e, i, \dots jsou obecně funkcí času. Pro naše účely definujeme tzv. *oskulační elementy*, což jsou elementy, které by pro daný čas odpovídaly dráhovým elementům problému dvou těles, tak jak je v daný čas určují heliocentrické vektory polohy a rychlosti planety $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Oskulační dráhový element v daném čase tedy odpovídá elementu dráhy, po které by se bez přítomnosti poruch těleso pohybovalo.

Chceme-li studovat orbitální vývoj nějaké planety v čase, potřebujeme znát buď závislost orbitálních elementů na čase, či přímo časovou závislost heliocentrického polohového vektoru planety $\mathbf{r}(t)$. Tomuto problému se věnuje rozsáhlá část nebeské mechaniky.

Při jeho řešení můžeme postupovat dvojí cestou - buď *analyticky*, kdy hledáme rozvoje tzv. *poruchové funkce* (viz níže) v řady obsahující orbitální elementy, anebo řešení hledáme metodami *numerické matematiky*.

4.1 Analytický přístup

Nechť $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ představují polohové vektory Slunce, rušící planety a planety v inerciálním těžištvém systému. Pro zrychlení \mathbf{a}_i platí známý vztah

$$\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i = \sum_{j \neq i} -GM_j \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3}. \quad (4.1)$$

Vzhledem k tomu, že rozebíráme rušený problém dvou těles, přejdeme opět k relativním souřadnicím, nyní se středem ve Slunci. Provedeme tudíž transformaci souřadnic z inerciálního těžištvého systému do neinerciálního systému heliocentrického.

Položme tedy $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$. Poznamenejme, že touto transformací se pohybové rovnice poněkud zesložití. Jelikož se jedná o neinerciální soustavu, objeví se také příslušné zdánlivé síly a zdánlivá zrychlení. Pro zrychlení planety platí

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_0 &= -GM_0 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} - GM_1 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} - GM_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - GM_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \\ &= -G(M_0 + M_2) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + GM_1 \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde člen $M_0\mathbf{r}_2$ vyjadřuje působení Slunce na planetku, dále pak $M_2\mathbf{r}_2$ působení planetky na Slunce (což zpravidla zanedbáváme), třetí člen představuje působení planety na planetku, poslední pak působení planety na Slunce. Pohybovou rovnici (4.2) lze zapsat také ve tvaru gradientu ze součtu skalárních funkcí ϕ_2, \mathcal{R}_2 vzhledem k \mathbf{r}_2 takto

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_{\mathbf{r}_2} \left[\underbrace{-G(M_0 + M_2)\frac{1}{r_2} - GM_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mathbf{r}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right)}_{U=\phi_2+\mathcal{R}_2} \right]. \quad (4.3)$$

Relativní zrychlení $\ddot{\mathbf{r}}_2$ jsme tedy vyjádřili jako záporně vzatý gradient potenciálu U

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_{\mathbf{r}_2} U. \quad (4.4)$$

Vynásobením předchozí rovnice hmotností M_2 dostaneme

$$M_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_{\mathbf{r}_2}(M_2\phi_2 + M_2\mathcal{R}_2). \quad (4.5)$$

Výraz $M_2\phi_2$ představuje potenciální energii příslušné dvojice těles (konkr. Slunce - planetka), \mathcal{R}_2 pak potenciál, jež má původ v druhém, rušícím tělese (planetě). Naprosto analogicky bychom dospěli k výrazu pro planetu

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1} \left[\underbrace{-G(M_0 + M_1)\frac{1}{r_1} - GM_2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mathbf{r}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)}_{U=\phi_1+\mathcal{R}_1} \right]. \quad (4.6)$$

Uvažme nyní systém sestávající se ze Slunce o hmotnosti m_0 a N - tice planet o hmotnostech m_1, m_2, \dots, m_N . Pohybové rovnice budou analogické rovnicím předešlým. Lze je zapsat ve tvaru

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Ve fázi, kdy budeme uvažovat přítomnost dalšího tělesa se zanedbatelnou hmotností (planetky) o heliocentrickém polohovém vektoru \mathbf{r} v gravitačním poli Slunce a N - tice planet, dospějeme k pohybové rovnici planetky

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_0}{r^3} \mathbf{r} + \sum_{j=1}^N Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right). \quad (4.8)$$

4.1.1 Zavedení poruchové funkce, rozvoje do orbitálních elementů

Pro definici *poruchové (perturbační) funkce* vyjdeme z rovnic (4.7), které přepíšeme takto

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \nabla_{\mathbf{r}_i} \mathcal{R}_i, \quad (4.9)$$

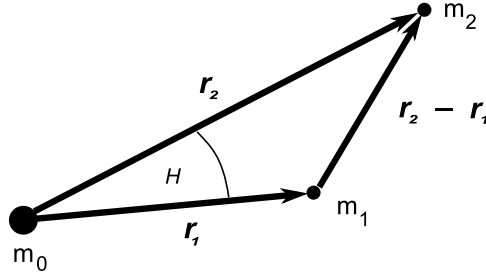
kde \mathcal{R}_i je právě zmiňovaná *poruchová funkce*

$$\mathcal{R}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} - \mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right). \quad (4.10)$$

Je dobré si všimnout, že každé z těles má „svoji“ poruchovou funkci. Pro obecné úvahy se však vzorec (4.9) vždycky nehodí. Ukazuje se totiž, že pro více jak tři planety obíhající okolo

Slunce začíná poměrně hodně vzrůstat pracnost výpočtů, což je dáno jednak počtem členů v poruchové funkci, ale také tím, že každá z planet má vlastní poruchovou funkci. Pro složitější a náročnější výpočty je potom vhodné použít moderních rafinovaných numerických metod nebeské mechaniky.

Zpočátku budeme pro jednoduchost uvažovat pouze Slunce o hmotnosti m_0 a dvě planety o heliocentrických polohových vektorech $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ a hmotnostech m_1, m_2 . Situaci osvětluje obrázek.



Obrázek 4.1: Polohové vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 planet vzhledem ke Slunci m_0 .

Naší nejbližší snahou tedy bude najít vhodné rozvoje poruchové funkce. Užitím kosinové věty dojdeme ke vztahu

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos H, \quad (4.11)$$

resp.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{r_2} \left[1 - 2\frac{r_1}{r_2} \cos H + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.12)$$

Výraz $\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$ může být vyjádřen pomocí *Legendreových polynomů*

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l P_l(\cos H), \quad (4.13)$$

kde

$$P_l(\cos H) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^l} \binom{2i}{i} \binom{2l-2i}{l-i} \cos(l-2i)H, \quad (4.14)$$

přičemž platí důležité rekurentní formule

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \quad P_0(x) = 1, P_1(x) = x. \quad (4.15)$$

Jednoduchými výpočty odvodíme

$$P_0(\cos H) = 1, \quad P_1(\cos H) = \cos H, \quad P_2(\cos H) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 H - 1), \dots \quad (4.16)$$

Jak již bylo zmíněno výše, budeme uvažovat pouze dvě planety, tzn., poruchová funkce (4.10) bude pro bližší z nich ve tvaru

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \mu_2 \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{r_2^3}, \quad (4.17)$$

pro vzdálenější potom

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mu_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mu_1 \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1}{r_1^3}, \quad (4.18)$$

kde $\mu_1 = Gm_1$ a $\mu_2 = Gm_2$. Nyní napíšeme obě poruchové funkce pomocí Legendreových polynomů. Vezmeme (4.13) a dosadíme do (4.17), resp. (4.18). Poznamenejme ještě, že členy $P_0(\cos H)$ zanedbáváme, neboť nezávisí na r_1 , resp. r_2 , a my se nakonec ve svých úvahách budeme stejně zabývat gradienty z poruchových funkcí. Při výpočtu se ukáže velmi vhodné rozepsat skalární součin vektorů \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 takto

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = r_1 r_2 P_1(\cos H). \quad (4.19)$$

Mezikrok patřičného výpočtu vypadá následovně

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mu_2}{r_2} \left(\frac{r_1}{r_2} P_1(\cos H) + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^l P_l(\cos H) - \frac{r_1}{r_2} P_1(\cos H) \right). \quad (4.20)$$

Finálně tedy

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mu_2}{r_2} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^l P_l(\cos H). \quad (4.21)$$

Analogicky potom máme

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mu_1}{r_2} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^l P_l(\cos H) + \frac{\mu_1 r_1}{r_2^2} P_1(\cos H) - \frac{\mu_1 r_2}{r_1^2} P_1(\cos H). \quad (4.22)$$

V dalších úvahách se již budeme zaměřovat na rozvoj poruchových funkcí do orbitálních elementů. Tyto rozvoje se totiž v poruchovém počtu nebeské mechaniky ukazují jako nezbytné. Ostatně, o tom se posléze čtenář sám přesvědčí.

V rozvojích poruchové funkce užijeme orbitálních elementů¹ $(a, e, I, \bar{\omega}, \Omega, \lambda)$, kde λ je tzv. *střední délka*, což je lomený úhel definovaný vztahem $\lambda = \bar{\omega} + M$, přičemž M je střední anomálie a $\bar{\omega}$ délka perihelu. Výsledkem našich úvah by pak měl být rozvoj poruchové funkce \mathcal{R}_1 do orbitálních elementů obou planet ve tvaru

$$\mathcal{R}_1 = \mu_2 \sum S(a_1, a_2, e_1, e_2, I_1, I_2) \cos \varphi, \quad (4.23)$$

kde φ je úhel daný „povolenou“ lineární kombinací

$$\varphi = j_1 \lambda_2 + j_2 \lambda_1 + j_3 \bar{\omega}_2 + j_4 \bar{\omega}_1 + j_5 \bar{\omega}_2 + j_6 \bar{\omega}_1, \quad (4.24)$$

přičemž j_i jsou přirozená čísla $(1, 2, \dots, 6)$. Dále platí $\sum_{i=1}^6 j_i = 0$. Poslední podmínka plyne z toho, že při otočení souřadnic se nesmí změnit poruchová funkce. Když budeme uvažovat kupříkladu otočení o úhel α , potom

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= j_1(\lambda_2 + \alpha) + j_2(\lambda_1 + \alpha) + \dots + j_6(\bar{\omega}_1 + \alpha) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^6 j_i + \varphi = \bar{\varphi} \Rightarrow \sum_{i=1}^6 j_i = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ze znalosti explicitního vyjádření funkce S a patřičných povolených kombinací úhlů ve φ , lze pak identifikovat členy, které dominantně ovlivňují tvar pohybových rovnic, a naopak také členy, které mají vliv vesměs zanedbatelný.

¹Oproti kapitole 2 přebíráme poněkud vhodnější označení orbitálních elementů $e \triangleq \epsilon, I \triangleq i$.

Koplanární případ

Studujme povahu těchto rozvojų, především poukážeme na rozvoj poruchové funkce ve speciálním případě, kdy roviny drah planet leží v jedné rovině. V této fázi pak přirozeně můžeme zanedbat členy vycházející z inklinací I_1 a I_2 . V takovém případě lze úhel H zapsat jako

$$H = (v_2 + \bar{\omega}_2) - (v_1 + \bar{\omega}_1), \quad (4.26)$$

kde v_1 a v_2 jsou pravé anomálie. Dvojnásobnou aplikací součtových vzorců dostaneme výraz pro $\cos H$ v této podobě

$$\begin{aligned} \cos H = & (\cos v_2 \cos \bar{\omega}_2 - \sin v_2 \sin \bar{\omega}_2)(\cos v_1 \cos \bar{\omega}_1 - \sin v_1 \sin \bar{\omega}_1) + \\ & + (\sin v_2 \cos \bar{\omega}_2 + \cos v_2 \sin \bar{\omega}_2)(\sin v_1 \cos \bar{\omega}_1 + \cos v_1 \sin \bar{\omega}_1). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nyní přistoupíme k rozvojųm $\sin v_1$, $\cos v_1$, resp. $\sin v_2$, $\cos v_2$ [1], [20]

$$\begin{aligned} \sin v_1 = & 2\sqrt{1 - e_1^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{de_1} J_s(se_1) \sin sM_1 \\ = & \sin M_1 + e_1 \sin 2M_1 + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M_1 - \frac{7}{8} \sin M_1 \right) + \\ & + e_1^3 \left(\frac{4}{3} \sin 4M_1 - \frac{7}{6} \sin 2M_1 \right) + \\ & + e_1^4 \left(\frac{17}{192} \sin M_1 - \frac{207}{128} \sin 3M_1 + \frac{625}{384} \sin 5M_1 \right) + \mathcal{O}(e_1^5), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \cos v_1 = & -e_1 + \frac{2(1 - e_1^2)}{e_1} \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se_1) \cos sM_1 \\ = & \cos M_1 + e_1(\cos 2M_1 - 1) + \frac{9e_1^2}{8}(\cos 3M_1 - \cos M_1) + \\ & + \frac{4e_1^3}{3}(\cos 4M_1 - \cos 2M_1) + \\ & + e_1^4 \left(\frac{25}{192} \cos M_1 - \frac{225}{128} \cos 3M_1 + \frac{625}{384} \cos 5M_1 \right) + \mathcal{O}(e_1^5), \end{aligned} \quad (4.29)$$

kde $J_s(se)$ je *Besselova funkce*. Tu můžeme spočítat pomocí určitého integrálu [1] následovně

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(sE - se \sin E) dE. \quad (4.30)$$

Důležitý je také vztah pro derivaci Besselovy funkce $J'_s(x) = \frac{1}{2}(J_{s-1}(x) - J_{s+1}(x))$.

Věnujme pozornost již samotnému rozvoji $\cos H$ s tím, že budeme uvažovat pro jednoduchost pouze první tři členy v (4.28) a (4.29). Ty dosadíme do (4.27) a uvážíme jen členy do řádu e_1^2 , e_2^2 a e_1e_2 . Vzhledem k tomu, že se jedná o mechanicky značně náročný výpočet, je vhodné k těmto účelům užít některý z programů *výpočetní algebry*, či, tzv. *algebraických manipulátorů*. Dobrými programy jsou například *Maple*, program *MuPad*, který je součástí

Matlabu, nebo volně šířitelný *OpenAxiom*. Výrazy se ve výše zmíněných zpravidla třídí a zjednodušují příkazy *simplify*, *combine*, atd. Výsledkem bude

$$\begin{aligned}
\cos H = & -\frac{1}{8} \cos(M_1 + M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_2^2 - \cos(M_1 - M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_2^2 + & (4.31) \\
& + \frac{9}{8} \cos(M_1 - 3M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_2^2 - \cos(M_1 - M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_1^2 + \\
& + \frac{9}{8} \cos(3M_1 - M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_1^2 - \frac{1}{8} \cos(M_1 + M_2 + \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) e_1^2 - \\
& - \cos(2M_2 + \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) e_1 e_2 + \cos(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) e_1 e_2 + \\
& + \cos(2M_1 - 2M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_1 e_2 - \cos(2M_1 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_1 e_2 + \\
& + \cos(M_1 - 2M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_2 - \cos(M_1 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_2 + \\
& + \cos(2M_1 - M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) e_1 - \cos(M_2 + \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) e_1 + \\
& + \cos(M_1 - M_2 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1).
\end{aligned}$$

Předchozí rovnici je možné přepsat pomocí středních délek a substitucí $M_1 = \lambda_1 - \bar{\omega}_1$ a $M_2 = \lambda_2 - \bar{\omega}_2$ takto

$$\begin{aligned}
\cos H = & (1 - e_1^2 - e_2^2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - e_1 \cos(\lambda_2 - \bar{\omega}_1) - e_2 \cos(\lambda_1 - \bar{\omega}_2) + & (4.32) \\
& + e_1 \cos(2\lambda_1 - \lambda_2 - \bar{\omega}_1) + e_2 \cos(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \bar{\omega}_2) - \\
& - \frac{1}{8} e_1^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\bar{\omega}_1) - \frac{1}{8} e_2^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\bar{\omega}_2) + \\
& + \frac{9}{8} e_1^2 \cos(3\lambda_1 - \lambda_2 - 2\bar{\omega}_1) + \frac{9}{8} e_2^2 \cos(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\bar{\omega}_2) + \\
& + e_1 e_2 \cos(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + e_1 e_2 \cos(2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) - \\
& - e_1 e_2 \cos(2\lambda_1 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) - e_1 e_2 \cos(2\lambda_2 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2).
\end{aligned}$$

Je také důležité si všimnout, že suma koeficientů j_i v argumentech funkce kosinus je rovna nule. Nyní se vrátíme k vyjádření poruchové funkce ve tvaru (4.21). Tu lze poněkud uměle zapsat jako

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mu_2}{a_2} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^{l+1} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^l P_l(\cos H), \quad (4.33)$$

kde $\alpha = \frac{a_1}{a_2} < 1$. Tento tvar je zvláště výhodný z toho důvodu, že se v něm vyskytují podíly průvodičů a velkých poloos, pro něž známe odpovídající rozvoje v excentricity a střední anomálie, které nyní použijeme. Čtenář jejich kompletní odvození nalezne například ve [1], [19]. Pro naše účely a aproximace uvedu pouze rozvoje do druhého řádu, přičemž pro další zjednodušení uvážíme pouze první člen $l = 2$

$$\left(\frac{r_1}{a_1}\right)^2 \approx 1 - 2e_1 \cos M_1 + \left(\frac{1}{2}\right) e_1^2 (3 - \cos 2M_1), \quad (4.34)$$

resp.

$$\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3 \approx 1 + 3e_2 \cos M_2 + \left(\frac{3}{2}\right) e_2^2 (1 + 3 \cos M_2). \quad (4.35)$$

Jednoduchým výpočtem pak snadno odvodíme i další výraz

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3 &\approx 1 + \frac{3}{2}e_1^2 + \frac{3}{2}e_2^2 - 2e_1 \cos M_1 + 3e_2 \cos M_2 - \\ &- \frac{1}{2}e_1^2 \cos 2M_1 + \frac{9}{2}e_2^2 \cos 2M_2 - \\ &- 3e_1 e_2 \cos (M_1 - M_2) - 3e_1 e_2 \cos (M_1 + M_2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

kde jsme opět uvažovali členy pouze do řádu $e_1^2, e_2^2, e_1 e_2$.

Ze znalosti $P_2(\cos H) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 H - 1)$ potom spočteme (pro $l = 2$) poruchovou funkci \mathcal{R}_1 . Na tomto místě je potřeba poznamenat, že s rostoucím l počet členů rapidně narůstá a výpočty se stávají velice složitými. Proto je vhodné a žádoucí nejen v této partii nebeské mechaniky hojně užívat počítačů a nejrůznějších výpočetních matematických systémů. Tím bych koplanární případ rozvoje poruchové funkce ukončil a přešel bych na poněkud obecnější analytický přístup, kdy dráhy těles již neleží v jedné rovině.

Obecný případ

V tomto odstavci budeme brát v úvahu reálný případ, kdy $I_1 \neq 0$ a $I_2 \neq 0$. Zaměřím se především na přímé metody rozvoje poruchové funkce.

Uvažme zpětně vyjádření poruchových funkcí vnitřní a vnější planety ve tvaru (4.17), resp. (4.18). Lze je přepsat do následující přehledné formy

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mu_2}{a_2} \mathcal{R}_D + \frac{\mu_2}{a_2} \alpha \mathcal{R}_{E_1}, \quad (4.37)$$

kde $\mathcal{R}_D = \frac{a_2}{|r_2 - r_1|}$ je tzv. *hlavní část* poruchové funkce, $\mathcal{R}_{E_1} = -\left(\frac{r_1}{a_1}\right) \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^2 \cos H$ potom *část vedlejší*. Obdobně pak pro poruchovou funkci vnější planety

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mu_1}{a_2} \mathcal{R}_D + \frac{\mu_1}{a_2} \alpha^{-2} \mathcal{R}_{E_2}, \quad (4.38)$$

přičemž $\mathcal{R}_{E_2} = -\left(\frac{r_2}{a_2}\right) \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 \cos H$.

Další úvahy směřují k rozvojem poruchových funkcí \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 do jednotlivých orbitálních elementů odpovídající dvojice obíhajících planet. Právě k tomuto účelu je důležité poruchovou funkci rozdělit tak, jak bylo uvedeno výše. Dle (4.11) jednoduchou úpravou získáme

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\mathcal{R}_D}{a_2} = \left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos H\right)^{-1/2}, \quad (4.39)$$

kde $\Delta = |r_2 - r_1|$. Ze skalárního součinu $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ plyne

$$\cos H = \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \cdot \frac{z_2}{r_2}, \quad (4.40)$$

v němž lze heliocentrické souřadnice vyjádřit jednoduchými vztahy [19]

$$\frac{x_1}{r_1} = \cos \Omega_1 \cos (\omega_1 + v_1) - \sin \Omega_1 \sin (\omega_1 + v_1) \cos I_1, \quad (4.41)$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \sin \Omega_1 \cos (\omega_1 + v_1) + \cos \Omega_1 \sin (\omega_1 + v_1) \cos I_1, \quad (4.42)$$

$$\frac{z_1}{r_1} = \sin (\omega_1 + v_1) \sin I_1, \quad (4.43)$$

kde ω_1 a ω_2 jsou odpovídající argumenty perihelu. Naprosto analogicky by se rozepsaly výrazy $\frac{x_2}{r_2}$, $\frac{y_2}{r_2}$ a $\frac{z_2}{r_2}$. Rozvoj hlavní části poruchové funkce pro nás ale zatím příliš vhodný není, neboť v *Lagrangeových planetárních rovnicích* (viz *paragraf 4.1.3*) se nevyskytují parciální derivace podle pravé anomálie. Proto budeme s úpravami hlavní části poruchové funkce ještě dále pracovat. Uvažme definici

$$\mathbb{H} = \cos H - \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.44)$$

přičemž $\theta_1 = \bar{\omega}_1 + v_1$, $\theta_2 = \bar{\omega}_2 + v_2$. Záhy se ukáže, že výše uvedenou volbou jsou ve výrazu pro \mathbb{H} skutečně zakomponovány patřičné inklinace I_1, I_2 , resp. $\sin I_1$ a $\sin I_2$.

Výraz

$$\frac{1}{\Delta} = \left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathbb{H}) \right]^{-1/2} \quad (4.45)$$

lze rozvinout v Maclaurinovu řadu¹ vzhledem k \mathbb{H}

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + r_1r_2\mathbb{H} \cdot \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(r_1r_2\mathbb{H})^2 \cdot \frac{1}{\Delta_0^5} + \dots \quad (4.46)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}r_1r_2\mathbb{H} \right)^i \cdot \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}, \quad (4.47)$$

s tím, že

$$\frac{1}{\Delta_0} = \left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]^{-1/2}. \quad (4.48)$$

Další snahou pak bude vyjádřit člen $\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}$ pomocí dráhových elementů a, e . Definujme²

$$\rho_0 = \left[a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]^{1/2}. \quad (4.49)$$

Abychom vpravili do členu $\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}$ výše uvedené orbitální elementy, je vhodné tento člen rozvinout v Taylorovu řadu v proměnných r_1 a r_2 okolo bodů a_1 a a_2 . Není těžké odvodit tvar Taylorova polynomu funkce dvou proměnných $f(x, y)$ okolo bodu (x_0, y_0)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0)(dx, dy) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)(dx, dy) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0)(dx, dy), \quad (4.50)$$

kde

$$d^k f(x_0, y_0)(dx, dy) = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = k}} \left(\frac{k!}{k_1!k_2!} \right) \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \Big|_{(x_0, y_0)} dx^{k_1} dy^{k_2}. \quad (4.51)$$

V našem případě $(x, y) \rightarrow (r_1, r_2)$, $(x_0, y_0) \rightarrow (a_1, a_2)$ a $dx = (r_1 - a_1)$, $dy = (r_2 - a_2)$. Vypsáním prvních členů v Taylorově rozvoji dojdeme jednoduchým výpočtem k následujícímu vyjádření výrazu $\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}$

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + \frac{1}{1!}(r_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \right) \Big|_{(a_1, a_2)} + \frac{1}{1!}(r_2 - a_2) \frac{\partial}{\partial r_2} \left(\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \right) \Big|_{(a_1, a_2)} + \dots \quad (4.52)$$

Předchozí rozvoj se dá ještě dále upravit, když vezmeme v úvahu jednoduchý vztah

$$\frac{\partial^k}{\partial r_1^k} \left(\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \right) \Big|_{(a_1, a_2)} = \frac{\partial^k}{\partial a_1^k} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right). \quad (4.53)$$

¹Odpovídá Taylorovu rozvoji funkce $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ v bodě $x_0 = 0$.

²Nezaměňovat s geocentrickou vzdáleností.

Potom (4.52) nabývá této podoby

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + \frac{1}{1!} \left[(r_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + (r_2 - a_2) \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) \right] + \dots \quad (4.54)$$

Zavedme následující substituce

$$\epsilon_1 = \frac{r_1}{a_1} - 1, \quad \epsilon_2 = \frac{r_2}{a_2} - 1, \quad (4.55)$$

které plynou z rozvoje (4.70), přičemž $\mathcal{O}(e_1)$ a $\mathcal{O}(e_2)$ jsou zahrnuty v ϵ_1 a ϵ_2 . Příslušný Taylorův polynom (s vypsáním členů do druhého řádu) následuje

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[1 + \frac{1}{1!} (\epsilon_1 D_{1,0} + \epsilon_2 D_{0,1}) + \frac{1}{2!} (\epsilon_1^2 D_{2,0} + 2\epsilon_1 \epsilon_2 D_{1,1} + \epsilon_2^2 D_{0,2}) \dots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}, \quad (4.56)$$

kde s přihlédnutím k (4.52) $D_{m,n}$ představuje diferenciální operátor, který je určen jako

$$D_{m,n} = a_1^m a_2^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n}. \quad (4.57)$$

Podařilo se nám do $\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}$ zakomponovat orbitální elementy. Nyní by bylo vhodné diskutovat tvar členu $\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}$. Ten lze především přepsat takto

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = \left[a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]^{-(i+\frac{1}{2})} = \quad (4.58)$$

$$= a_2^{-(2i+1)} \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]^{-(i+\frac{1}{2})} \\ = a_2^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.59)$$

přičemž $b_s^{(j)}(\alpha)$ jsou tzv. *Laplaceovy koeficienty*, které lze spočítat pomocí určitého integrálu

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^{-s} \cos(j\psi) d\psi, \quad s = 1/2, 3/2, \dots \quad (4.60)$$

Odvození (4.59) čtenář nalezne v některých detailnějších monografiích, které se věnují nebeské mechanice [1], [19]. Dosazením (4.59) do (4.56) dostaneme

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0,0} + \frac{1}{1!} (\epsilon_1 A_{i,j,1,0} + \epsilon_2 A_{i,j,0,1}) + \\ + \frac{1}{2!} (\epsilon_1^2 A_{i,j,2,0} + 2\epsilon_1 \epsilon_2 A_{i,j,1,1} + \epsilon_2^2 A_{i,j,0,2}) + \dots] \cos j(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.61)$$

s tím, že jsme zavedli nový diferenciální operátor $A_{i,j,m,n}$ takto

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left(a_2^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right) = a_1^m a_2^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n} \left(a_2^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) \right). \quad (4.62)$$

Výraz (4.62) užitím binomické věty zapíšeme v kompaktním tvaru

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon_1^k \epsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta_1 - \theta_2). \quad (4.63)$$

Při aplikaci operátoru $A_{i,j,m,n}$ je nutné poznamenat, že tento sám o sobě působí také na Laplaceovy koeficienty, které jsou implicitní funkcí a_1 i a_2 , tzn. $b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) = b_{i+1/2}^{(j)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$. Dosadíme-li (4.63) do (4.47), potom s uvážením (4.39) obdržíme *hlavní tvar* poruchové funkce v této formě

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r_1}{a_1} \frac{r_2}{a_2} \mathbb{H} \right)^i \frac{a_1^i a_2^{i+1}}{2} \times \\ & \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon_1^k \epsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Je také dobré uvědomit si, že inklinace I_1 a I_2 jsou obsaženy pouze ve členu \mathbb{H} , excentricity potom v ϵ_1 a ϵ_2 .

Při aplikaci diferenciálního operátoru $A_{i,j,m,n}$ je užitečné zmínit některé důležité formule týkající se Laplaceových koeficientů

$$b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}, \quad (4.65)$$

$$\frac{d}{d\alpha} b_s^{(j)} = s \left(b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)} \right), \quad (4.66)$$

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} b_s^{(j)} = s \left(\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} b_{s+1}^{(j)} + \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} b_{s+1}^{(j+1)} - 2(n-1) \frac{d^{n-2}}{d\alpha^{n-2}} b_{s+1}^{(j)} \right). \quad (4.67)$$

Při praktických výpočtech se jako užitečný vztah jeví i tento

$$\begin{aligned} \alpha^n \left(\frac{d^n}{d\alpha^n} b_s^{(j)} - \frac{d^n}{d\alpha^n} b_s^{(j-2)} \right) = & -(j+n-1) \alpha^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} b_s^{(j)} - \\ & - (j-n-1) \alpha^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} b_s^{(j-2)} + \\ & + 2(j-1) \alpha^n \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} b_s^{(j-1)} + \\ & + 2(j-1)(n-1) \alpha^{n-1} \frac{d^{n-2}}{d\alpha^{n-2}} b_s^{(j-1)}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Jejich odvození nalezne čtenář například ve [1], [19], [20]. Rozvoje vedlejších částí poruchové funkce \mathcal{R}_{E_1} (resp. \mathcal{R}_{E_2})

$$\mathcal{R}_{E_1} = - \left(\frac{r_1}{a_1} \right) \left(\frac{a_2}{r_2} \right)^2 \cos H, \quad \mathcal{R}_{E_2} = - \left(\frac{r_2}{a_2} \right) \left(\frac{a_1}{r_1} \right)^2 \cos H \quad (4.69)$$

představují poněkud méně práce, než tomu bylo u rozvoje hlavní části poruchové funkce. Technika těchto rozvoů se opírá o vztah (4.40), ve kterém aplikujeme (4.41), (4.42) a (4.43). Po této, vesměs mechanické operaci, separujeme součtovými vzorci výrazy $\sin v_i$ a $\cos v_i$. Ty pak rozvineme do požadovaného řádu pomocí (4.28), (4.29). Podíly $\frac{r}{a}$ či $\frac{a}{r}$ lze opět vyhledat

v příslušné literatuře [1], [19]

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \frac{d}{de} J_s(se) \cos sM \quad (4.70)$$

$$= 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + \frac{e^4}{3}(\cos 2M - \cos 4M) + \mathcal{O}(e^5),$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \cos sM \quad (4.71)$$

$$= 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + \mathcal{O}(e^3). \quad (4.72)$$

Výpočet $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ do druhého řádu v e je potom již triviální záležitostí. V další kapitole bude rozebrán konkrétní způsob, jak obdržet rozvoj poruchové funkce do druhého řádu.

4.1.2 Rozvoje poruchové funkce do druhého řádu

V tomto paragrafu vyzkouším obecné techniky rozvoje poruchové funkce¹ tak, jak byly zmíněny výše. Načrtnu základní principy, výpočetní triky, a postupnými kroky odvodím tvar poruchové funkce \mathcal{R}_D do druhého řádu v e_1 , e_2 , I_1 a I_2 . Jestliže se budou čtenáři následující výpočty zdát dlouhé a možná i méně přehledné, nechtě nezoufá a použije při jejich odvozování některého z algebraických manipulátorů. Ostatně, v dnešní době se manipuluje třeba i s rozvoji poruchové funkce do řádu e^{30} a vyššími. Startovním bodem pro nás bude nesmírně důležitý vztah (4.64). V prvé řadě odvodíme rozvoj $\cos H$ dle (4.40). Pro stanovení podílů $\frac{x_i}{r_i}$, $\frac{y_i}{r_i}$ a $\frac{z_i}{r_i}$ využijeme nejdříve součtových vzorců, po nich následně známých rozvoje $\sin v$ a $\cos v$. Ze součtových vzorců tedy máme

$$\cos(\omega_1 + v_1) = \cos \omega_1 \cos v_1 - \sin \omega_1 \sin v_1, \quad (4.73)$$

$$\sin(\omega_1 + v_1) = \sin \omega_1 \cos v_1 + \cos \omega_1 \sin v_1, \quad (4.74)$$

kde uvážíme rozvoje do druhého řádu vzhledem k e

$$\sin v_1 = \sin M_1 + e_1 \sin 2M_1 + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M_1 - \frac{7}{8} \sin M_1 \right), \quad (4.75)$$

$$\cos v_1 = \cos M_1 + e_1(\cos 2M_1 - 1) + e_1^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3M_1 - \frac{9}{8} \cos M_1 \right). \quad (4.76)$$

Výsledkem bude

$$\begin{aligned} \cos(\omega_1 + v_1) &\approx \cos(\omega_1 + M_1) + e_1 [\cos(\omega_1 + 2M_1) - \cos \omega_1] + \\ &+ e_1^2 \left[-\cos(\omega_1 + M_1) - \frac{1}{8} \cos(\omega_1 - M_1) + \frac{9}{8} \cos(\omega_1 + 3M_1) \right], \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_1 + v_1) &\approx \sin(\omega_1 + M_1) + e [\sin(\omega_1 + 2M_1) - \sin \omega_1] + \\ &+ e_1^2 \left[-\sin(\omega_1 + M_1) - \frac{1}{8} \sin(\omega_1 - M_1) + \frac{9}{8} \sin(\omega_1 + 3M_1) \right]. \end{aligned} \quad (4.78)$$

¹Kvůli úspoře místa budeme v dalším pod pojmem „poruchová funkce“ rozumět pouze její hlavní část.

Dále můžeme rozvést výraz $\sin I_1$ například takto

$$\sin I_1 = 2 \sin \frac{1}{2} I_1 \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} I_1 \right)^{1/2} = 2s_1 + \mathcal{O}(s_1^3), \quad (4.79)$$

kde $s_1 = \sin \frac{1}{2} I_1$. Jistě také platí $\cos I_1 = 1 - 2s_1^2$. Po jednoduchém výpočtu potom máme

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{r_1} &\approx \cos(\omega_1 + \Omega_1 + M_1) + e_1 [\cos(\omega_1 + \Omega_1 + 2M_1) - \cos(\omega_1 + \Omega_1)] + \\ &+ e_1^2 \left[\frac{9}{8} \cos(\omega_1 + \Omega_1 + 3M_1) - \frac{1}{8} \cos(\omega_1 + \Omega_1 - M_1) - \cos(\omega_1 + \Omega_1 + M_1) \right] + \\ &+ s_1^2 [\cos(\omega_1 - \Omega_1 + M_1) - \cos(\omega_1 + \Omega_1 + M_1)]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Naprostu analogicky dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{r_1} &\approx \sin(\omega_1 + \Omega_1 + M_1) + e_1 [\sin(\omega_1 + \Omega_1 + 2M_1) - \sin(\omega_1 + \Omega_1)] + \\ &+ e_1^2 \left[\frac{9}{8} \sin(\omega_1 + \Omega_1 + 3M_1) - \frac{1}{8} \sin(\omega_1 + \Omega_1 - M_1) - \sin(\omega_1 + \Omega_1 + M_1) \right] - \\ &- s_1^2 [\sin(\omega_1 - \Omega_1 + M_1) + \sin(\omega_1 + \Omega_1 + M_1)], \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\frac{z_1}{r_1} \approx 2s_1 \sin(\omega_1 + M_1) + 2e_1 s_1 [\sin(\omega_1 + 2M_1) - \sin \omega_1]. \quad (4.82)$$

Obdobné vztahy pak budou platit pro $\frac{x_2}{r_2}, \frac{y_2}{r_2}$ a $\frac{z_2}{r_2}$. Po vesměs mechanických manipulacích získáme díky substitucím $M = \lambda - \bar{\omega}$, $\omega = \bar{\omega} - \Omega$ rozvoj $\cos H$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \cos H &\approx (1 - e_1^2 - e_2^2 - s_1^2 - s_2^2) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + e_1 e_2 \cos(2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) + \\ &+ e_1 e_2 \cos(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + 2s_1 s_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2 - \Omega_1 + \Omega_2) + \\ &+ e_1 \cos(2\lambda_1 - \lambda_2 - \bar{\omega}_1) - e_1 \cos(\lambda_2 - \bar{\omega}_1) + \\ &+ e_2 \cos(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \bar{\omega}_2) - e_2 \cos(\lambda_1 - \bar{\omega}_2) + \\ &+ \frac{9}{8} e_1^2 \cos(3\lambda_1 - \lambda_2 - 2\bar{\omega}_1) - \frac{1}{8} e_1^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\bar{\omega}_1) + \\ &+ \frac{9}{8} e_2^2 \cos(\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\bar{\omega}_2) - \frac{1}{8} e_2^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\bar{\omega}_2) - \\ &- e_1 e_2 \cos(2\lambda_1 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) - e_1 e_2 \cos(2\lambda_2 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + \\ &+ s_1^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_1) + s_2^2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_2) - \\ &- 2s_1 s_2 \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2). \end{aligned} \quad (4.83)$$

V další fázi je nutné odvodit tvar $\cos(\theta_1 - \theta_2)$. S uvážením rovnosti $\theta = \omega + \Omega + v$ máme

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 - \theta_2) &= [\cos \Omega_1 \cos(\omega_1 + v_1) - \sin \Omega_1 \sin(\omega_1 + v_1)] \times \\ &\times [\cos \Omega_2 \cos(\omega_2 + v_2) - \sin \Omega_2 \sin(\omega_2 + v_2)] + \\ &+ [\sin \Omega_1 \cos(\omega_1 + v_1) + \cos \Omega_1 \sin(\omega_1 + v_1)] \times \\ &\times [\sin \Omega_2 \cos(\omega_2 + v_2) + \cos \Omega_2 \sin(\omega_2 + v_2)]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Porovnáním (4.84) a (4.41) až (4.43) snadno nahlédneme, že $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ lze sestavit z (4.41) až (4.43), a to takovým způsobem, že jednoduše klademe I_1 , resp. I_2 rovno nule. Můžeme tedy říci, že $\cos H$ je na inklinaci závislá část, kdežto $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ ne. Inklinace jsou tedy ve vyjádření poruchové funkce skryty ve výše definovaném \mathbb{H} , které po úpravách nabyde tvaru

$$\begin{aligned} \mathbb{H} = & s_1^2 [\cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_1) - \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] + \\ & + 2s_1s_2 [\cos(\lambda_1 - \lambda_2 - \Omega_1 + \Omega_2) - \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2)] + \\ & + s_2^2 [\cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_2) - \cos(\lambda_1 - \lambda_2)]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Důležitý člen v poruchové funkci $\left(\frac{1}{2} \frac{r_1}{a_1} \frac{r_2}{a_2} \mathbb{H}\right)$ potom splňuje

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \frac{r_1}{a_1} \frac{r_2}{a_2} \mathbb{H}\right) = & \frac{1}{2} s_1^2 [\cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_1) - \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] + \\ & + s_1s_2 [\cos(\lambda_1 - \lambda_2 - \Omega_1 + \Omega_2) - \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2)] + \\ & + \frac{1}{2} s_2^2 [\cos(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Omega_2) - \cos(\lambda_1 - \lambda_2)]. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Čtenář může být po tomto kroku překvapen, že se v předešlé rovnici nevyskytují patřičné excentricity e_1 a e_2 . Vysvětlení je velice jednoduché. Vzhledem k tomu, že $\frac{r_1}{a_1} = 1 + \mathcal{O}(e_1)$ a $\frac{r_2}{a_2} = 1 + \mathcal{O}(e_2)$, potom by v rovnici (4.86) vystupovaly kupříkladu kombinace $e_1s_1^2$, atd. My však tyto členy zanedbáváme. Proto je výraz v rovnici (4.86) (vzhledem k naší aproximaci) na e_1 , resp. e_2 , nezávislý.

Máme již za sebou odvození prvního významného členu v poruchové funkci. Nyní přesuneme svoji pozornost na zbylé z nich. Začneme členem $\cos j(\theta_1 - \theta_2)$, kde průběh j plyne z (4.64). Platí

$$\begin{aligned} \cos j(\theta_1 - \theta_2) = & \cos j(\omega_1 + \Omega_1 + v_1) \cos j(\omega_2 + \Omega_2 + v_2) + \\ & + \sin j(\omega_1 + \Omega_1 + v_1) \sin j(\omega_2 + \Omega_2 + v_2). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Jestliže ve vyjádřeních $\cos j(\omega_1 + \Omega_1 + v_1)$ a $\sin j(\omega_1 + \Omega_1 + v_1)$ aplikujeme rozvoj pravé anomálie v_1 do druhého řádu vzhledem k e [1]

$$v_1 = M_1 + 2e_1 \sin M_1 + \frac{5}{4}e_1^2 \sin 2M_1 + \mathcal{O}(e_1^3), \quad (4.88)$$

a vezmeme-li v úvahu substituce $\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \Omega_1$, $\lambda_1 = M_1 + \bar{\omega}_1$, potom Taylorovy řady v proměnné e okolo nuly nabydou v naší aproximaci těchto tvarů

$$\begin{aligned} \cos j\theta_1 \approx & (1 - j^2e_1^2) \cos(j\lambda_1) + \\ & + \left(\frac{1}{2}j^2e_1^2 - \frac{5}{8}je_1^2\right) \cos[(2-j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1] + \\ & + \left(\frac{1}{2}j^2e_1^2 + \frac{5}{8}je_1^2\right) \cos[(2+j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1] - \\ & - je_1 \cos[(1-j)\lambda_1 - \bar{\omega}_1] + je_1 \cos[(1+j)\lambda_1 - \bar{\omega}_1], \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$(4.90)$$

$$\begin{aligned}
\sin j\theta_1 &\approx (1 - j^2 e_1^2) \sin(j\lambda_1) + & (4.91) \\
&+ \left(\frac{5}{8} j e_1^2 - \frac{1}{2} j^2 e_1^2\right) \sin[(2-j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1] + \\
&+ \left(\frac{5}{8} j e_1^2 + \frac{1}{2} j^2 e_1^2\right) \sin[(2+j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1] + \\
&+ j e_1 \sin[(1-j)\lambda_1 - \bar{\omega}_1] + j e_1 \sin[(1+j)\lambda_1 - \bar{\omega}_1].
\end{aligned}$$

Stejným postupem spočteme $\cos j\theta_2$ a $\sin j\theta_2$. Konečně potom

$$\begin{aligned}
\cos j(\theta_1 - \theta_2) &\approx (1 - j^2 e_1^2 - j^2 e_2^2) \cos[j(\lambda_1 - \lambda_2)] + & (4.92) \\
&+ \left(\frac{5}{8} j e_1^2 + \frac{1}{2} j^2 e_1^2\right) \cos[(2+j)\lambda_1 - j\lambda_2 - 2\bar{\omega}_1] + \\
&+ \left(\frac{1}{2} j^2 e_1^2 - \frac{5}{8} j e_1^2\right) \cos[(2-j)\lambda_1 + j\lambda_2 - 2\bar{\omega}_1] + \\
&+ j e_1 \cos[(1+j)\lambda_1 - j\lambda_2 - \bar{\omega}_1] - j e_1 \cos[(1-j)\lambda_1 + j\lambda_2 - \bar{\omega}_1] + \\
&+ \left(\frac{1}{2} j^2 e_2^2 - \frac{5}{8} j e_2^2\right) \cos[j\lambda_1 + (2-j)\lambda_2 - 2\bar{\omega}_2] + \\
&+ \left(\frac{5}{8} j e_2^2 + \frac{1}{2} j^2 e_2^2\right) \cos[j\lambda_1 - (2+j)\lambda_2 + 2\bar{\omega}_2] - \\
&- j e_2 \cos[j\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - \bar{\omega}_2] + j e_2 \cos[j\lambda_1 - (1+j)\lambda_2 + \bar{\omega}_2] - \\
&- j^2 e_1 e_2 \cos[(1+j)\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2] - \\
&- j^2 e_1 e_2 \cos[(1-j)\lambda_1 + (1+j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2] + \\
&+ j^2 e_1 e_2 \cos[(1+j)\lambda_1 - (1+j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2] + \\
&+ j^2 e_1 e_2 \cos[(1-j)\lambda_1 - (1-j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2].
\end{aligned}$$

Další členy ϵ_1, ϵ_1^2 , resp. ϵ_2, ϵ_2^2 z (4.64) již snadno určíme ze známých rozvoji. Výsledkem posléze bude

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{r_1}{a_1} - 1 \approx -e_1 \cos M_1 + \frac{1}{2} e_1 (1 - \cos M_1) & (4.93) \\
&= -e_1 \cos(\lambda_1 - \bar{\omega}_1) + \frac{1}{2} e_1^2 [1 - \cos(2\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1)], \\
\epsilon_1^2 &\approx \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2M_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_1^2 \cos(2\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1).
\end{aligned}$$

Stejným způsobem bychom dospěli k vyjádření ϵ_2 a ϵ_2^2 . Následně je také potřeba odvodit tvar výrazu $a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,m,n}$, který s ohledem na (4.62) splňuje vztah

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,m,n} = a_1^{i+m} a_2^{i+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n} \left(a_2^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(a_1/a_2) \right). \quad (4.94)$$

Triviálním výpočtem zjistíme, že

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,0,0} = \alpha^i b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha), \quad (4.95)$$

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,1,0} = \alpha^{i+1} \frac{d}{d\alpha} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha), \quad (4.96)$$

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,0,1} = -\alpha^{i+1} \frac{d}{d\alpha} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) - (2i+1) \alpha^i b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha), \quad (4.97)$$

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,2,0} = \alpha^{i+2} \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha), \quad (4.98)$$

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,1,1} = -2(i+1)\alpha^{i+1} \frac{d}{d\alpha} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) - \alpha^{i+2} \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha), \quad (4.99)$$

$$a_1^i a_2^{i+1} A_{i,j,0,2} = \alpha^{i+2} \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) + 4\alpha^{i+1}(i+1) \frac{d}{d\alpha} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha) + 2\alpha^i(2i^2 + 3i + 1)b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha). \quad (4.100)$$

Poznamenejme, že indexy i nabývají vzhledem k naší aproximaci pouze hodnot 0 nebo 1. Zanedbáváme totiž druhé mocniny \mathbb{H} .

Ted' už máme prakticky všechny potřebné výrazy nutné pro stanovení rozvoje poruchové funkce do druhého řádu v e a I . Je důležité říci, že v dalším textu nebudeme uvažovat sumaci ve výrazu (4.64) přes indexy j . Dá se totiž ukázat [20] (viz níže), že v praktických aplikacích se sumace přes index j provádět nemusí. V následujících výpočtech bude tudíž vynechána. Dle (4.64) s ohledem na provedené aproximace máme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & \left[\frac{1}{2}(a_2 A_{0,j,0,0} + \epsilon_1 a_2 A_{0,j,1,0} + \epsilon_2 a_2 A_{0,j,0,1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\epsilon_1^2 a_2 A_{0,j,2,0} + 2\epsilon_1 \epsilon_2 a_2 A_{0,j,1,1} + \epsilon_2^2 a_2 A) \right) + \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{r_1}{a_1} \frac{r_2}{a_2} \mathbb{H} \right) a_1 a_2^2 A_{1,j,0,0} \right] \cos j(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Dosadíme-li do předešlého vztahu všechny výše uvedené rozvoje, obdržíme poměrně dlouhý výraz, který bude obsahovat celkem 23 členů funkce kosinus.

Tyto pak roztrídíme dle součtu koeficientů u argumentů λ_1 a λ_2 . Pokud bude například součet koeficientů roven nule, seskupíme odpovídající členy do části poruchové funkce, kterou označíme jako $\mathcal{R}^{(0)}$.

Celkově tedy pro naši aproximaci platí, že

$$\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_D^{(0)} + \mathcal{R}_D^{(1)} + \mathcal{R}_D^{(2)}. \quad (4.102)$$

Při odvozování následujících výrazů velice doporučuji využití některého z algebraických manipulátorů. Při algebraických manipulacích, pomocí kterých jsem došel k níže uvedeným vztahům, jsem opět uvažoval jen členy do řádu $e_1^2, e_2^2, s_1^2, s_2^2$, resp. kombinace jejich prvních mocnin¹.

Je také zřejmé, že pokud bychom rozvíjeli poruchovou funkci obecně do i - tého řádu vzhledem k inklinacím a excentricitám, potom by bylo samozřejmě možné rozložit poruchovou funkci \mathcal{R}_D na jednotlivé členy až do řádu $\mathcal{R}_D^{(i)}$.

Pro přehlednost zavádíme také nový diferenciální operátor D

$$D^n = \frac{d^n}{d\alpha^n}. \quad (4.103)$$

Tento, jak uvidíme níže, působí právě na Laplaceovy koeficienty $b_{s+1/2}^{(j)}$. V případě výše zmíněné aproximace, kdy $i = 0, 1$, pracujeme pouze s Laplaceovými koeficienty $b_{1/2}^{(j)}$ a $b_{3/2}^{(j)}$. Je také dobré všimnout si, že se koeficienty $b_{3/2}^{(j)}$ sdružují se členy obsahujícími inklinace, kdežto $b_{1/2}^{(j)}$ se členy závislými na excentricitách.

¹Ty se však, jak si čtenář může povšimnout, ve výsledném tvaru poruchové funkce stejně nevyskytují.

Odpovídající části poruchové funkce následují

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(0)} = & \left[\frac{1}{2} b_{1/2}^{(j)} + \frac{1}{8} (e_1^2 + e_2^2) (-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos(j\lambda_1 - j\lambda_2) + & (4.104) \\
& + \left[\frac{1}{8} e_1 e_2 (2j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 - (1+j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2] + \\
& + \left[\frac{1}{8} e_1 e_2 (-2j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 - (1-j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2] - \\
& - \left[\frac{1}{4} (s_1^2 + s_2^2) \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 - (1+j)\lambda_2] - \\
& - \left[\frac{1}{4} (s_1^2 + s_2^2) \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 - (1-j)\lambda_2] + \\
& + \left[\frac{1}{2} s_1 s_2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 - (1+j)\lambda_2 - \Omega_1 + \Omega_2] + \\
& + \left[\frac{1}{2} s_1 s_2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 - (1-j)\lambda_2 - \Omega_1 + \Omega_2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(1)} = & \left[\frac{1}{4} e_1 (2j - \alpha D) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 - j\lambda_2 - \bar{\omega}_1] + & (4.105) \\
& + \left[\frac{1}{4} e_1 (-2j - \alpha D) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 + j\lambda_2 - \bar{\omega}_1] + \\
& + \left[\frac{1}{4} e_2 (1 + 2j + \alpha D) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[j\lambda_1 - (1+j)\lambda_2 + \bar{\omega}_2] + \\
& + \left[\frac{1}{4} e_2 (1 - 2j + \alpha D) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[j\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - \bar{\omega}_2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(2)} = & \left[\frac{1}{16} e_1^2 (5j + 4j^2 - 2\alpha D - 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(2+j)\lambda_1 - j\lambda_2 - 2\bar{\omega}_1] + & (4.106) \\
& + \left[\frac{1}{16} e_1^2 (-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(2-j)\lambda_1 + j\lambda_2 - 2\bar{\omega}_1] + \\
& + \left[\frac{1}{8} e_1 e_2 (2j - 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2] + \\
& + \left[\frac{1}{8} e_1 e_2 (-2j - 4j^2 - 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 + (1+j)\lambda_2 - \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2] + \\
& + \left[\frac{1}{16} e_2^2 (4 + 9j + 4j^2 + 6\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[j\lambda_1 - (2+j)\lambda_2 + 2\bar{\omega}_2] + \\
& + \left[\frac{1}{16} e_2^2 (4 - 9j + 4j^2 + 6\alpha D - 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos[j\lambda_1 + (2-j)\lambda_2 - 2\bar{\omega}_2] + \\
& + \left[\frac{1}{4} s_1^2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 + (1+j)\lambda_2 - 2\Omega_1] + \\
& + \left[\frac{1}{4} s_1^2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - 2\Omega_1] - \\
& - \left[\frac{1}{2} s_1 s_2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 + (1+j)\lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2] - \\
& - \left[\frac{1}{2} s_1 s_2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - \Omega_1 - \Omega_2] + \\
& + \left[\frac{1}{4} s_2^2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1-j)\lambda_1 + (1+j)\lambda_2 - 2\Omega_2] + \\
& + \left[\frac{1}{4} s_2^2 \alpha b_{3/2}^{(j)} \right] \cos[(1+j)\lambda_1 + (1-j)\lambda_2 - 2\Omega_2].
\end{aligned}$$

Rozvoj obsahuje celkem 23 členů funkce kosinus. Existuje však poměrně jednoduchý způsob, jak jejich počet zredukovat. Uvážíme-li fakt, že v obecném rozvoji hlavní části poruchové funkce (4.64) sečítáme přes všechna j , potom můžeme bez újmy na obecnosti provést tuto důležitou transformaci indexu j

$$j \rightarrow \pm j + k, \quad (4.107)$$

kde k je libovolné celé číslo. Jelikož lze u funkce kosinus měnit i znaménko argumentu, pak je možné vskutku jednoduše seskupit dva sobě odpovídající členy v rozvoji poruchové funkce do jednoho. Jako ilustraci uvedu úpravu dvojice obsahující e_2^2 v $\mathcal{R}_D^{(0)}$. Ve druhém členu této dvojice provedeme nahrazení $j = -j$, následně změníme znaménko argumentu a přičteme první člen. Potom s ohledem na (4.65) obdržíme tento mezivýsledek

$$\frac{1}{8} e_2^2 \left[(4 + 9j + 4j^2 + 6\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos [j\lambda_1 - (2 + j)\lambda_2 + 2\bar{\omega}_2]. \quad (4.108)$$

Aplikujeme-li dále $j = j - 2$, dostaneme

$$\frac{1}{8} e_2^2 \left[(2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j-2)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_2]. \quad (4.109)$$

Tímto algoritmem získáme finální rozvoj poruchové funkce ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & \left\{ \frac{1}{2} b_{1/2}^{(j)} + \frac{1}{8} (e_1^2 + e_2^2) (-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} + \right. & (4.110) \\ & + \frac{1}{4} (s_1^2 + s_2^2) \left[(-\alpha) b_{3/2}^{(j-1)} + (-\alpha) b_{3/2}^{(j+1)} \right] \left. \right\} \cos [j\lambda_2 - j\lambda_1] + \\ & + \left[\frac{1}{4} e_1 e_2 (2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j+1)} \right] \cos [j\lambda_2 - j\lambda_1 + \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1] + \\ & + \left[s_1 s_2 \alpha b_{3/2}^{(j+1)} \right] \cos [j\lambda_2 - j\lambda_1 + \Omega_2 - \Omega_1] + \\ & + \left[\frac{1}{2} e_1 (-2j - \alpha D) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos [j\lambda_2 + (1 - j)\lambda_1 - \bar{\omega}_1] + \\ & + \left[\frac{1}{2} e_2 (-1 + 2j + \alpha D) b_{1/2}^{(j-1)} \right] \cos [j\lambda_2 + (1 - j)\lambda_1 - \bar{\omega}_2] + \\ & + \left[\frac{1}{8} e_1^2 (-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_1] + \\ & + \left[\frac{1}{4} e_1 e_2 (-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j-1)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1] + \\ & + \left[\frac{1}{8} e_2^2 (2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(j-2)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - 2\bar{\omega}_2] + \\ & + \left[\frac{1}{2} s_1^2 \alpha b_{3/2}^{(j-1)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - 2\Omega_1] + \\ & + \left[s_1 s_2 (-\alpha) b_{3/2}^{(j-1)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - \Omega_2 - \Omega_1] + \\ & + \left[\frac{1}{2} s_2^2 \alpha b_{3/2}^{(j-1)} \right] \cos [j\lambda_2 + (2 - j)\lambda_1 - 2\Omega_2]. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem bychom odvodili rozvoj vedlejší části poruchové funkce

$$\mathcal{R}_E = -\frac{r_1}{a_1} \left(\frac{a_2}{r_2} \right)^2 \cos H.$$

Užije se vztahů (4.70), (4.72) a (4.83). Výsledkem zdlouhavých, avšak jednoduchých algebraických úprav, bude toto vyjádření vedlejší části poruchové funkce

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_E \approx & \left(-1 + \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 + s_1^2 + s_2^2 \right) \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - & (4.111) \\
& - e_1 e_2 \cos(2\lambda_2 - 2\lambda_1 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) - 2 s_1 s_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1 - \Omega_2 + \Omega_1) - \\
& - \frac{1}{2} e_1 \cos(\lambda_2 - 2\lambda_1 + \bar{\omega}_1) + \frac{3}{2} e_1 \cos(\lambda_2 - \bar{\omega}_1) - 2 e_2 \cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \bar{\omega}_2) \\
& - \frac{3}{8} e_1^2 \cos(\lambda_2 - 3\lambda_1 + 2\bar{\omega}_1) - \frac{1}{8} e_1^2 \cos(\lambda_2 + \lambda_1 - 2\bar{\omega}_1) + \\
& + 3 e_1 e_2 \cos(2\lambda_1 - \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) - \frac{1}{8} e_2^2 \cos(\lambda_2 + \lambda_1 - 2\bar{\omega}_2) - \\
& - \frac{27}{8} e_2^2 \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\bar{\omega}_2) - s_1^2 \cos(\lambda_2 + \lambda_1 - 2\Omega_1) + \\
& + 2 s_1 s_2 \cos(\lambda_2 + \lambda_1 - \Omega_2 - \Omega_1) - s_2^2 \cos(\lambda_2 + \lambda_1 - 2\Omega_2).
\end{aligned}$$

Výsledná podoba poruchové funkce \mathcal{R}_1 pak plyne z (4.37). Obdobným způsobem by čtenář dospěl i k výpočtu poruchové funkce \mathcal{R}_2 , který je proveden v [20].

Jak bylo řečeno v úvodu tohoto paragrafu, v dnešní době již existují algoritmy, které dovolují získat tvar poruchové funkce až do řádu e^{30} . S ohledem na to, co bylo doposud zmíněno, si čtenář ihned uvědomí, jak složité a mechanicky náročné výpočetní operace jsou při těchto rozvoji potřeba, a jak nezbytnou roli v nebeské mechanice hraje moderní výpočetní technika. Nyní už máme otevřenou cestu k výpočtu časové evoluce orbitálních elementů. Ta je popsána tzv. *Lagrangeovými planetárními rovnicemi*.

4.1.3 Lagrangeovy planetární rovnice

Lagrangeovy planetární rovnice hrají velice důležitou roli ve většině analytických metod studia poruch planetárních drah. Jejich integrace představuje jasně interpretovatelné změny orbitálních elementů. Jedná se navíc o plně poruchovou metodu. Výhodou těchto rovnic jsou také malé časové změny orbitálních elementů oproti změnám kartézských souřadnic při integraci obecných pohybových rovnic. To pak znamená, že při jejich numerickém řešení můžeme použít větší integrační krok.

Jejich odvození¹ může čtenář vyhledat v kterékoliv obsáhlejší učebnici nebeské mechaniky, např. [1], [20], [30]. Uvedu pouze konečný tvar, který vypadá následovně

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad (4.112)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}}, \quad (4.113)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{1}{2} I}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (4.114)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (4.115)$$

$$(4.116)$$

¹Nebo rovnice s nimi ekvivalentní.

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (4.117)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-\tan \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \quad (4.118)$$

kde ϵ je definováno vztahem

$$\lambda = M + \bar{\omega} = n(t - T) + \bar{\omega} = nt + \epsilon, \quad (4.119)$$

a představuje nulovou hodnotu *střední délky*, resp. střední délku epochy. Poznamenejme, že člen $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}$ není zase tak jednoduchý, jak se může na první pohled zdát. Především jde o to, kde všude se a v poruchové funkci vyskytuje. Jednak to jsou argumenty funkcí kosinus, kde se objevuje střední délka. Ta je funkcí n , ale to je funkcí a . Navíc se velká poloosa a objevuje explicitně také v Laplaceových koeficientech.

Tuto svízelnou situaci lze vyřešit definicí nové střední délky epochy ϵ^*

$$\frac{d\epsilon^*}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt}. \quad (4.120)$$

Potom

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\epsilon^*}{dt}, \quad (4.121)$$

neboli

$$\lambda = \int n dt + \epsilon^*. \quad (4.122)$$

Předešlý vztah můžeme zapsat následovně

$$\lambda = \rho + \epsilon^*, \quad (4.123)$$

kde

$$\frac{d\rho}{dt} = n, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a} \frac{da}{dt}. \quad (4.124)$$

4.1.4 Rezonance

Je zřejmé, že dynamický vývoj planetek je silně ovlivněn tvarem rozvoje poruchové funkce (4.110), především argumenty, které obecně můžeme zapsat jako

$$\varphi = j_1\lambda_2 + j_2\lambda_1 + j_3\bar{\omega}_2 + j_4\bar{\omega}_1 + j_5\Omega_2 + j_6\Omega_1. \quad (4.125)$$

Je známo, že v případě problému dvou těles jsou střední délky λ_1, λ_2 lineárně rostoucí funkce času se směrnici n_1 , resp. n_2 , kdežto ostatní úhly zůstávají konstantní. Na druhou stranu, u rušeného pohybu jsou střední délky podrobeny silným změnám, avšak ostatní úhly se mění relativně pomalu (mluvíme o tzv. *sekulárním vývoji*). Tedy, argumenty, které nezahrnují střední délky, se mění jen velice pomalu. Uvážíme-li, že

$$\lambda_2 \approx n_2 t + \epsilon_2 \quad \lambda_1 \approx n_1 t + \epsilon_1, \quad (4.126)$$

potom $j_1\lambda_2 + j_2\lambda_1 \approx (j_1n_2 + j_2n_1)t + const.$ Ve fázi, kdy $(j_1n_2 + j_2n_1) \approx 0$, má odpovídající argument větší periodu než kterákoliv ze dvou oběžných dob. Relace je splněna pro určité kombinace středních denních pohybů a koeficientů j_1 a j_2 . Takovéto argumenty označujeme jako *rezonanční členy*. Analogická podmínka plyne ze třetího Keplerova zákona

$$a_1 \approx (|j_1|/|j_2|)^{2/3} a_2. \quad (4.127)$$

Pokud tedy položíme v rozvoji hlavní části poruchové funkce $j = 0$, a uvážíme-li pouze členy bez středních délek, obdržíme sekulární členy. Jestliže se ale navíc planetka nachází v rezonanci, mají na sekulární vývoj vliv i členy s argumenty, které splňují podmínku vycházející z $(j_1 n_2 + j_2 n_1) \approx 0$.

Pěkným příkladem je tzv. 2:1 rezonance s Jupiterem, kde $2n_2 \approx n_1$. Potom do výsledného tvaru poruchové funkce započteme nejenom sekulární členy, ale také členy obsahující kombinaci středních délek $2\lambda_2 - \lambda_1$.

Jednoduchým výpočtem se dá ukázat, že ustředěná¹ hlavní část poruchové funkce (4.110) pro 2:1 rezonanci vypadá následovně

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_D \rangle = & C_0 + C_1(e_1^2 + e_2^2) + C_2(s_1^2 + s_2^2) + C_3 e_1 e_1 \cos(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) \\ & + C_4 e_1 \cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \omega_1) + C_5 e_2 \cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \bar{\omega}_2) \\ & + s_1 s_2 \alpha b_{3/2}^{(1)} \cos(\Omega_2 - \Omega_1), \end{aligned} \quad (4.128)$$

kde

$$C_0 = \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha), \quad (4.129)$$

$$C_1 = \frac{1}{8} (2\alpha D + \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(0)}(\alpha), \quad (4.130)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \quad (4.131)$$

$$C_3 = \frac{1}{4} (2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2) b_{1/2}^{(1)}(\alpha), \quad (4.132)$$

$$C_4 = \frac{1}{2} (-4 - \alpha D) b_{1/2}^{(2)}(\alpha), \quad (4.133)$$

$$C_5 = \frac{1}{2} (3 + \alpha D) b_{1/2}^{(1)}(\alpha). \quad (4.134)$$

Vedlejší část poruchové funkce \mathcal{R}_E pro náš případ obsahuje pouze jeden člen

$$\mathcal{R}_E = -2e_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1 - \bar{\omega}_2). \quad (4.135)$$

Po poměrně zdlouhavém výpočtu [20], jež zahrnuje sestavení odpovídající poruchové funkce a vyřešení² soustavy Lagrangeových planetárních rovnic dospějeme k následujícím vztahům

$$a_1 = a_{10} - \frac{2n_1 \alpha a_1 (m_2/m_0) C_4 e_1}{2n_2 - n_1 - \dot{\bar{\omega}}_1} [\cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \bar{\omega}_1) + \cos(\lambda_{10} + \omega_{10})] \quad (4.136)$$

$$- \frac{2n_1 \alpha a_1 (m_2/m_0) (C_5 - 2\alpha) e_2}{2n_2 - n_1 - \dot{\bar{\omega}}_2} [\cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \bar{\omega}_2) + \cos \lambda_{10}],$$

$$e_1 = e_{10} + \frac{n_1 \alpha (m_2/m_0) C_4}{2n_2 - n_1 - \dot{\bar{\omega}}_1} [\cos(2\lambda_2 - \lambda_1 - \bar{\omega}_1) + \cos(\lambda_{10} + \omega_{10})].$$

$$(4.137)$$

¹Jak bylo uvedeno v této kapitole, neuvažovali jsme sumaci podle indexu j v rozvoji poruchové funkce, neboť se v praxi zabýváme jen určitými argumenty a ostatní, zpravidla krátkoperiodické, se při dlouhodobém vývoji stejně vystředí.

²Při řešení odpovídajících diferenciálních rovnic jsme pro zjednodušení uvažovali časovou závislost pouze argumentů funkcí kosinus ve vyjádření poruchové funkce, tzn. $a_1 = a_{10}$, $e_1 = e_{10}$, kde e_{10} a a_{10} odpovídají počátečním podmínkám.

Poznamenejme, že hodnoty orbitálních elementů planety bereme jako konstanty, takže jejich časové derivace jsou rovny nule. Dále můžeme určit aproximativní formule pro amplitudy

$$\begin{aligned}
 (\Delta a)_{res} &= 2n_1\alpha a_1(m_2/m_0) \left(\left| \frac{C_4 e_1}{2n_2 - n_1 - \dot{\omega}_1} \right| + \left| \frac{(C_5 - 2\alpha)e_2}{2n_2 - n_1} \right| \right), \\
 (\Delta e)_{res} &= \left| \frac{n_1\alpha(m_2/m_0)C_4}{2n_2 - n_1 - \dot{\omega}_1} \right|.
 \end{aligned} \tag{4.138}$$

Kapitola 5

Vlastní numerický přístup a orbitální vývoj vybraných planetek

V této poslední, a zřejmě nejdůležitější kapitole, se budu věnovat vlastním výpočtům, jejich porovnáním a diskusi výsledků. Pro určení orbitálního vývoje planetky jsem napsal skript `evoluce.m` v programu Matlab verze 7.1, který je samozřejmě přiložen k diplomové práci společně s programem `gauss.m` i s jeho grafickým rozhraním. Jelikož ne každý má legální přístup k tomuto softwaru, jsou k práci přiloženy i upravené verze (`evoluce.o`, `gauss.o`) napsané ve volně šířitelném jazyku Octave.

Cílem diplomové práce bylo simulovat orbitální vývoj vybraných planetek s tímto označením 1998 HZ7, 1999 RR214, 2004 RT109 na 10 000 let dopředu. Toto bylo autorem práce provedeno.

Pro lepší demonstraci získaných výsledků jsem se rozhodl tuto kapitolu rozdělit na dvě části, přičemž v první z nich provádím orbitální vývoj planetky 1998 HZ7 pouze na 100 let dopředu, ve druhé pak orbitální vývoj všech planetek na 10 000 let dopředu. Důvodem, který mě k tomuto vedl, byla touha porovnat výsledky pro planetku 1998 HZ7 s velice přesnými údaji z MPC, kde je orbitální vývoj možný maximálně do roku 2200.

Kromě MPC jsou všechny numerické výpočty porovnávány s N -částicovými integrátory balíku *Swift* (Levison & Duncan 1999 [27]), který je volně šířitelným softwarem na bázi systému Linux psaným v programovacím jazyce Fortran 77. Okrajové podmínky nutné pro řešení systému pohybových rovnic byly převzaty z [29].

K problému přistupuji metodou přímé integrace pohybových rovnic soustavy rušících těles (poruch) a planetky v kartézských souřadnicích, tzv. *PP - metodou (particle - particle method)*. Pro tento účel využívám programu *evoluce.m*, který provádí numerickou integraci pohybových rovnic Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu s konstantním časovým krokem jednoho středního slunečního dne.

Při výpočtech předpokládám nulovou hmotnost planetky, což je v reálných situacích vynikající aproximace. Jako poruchy uvažuji všechny planety sluneční soustavy, Pluto a trpasličí planetu hlavního pásu Ceres. Hmotnosti rušících těles jsem pro startovní datum evoluce opět převzal z [29].

Patřičné numerické výpočty jsem provedl na dvou počítačových sestavách. První z nich měla tyto parametry: PC AMD Athlon 2.8 Ghz, 1 GB-RAM, 160 GB hard disk (7200 ot/min) a systému Windows XP (resp. Mandriva Linux pro integrátory *Swift*).

Druhá ze sestav potom: Notebook PC Hewlett-Packard Compaq Presario CQ60, Intel Pentium Dual CPU T3200 2.00 GHz, 2 GB-RAM, 320 GB hard disk (5400 ot/min).

Následující výsledky numerických výpočtů provedených programem *evolve.m* vycházejí z řešení obecných pohybových rovnic ve tvaru (4.7)

$$\dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

kde N je počet zúčastněných těles kromě Slunce. Tzn. *testovací částice* (planetka) a $N - 1$ rušících planet. Tuto soustavu diferenciálních rovnic 2. řádu lze obvyklými procedurami rozložit na soustavu $6N$ diferenciálních rovnic 1. řádu v jednotlivých složkách. Tato soustava $6N$ diferenciálních rovnic byla následně řešena pomocí programu *evolve.m*. Bylo taktéž potřeba znát celkem $6N$ počátečních podmínek, konkr. složek poloh a rychlostí v čase $t = 0$.

Ty byly pro planetku v okamžiku startu integrace $JD2440400.5$ (28. června 1969) získány z MPC, pro planety pak z [29]. Následující tabulka heliocentrických rychlostí a průvodičů planet v jednotkách¹ AU, resp. AU/střední sluneční den byla autorem převzata z [29].

Table IV. DE405 positions and velocities at the integration epoch.
Heliocentric planets, geocentric moon, solar-system-barycentric sun at JED
2440400.5 (June 28, 1969), in au and au/day.

Mercury	0.3572602064472754	-0.0915490424305184	-0.0859810399869404
	0.0033678456621938	0.0248893428422493	0.0129440715867960
Venus	0.6082494331856039	-0.3491324431959005	-0.1955443457854069
	0.0109524201099088	0.0156125067398625	0.0063288764517467
EM-Bary	0.1160149091391665	-0.9266055536403852	-0.4018062776069879
	0.0168116200522023	0.0017431316879820	0.0007559737671361
Mars	-0.1146885824390927	-1.3283665308334880	-0.6061551894193808
	0.0144820048079447	0.0002372854923607	-0.0002837498361024
Jupiter	-5.3842094069921451	-0.8312476561610838	-0.2250947570335498
	0.0010923632912185	-0.0065232941911923	-0.0028230122672194
Saturn	7.8898899338228166	4.5957107269260122	1.5584315167250895
	-0.0032172034910937	0.0043306322335557	0.0019264174637995
Uranus	-18.2699008149782607	-1.1627115802190469	-0.2503695407425549
	0.0002215401656274	-0.0037676535582462	-0.0016532438049224
Neptune	-16.0595450919244627	-23.9429482908794995	-9.4004227803540061
	0.0026431227915766	-0.0015034920807588	-0.0006812710048723
Pluto	-30.4878221121555448	-0.8732454301967293	8.9112969841847551
	0.0003225621959332	-0.0031487479275516	-0.0010801779315937
Moon	-0.0008081773279115	-0.0019946300016204	-0.0010872626608381
	0.0006010848166591	-0.0001674454606152	-0.0000855621449740
Sun	0.0045025081562339	0.0007670747009324	0.0002660568051770
	-0.0000003517482096	0.0000051776253996	0.0000022291018544

Obrázek 5.1: Heliocentrické polohy a rychlosti pro startovací datum $JD2440400.5$ ($\simeq t = 0$).

¹Jsou-li navíc hmotnosti těles v jednotkách sluneční hmotnosti, potom je nezbytně nutné v pohybových rovnicích nahradit $G = k^2$, kde $k = 0,01720209895 \text{ AU}^{3/2} \text{ D}^{-1/2} \text{ M}_\odot^{-1/2}$ je Gaussova konstanta.

Další tabulka hmotností těles byla taktéž převzata z [29].

	[au ³ /day ²]	[GM _{Sun} /GM _i]	[km ³ /sec ²]
GM1	0.4912547451450812... × 10 ⁻¹⁰	6023600 .	22032.080...
GM2	0.7243452486162703... × 10 ⁻⁰⁹	408523 .71	324858.599...
GM3	0.8887692390113509... × 10 ⁻⁰⁹	332946 .050895...	398600.433...
GM4	0.9549535105779258... × 10 ⁻¹⁰	3098708 .	42828.314...
GM5	0.2825345909524226... × 10 ⁻⁰⁶	1047 .3486	126712767.863...
GM6	0.8459715185680659... × 10 ⁻⁰⁷	3497 .898	37940626.063...
GM7	0.1292024916781969... × 10 ⁻⁰⁷	22902 .98	5794549.007...
GM8	0.1524358900784276... × 10 ⁻⁰⁷	19412 .24	6836534.064...
GM9	0.2188699765425970... × 10 ⁻¹¹	135200000 .	981.601...

Obrázek 5.2: Hmotnosti zúčastněných těles v jednotkách hmotnosti Slunce.

Ze znalosti heliocentrických poloh a rychlostí v daném časovém okamžiku je pak již možné určit orbitální elementy I, ω, Ω planetky pomocí následujících vztahů

$$kp^{1/2} \sin I \sin \Omega = y\dot{z} - z\dot{y}, \quad (5.2)$$

$$kp^{1/2} \sin I \cos \Omega = x\dot{z} - z\dot{x},$$

$$kp^{1/2} \cos I = x\dot{y} - y\dot{x},$$

kde $p = a(1 - e^2)$ je zmíněný parametr dráhy. Při výpočtu velké poloosy a využijeme rovnice

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (5.3)$$

jejíž odvození společně s (5.2) čtenář nalezne například v [1] nebo [8]. Máme-li vypočítanou velkou poloosu a a parametr dráhy p , potom stanovení numerické excentricity e je již triviální záležitostí.

Dalším elementem je vzdálenost perihelu ω , kterou určíme s pomocí kombinace vztahů

$$\dot{r} = kp^{-1/2} e \sin v, \quad (5.4)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

$$r \cos(v + \omega) = x \cos \Omega + y \sin \Omega, \quad (5.5)$$

$$r \sin(v + \omega) = z \csc i,$$

při jejichž řešení je vhodné zavést substituci $u = v + \omega$.

Ze znalosti pravé anomálie v , excentricity e , a těchto jednoduchých vztahů stanovíme hodnotu excentrické anomálie E [8]

$$\sin E = a^{-1}(1 - e^2)^{-1/2} r \sin v, \quad (5.6)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}.$$

Střední anomálie M je potom dána Keplerovou rovnicí

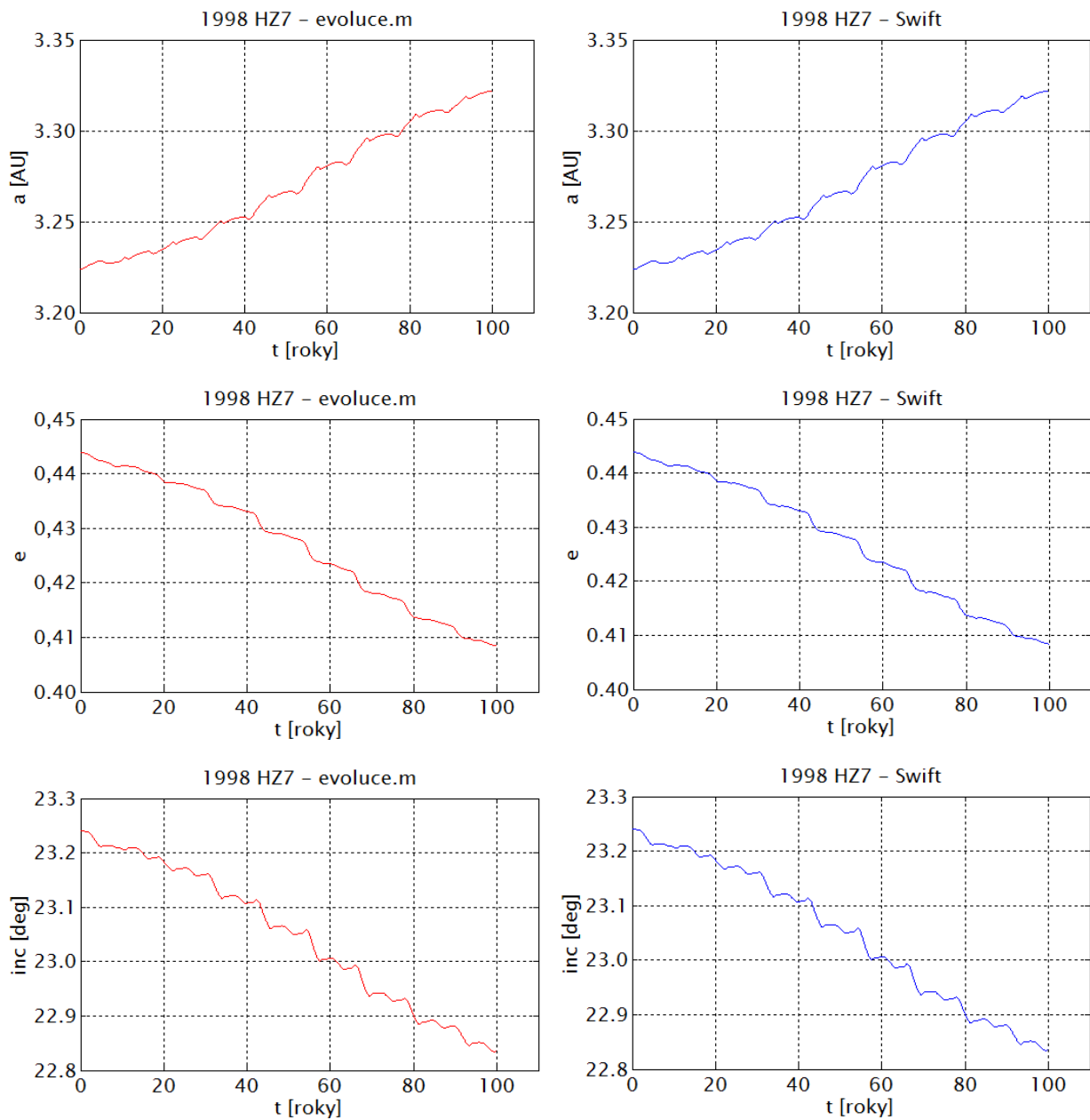
$$M = E - e \sin E. \quad (5.7)$$

Doba průchodu perihelmem T se spočte snadno pomocí $T = t - \frac{M}{n}$, kde n je tzv. *střední denní pohyb* definovaný vztahem $n = ka^{-3/2}$.

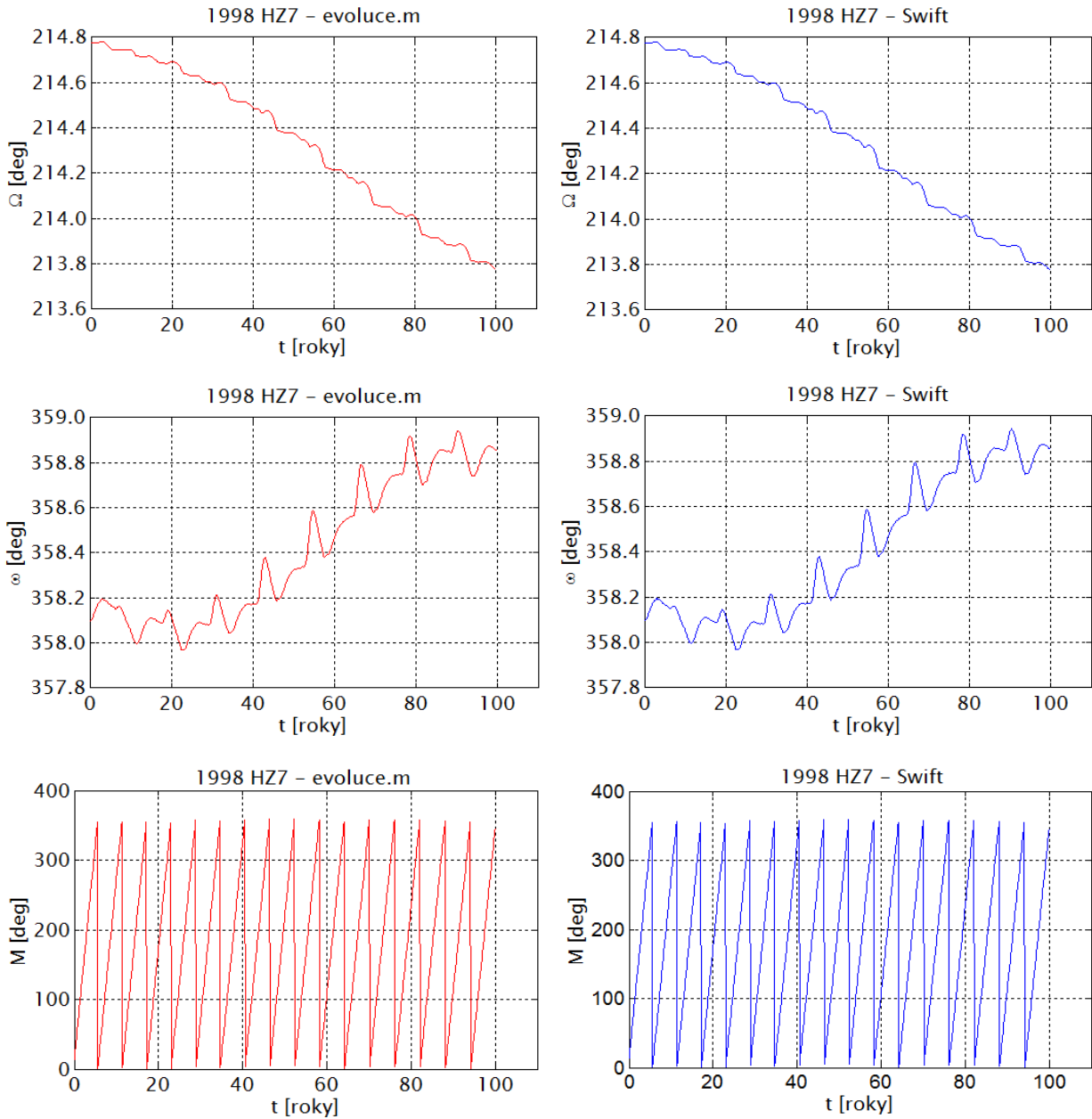
Orbitální vývoj planetky 1998 HZ7 na 100 let dopředu, porovnání s MPC

V úvodu této kapitoly jsem vyjádřil touhu porovnat svoje výsledky také s MPC. Jelikož se jedná spíše o demonstraci přesnosti autorem vytvořeného integrátoru *evolve.m* a integrátorů balíku *Swift* vzhledem k MPC, bude provedena časová evoluce orbitálních elementů pouze pro první planetku 1998 HZ7. Následně budou vyneseny grafy udávající chyby orbitálních elementů spočtených pomocí programu *evolve.m* vzhledem k integrátorům balíku *Swift*.

Patřičné grafy následují:



Obrázek 5.3: Časový vývoj velké poloosy a , excentricity e a inklinace I planetky 1998 HZ7 spočtený pomocí *Swift - RMVS3* a *evolve.m* na 100 let dopředu. Inklináční úhel je vztažen k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).

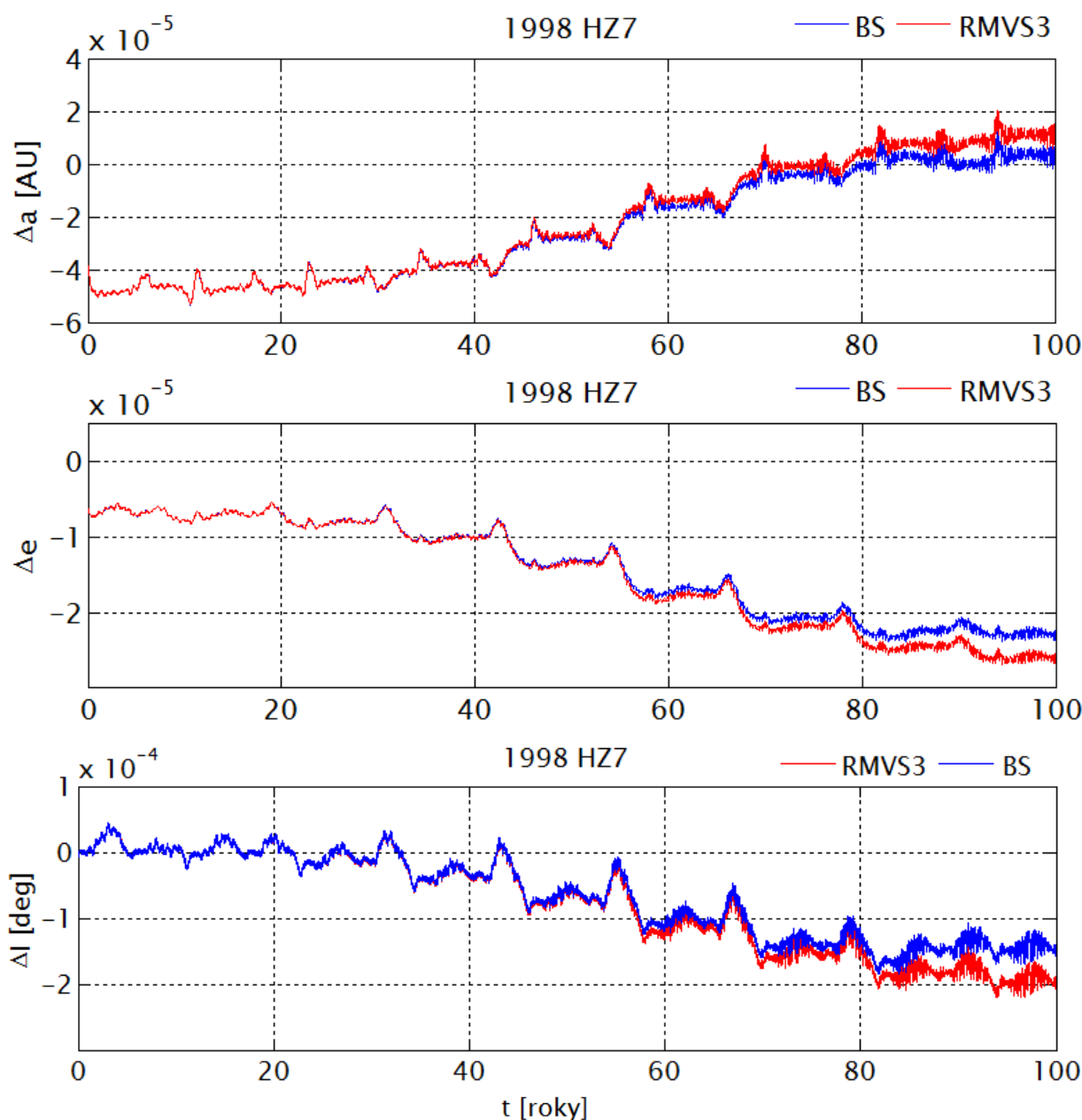


Obrázek 5.4: Časový vývoj délky výstupného uzlu Ω , argumentu perihelu ω a střední anomálie M spočtený pomocí integrátorů *Swift - RMVS3* a *evoluce.m* na 100 let dopředu. Délka výstupného uzlu Ω a argument perihelu ω jsou vztaženy k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).

Jak je uvedeno v popisících grafů, orbitální elementy I, Ω a ω jsou vztaženy vzhledem k ekliptice. My jsme při odvozování jednotlivých vzorců v kapitole 2 o poloze základní roviny nic nepředpokládali. Ukazuje se, že orbitální elementy, jež jsou spočteny dle vztahů této kapitoly, platí v rovníkové soustavě. Autor je následně pomocí transformačních vztahů, které lze vyhledat například v [1], převedl do soustavy ekliptikální. Stejně tak bylo naloženo i s daty z balíku *Swift*.

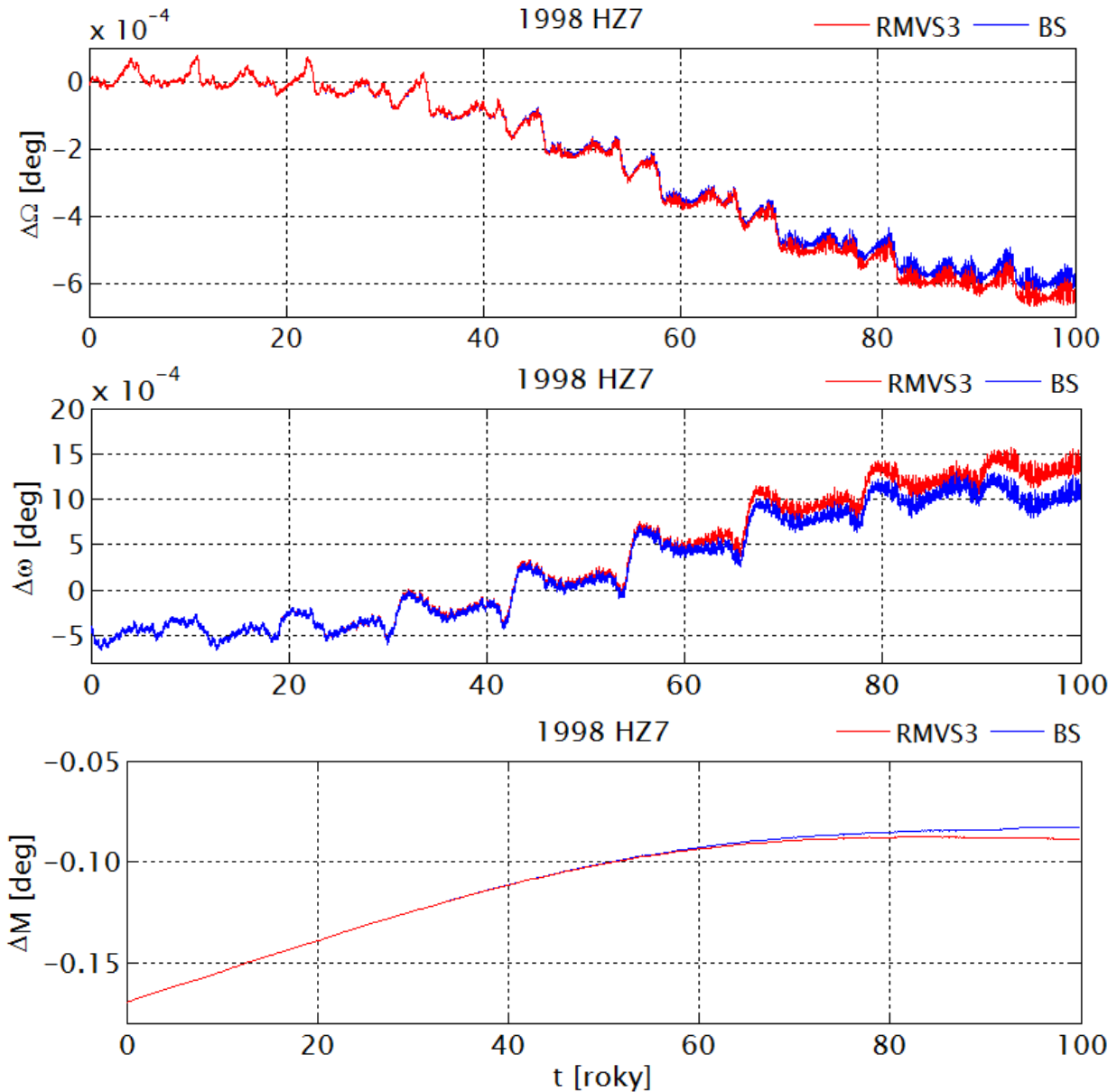
Bylo by jistě vhodné nějakým způsobem vyjádřit rozdíly mezi autorem vytvořeným integrátorem *evoluce.m* a integrátory balíku *Swift*. Jelikož se výstupy z těchto dvou programů jen velice málo liší, rozhodl jsem se, pro ilustraci jejich vzájemné přesnosti, vynést časovou závislost odpovídajících rozdílů orbitálních elementů $\Delta a, \Delta e, \Delta I, \Delta \Omega, \Delta \omega$ a ΔM .

Grafy následují.



Obrázek 5.5: Časový vývoj chyby velké poloosy a , excentricity e a inklinace I pro planetku 1998 HZ7 integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-6}$) a *Swift - RMVS3* na 100 let dopředu. Integroční krok byl u všech metod 1 střední sluneční den, data byla vypisována opět každý 1 střední sluneční den.

Na následující stránce uvádím časové vývoje chyb zbylé trojice orbitálních elementů, tzn., délky výstupného uzlu Ω , argumentu perihelu ω a střední anomálie M . Dále také stručně shrnu a porovnáím výsledky, které jsem obdržel ze všech tří integrátorů (*evoluce.m*, *Swift - Bulirsch - Stoer*, *Swift - RMVS3*) a z MPC do přehledné tabulky.



Obrázek 5.6: Časový vývoj chyby délky výstupného uzlu Ω , argumentu perihelu ω a střední anomálie M pro planetku 1998 HZ7 integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-6}$) a *Swift - RMVS3* na 100 let dopředu. Integrační krok byl u všech metod 1 střední sluneční den, data byla vypisována opět každý 1 střední sluneční den.

Jak je vidět, chyby jsou velice malé a přesnost autorem vytvořeného integrátoru je velice slušná. Z grafů je také vidět, že v první fázi, přibližně do doby $t = 40$ let křivky prakticky splývají, posléze se ale začínají velice jemně rozcházet. Je také zřejmé, že autorem vytvořený integrátor *evoluce.m* vykazuje lepší výsledky ve srovnání s integrátorem *Swift - Bulirsch - Stoer* nežli s integrátorem *Swift - RMVS3*.

Zmíněné rozdíly jsou však velice nepatrné, nicméně přirozeně lehce ovlivnitelné právě volbou uživatelem definované tolerance ϵ u metody *Bulirsch - Stoer*.

V tabulce na další straně jsem stručně shrnul hodnoty orbitálních elementů získané z MPC a integrátorů *evoluce.m*, *Swift - Bulirsch - Stoer* a *Swift - RMVS3*. Výsledky odpovídají času $t = 100$ let, resp. $JD\ 2476925.5$ (28. června 2069).

Tyto výpočty jsem prováděl na první sestavě. Programu *evoluce.m* trvala numerická integrace s výše zmíněnými parametry v délce cca 1.5 minuty, integrátory z balíku *Swift* se

ukázaly efektivnější a každý jeden výpočet trval přibližně 20 sekund.

<i>JD</i> 2476925.5	<i>a</i> [AU]	<i>e</i>	<i>I</i> [°]	Ω [°]	ω [°]	<i>M</i> [°]
MPC	3.32175	0.408450	22.83521	213.77782	358.85298	346.03248
<i>evoluce.m</i>	3.32175	0.408451	22.83522	213.77785	358.85287	346.19518
<i>Swift - BS</i>	3.32175	0.408428	22.83508	213.77725	358.85398	346.11230
<i>Swift - RMVS3</i>	3.32176	0.408425	22.83503	213.77720	358.85429	346.10609

Tabulka 5.1: Srovnání orbitálních elementů planetky 1998 HZ7 získaných z MPC a integrátorů *evoluce.m*, *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-6}$) a *Swift - RMVS3* pro epochu *JD* 2476925.5.

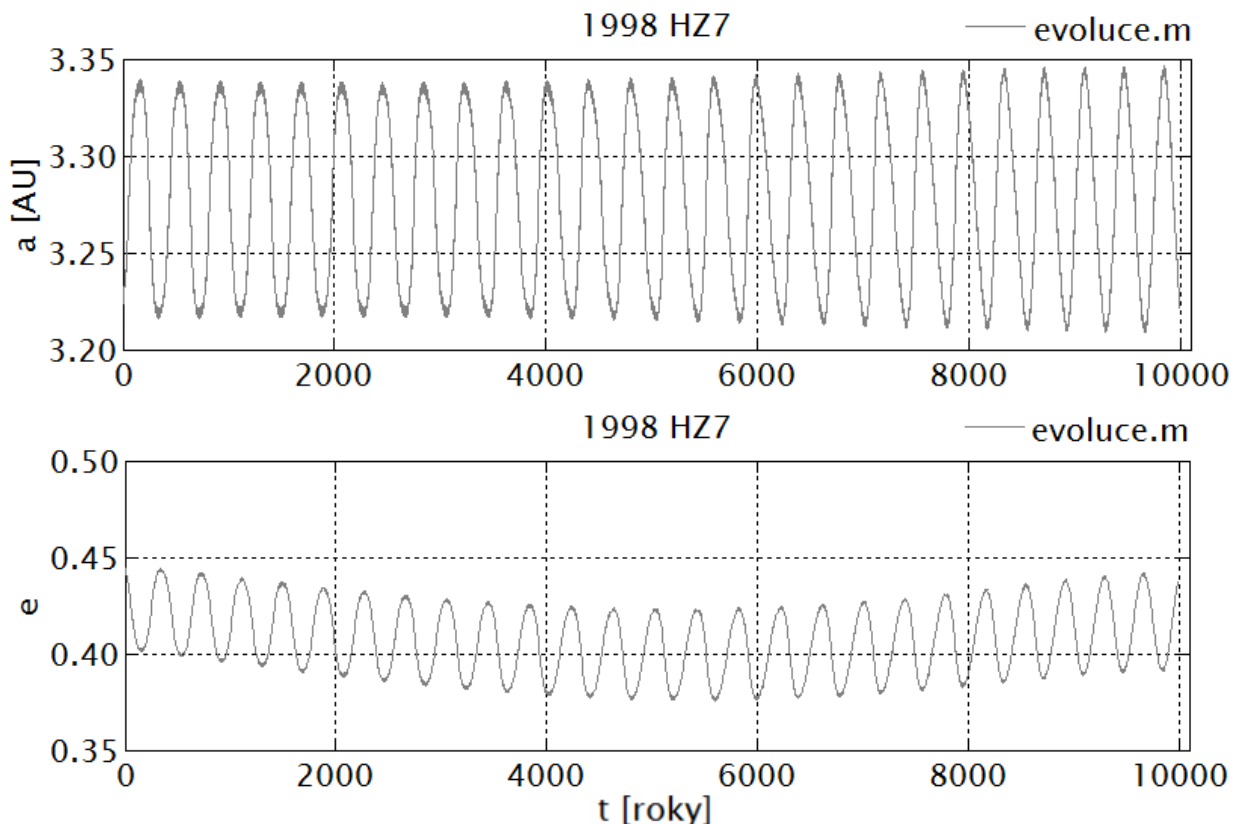
Orbitální vývoj na 10 000 let dopředu, srovnání rozličných numerických metod

V této kapitole provedu časovou evoluci orbitálních elementů a, e, I na 10 000 let dopředu pro všechny v úvodu zmíněné planetky. Počáteční podmínky jsou stejné jako v předešlé kapitole. Vzhledem k tomu, že se křivky ze všech tří integrátorů prakticky překrývají, vybral jsem pouze vývoj spočítaný vlastním programem *evoluce.m*. Ten jsem posléze opět porovnal s integrátory z balíku *Swift*. Integrační krok jsem zvolil $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní.

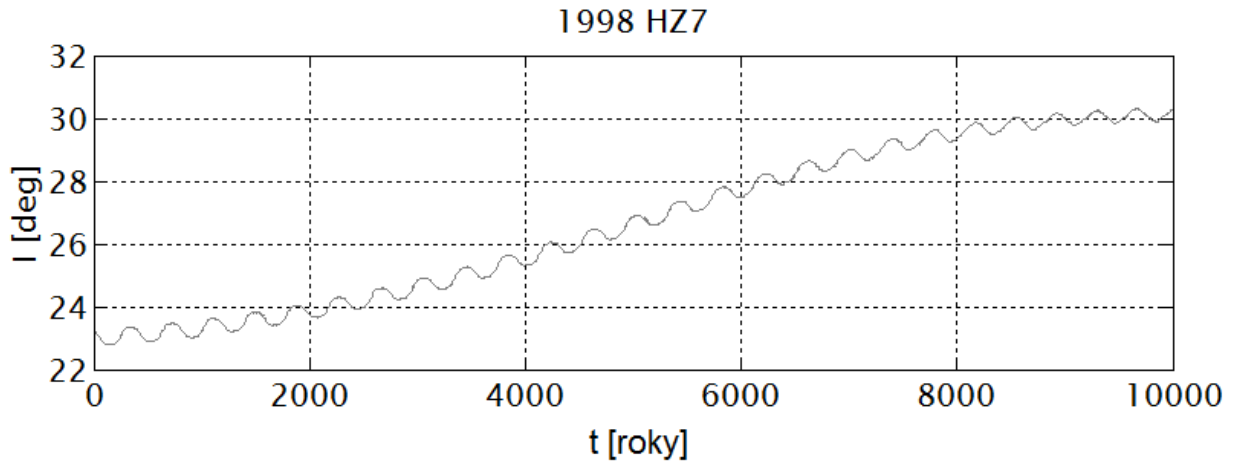
Patříčné numerické výpočty této kapitoly jsem provedl na druhé počítačové sestavě. Z hlediska dlouhodobého vývoje se Runge-Kuttova metoda jeví jako méně efektivní. Doba integrace byla pro Runge-Kuttovu metodu přibližně 5 hodin, pro metodu *Bulirsch - Stoer* asi 1,25 hodiny a pro metodu *RMVS3* přibližně 40 minut.

Integrátory balíku *Swift* se tedy vyznačují větší efektivitou, a jsou dobrou motivací pro autora v jeho další práci.

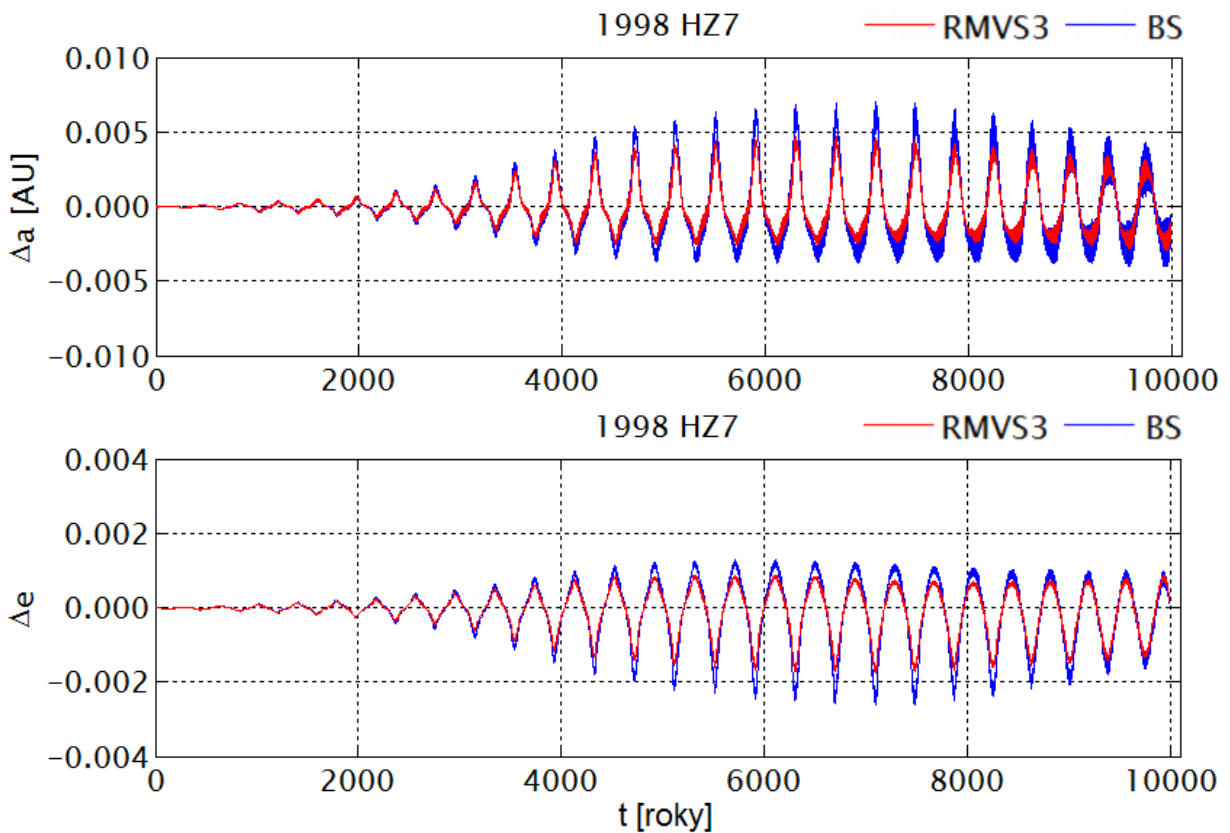
Planetka 1998 HZ7



Obrázek 5.7: Časový vývoj velké poloosy a a excentricity e pro planetku 1998 HZ7 spočítaný integrátorem *evoluce.m* na 10 000 let dopředu. Integrační krok $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní.

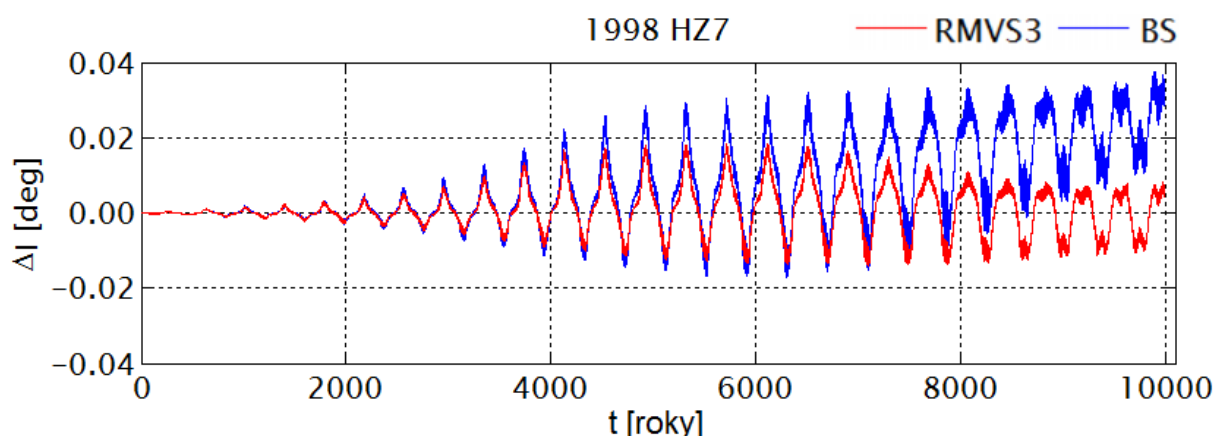


Obrázek 5.8: Časový vývoj inklinace I pro planetku 1998 HZ7 spočítaný integrátorem *evoluce.m* na 10 000 let dopředu. Integrační krok $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní. Inklinací úhel je vztažen k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).



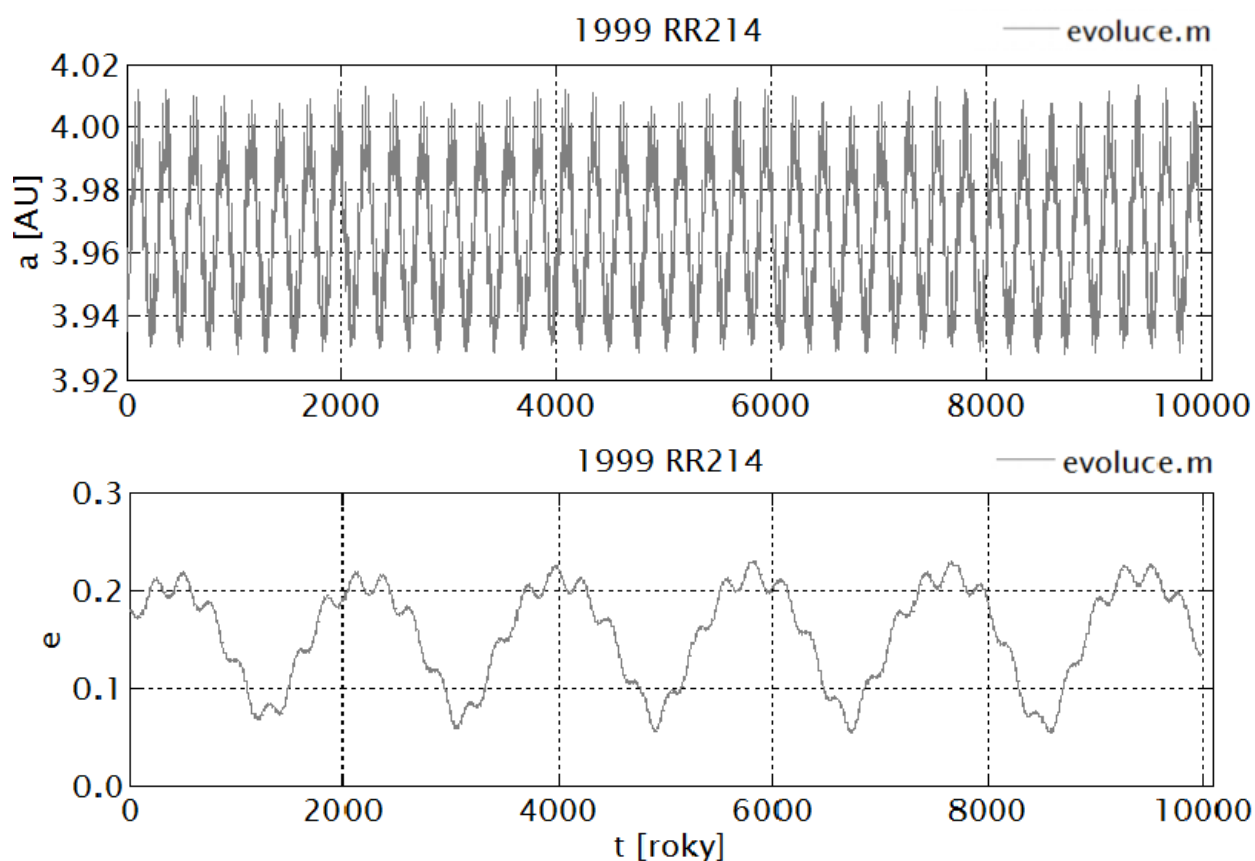
Obrázek 5.9: Časový vývoj chyby velké poloosy Δa [AU] a excentricity Δe pro planetku 1998 HZ7 integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-8}$) a *Swift - RMVS3* na 10 000 let dopředu. Integrační krok byl u všech metod $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní.

Na další straně nalezneme graf, který udává vývoj chyby inklinace integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* a *Swift - RMVS3*.

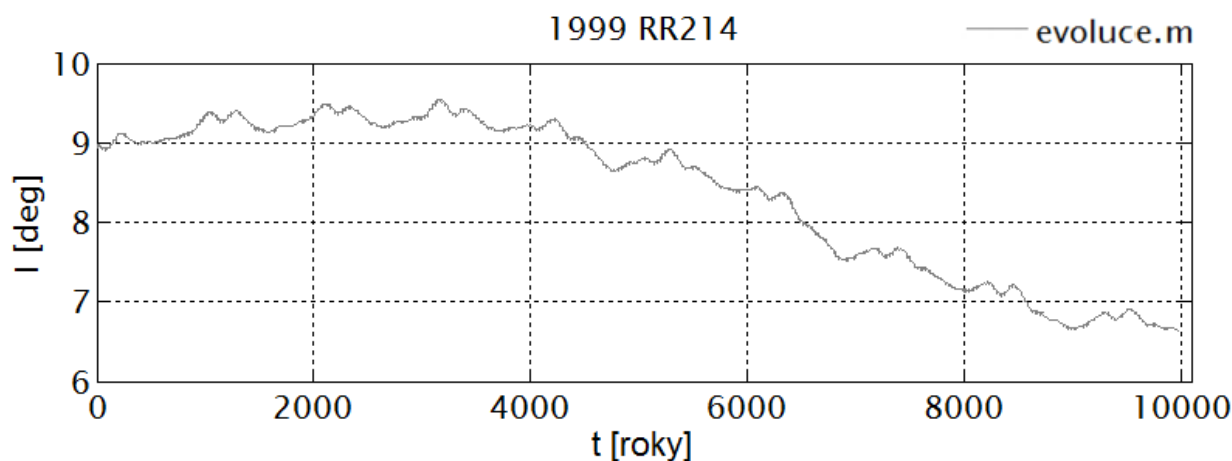


Obrázek 5.10: Časový vývoj chyby inklinace ΔI [deg] pro planetku 1998 HZ7 integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-8}$) a *Swift - RMVS3* na 10 000 let dopředu. Integrační krok byl u všech metod $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní. Inklinací úhel je vztažen k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).

Planetka 1999 RR214

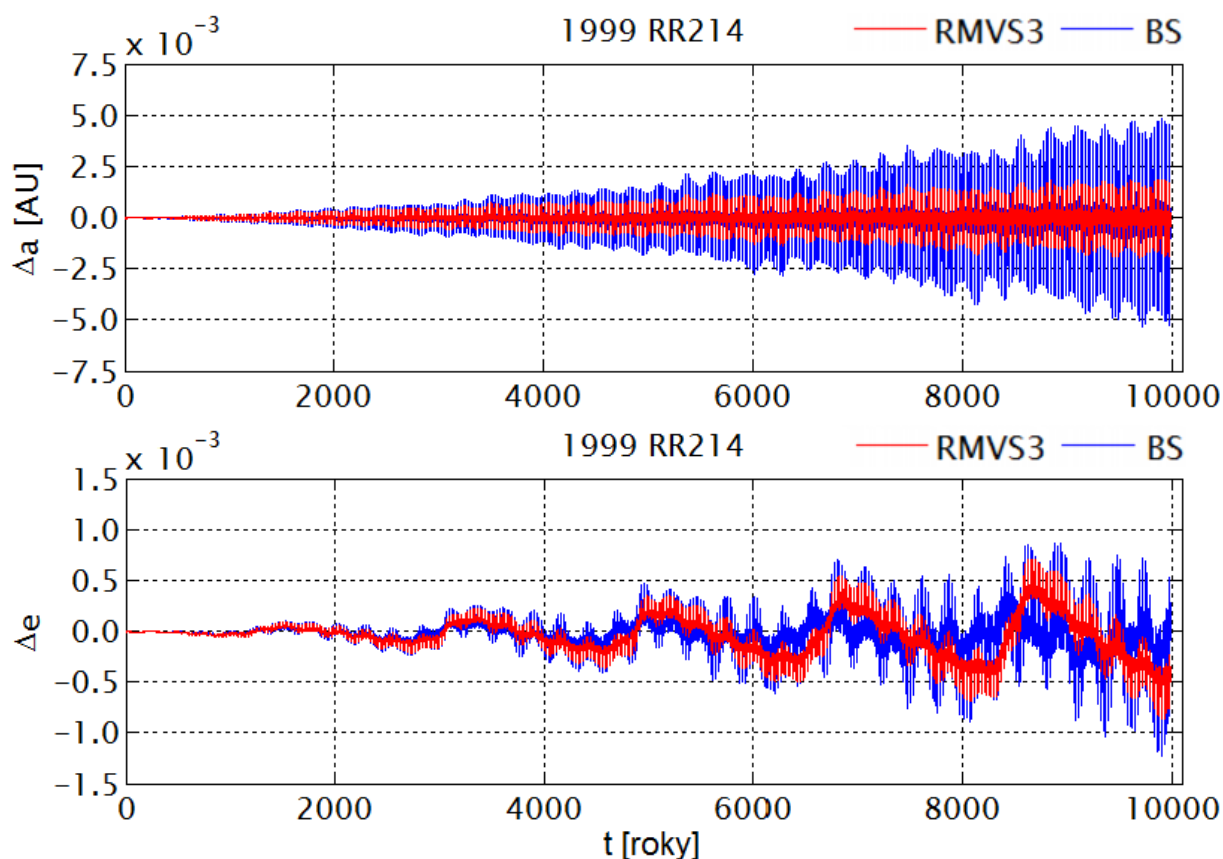


Obrázek 5.11: Časový vývoj velké poloosy a a excentricity e pro planetku 1999 RR214 spočítaný integrátorem *evoluce.m* na 10 000 let dopředu. Integrační krok $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní.

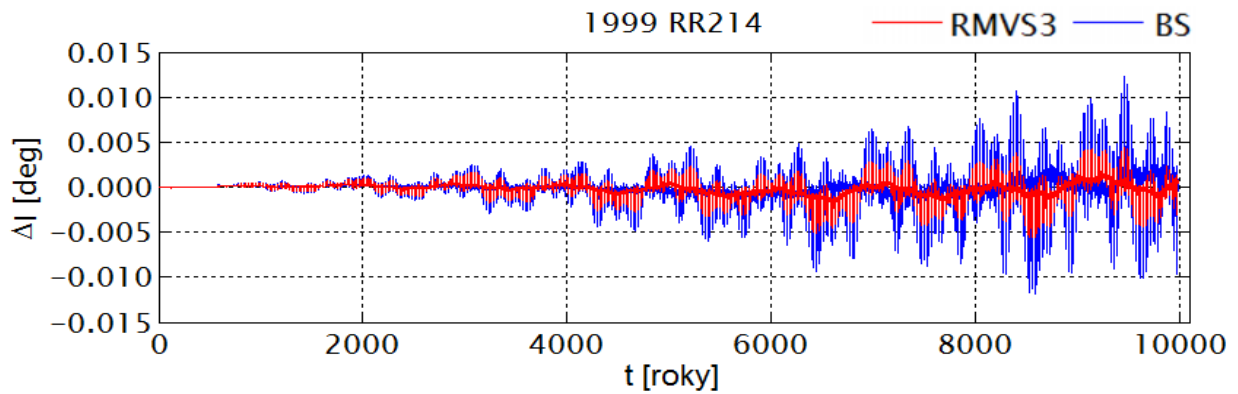


Obrázek 5.12: Časový vývoj inklinace I pro planetku 1999 RR214 spočítaný integrátorem *evoluce.m* na 10 000 let dopředu. Integrační krok $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní. Inklinací úhel je vztažen k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).

Následují grafy časového vývoje chyby orbitálních elementů integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům z balíku *Swift*.

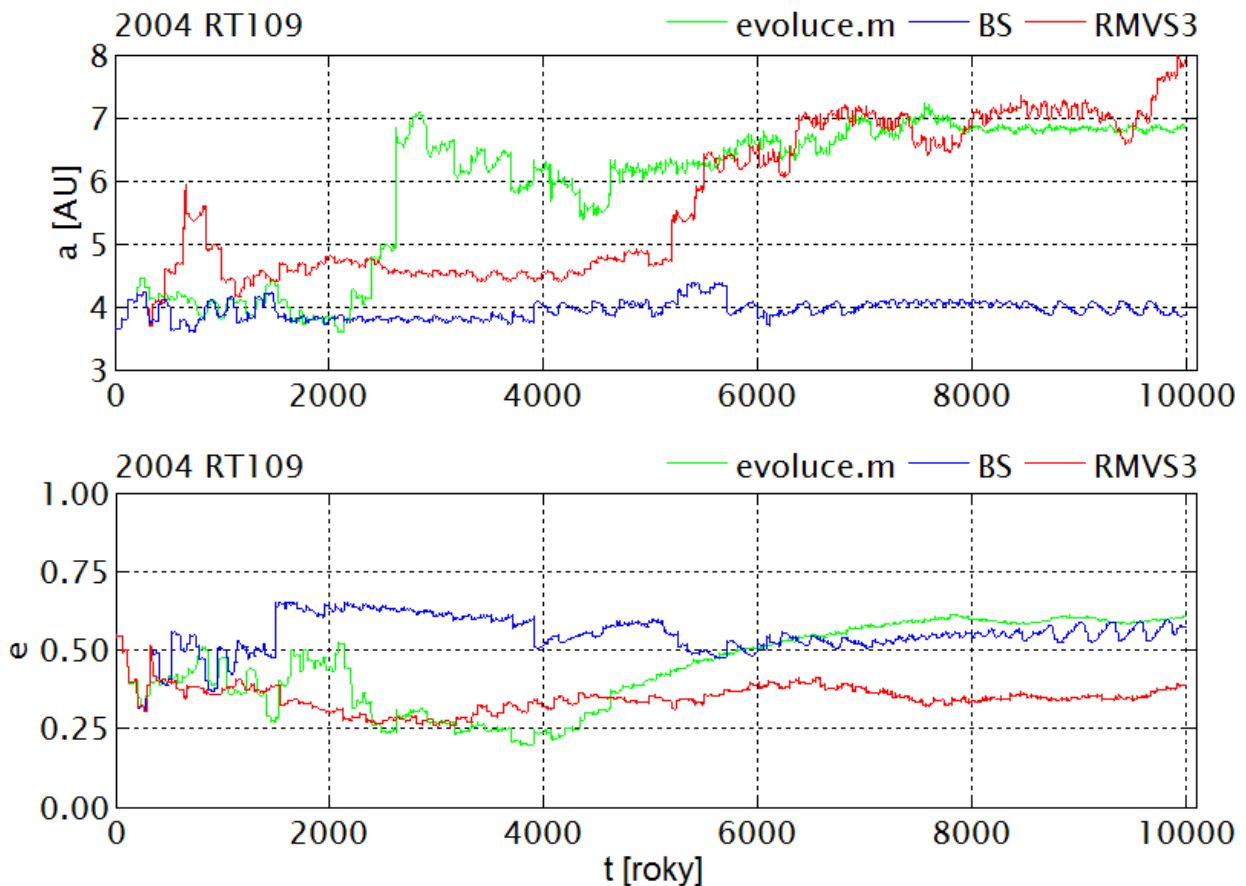


Obrázek 5.13: Časový vývoj chyby velké poloosy Δa [AU] a excentricity Δe pro planetku 1999 RR214 integrátoru *evoluce.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-8}$) a *Swift - RMVS3* na 10 000 let dopředu. Integrační krok byl u všech metod $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní.

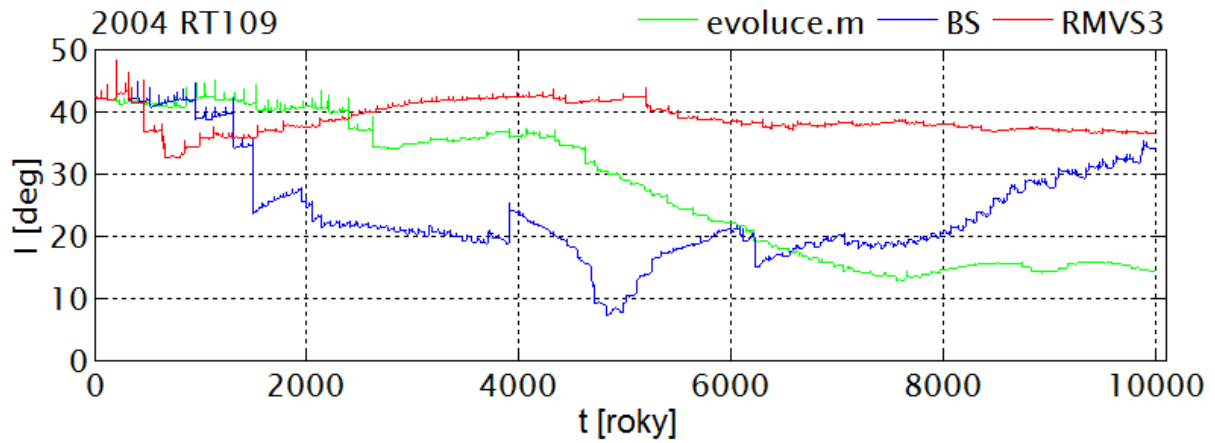


Obrázek 5.14: Časový vývoj chyby inklinace ΔI [deg] pro planetku 1999 RR214 integrátorem *evolve.m* vůči integrátorům *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-8}$) a *Swift - RMVS3* na 10 000 let dopředu. Integrační krok byl u všech metod $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní. Inklinací úhel je vztažen k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).

Planetka 2004 RT109



Obrázek 5.15: Časový vývoj velké poloosy a a excentricity e pro planetku 2004 RT109 spočítaný integrátory *evolve.m*, *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-8}$) a *Swift - RMVS3* na 10 000 let dopředu. Integrační krok $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní.



Obrázek 5.16: Časový vývoj inklinace I pro planetku 2004 RT109 spočítaný integrátory *evoluce.m*, *Swift - Bulirsch - Stoer* ($\epsilon = 10^{-8}$) a *Swift - RMVS3* na 10 000 let dopředu. Integrační krok $h = 1$ střední sluneční den, data byla vypisována každých 100 středních slunečních dní. Inklinanční úhel je vztažen k rovině ekliptiky, která svírá se světovým rovníkem úhel $\epsilon = 23^{\circ}26'21.448''$ (J2000.0).

5.1 Diskuse výsledků

V tomto odstavci provedu diskusi získaných výsledků.

Planetka 1998 HZ7

Jedná se o poměrně zvláštní planetku, která se pohybuje po výstředné dráze mezi drahami Marsu a Jupiteru. Autor se domnívá, že se jedná o planetku, jež se nachází ve 2:1 rezonanci s Jupiterem (typ Griqua). K tomu autora vede nejenom periodický průběh orbitálních elementů, který je důsledkem rovnic (4.136), ale hlavně hodnota velké poloosy $a_1 = 3,224$ AU (JD 2440400.5). Ta totiž velice dobře odpovídá podmínce (4.127), kde $\left(\frac{3,224}{5,203}\right)^{3/2} \approx 0,488$.

Pro posvěcení svých myšlenek jsem taktéž užil aproximativních vztahů pro výpočet amplitudy oscilací (resp. maximální rozkmit) dle (4.138), jejíž změřená hodnota je 0,12 AU, a poměrně pěkně odpovídá spočítané hodnotě 0,11 AU. Takto sobě odpovídají i amplitudy u numerické výstřednosti. Změřená hodnota v první periodě je 0,042, spočtená potom 0,038. Z grafů je taktéž vidět, že numerická výstřednost e_1 kmitá s opačnou fází než a_1 . Tento efekt je taktéž důsledkem (4.136) a (4.137). Stejnou vlastnost můžeme vypořadovat i u průběhu inklinčního úhlu.

Z orbitálního vývoje na 100 let dopředu je vidět, že si Runge-Kuttova metoda společně s metodou Bulirsch-Stoer vede oproti údajům z MPC daleko lépe nežli metoda RMVS3. To jen potvrzuje známý fakt, že tyto první dvě metody (nesymplektické) se pro krátkodobou předpověď jeví spolehlivější než symplektické integrátory, které jsou naopak vhodnější pro dlouhodobé orbitální vývoje.

Z časového vývoje inklinčního úhlu autor usuzuje také na to, že se jedná o planetku s nestabilní drahou, což je ostatně ukázáno v [5], [26].

Planetka 1999 RR214

Hodnota velké poloosy u této planetky je $a_1 = 3,937$ AU. Potom dle (4.127) obdržíme $\left(\frac{3,937}{5,203}\right)^{3/2} \approx 0,658$, což odpovídá rezonanci 3:2 s planetou Jupiter (rodina Hilda).

Maximální rozkmit velké poloosy 0,08 AU se ukazuje menší než u předešlé planetky. U numerické výstřednosti je to naopak, zde je rozkmit naopak větší, a to 0,16. Obě hodnoty jsem odečetl z první periody časového průběhu orbitálních elementů. Planetka se navíc pohybuje po méně výstředné dráze, nežli tomu bylo u planetky 1998 HZ7.

Na základě průběhu časového vývoje inklinace opět usuzuji na to, že se planetka stejně jako planetka 1998 HZ7 pohybuje po poměrně nestabilní dráze.

Planetka 2004 RT109

Jedná se opět o planetku s velice vzácnou drahou. Z uvedených grafů je ihned patrné, že toto těleso prodělává silný, až bouřlivý orbitální vývoj, který se autor práce níže snaží na základě vlastních úvah vysvětlit.

Dráhové elementy tohoto tělesa $a_1 = 3,661$ AU, $e_1 = 0,540$, $I = 42,153^\circ$ jsou silně nezvyklé. Dráha je poměrně hodně výstředná, a k ekliptice skloněna pod neobvykle velkým úhlem.

Charakteristika dráhy se nápadně přimyká k drahám komet tzv. Jupiterovy rodiny. Jen inklinční úhel je poněkud větší než odpovídající inklinční úhly této rodiny (největší známý má kometa P/2006 S4 Christensen se sklonem dráhy $39,6^\circ$). To však neznamená, že se

tomuto tělesu v budoucnu nemůže kometární charakter ještě přisoudit. Je to však málo pravděpodobné.

Důležitým indikátorem rozdělení těles na planetky a komety je *Tisserandův invariant*

$$T = \frac{a_2}{a_1} + 2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}(1 - e_1^2)} \cos I_1, \quad (5.8)$$

kde a_2 je velká poloosa rušícího tělesa (Jupiter), ostatní orbitální elementy přísluší studované planetce nebo kometě. Komety Jupiterovy rodiny jsou charakteristické tím, že hodnota Tisserandova invariantu splňuje podmínku $T > 2$. Po výpočtu vychází Tisserandův invariant pro planetku 2004 RT109 $T = 2,468$, což by nahrávalo myšlence, že se skutečně jedná o kometu Jupiterovy rodiny.

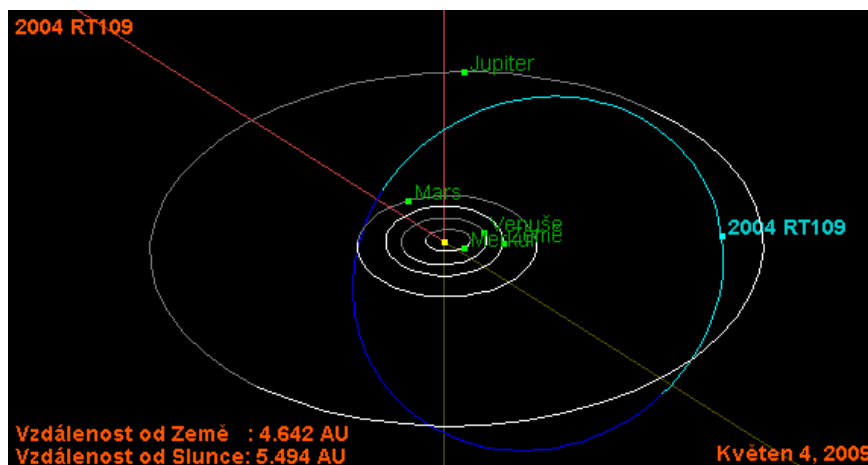
Při interpretaci jednotlivých grafů jsem se zaměřil na jejich zdánlivé „nespojitosi“. Ve skutečnosti se o nespojitosti nejedná, jde pouze o rapidní změny odpovídajících dráhových elementů v rámci týdnů, což na zvolené časové škále skutečně vypadá jako nespojitý průběh závislosti. Pro vysvětlení bouřlivých průběhů časového vývoje orbitálních elementů jsem přesunul svoji pozornost ke vzdálenostem planetky od Slunce v perihéliu a v aféliu. Ty jsou dány jednoduchými vztahy

$$q_1 = a_1(1 - e_1), \quad Q_1 = a_1(1 + e_1), \quad (5.9)$$

kde q_1 je vzdálenost perihélia, Q_1 vzdálenost aféliu. Pro planetku 2004 RT109 vyhází tyto hodnoty $q_1 = 1,683$ AU, $Q_1 = 5,639$ AU. Když je porovnáme s údaji pro planetu Mars ($q_M = 1,381$ AU, $Q_M = 1,666$ AU) a Jupiter ($q_J = 4,952$ AU, $Q_J = 5,203$ AU), můžeme vyslovit myšlenku, že se planetka v průběhu časového vývoje své dráhy k těmto dvěma planetám na malou vzdálenost přiblíží.

To by potom mělo za následek výraznou změnu její dráhy, jež je dána právě těmito blízkými průlety. Ty mohou v řádech dnů výrazně ovlivnit její následný orbitální vývoj. V grafech se pak tento efekt projevuje jednak zdánlivými nespojitostmi, ale taktéž silnými krátkodobými změnami hodnot orbitálních elementů.

Je zřejmé, že každá z integračních metod je k těmto změnám jinak citlivá. Autor bere orbitální vývoj planetky 2004 RT109 jako zářný příklad obecně známého poznatku, který tvrdí, že výsledný orbitální vývoj může silně záviset právě na volbě použité numerické metody. Na obrázku (5.17), který jsem převzal z [32], je znázorněna dráha planetky 2004 RT109.



Obrázek 5.17: Dráha planetky 2004 RT109.

Závěr

Úkolem předložené diplomové práce s názvem *Dynamika drah planetek* bylo spočítat orbitální vývoj vybraných planetek na 10 000 let do budoucnosti společně s provedením diskuse získaných výsledků. K problému jsem se snažil přistupovat co možná nejvíce systematicky.

V prvním kroku považuji jako nutnost odvodit v rozumné míře teoretický základ, který by měl každý zájemce o nebeskou mechaniku znát. Pouze potom lze textu a získaným výsledkům skutečně porozumět. V první fázi jsem se rozhodl postupovat od pojmu centrální síly (*kapitola 1*) přes problém dvou těles (*kapitola 2*) až k určení dráhových elementů ze souboru tří pozorování (*kapitoly 3*).

Právě *kapitola 3*, která rozebírá Gaussovu metodu určení elementů dráhy, je první přímou aplikací nebeské mechaniky. Po zavedení orbitálních elementů v *kapitole 2* se zde čtenář dozví, jak je určit a spočítat v praxi, tzn. při reálných pozorováních. Výklad jsem se snažil vést takovým způsobem, aby plynule přešel od obecně známých pojmů k pojmům již specifickým pro partii nebeské mechaniky. Důraz a výklad je kladen právě na orbitální elementy, neboť ty jsou stěžejní pro tuto diplomovou práci.

Z nabytých poznatků o dráhových elementech je potom v *kapitole 4* rozvinuta analytická teorie poruch, kde jsem kladl důraz na všechny potřebné algebraické operace včetně cenných komentářů.

V poslední kapitole (*kapitola 5*) jsou potom uvedeny autorem provedené výsledky numerických výpočtů časových vývoje orbitálních elementů planetek 1998 HZ7, 1999 RR214 a 2004 RT109. V této kapitole jsou taktéž diskutovány konkrétní výsledky a vyneseny chyby autorem vytvořeného programu oproti programům z balíku *Swift*.

Hlavní přínos, který vidím v předložené diplomové práci, se dá rozdělit do tří základních kategorií dle rostoucí důležitosti.

Předně jsem uceleně shrnul základní teoretické poznatky nutné pro pochopení dané problematiky. Cennost tohoto kroku vidím hlavně v silné absenci české literatury pojednávající o nebeské mechanice, a doufám, že poslouží čtenáři v základní orientaci v oboru, zvláště v poruchovém počtu.

Následně jsem vyvinul software, který řeší některé úlohy nebeské mechaniky. Konkrétně se jedná o program `gauss.m` (pro program Matlab), resp. `gauss.o` (pro program Octave), jež počítá orbitální elementy planetek ze souboru tří pozorování. K tomuto účelu bylo taktéž sestaveno výpočetní schéma, kterým se celý algoritmus řídí. Použití tohoto programu může nalézt aplikaci hlavně při praktických astrometrických měřeních, kde máme zájem o hodnoty orbitálních elementů, ze kterých lze potom usuzovat na typ pozorovaného objektu (planetka, kometa, transneptunické těleso a další).

Stěžejní výsledky práce se ale soustřeďují do *kapitoly 5*, kde jsou numericky spočítány orbitální vývoje reálných těles. Pro tento účel jsem vyvinul program `evoluce.m` (resp. `evoluce.o`), který Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu numericky řeší příslušné pohybové rovnice zúčastněných těles (viz úvod páté kapitoly). Získaná data byla následně porovnána s integrátory balíku *Swift*, se kterými se velice pěkně shodovala.

Spočítanými orbitálními vývoji však ale práce nekončí. Vynesené závislosti orbitálních elementů jsem se následně rozhodl interpretovat a výsledky diskutovat. Dospěl jsem k několika cenným závěrům a uvádím i některé své vlastní postřehy a myšlenky, které jsou obsahem paragrafu (5.1) v závěru páté kapitoly.

Konkrétně, planetce 1998 HZ7 jsem přisoudil nestabilní dráhu ve 2:1 rezonanci s planetou Jupiter. Domnívám se taktéž, že se jedná o těleso typu Griqua, které se pohybuje po dlouhodobě nestabilní dráze.

Další planetka, 1999 RR214, se také vyznačuje nestabilní dráhou. Odpovídá ale už jinému typu rezonance, a to rezonanci 3:2 opět s planetou Jupiter. Jedná se o člena rodiny Hilda.

Poslední těleso, s označením 2004 RT109, mi připadá jako nejzajímavější. Zde se domnívám, že jeho bouřlivý orbitální vývoj je důsledkem blízkých přiblížení k planetě Mars, či planetě Jupiter. Tato blízká setkání mohou výrazně, v relativně krátkém časovém intervalu, změnit tvar dráhy a přirozeně i její další průběh. To se potom projevuje zdánlivými nespojitostmi v časovém vývoji dráhových elementů. Existuje také možnost, že se jedná o kometu tzv. Jupiterovy rodiny, což by potvrzovala hodnota Tisserandova invariantu (5.8). V době psaní této práce jsem bohužel nenarazil na žádný ze zdrojů, který by jednoznačně přisoudil tomuto tělesu kometární či jiný charakter. Zdá se tudíž, že je tato otázka stále otevřená¹.

Závěrem je potřeba poznamenat, že každá z numerických metod se vyznačuje různou přesností v závislosti na délce času, po který chceme studovat orbitální vývoj. Například pro krátkodobé předpovědi se Runge-Kuttova metoda jeví přesnější než metoda *Bulirsch - Stoer* či *RMVS3*. Naopak pro dlouhodobé vývoje je záhodno použít metodu *RMVS3*, která je pro tyto účely neocenitelná. Dle orbitálního vývoje tělesa 2004 RT109 je navíc patrné, že i samotná volba numerické metody může výrazně ovlivnit výsledek.

Silnou motivací autora k další práci je zefektivnění stávajících algoritmů, hledání důmyslnějších numerických metod, a následně ztotožňování výsledků s propracovanými analytickými metodami nebeské mechaniky.

¹I když oficiálně je toto těleso vedeno jako planetka.

Literatura

- [1] ANDRLE, P. *Základy nebeské mechaniky*. Praha: Academia, 1971. 308 s.
- [2] ANDRLE, P. *Nebeská mechanika: analytické metody*. Praha: Academia, 1987. 212 s.
- [3] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. 3. vyd. Praha: Matfyzpress, 2005. 435 s. ISBN 80-86732-57-6.
- [4] BRDIČKA, M., HLADÍK, A. *Teoretická mechanika*. Praha: Academia, 1987. 584 s.
- [5] BROŽ, M., VOKROUHLICKÝ, D., ROIG, F., NESVORNÝ, D., BOTTKE W. F., MORBIDELLI, A., 2005, The population of asteroids in the 2:1 mean motion resonance with Jupiter revised, in: *Dynamics of Populations of Planetary Systems*, Eds. Z. Kněžević and A. Milani, Cambridge University Press, p. **179**.
- [6] BROŽ, M., VOKROUHLICKÝ, D., 2008, Asteroid families in the first-order resonances with Jupiter, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **390**, 715.
- [7] DOŠLÁ, Z, NOVÁK, V. *Nekonečné řady*. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 120 s. ISBN 80-210-1949-2.
- [8] DUBYAGO, A. D., et al. *The Determination of Orbits*. The RAND Corporation. New York: The Macmillan Company, 1961. 431 s.
- [9] ENCRENAZ, T., et al. *The Solar System*. 3rd edition. Berlin: Springer, 2004. 512 s. ISBN 3-540-00241-3.
- [10] HOROVÁ, I., ZELINKA, J. *Numerické metody*. 2. rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. 294 s. ISBN 80-210-3317-7.
- [11] HORSKÝ, J, NOVOTNÝ, J, ŠTEFANÍK, M. *Mechanika ve fyzice*. Praha: Academia, 2002. 412 s. ISBN 80-200-0208-1.
- [12] CHEBOTAREV, G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*. Richard Bellman; Scripta Technica, Inc. New York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1967. 331 s.
- [13] JARNÍK, V. *Diferenciální počet I*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963. 392 s.
- [14] JARNÍK, V. *Diferenciální počet II*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956. 609 s.
- [15] KVASNICA, J. *Matematický aparát fyziky*. Jarmila Kvasnicová. 2. upr. vyd. Praha: Academia, 1997. 383 s. ISBN 80-200-0603-6.

- [16] MEEUS, J. *Astronomical Algorithms*. 2nd edition. Richmond: Willmann - Bell, Inc., 1998. 477 s. ISBN 0-943396-61-1.
- [17] MECHLOVÁ, E., et al. *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz fyziky*. Praha: Prometheus, 2001. 588 s. ISBN 80-7196-151-5.
- [18] MORBIDELLI, A. *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*. London and New York: Taylor and Francis, Inc., 2002. 376 s. ISBN-13: 9780415279390.
- [19] MOULTON, F. R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. 2nd rev. edition. New York: The Macmillan Company, 1960. 437 s.
- [20] MURRAY, C. D., DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 592 s. ISBN 0-521-57597-4.
- [21] ROBERT, M., BAKER, L., MAKEMSON, M. *An introduction to Astrodynamics*. New York and London: Academic Press, 1960. 358 s.
- [22] VANÝSEK, V. *Základy astronomie a astrofyziky*. Praha: Academia, 1980. 544 s.
- [23] ŽIŽKA, J. *CCD atrometrie planetek*. 2007. 48 s. Práce byla obhájena roku 2007 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně. Bakalářská práce.

Elektronické zdroje

- [24] BROŽ, M. *Fyzika malých těles sluneční soustavy* [online]. Dostupný z WWW: <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/fyzika_malych_teles/>.
- [25] BROŽ, M. *Efemeridy a integrace* [online]. Dostupný z WWW: <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/astrofyzika_pro_fyziky/4_efemeridy/>.
- [26] BROŽ, M. Supplementary material for the article „*Asteroid families in the first order resonances with Jupiter*“ [online]. Dostupný z WWW: <<http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/mp/>>.
- [27] LEVISON, H., DUNCAN, M. *Swift: A solar system integration software package* [online]. 1999 [cit. 2009-04-07]. Dostupný z WWW: <<http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>>.
- [28] *Minor Planet and Comet Ephemeris Service* [online]. 2005 [cit. 2009-04-10]. Dostupný z WWW: <<http://www.cfa.harvard.edu/iau/MPEph/MPEph.html>>.
- [29] STANDISH, E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides (DE405/LE405)* [online]. 2005 [cit. 2009-04-10]. Dostupný z WWW: <<http://iau-comm4.jpl.nasa.gov/README.html>>.
- [30] ŠIDLICHOVSKÝ, M. *Nebeská mechanika* [online]. Dostupný z WWW: <<http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/davok/scripta-NB1.pdf>>.
- [31] TATUM, J. B. *Celestial Mechanics* [online]. Dostupný z WWW: <<http://www.astro.ubic.ca/~tatum/celmechs.html>>.
- [32] <<http://www.planetky.cz/>>.

Tato diplomová práce byla vysázena typografickým systémem Latex.