MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Michal CENIGA

HVĚZDNÝ VÍTR HORKÝCH HVĚZD

Disertační práce

Školitel: RNDr. Jiří Kubát, CSc. Brno, 2011

Bibliografický záznam

Autor:	Mgr. Michal Ceniga Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název disertační práce:	Hvězdný vítr horkých hvězd
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Teoretická fyzika a astrofyzika
Školitel:	RNDr. Jiří Kubát, CSc.
Rok obhajoby:	2011
Klíčová slova:	horké hvězdy, zářivá síla, modelování hvězdného větru, CAK aproximace, rotace, rovníkový disk

Bibliographic entry

Author:	Mgr. Michal Ceniga Faculty of Science, Masaryk University Department of Theoretical Physics and Astrophysics
Title of dissertation:	Stellar wind of hot stars
Degree programme:	Physics
Field of study:	Theoretical Physics and astrophysics
Supervisor:	RNDr. Jiří Kubát, CSc.
Year of defence:	2011
Keyworlds:	hot stars, radiative force, stellar wind modelling, CAK approximation, rotation, equatorial disk

Děkuji svému školitelovi Dr. Jiřímu Kubátovi za obětavou pomoc a trpělivost při vedení mé práce a také prof. Jiřímu Krtičkovi za cenné rady a impulzy v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem práci a uvedené výsledky vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

Michal Ceniga

Abstrakt

Disertační práce se zabývá studiem rotujících hvězdných větrů horkých hvězd urychlovaných zářivou silou. Tyto větry jsou velmi dobře popsány CAK teorií, která pro výpočet zářivé síly využívá Sobolevovu aproximaci. Rotace větru je započítána za předpokladu platnosti zákona zachování momentu hybnosti. Pro získání řešení hydrodynamických rovnic popisujících hvězdný vítr byl vyvinut program (na základě programu vytvořeného Krtičkou), který počítá jednorozměrný stacionární izotermický osově symetrický rotující model hvězdného větru. V modelu nebyly uvažovány neradiální složky sil, zploštění hvězdy vlivem rotace a gravitační ztemnění.

Výsledky modelování potvrzují, že pro rychle rotující hvězdy existuje nové řešení hydrodynamických rovnic. Nové řešení, které prochází kritickým bodem nacházejícím se ve velkých vzdálenostech od hvězdy, je mnohem pomalejší a hustější v porovnání s CAK řešením pro pomalé rotace. Poměr hustot rovníkového a polárního větru dosahuje nejméně dva řády v těsné blízkosti hvězdy, dále od hvězdy dosahuje poměr hustot jednoho řádu. Velikost hustotního poměru blízko povrchu hvězdy je významně ovlivněn nastavením spodní okrajové hustoty větru, dále od hvězdy nemá spodní okrajová hustota na poměr hustot vliv. Výpočty ukazují, že blízko povrchu hvězdy se vytváří velmi hustý disk. Na utváření disku blízko hvězdy má vliv zejména gradient tlaku plynu a zářivá síla kontinua. Přechod od rychlého (CAK) řešení větru k pomalému řešení nastává pro určitou hodnotu rotační rychlosti, tzv. přechodovou rotační rychlost (Ω_{switch}). Její hodnota závisí na volbě multiplikativních konstant zářivé síly. Platí, že nižší hodnota parametru α vede k menším hodnotám přechodové rotační rychlosti, které je možné dostat také zvýšením hodnoty parametru δ. Pro rotační rychlost $\Omega = \Omega_{\text{switch}}$ existují současně dva kritické body, přičemž pomalé řešení lze získat, jestliže řešení prochází novým kritickým bodem. Pro rotační rychlosti hvězdy nacházející se blízko přechodové rotační rychlosti ($\Omega \rightarrow \Omega_{\text{switch}}$) jsou výsledkem modelování velmi silně oscilující nestabilní řešení.

Aplikace rychlé rotace a zářivé síly na hvězdy vykazující B[e] jev nedokáže vysvětlit jejich vysoký hustotní poměr mezi rovníkovým a polárním větrem. Zahrnutí tzv. jevu bistability podmíněného rychlou rotací hvězdy situaci mění. Vlivem rotace hvězdy dochází k ustavení rozdílných teplot okolo rovníku a pólů hvězdy, což způsobí, že na urychlování hvězdného větru se podílejí v těchto oblastech různé skupiny iontů. Bistability jev je reprezentován jednou trojicí parametrů zářivé síly

pro oblast rovníku a jinou trojicí těchto parametrů pro polární oblasti. Výsledky modelování potvrzují vysoký poměr hustot v celém větru, $\rho_{\mathrm{rov}}/\rho_{\mathrm{pol}} \sim 10^2$, přičemž tyto hodnoty odpovídají dolním odhadům pro disky B[e] hvězd.

Dissertation Abstract

The radiation driven winds of rotating hot stars were studied in this PhD thesis. The radiation driven wind is well described by the CAK theory, which assumes the Sobolev approximation in calculation of the line-radiative force. The rotation was included by assuming the conservation of angular momentum. The code, developed in this thesis, stems from the Krticka's code and calculates the solution of the 1D stationary isothermal axi-symmetric rotating line-driven wind. The oblatness of the star, the gravity darkening effects, and the non-radial components of forces were neglected.

The results of modeling confirm that there is a new solution of hydrodynamic equations for rapidly rotating stars. This new wind solution, connected with a new critical point located far from the star, is much denser and slower than the CAK solution for slowly rotating stars. The wind density ratio between the equator and the pole ($\rho_{\rm rov}/\rho_{\rm pol}$) reaches at least two orders of magnitude in the region closest to the stellar surface and one order of magnitude in the outer part of the wind. The calculations show the existence of a high density disk close to the stellar surface. Disk formation close to the star is influenced mainly by the gas pressure gradient and by the continuum radiative force, and significantly depends on the wind density at the stellar surface. The switch from the fast solution to the slow solution occurs for a certain value of rotation speed called the "switch" rotation speed. The switch rotation rate ($\Omega_{\rm switch}$) depends on the set of the force multiplier parameters; the lower value of the α parameter, the lower value of the "switch" rotation rate. Higher value of the δ parameter causes the same effect. At the rotation rate $\Omega = \Omega_{\rm switch}$ there are two critical points, but the slow solution is obtained only for the new one. For rotation rates close to the "switch" value, $\Omega \rightarrow \Omega_{\rm switch}$, there are strongly oscilating unstable solutions.

The effect of the fast rotation alone can not explain the high wind-density ratio for the stars with B[e] phenomenon. To explain it, wind models assuming the bi-stability effect were calculated. This effect was represented by two sets of line force parameters to describe different temperatures at the pole and in the equatorial region, the effect caused by the fast rotation. The calculations confirm the high density ratio in the whole wind, $\rho_{\rm rov}/\rho_{\rm pol} \sim 10^2$, which satisfies the lower value predicted for the B[e] stars disk.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Horké hvězdy představují hmotné objekty s vysokými zářivými výkony, u kterých v souvislosti s intenzívním zářivým polem pozorujeme intenzivní hvězdný vítr. Mohutnost hvězdného větru může být tak velká, že ztráta hmoty z hvězdy jeho prostřednictvím může značně ovlivnit vývoj hvězdy. Ztráta hmoty je navíc podporována rotací hvězdy, jež je běžnou charakteristikou horkých hvězd. Tím se výzkum rotujících hvězdných větrů urychlovaných zářením řadí mezi významné astrofyzikální úlohy.

Teorie hvězdných větrů urychlovaných zářením podávala výsledky, které byly ve velmi dobré shodě s pozorováním. Zahrnutí rotace do modelových výpočtů přineslo nárůst toku hmoty a pokles rychlosti větru v rovníkových oblastech hvězdy, nicméně přes úspěch teorie nedokázala dát odpověď na přítomnost hustých disků okolo velmi rychle rotujících raných B hvězd. Rotace spolu s bi-stability jevem vedla pouze ke zvýšené hustotě větru v rovníkové rovině hvězdy. Navíc započítání jevů spojených s rotací hvězdy (např. gravitačního ztemnění) ukazovalo dokonce na potlačení vzniku hustého rovníkového disku. Jedním z nepřekonatelných problémů představovaly také jisté numerické potíže při výpočtech modelů větrů velmi rychle rotujících hvězd.

Přesto poslední roky výzkumu přinesly znovuoživení myšlenky, že za vznikem okolohvězdných disků horkých hvězd by přece jen mohla stát zářivá síla. Tuto ideu oživil Curé, který spočítal modely větrů pro rotační rychlosti blížící se kritické rotační rychlosti a ukázal, že hustý disk se přece jen vytváří, ale pouze blízko hvězdy. Zahrnutí bi-stability jevu rozšířilo výskyt disku i do velkých vzdáleností.

1.2 Shrnutí dosavadních výsledků

Raketová UV spektra, která pořídil Morton (1967a) pro OB veleobry v Orionu, odhalila tzv. P Cygni profily rezonančních čar C IV a Si IV. Tyto profily se staly neklamným důkazem unikající látky z hvězdy rychlostmi až několik tisíc km/s v množství, které Morton (1967b) odhadl na $10^{-6}\,M_\odot$/rok. Lucy & Solomon (1970) vysvětlili únik látky z hvězd vysokých zářivých výkonů na základě absorpce záření v UV rezonančních čarách C, N, Si a S, přičemž rozpracovali několik desítek let starý návrh Milneho (1926) o možnosti úniku látky z hvězdy díky interakci záření s hmotou ve vnějších vrstvách atmosféry s uvážením Dopplerova jevu. Následně Castor (1974) navrhl přibližné analytické vyjádření zářivé síly způsobené absorpcí záření ve spektrálních čarách.

První hydrodynamický model hvězdného větru urychlovaného zářivou silou spočítali Castor, Abbott, & Klein (1975) (dále CAK), tento model podle autorů je běžně nazýván CAK model větru. Zářivou sílu vypočítali v Sobolevově aproximaci, která využívá velkých gradientů rychlostí a díky které zářivá síla závisí pouze na lokálních podmínkách místa, kde dochází k absorpci. Zářivou sílu reprezentovali absorpcemi záření pouze v čarách iontu C III a na základě výpočtů zářivé síly určili její velmi jednoduchou parametrizaci v závislosti na teplotě hvězdy. Výpočty CAK modelu pro radiální zářivé pole ukázaly, i přes velká zjednodušení, kvalitativní shodu s pozorováním a potvrdily, že ztráta hmoty hvězd s vysokým zářivým výkonem je způsobena zářivou silou.

Úspěch CAK modelu nastartoval směrování ve výzkumu hvězdných větrů horkých hvězd na několik dalších desetiletí. Mnoho autorů se zaměřilo na zpřesnění CAK modelu větru. Abbott (1982) spočítal zářivou sílu pro ionty od H po Zn pro možné ionizační stupně I až VI, což představovalo příspěvek asi 250 000 čar a dále rozšířil parametrizaci zářivé síly tak, aby zohledňovala změny ionizace ve větru. Přesto hodnoty předpovězené CAK teorií a hodnoty získané na základě pozorování nesouhlasily, konečné rychlosti větrů byly příliš malé a rychlosti ztráty hmoty nadhodnocené. Shodu přinesly až výpočty modelů, které nezávisle na sobě provedli Friend & Abbott (1986) a Pauldrach a kol. (1986) (dále PPK). Do svých modelů zahrnuli korekční faktor, spočítaný již CAK, zohledňující neradiální zářivé pole. Zahrnutí korekčního faktoru (tzv. m-CAK model), který znamenal přechod od bodového zdroje záření ke zdroji zářícímu jako rovnoměrně jasný disk, vedlo k reálnějšímu obrazu zářivé síly, kdy zejména v oblastech v těsné blízkosti hvězdy dopadá záření z různých směrů od hvězdy, což v této oblasti vedlo k menší zářivé síle a menšímu toku hmoty a nakonec vyšším rychlostem větru. PPK dále spočítali zářivou sílu bez užití Sobolevovy aproximace a to současným řešením rovnice přenosu záření a jejich momentů spolu s hydrodynamickými rovnicemi (tzv. *comoving frame method - CMF method*). Největší rozdíl ve výpočtech zářivé síly nastával v hlubokých atmosférických vrstvách, kde zářivá síla spočítaná CMF metodou je dána difúzní aproximací zatímco v Sobolevově aproximaci je na povrchu hvězdy nulová. Přesto tento rozdíl nemá výrazný vliv na výsledný model větru, protože v blízkých oblastech hvězdy je výraznější silou zářivá síla kontinua. Krtička & Kubát (2010) provedli výpočty zářivé síly CMF metodou a porovnáním s výpočty zářivé síly v Sobolevově aproximaci, při které uvažovali pouze teplotní rozšíření spektrálních čar bez jejich překryvu, ukázali velmi dobrou shodu, a to i v okolí zvukového bodu. Pauldrach (1987) vypočítal obsazení hladin prvků od H po Zn pomocí rovnic statistické rovnováhy (dosud předpoklad LTE), což vedlo ke zvýšenému obsahu vyšších ionizačních stavů prvků ve větru a tím i lepší shodě veličin získaných z pozorování s hodnotami předpovězenými teroreticky. Nakonec Kudritzki a kol. (1989) odvodili přibližné analytické vyjádření konečné rychlosti větru a rychlosti ztráty hmoty v závislosti na parametrech hvězdy s příslušnými parametry zářivé síly.

Spektra horkých hvězd ukázala, že se jedná o rychle rotující objekty (Conti & Ebbets, 1977; Penny, 1996; Markova a kol., 2004), přičemž rotační rychlosti v případě tzv. B[e] hvězd tvoří významný podíl kritické rotační rychlosti (Zickgraf, 2006). Spektra B[e] hvězd navíc poukazovala na přítomnost rychlého větru odvozeného z analýzy UV čar (Snow & Morton, 1976) a současně hustého, pomalého toku odvozeného z pozorování v infračervené oblasti spektra (Gehrz a kol., 1974). Vysvětlení současného výskytu dvojího druhu větru navrhl Zickgraf a kol. (1985), v jehož modelu B[e] hvězdy se v polárních oblastech vykytuje rychlý, řídký a horký vítr tvořený ionty ve vyšších ionizačních stupních (např. N V, Si IV), který splňoval vlastnosti CAK větru, a v rovině rovníku velmi hustý, pomalý a chladný vítr tvořený ionty v nižších ionizačních stupních (např. Fe II, Si II). Zahrnutí rotace do CAK modelu tak slibovalo potvrzení navrhovaného Zickgrafova schématu.

Friend & Abbott (1986) výpočty m-CAK modelů hvězdného větru s rotací ukázaly, že rotace hvězdy vede k nižší rychlosti hvězdného větru a také k mírně hustšímu větru v porovnání s nerotující hvězdou. Osově symetrické modely větru (Araújo & Pacheco, 1989; Araújo a kol., 1994) vedly k mnohem výraznějšímu podílu hustot mezi rovníkovým a polárním větrem, nicméně získané hodnoty stále nebyly dost vysoké na to, aby vysvětlovaly husté disky okolo rotujících horkých B hvězd a také rychlosti toku v rovině rovníku zůstávaly i přes značné rotační rychlosti příliš velké. Navíc výše uvedení autoři, ale i někteří další (např. Ceniga a kol., 2008), zmiňovali numerické problémy při výpočtech modelů větrů s vysokými rotačními rychlostmi. Bjorkman & Cassinelli (1993) vyvinuli model rotujícího hvězdného větru urychlovaného zářením známého jako WCD model. Autoři zanedbali působení gradientu tlaku plynu, jehož působení je významné pouze v těsné blízkosti hvězdy, takže na částice větru působí pouze centrální síly. Při určité hodnotě rotační rychlosti hvězdy dochází k výraznému stlačování rovníkového větru částicemi větru z obou hemisfér (*wind compression*), čímž se v rovině rovníku vytváří velmi hustý, pomalu odtékající disk. Rozdíl mezi rovníkovou a polární hustotou větru dosahuje v tomto modelu 3 řády. Tyto výsledky potvrdili Owocki a kol. (1994), kteří provedli 2D hydrodynamické simulace na základě WCD modelu. Nicméně další hydrodynamické simulace se započtením gravitačního ztemnění, neradiálních sil a okrajového ztemnění (Cranmer & Owocki, 1995; Owocki a kol., 1996) ukázaly, že v rovině rovníku dochází k potlačení vzniku hustého disku, ale naopak vzniká hustý vítr v polárních oblastech. K podobným závěrům dospěli také Petrenz & Puls (2000), kteří do svých hydrodynamických simulací zahrnuli deformaci tvaru hvězdy v důsledku rotace a také obsazení hladin atomů a iontů vypočítaných z rovnic statistické rovnováhy pro přesnnější výpočet zářivé síly. Hustota polárního větru vycházela asi 15krát větší než hustota větru rovníkového.

Protože rotace samotná nedokázala vysvětlit velmi husté disky pomocí zářivě hnaných hvězdných větrů, hledaly se další podpůrné mechanismy. Pauldrach & Puls (1990) studiem hvězdy P Cygni zjistili, že změna efektivní teploty hvězdy, elektronové teploty nebo střední hustoty větru velmi blízko povrchu hvězdy vede k prudkému nárůstu optické hloubky větru v Lymanově kontinuu, což vede ke skokovému růstu rychlosti ztráty hmoty hvězdy (*bi-stability jump*). Lamers & Pauldrach (1991) zjistili, že pokud je změna optické hloubky podmíněná rotací, pak pro určitý úhel mezi pólem a rovníkem prudce naroste optická hloubka ve větru v Lymanově kontinuu, což vede k prudkému nárůstu hustoty větru směrem k rovníku. V důsledku toho vzniká v rovníkové oblasti hustý disk, zatímco v polárních oblastech CAK vítr, tzv. *bi-stability wind*. Ten je urychlován ionty ve vyšších ionizačních stupních, naproti tomu v oblasti rovníku v důsledku velké opacity pro záření Lymanova kontinua přispívají k zářivé síle nejvíce ionty nižších ionizačních stupňů. Pelupessy a kol. (2000) spočítali model hvězdného větru se započtením tohoto efektu, přesto hustota větru na rovníku dosahovala pouze asi 10krát větší hodnoty než hustota na pólu.

Curé (2004) poprvé spočítal model větru velmi rychle rotující hvězdy. V předchozích modelech obsahujících korekční faktor (m-CAK modely) řešení procházelo kritickým bodem nacházejícím se v těsné blízkosti hvězdy. Pro model velmi rychle rotující hvězdy Curé ukázal, že kritický bod blízko hvězdy zaniká, nicméně objevuje se nový kritický bod ve velké vzdálenosti od hvězdy. Výsledný model spojený s novým kritickým bodem představoval mnohem hustější a pomalejší vítr než dával m-CAK model větru. Madura a kol. (2007) potvrdili, že toto řešení nastává, pokud rotační rychlost hvězdy překročí tzv. přechodovou rotační rychlost. Hustota rovníkového větru dosahovala 100krát vyšší hodnoty v porovnání s polárním větrem, ovšem pouze v těsné blízkosti hvězdy, dále od hvězdy dosahoval poměr hustot hodnoty o řád menší (Venero a kol., 2008). Zahrnutí bi-stability jevu (Curé a kol., 2005) vedlo ke vzniku rovníkového disku, jehož hustota byla 100krát větší v celém větru ve srovnání s polárním větrem, přičemž blízko hvězdy dosahoval poměr hustot 4 řády.

Kapitola 2

Zářivá síla

Pokud uvažujeme o záření, běžně uvažujeme situace, kdy je významná pouze energie záření (světlo, tepelné záření, rentgen, atd.). Nicméně při interakci záření s hmotou předává záření hmotě nejen svoji energii, ale i hybnost. Děje se to především absorpcí a rozptylem. V případě horkých hvězd vedou tyto procesy ke vzniku hvězdného větru hnaného zářením. Kapitola pojednává o výpočtu zářivé síly, kterou působí záření na hmotu.

Zářivá síla v místě $\boldsymbol{r}$, vyjádřená jako zářivé zrychlení vztažené na jednotku hmotnosti, je dána výrazem

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int_0^\infty \oint_\Omega \kappa(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\nu, \tag{2.1}$$

kde $\kappa(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)$ je hmotnostní absorpční koeficient[1], opacita (obecně zahrnuje absorpci a rozptyl), $I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)$ monochromatická intenzita záření, $\boldsymbol{n}$ jednotkový vektor ve směru toku záření, c rychlost světla a $\mathrm{d}\Omega$ prostorový úhel (Petrenz & Puls, 2000). Zářivou sílu dělíme na dvě složky: zářivá síla způsobená zářením kontinua, zářivá síla způsobená spektrálními čarami.

2.1 Zářivá síla kontinua

Hlavním zdrojem opacity v kontinuu v případě atmosfér horkých hvězd je rozptyl fotonů na volných elektronech, tzv. Thomsonův rozptyl. Můžeme předpokládat, že tento rozptyl je izotropní a koherentní, tedy $\kappa(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) = \sigma_{\mathrm{e}}$, kde v literatuře běžně užívaná σ_{e} označuje opacitu pro rozptyl na volných elektronech. Tím se podstatně zjednodušuje výpočet zářivé síly (2.1). S využitím výrazu pro tok záření

$$\boldsymbol{F} = \int_0^\infty \boldsymbol{F}_\nu\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \oint_\Omega I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\nu \tag{2.2}$$

[1] V problematice hvězdných atmosfér se dále setkáváme s absorpčním koeficientem $\kappa\rho = \chi$, přičemž platí, že $1/\chi$ je střední volná dráha fotonu, $[\chi] = \mathrm{cm}^{-1}$.

dostáváme pro zářivou sílu způsobenou zářením kontinua výraz

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{rad}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}\boldsymbol{F}}{c}. \tag{2.3}$$

Ve sféricky symetrickém případě jsou nenulové pouze radiální složky příslušných vektorů. Pro velikost zářivé síly tak platí:

$$g^{\mathrm{C}}_{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}} L_*}{4\pi r^2 c}, \tag{2.4}$$

kde L_* označuje zářivý výkon hvězdy.

Opacita pro rozptyl záření na volných elektronech závisí na hustotě, chemickém složení a na stupni ionizace atomů ve větru:

$$\sigma_{\mathrm{e}} = \sigma_{\mathrm{T}} \frac{n_{\mathrm{e}}}{\rho}, \tag{2.5}$$

kde $\sigma_{\mathrm{T}} = 6.65.10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$ značí Thomsonův účinný průřez elektronu, n_{e} elektronovou hustotu a ρ hustotu větru. V našich výpočtech se nezabýváme podrobně vlivem změn chemického složení hvězdného větru na jeho fyzikální vlastnosti, proto jsme užili k výpočtu elektronové opacity výraz:

$$\sigma_{\mathrm{e}} = \sigma_{\mathrm{T}} \frac{1+X}{2m_{\mathrm{H}}}, \tag{2.6}$$

přičemž $m_{\mathrm{H}} = 1.67.10^{-24}\,\mathrm{g}$ označuje hmotnost vodíku a X odpovídá hmotnostnímu zastoupení vodíku (poměr hmotnosti vodíkových atomů k hmotnosti všech atomů). Pro rané hvězdy Populace I vychází $0.28\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^2 < \sigma_{\mathrm{e}} < 0.35\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^2$ (Lamers & Cassinelli, 1999). V našich modelech předpokládáme, že stupeň ionizace ve větru je neměnný. Dále předpokládáme, že poměr počtu atomů helia k atomům vodíku je 1/10, a tedy $X \sim 0.716$. Dosazením do (2.6) dostáváme $\sigma_{\mathrm{e}} \sim 0.34\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^2$, což náleží do výše uvedeného intervalu elektronových opacit.

Zářivá síla způsobená zářením kontinua, v případě horkých hvězd, významně redukuje účinky gravitační síly na hvězdný vítr. Z toho důvodu se zavádí tzv. Eddingtonův faktor Γ jako poměr mezi velikosti zářivé síly kontinua a síly gravitační, tedy:

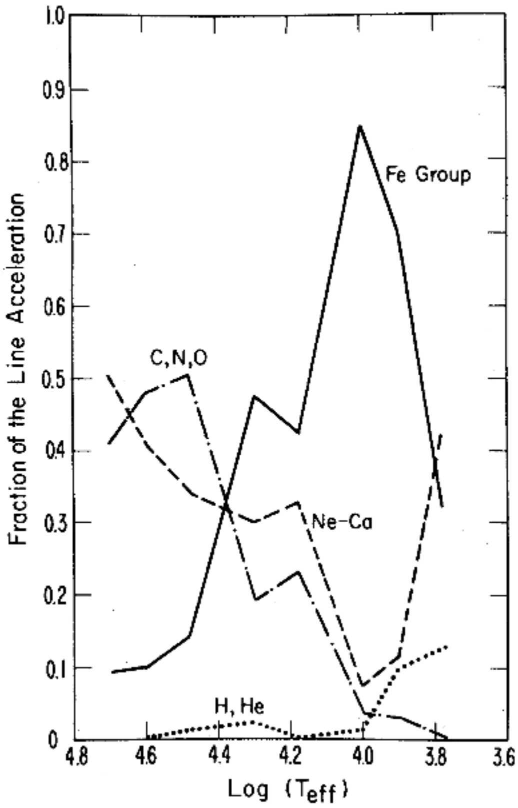
$$\Gamma = \frac{\sigma_{\mathrm{e}} L_*}{4\pi c G M_*}, \tag{2.7}$$

kde $G = 6.67.10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{g}^{-1}$ je Newtonova gravitační konstanta a M_* je hmotnost hvězdy. Pro hvězdu spektrálního typu O5V (model P-44, viz. tab. 5.1) vychází $\Gamma \sim 0.26$, pro hvězdu B1V (model M-25, viz. tab. 5.1) $\Gamma \sim 0.02$.

2.2 Zářivá síla způsobená čarami

Hvězdný vítr horkých hvězd je mnohem významněji urychlován absorpcí záření ve spektrálních čarách. Příčin je hned několik.

Urychlování hvězdného větru je v tomto případě velmi efektivní díky Dopplerovu jevu. Pokud totiž v atmosféře hvězdy existuje gradient rychlosti, pak ionty ve vnějších pohybujících se vrstvách mohou absorbovat fotosférické záření, které není pohlceno vrstvami mezi fotosférou a danými ionty, protože vlnová délka fotosférického záření se v klidové soustavě iontů jeví Dopplerovsky posunutá do červené oblasti spektra. Dále horké hvězdy vyzařují nejvíce energie v ultrafialové oblasti spektra. V této části spektra nacházíme u horkých hvězd také nejvíce absorpčních čar. Navíc opacita čarových přechodů je o několik řádů vyšší než opacita pro rozptyl na volných elektronech. Všechny tyto příčiny vedou k tomu, že zářivá síla může velmi účinně urychlovat hvězdný vítr horkých hvězd.



Obrázek 2.1: Podíl různých skupin iontů k zářivé síle v závislosti na efektivní teplotě (Abbott, 1982).

K zářivému zrychlení nepřispívají všechny ionty stejnou měrou (Abbott, 1982). Příspěvek vybraných iontů k zářivému zrychlení v závislosti na efektivní teplotě ukazuje obrázek (2.1). Na první pohled je zřejmé, že příspěvek absorpčních čar vodíku a helia jakožto prvků s nejvyšším zastoupením v atmosférách hvězd k zářivé síle je velmi malý. Příčinou je malý počet absorpčních čar těchto prvků a také teplota povrchových vrstev hvězdy, při které je vodík plně ionizovaný. V případě helia jeho nejsilnější čára leží sice ve vzdálené UV oblasti, ale v této oblasti spektra je tok záření z hvězdy velmi malý. Pro hvězdy s efektivní teplotou okolo 40 000 K přispívají nejvíce ionty C, N a O. Pro hvězdy s teplotami okolo 25 000 K roste vliv těžších iontů, což je způsobeno zejména narůstajícím počtem čar s klesající teplotou.

Hvězdný vítr horkých hvězd neobsahuje pouze ionty, které se nejvíce podílejí na urychlování hvězdného větru, ale také ostatní částice, např. ionizovaný vodík. Ve hvězdném větru dochází ke srážkám iontů urychlených zářením s ostatními nabitými částicemi prostřednictvím Coulombovské interakce. Podmínkou pro efektivní předávání hybnosti mezi částicemi je, aby doba potřebná ke zpomalení iontu srážkami byla velmi malá v porovnání s dobou, za kterou iont získá rychlost odpovídající termální rychlosti (Lucy & Solomon, 1970). Pro hvězdy spektrálního typu O a B je tato podmínka dobře splněna (Lamers & Cassinelli, 1999).

Z předchozího je zřejmé, že pro určení zářivé síly způsobené absorpcí záření ve spektrálních čarách iontů v daném místě ve hvězdném větru je potřeba spočítat opacitu všech čarových přechodů různých iontů, přičemž se může jednat o stovky tisíc až miliony čar (Pauldrach a kol., 2001).

K výpočtu zářivé síly je potřeba znát tok záření přicházející od hvězdy. Tok závisí na intenzitě záření přicházející od hvězdy, ale také na absorpci a emisi záření mezi hvězdou a místem, kde tok počítáme. Změnu intenzity záření způsobenou šířením záření určitým prostředím, ve kterém může docházet k absorpci, emisi i rozptylu záření, popisuje rovnice přenosu záření. V nerelativistickém, stacionárním případě má rovnice přenosu tvar:

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) = \eta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) - \chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu), \tag{2.8}$$

kde $\eta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)$ značí emisní koeficient a $\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)$ absorpční koeficient (Mihalas, 1978). Běžně se můžeme setkat se zápisem rovnice ve tvaru

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) = -\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)[I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) - S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)], \tag{2.9}$$

kde se zavádí zdrojová funkce $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)$ jako podíl emisního a absorpčního koeficientu:

$$S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu) = \frac{\eta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)}{\chi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \nu)}. \tag{2.10}$$

Formální řešení rovnice přenosu můžeme zapsat ve tvaru:

$$I(\tau_1, \nu) = I(\tau_2, \nu) e^{-(\tau_2 - \tau_1)} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t, \nu) e^{-(t-\tau_1)} \, \mathrm{d}t, \tag{2.11}$$

kde veličinu τ nazýváme optická hloubka

$$\tau(z, \nu) = \int_z^\infty \chi(z', \nu) \, \mathrm{d}z'. \tag{2.12}$$

Protože $1/\chi$ značí střední volnou dráhu fotonu, pak integrál (2.12) určuje počet středních volných drah fotonu o frekvenci ν podél zorného paprsku ve směru z.

Formální řešení rovnice přenosu záření (2.11) se skládá ze dvou členů, kde první odpovídá záření zeslabenému absorpcí od τ_2 k τ_1 a druhý odpovídá příspěvku prostředí mezi τ_2 a τ_1. I v tomto nejjednodušším případě je výpočet intenzity záření v daném místě poměrně komplikovaný, protože k výpočtu intenzity je potřeba znát nejen podmínky v místě, kde intenzitu počítáme, ale také celkovou absorpci mezi fotosférou a daným místem.

Nicméně pro případ pohybujícího se prostředí je možné aproximativním přístupem, který nazýváme Sobolevova aproximace, získat velmi jednoduchý vztah pro výpočet intenzity záření. Nejprve popíšeme oblast, kde dochází k absorpci záření, potom aplikujeme Sobolevovu aproximaci na výpočet optické hloubky a nakonec spočítáme zářivou sílu v této aproximaci. Při dalším odvozování vztahů pro zářivou sílu vycházíme z publikace Lamers & Cassinelli (1999), podrobnější popis je možné najít v disertaci Krtičky (2001).

2.2.1 Interakční oblast

UV spektra horkých hvězd naznačují, že se v jejich okolí vyskytují rozpínající se obálky pohybující se rychlostmi až tisíce km/s (Groenewegen a kol., 1989; Snow a kol., 1994). Můžeme tedy předpokládat, že ve hvězdném větru existuje gradient rychlosti. Dále platí, že spektrální čára má nenulovou šířku. Pak foton vyzářený z fotosféry je absorbován daným čarovým přechodem pouze v určitém intervalu vzdáleností od hvězdy, kterou nazýváme interakční oblast čáry.

Vzhledem k nízké hustotě hvězdných větrů předopkládáme gaussovský profil spektrální čáry, který je utvářen tepelnými pohyby iontů:

$$\phi(\Delta\nu)\mathrm{d}(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_\mathrm{D}} e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_\mathrm{D}}\right)^2} \mathrm{d}(\Delta\nu), \tag{2.13}$$

kde $\phi(\Delta\nu)$ značí profil čáry se středem v $\Delta\nu = \nu - \nu_0 = 0$ a $\Delta\nu_\mathrm{D}$ je Dopplerovská šířka čáry

$$\Delta\nu_\mathrm{D} = \frac{\nu_0}{c} v_\mathrm{th}, \tag{2.14}$$

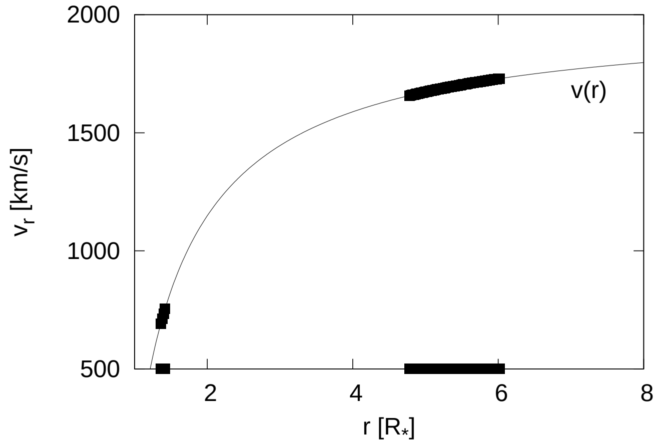
kde v_th označuje střední tepelnou rychlost iontů. Profil je normalizovaný:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta\nu)\mathrm{d}(\Delta\nu) = 1. \tag{2.15}$$

Pro opacitu čarového přechodu mezi hladinami l a u s frekvencí ν_0 vybraného iontu s hmotností m_i platí:

$$\kappa(\nu)\rho = \kappa_l \rho \phi(\Delta\nu) = \frac{\pi e^2}{m_\mathrm{e} c} f_l n_l \left[1 - \frac{n_u}{n_l}\frac{g_l}{g_u}\right] \phi(\Delta\nu), \tag{2.16}$$

kde κ_l značí opacitu ve středu čáry, $m_\mathrm{e} = 9.11.10^{-28}\,\mathrm{g}$ hmotnost elektronu, e náboj elektronu, n_u, n_l a g_u, g_l označuje číselné hustoty iontů na hladinách u, l a jejich příslušné statistické váhy, f_l sílu oscilátoru.



Obrázek 2.2: Interakční oblast čáry $\lambda_0 \doteq 123.9\,\mathrm{nm}$ pro iont, který se nachází ve dvou různých vzdálenostech od hvězdy: $1.39\,R_*$ a $5.3\,R_*$. Parametry modelu: $T = 36\,000\,\mathrm{K}$, $R_* = 7.5\,R_\odot$, šířka čáry $-3.0\,\Delta\nu_\mathrm{D}$.

Předpokládejme, že z fotosféry k pozorovateli je podél paprsku ve směru z, který svírá s radiálním směrem úhel θ', vyzářen foton s frekvencí ν_f. Dále předpokládáme, že iont v atmosféře v radiální vzdálenosti r od hvězdy má rychlost $v(r)$, jejíž projekce do směru šíření fotonu je $v_\mathrm{z} = \mu v(r) = v(r)\cos(\theta)$. Pokud budeme předpokládat, že pološířka čáry odpovídá Dopplerovské šířce (2.14), pak je foton absorbován ve větru iontem právě s takovou rychlostí v_z, kdy frekvence fotonu díky Dopplerovu posuvu spadá do intervalu frekvencí odpovídající dvojnásobku Dopplerovské šířky čáry. Absorpce fotonu probíhá v klidové soustavě iontu, pomínka pro frekvenci fotonu, pro kterou dojde k jeho absorpci, má tvar:

$$\nu_0 - \Delta\nu_\mathrm{D} < \nu_\mathrm{f}(1 - v_\mathrm{z}/c) < \nu_0 + \Delta\nu_\mathrm{D}. \tag{2.17}$$

Tato podmínka vymezuje frekvence fotonů vyzářených z fotosféry tak, aby byly absorbovány konkrétním čarovým přechodem iontu ve větru. Oblast, ve které dochází k absorpci fotonů, nazýváme interakční oblast čáry. Analogicky je možné říci, že daný foton z fotosféry je absorbován ionty pohybujícími se v určitém intervalu rychlostí, což při daném gradientu rychlosti ve větru vymezuje velikost interakční oblasti. Obrázek 2.2 znázorňuje velikost interakční oblasti pro tyto parametry modelu: $T = 36\,000\,\mathrm{K}$, $v_\mathrm{th} \sim 30\,\mathrm{km/s}$, $\lambda_0 \doteq 123.9\,\mathrm{nm}$ (odpovídá přibližně čáře N V), šířka čáry $3\,\Delta\nu_\mathrm{D}$ (pro takto zvolenou šířku čáry dosahuje absorpční koeficient na křídlech čáry asi 1/10 hodnoty ve středu čáry). Dále předpokládáme ve hvězdném větru rychlostní pole $v(r)$ s kladným gradientem rychlosti. Při urychlování hvězdného větru dochází k posuvu frekvence, na které iont absorbuje záření. Ve větších vzdálenostech od hvězdy, kde se iont pohybuje vysokou rychlostí (malý gradient rychlosti), je oblast absorpce čarového přechodu rozsáhlá, od $4.7\,R_*$ do $6.2\,R_*$. Naproti tomu blízko hvězdy se ionty pohybují relativně pomalu (velký gradient rychlosti), oblast absorpce čáry je úzká, $1.36\,R_* - 1.42\,R_*$.

2.2.2 Sobolevova aproximace

Velikost oblasti, kde dochází k absorpci fotosférických fotonů, závisí na dvou faktorech. Prvním z nich je šířka čarového přechodu iontu. Šířce čarového přechodu odpovídá díky Dopplerovu jevu interval rychlostí iontů, na kterém jsou schopny absorpce. Čím je šířka absorpční čáry užší, tím je menší i oblast, ve které dochází k absorpci. Druhým faktorem ovlivňujícím velikost interakční oblasti je gradient rychlosti iontů ve hvězdném větru. Pro malé hodnoty gradientu rychlosti je interakční oblast poměrně široká (viz obr. 2.2). Pokud je gradient rychlosti velký, je interakční oblast velmi úzká, profily čar se blíží $\delta-$funkci. Tím se velmi zjednodušuje výpočet intenzity záření, protože nyní intenzita závisí pouze na podmínkách v bodě, ve kterém intenzitu počítáme. Zjednodušení nazýváme Sobolevovou aproximací (Sobolev, 1960).

Nejprve vyjádříme optickou hloubku pro foton s frekvencí ν_f podél paprsku ve směru z:

$$\tau(z_1,\nu_\mathrm{f}) = \int_{z_1}^{\infty} \kappa(z,\nu_\mathrm{f})\rho(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.18}$$

S užitím rovnice (2.16) dostáváme pro optickou hloubku:

$$\tau(z_1,\nu_\mathrm{f}) = \frac{\pi e^2}{m_\mathrm{e}c} f_l \int_{z_1}^{\infty} n_l(z)\left[1 - \frac{n_u(z)}{n_l(z)}\frac{g_l}{g_u}\right]\phi(\Delta\nu)\,\mathrm{d}z. \tag{2.19}$$

V Sobolevově aproximaci považujeme profily čar za $\delta-$funkce, daným čarovým přechodem je tak absorbován foton s konkrétní frekvencí a vzhledem k rychlosti konkrétního iontu nastává absorpce pouze v jediném bodě ve hvězdném větru. Nebo k absorpci fotonu dojde právě tehdy, když frekvence fotonu vyzářeného z fotosféry (ν_f) je Dopplerovsky posunuta díky pohybujícímu se iontu (v_z) právě do středu čarového přechodu iontu (ν_0). Poloha Sobolevova bodu r_S, kde dochází k absorpci fotonu, je dána podmínkou $\nu_0 = \nu_\mathrm{f}(1 - v_z(r_\mathrm{S})/c)$, přičemž pro přesné určení polohy je potřeba znát rychlostní pole. Pro optickou hloubku v Sobolevově aproximaci tak platí:

$$\tau^{\mathrm{Sob}}(z_1,\nu_\mathrm{f}) = \kappa_l\rho\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\Delta\nu}\right). \tag{2.20}$$

Protože $v \ll c$, platí $\nu_\mathrm{f} \simeq \nu_0$ a podmínku pro absorpci fotonů (2.17) můžeme přepsat do tvaru:

$$\Delta\nu = \nu_\mathrm{f}\left(1 - \frac{\mu v(r)}{c}\right) - \nu_0 \simeq \frac{\nu_0}{c}\mu v(r). \tag{2.21}$$

Dosazením do (2.20) dostáváme pro optickou hloubku v Sobolevově aproximaci výraz:

$$\tau^{\text{Sob}}(\nu_0) = \kappa_l \rho \frac{c}{\nu_0} \left[\frac{\mathrm{d}(\mu v)}{\mathrm{d}r} \right]^{-1} = \frac{c}{\nu_0} \frac{\kappa_l \rho}{\left[(1-\mu^2)\dfrac{v(r)}{r} + \mu^2 \dfrac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r} \right]}. \tag{2.22}$$

V obecném případě obsahuje výraz pro optickou hloubku v Sobolevově aproximaci projekci gradientu rychlosti do směru šíření záření (Rybicki & Hummer, 1978) tedy

$$\tau^{\text{Sob}}(\nu_0) = \frac{c}{\nu_0} \frac{\kappa_l \rho}{[\boldsymbol{n} \cdot \nabla(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})]}. \tag{2.23}$$

S využitím (A.30) dostáváme v radiálním směru ($\mu = 1$) pro optickou hloubku v Sobolevově aproximaci výraz:

$$\tau^{\text{Sob}}(\nu_0) = \frac{c}{\nu_0} \frac{\kappa_l \rho}{\left[\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r} \right]}. \tag{2.24}$$

Sobolevova optická hloubka je nepřímo úměrná gradientu rychlosti ve hvězdném větru, což potvrzuje i výše uvedený příklad.

Pro velký gradient rychlosti ve větru je oblast, ve které dochází k absorpci fotonů, poměrně úzká a optická hloubka prostředí je malá. Naopak pro malý gradient rychlosti je oblast, ve které dochází k absorpci fotonů, značně široká a optická hloubka prostředí je velká. Ve skutečnosti profil čáry není $\delta-$funkcí, ale má nenulovou šířku díky nenulové tepelné rychlosti iontů. K absorpci fotonů tak nedochází pouze v jediném bodě ve hvězdném větru, ale v určitém intervalu vzdáleností (viz § 2.2.1). Definujme tzv. Sobolevovu délku L_{Sob} jako vzdálenost, na které dochází ke změně rychlosti větru o hodnotu tepelné rychlosti ve směru z svírající s radiálním směrem úhel θ, tedy

$$L_{\text{Sob}} \equiv \frac{v_{\text{th}}}{\frac{\mathrm{d}(\mu v)}{\mathrm{d}r}}. \tag{2.25}$$

Jestliže se parametry hvězdného větru mění na vzdálenosti mnohem delší než je Sobolevova délka, pak můžeme užít Sobolevovy aproximace. Pokud za charakteristickou délku zvolíme vzdálenost, na které se mění např. hustota větru (Owocki, 1990), pak platí:

$$H \equiv \frac{\rho}{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}} \sim \frac{v}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}} \gg \frac{v_{\text{th}}}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}} \equiv L_{\text{Sob}}. \tag{2.26}$$

Odtud je zřejmé, že Sobolevova aproximace je dobrým přiblížením ve větru tam, kde jeho rychlost významně překračuje rychlost zvuku. Z důvodu velkých gradientů rychlostí v případě větrů horkých hvězd je tak užití Sobolevovy aproximace vhodnou aproximací. Porovnání zářivé síly vypočtené za použití Sobolevovy aproximace a přímého výpočtu provedli PPK nebo Krtička & Kubát (2010). Jejich výpočty ukázaly velmi dobrou shodu zejména ve vzdálenějších oblastech od hvězdy.

2.2.3 Zářivá síla v Sobolevově aproximaci

V předchozím oddíle jsme ukázali, že pro daný čarový přechod a foton vyzářený z fotosféry nedochází v případě velkých gradientů rychlostí k interakci záření s hmotou v celém větru, ale pouze v určitém bodě ve větru. Sobolevova aproximace tak znamená velké zjednodušení při řešení rovnice přenosu záření. V našich úvahách neuvažujeme rozptýlené záření, odpovídající člen řešení rovnice přenosu (2.11) zanedbáváme.

Předpokládejme, že hvězda září jako homogenní disk (zanedbáváme okrajové ztemnění, $I^{\mathrm{C}}(\mu,\nu) = I^{\mathrm{C}}(\nu)$. Pro intenzitu záření ve vzdálenosti r ve hvězdném větru platí:

$$I(\nu_{\mathrm{f}},\mu) = \begin{cases} I^{\mathrm{C}}(\nu_{\mathrm{f}})e^{-\tau(\nu_{\mathrm{f}},\mu)}, & \mu_* < \mu < 1, \\ 0, & \mu < \mu_*, \end{cases} \tag{2.27}$$

kde

$$\mu_* = \cos\theta_*' = \sqrt{1-(R_*/r)^2} \tag{2.28}$$

odpovídá maximálnímu úhlu, ze kterého dopadá záření z hvězdy do místa ve vzdálenosti r ve hvězdném větru a $\tau(\nu_{\mathrm{f}},\mu)$ označuje optickou hloubku čarového přechodu iontu:

$$\tau(\nu_{\mathrm{f}},\mu) = \int_{\mathrm{fotosf}}^{r} \kappa(\nu_{\mathrm{f}})\rho\,\mathrm{d}z = \kappa_l\rho\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\Delta\nu}\right)\int_{\Delta\nu(\mathrm{fotosf})}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu)\,\mathrm{d}(\Delta\nu) = \tau(\nu_0)\Phi(\Delta\nu_\mu), \tag{2.29}$$

kde

$$\Phi(\Delta\nu_\mu) = \int_{\Delta\nu(\mathrm{fotosf})}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu)\,\mathrm{d}(\Delta\nu), \tag{2.30}$$

přičemž $\Delta\nu_\mu = \nu_{\mathrm{f}} - \nu_0(1+\mu v(r)/c)$. Předpokládáme, že ve fotosféře nedochází k absorpci záření, tedy platí $I^{\mathrm{C}}(\nu_{\mathrm{f}}) \simeq I^{\mathrm{C}}(\nu_0)$. Pro intezitu záření ve vzdálenosti r tak platí:

$$I(\nu_{\mathrm{f}},\mu) = I^{\mathrm{C}}(\nu_0)e^{-\tau(\nu_0)\Phi(\Delta\nu_\mu)}. \tag{2.31}$$

Nyní můžeme přistoupit k samotnému výrazu pro zářivou sílu (2.1). Po dosazení hmotnostního absorpčního koeficientu (2.16) a intenzity záření odvozené v Sobolevově aproximaci (2.31) obdržíme výraz pro zářivou sílu způsobenou absorpcí záření čarovým přechodem iontu s frekvencí ν_l:

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}{}^{l}(\boldsymbol{r}) = \frac{\kappa_l}{c}\int_0^\infty\oint_\Omega \phi(\Delta\nu)e^{-\tau(\nu_l)\Phi(\Delta\nu)}I^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{n},\nu_l)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\nu. \tag{2.32}$$

S využitím (2.30) dostáváme:

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}{}^{l}(\boldsymbol{r}) = \frac{\kappa_l}{c}\oint_\Omega \frac{1-e^{-\tau(\nu_l)}}{\tau(\nu_l)}I^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{n},\nu_l)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{2.33}$$

K zářivé síle přispívá velmi mnoho čarových přechodů různých iontů, jak jsme dříve zmínili. Proto výraz pro zářivou sílu sečteme přes všechny čarové přechody a ve sféricky symetrickém případě dostáváme:

$$g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} = \frac{2\pi}{c} \sum_l \kappa_l I^{\mathrm{C}}(\nu_l) \int_{\mu_*}^{1} \frac{1 - e^{-\tau(\nu_l)}}{\tau(\nu_l)} \mu \, \mathrm{d}\mu. \tag{2.34}$$

Dosud jsme předpokládali, že záření z fotosféry s frekvencí ν_l odpovídající frekvenci čarového přechodu iontu není v místě $\boldsymbol{r}$ ovlivněno jiným čarovým přechodem. Ve skutečnosti tomu tak není. Spektrální čáry horkých hvězd jsou rozloženy velmi nerovnoměrně. Malý počet čar se nachází ve viditelné oblasti spektra (O hvězdy), naopak velký počet čar se nachází v intervalu $30\,\mathrm{nm} < \lambda < 60\,\mathrm{nm}$ u O hvězd, $100\,\mathrm{nm} < \lambda < 300\,\mathrm{nm}$ u B hvězd. V těchto intervalech dochází k překryvu spektrálních čar. Navíc foton může být absorbován a opět emitován ve větru různými čarovými přechody různých iontů. Efekt nazýváme vícenásobný rozptyl. Puls (1987) vypočítal, že zahrnutí tohoto jevu do výpočtu zářivé síly snižuje v některých případech její velikost asi o $(10-30)\,\%$. Přesto jev vícenásobného rozptylu i překryvu čar zanedbáváme, v modelech hvězdných větrů se jedná o často používanou aproximaci.

2.3 CAK aproximace

Výraz pro výpočet zářivé síly (2.34) vyžaduje znalost zářivého pole a opacit všech čarových přechodů iontů. K tomu je potřeba vypočítat obsazení hladin a stupně ionizace pro velké množství hladin v atomech. Velké zjednodušení při výpočtu intenzity záření představuje užití Sobolevovy aproximace. Nyní je potřeba vypořádat se s velkým množstvím čarových přechodů.

Ve výrazu pro optickou hloubku čarového přechodu (2.24) se vyskytuje součin $\rho(\mathrm{d}v/\mathrm{d}r)^{-1}$, který nezávisí na konkrétní čáře, ale je pro všechny čáry stejný. CAK zavedli parametr odpovídající optické hloubce, který nezávisí na opacitě v dané čáře:

$$t \equiv \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}}}{\kappa_l} \tau_l = \sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} \rho v_{\mathrm{th}} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \right)^{-1}, \tag{2.35}$$

kde v CAK teorii běžně užívaná hodnota $\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} = 0.325\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{g}^{-1}$ je referenční hodnota opacity pro rozptyl na volných elektronech (Abbott, 1982). Zářivou sílu způsobenou absorpcí ve spektrálních čarách iontů vyjádřili pomocí zářivé síly způsobené rozptylem záření na volných elektronech (2.4):

$$g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} \equiv M(t) g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{C}}, \tag{2.36}$$

kde funkce $M(t)$ vyjadřuje příspěvek všech čarových přechodů. CAK funkci $M(t)$ spočítali pouze pro iont C III, přičemž obsazení hladin spočítali za předpokladu platnosti LTE. Zastoupení iontu C III vzhledem k H uvažovali jako součet abundancí C, N a O. Pro různé hodnoty optické hloubky t spočítali funkci $M(t)$ a získali velmi jednoduchý fit:

$$M(t) = kt^{-\alpha}, \tag{2.37}$$

kde konstanty k a α nazýváme multiplikativní konstanty zářivé síly. Dosazením (2.37) do (2.36) a s využitím (2.35) a (2.4) dostáváme CAK model zářivé síly, pro jejíž velikost platí:

$$g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} L_*}{4\pi r^2 c} \frac{k}{(\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} v_{\mathrm{th}})^{\alpha}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} \right)^{\alpha}. \tag{2.38}$$

2.3.1 Rozšíření pro více atomů

CAK odvodili zářivou sílu pouze pro C III, nicméně na urychlování hvězdného větru se podílí absorpce v čarách různých atomů v různém stupni excitace a ionizace. Tento fakt poprvé aproximativně zohlednil Abbott (1982), který předpokládal ionizační rovnováhu mezi fotoinizačními procesy závislými na toku záření a procesy zářivé rekombinace závislými na elektronové hustotě. Funkci (2.37) rozšířil o další faktor, tedy

$$M(t) = kt^{-\alpha} \left(\frac{10^{-11}\,\mathrm{cm}^3 n_{\mathrm{e}}}{W(r)} \right)^{\delta}, \tag{2.39}$$

kde δ je další multiplikativní konstanta zářivé síly (Abbott, 1982) a $W(r)$ označuje faktor zředění, který vyjadřuje pravděpodobnost toho, že foton emitovaný ve vzdálenosti r od hvězdy dopadne na hvězdu, přičemž platí:

$$W(r) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r} \right)^2} \right]. \tag{2.40}$$

Dosazením (2.39) do (2.36) dostáváme:

$$g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} L_*}{4\pi r^2 c} \frac{k}{(\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} v_{\mathrm{th}})^{\alpha}} \left(\frac{10^{-11} n_{\mathrm{e}}}{W} \right)^{\delta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} \right)^{\alpha}. \tag{2.41}$$

Narozdíl od CAK, kteří spočítali parametry zářivé síly pouze pro iont C III, vyjádřil Abbott parametry k, α a δ se započtením absorpcí ve spektrálních čarách prvků od H po Zn v ionizačních stupních I až VI. Ve výrazu pro optickou hloubku (2.35) vystupuje tepelná rychlost atomů přispívajích k urychlování hvězdného větru. Abbott pro své výpočty zvolil tepelnou rychlost atomu vodíku, na kterou jsou jeho parametry k a α normovány:

$$v_{\mathrm{th}} = \sqrt{\frac{2k_B T_{\mathrm{eff}}}{m_{\mathrm{H}}}}, \tag{2.42}$$

kde $k_B = 1.38.10^{-16}\,\mathrm{g\,cm^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta.

2.3.2 Parametry zářivé síly v LTE a NLTE

Soubor spektrálních čar přispívajících k zářivé síle je aproximativně určen trojicí parametrů k, α a δ, přičemž parametr k odpovídá počtu čar, které jsou silnější než určitá hodnota, parametr α odpovídá poměru mezi opticky tenkými a opticky tlustými čarami a parametr δ popisuje změny v ionizaci ve větru v důsledku změn ve fotoionizaci a zářivé rekombinaci (Kudritzki a kol., 1989). Parametry zářivé síly v CAK aproximaci jsou určeny jako vhodný fit pro výpočet zářivé síly, která závisí mimo jiné jak na poli záření, tak na obsazení hladin jednotlivých atomů. Zářivé pole lze vypočítat z rovnice přenosu záření (2.8).

Pro výpočet obsazení hladin se používají dva velmi rozšířené přístupy. V prvním z nich se předpokládá, že se atmosféra nachází ve stavu tzv. lokální termodynamické rovnováhy (LTE). V tomto případě se pro výpočet obsazení hladin

Tabulka 2.1: Hodnoty parametrů k, α a δ pro teplotu $T_{\text{eff}} = 30\,000\,\text{K}$.

k	α	δ	Počet čar	Zdroj
0.0076	0.742	–	$\sim 10^3$	CAK
0.2220	0.561	0.107	250 000	Abbott (1982)
0.1700	0.590	0.090		PPK
0.3750	0.522	0.099	520 000	Shimada a kol. (1994)

používá Boltzmannovo a Sahovo rozdělení. Ve druhém případě se pro výpočet obsazení hladin používá rovnic statistické rovnováhy. Druhý přístup, označovaný jako NLTE, je přesnější zejména v takovém případě, kdy obsazení hladin je určováno více zářivými než srážkovými procesy (Mihalas, 1978). Hodnoty parametrů k, α, δ spočtené různými metodami ukazuje tabulka 2.1, přičemž parametry jsou spočítány pro teplotu $T_{\text{eff}} = 30\,000\,\text{K}$. Různé hodnoty trojice parametrů jsou také dány množstvím započtených čar.

2.3.3 Neradiální zářivé pole

Zářivou sílu jsme dosud odvozovali pro případ, že se nacházíme daleko od hvězdy, kdy hvězda září jako bodový zdroj. Toto přiblížení ovšem neplatí, pokud se nacházíme blízko hvězdy. Zde se totiž velice silně uplatňuje neradiální charakter zářivého pole. Zářivou sílu pro případ hvězdy zářící jako rovnoměrně jasný disk poprvé uvedli CAK, nicméně první hydrodynamické modely s neradiálním zářivým polem spočítali nezávisle na sobě PPK a Friend & Abbott (1986). Po přesnější úhlové integraci se ve výrazu pro zářivou sílu objevuje multiplikativní faktor D_{f}, pro který platí:

$$D_{\text{f}} = \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - (1+\sigma\mu_*^2)^{\alpha+1}}{(1-\mu_*^2)\sigma(1+\sigma)^{\alpha}(1+\alpha)}, \tag{2.43}$$

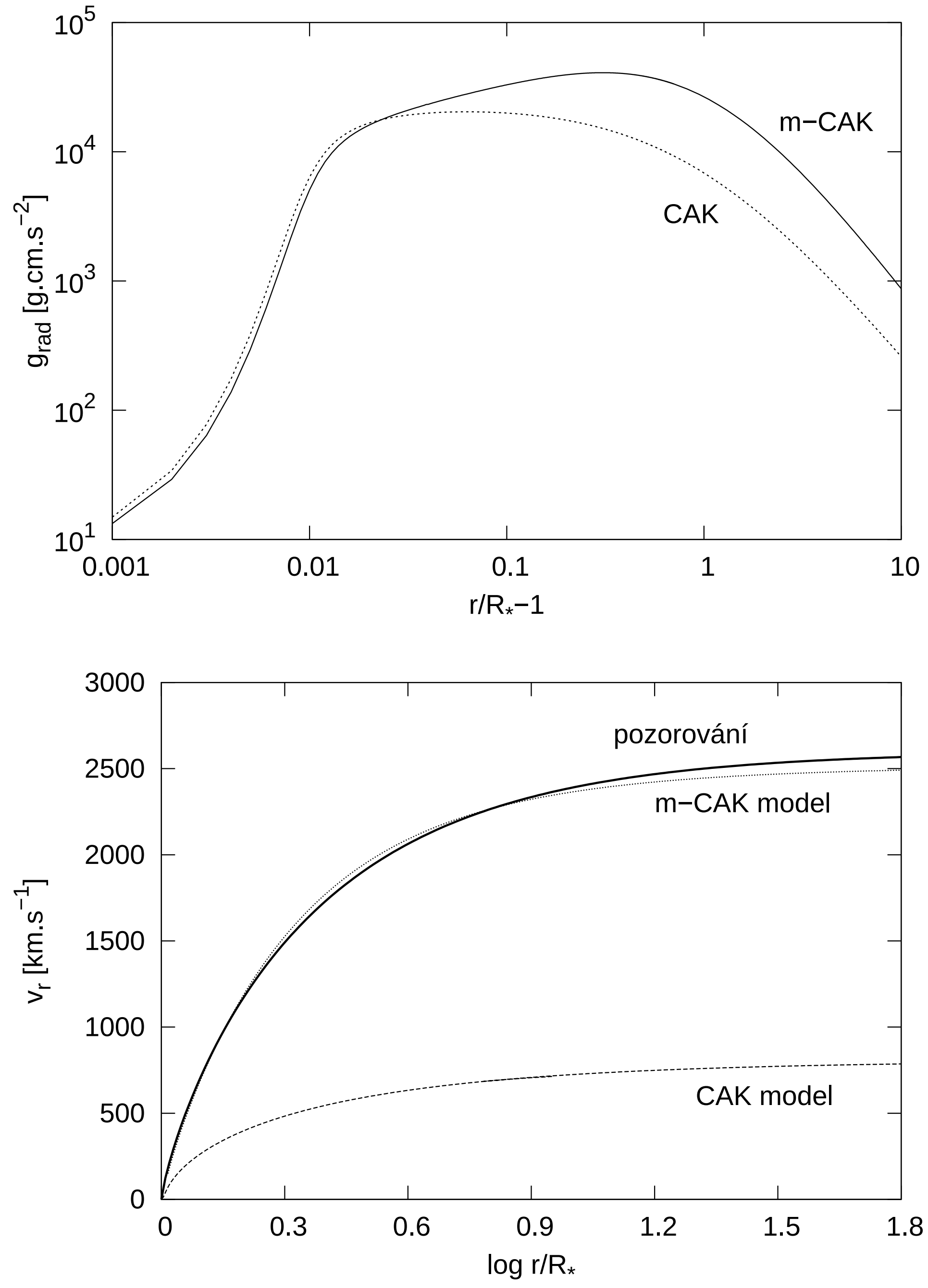
kde σ zavádíme dle Castor (1974):

$$\sigma \equiv \frac{\mathrm{d} \ln v(r)}{\mathrm{d} \ln r} - 1. \tag{2.44}$$

Započtením neradiálního zářivého pole získáváme pro zářivou sílu vztah, který používáme v našich výpočtech a který je v literatuře označovaný jako m-CAK model zářivé síly:

$$g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^{ref} L_*}{4\pi r^2 c} \frac{D_{\mathrm{f}} k}{(\sigma_{\mathrm{e}}^{ref} v_{\mathrm{th}})^{\alpha}} \left(\frac{10^{-11} n_{\mathrm{e}}}{W} \right)^{\delta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d} v_r}{\mathrm{d} r} \right)^{\alpha}. \tag{2.45}$$

Zahrnutí m-CAK modelu zářivé síly do výpočtů vede k výraznému zpřesnění výsledků modelování hvězdného větru. Na obrázku 2.3 (dole) je znázorněno porovnání CAK modelu a m-CAK modelu hvězdného větru s pozorováním. Model označený "pozorování" je spočítán pomocí $\beta-$zákona (3.21) na základě znalosti konečné rychlosti hvězdného větru (viz § 3.1) odvozené z pozorování. V těsné blízkosti hvězdy je zářivé pole velmi silně neradiální a tak CAK model zářivé síly (2.38) její velikost oproti skutečnosti nadhodnocuje (viz obr. 2.3, nahoře). M-CAK model zářivé síly (2.45) její velikost v této oblasti redukuje. Menší zářivá síla vede k menšímu toku hmoty z hvězdy, dochází k urychlování menšího množství materiálu, což vede k vyšším rychlostem hvězdného větru ve srovnání s CAK modelem.



Obrázek 2.3: *Nahoře*: Porovnání CAK modelu a m-CAK modelu zářivé síly. *Dole*: Srovnání CAK modelu a m-CAK modelu hvězdného větru s modelem získaným pomocí $\beta-$zákona (v grafu označeno jako "pozorování"), kde $\beta = 0.8$, a konečné rychlosti hvězdného větru odvozené z pozorování, $v_\infty = 2600\,\mathrm{km/s}$. Oba grafy vypočítány pro parametry hvězdy odpovídající modelu P-40 z tabulky 5.1.

Kapitola 3

Hydrodynamické rovnice

Abychom získali model hvězdného větru, je potřeba vyřešit soustavu hydrodynamických rovnic. V našem případě se zajímáme o stacionární, jednorozměrný, osově symetrický, jednosložkový, izotermický hvězdný vítr, proto soustava hydrodynamických rovnic je tvořena dvěma rovnicemi: rovnicí kontinuity a pohybovou rovnicí; rovnici pro energii neuvažujeme. Hvězdný vítr pokládáme za ideální tekutinu, na částice větru působí gradient tlaku plynu, dále gravitační síla a zářivá síla způsobená rozptylem záření na volných elektronech a absorpcí záření ve spektrálních čarách. V disertační práci se zaměřujeme zejména na to, jakým způsobem ovlivňuje rotace hvězdy hvězdný vítr. Hvězdnou rotaci započítáváme za předpokladu platnosti zákona zachování momentu hybnosti. Vliv magnetického pole hvězdy a viskózní síly v našem modelu zanedbáváme.

3.1 Soustava rovnic

Stav pohybující se tekutiny charakterizujeme následujícími veličinami: rychlost $\boldsymbol{v}$, hustota ρ a tlak p; ostatní termodynamické veličiny můžeme určit ze stavové rovnice. Zajímá nás stav proudění v určitém místě v prostoru, proto využijeme k popisu proudění Eulerův přístup[1], hydrodynamické rovnice pro pohyb kontinua tak mají v obecném případě tvar (Landau & Lifshitz, 1987):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{g}, \tag{3.2}$$

přičemž rovnice (3.1) je rovnice kontinuity a rovnice (3.2) pohybová rovnice a kde $\boldsymbol{g}$ označuje vnější síly působící na částice větru a platí: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{C}} + \boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{g}_{\mathrm{grav}}$, kde $\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{C}}$ označuje zářivou sílu způsobenou rozptylem záření na volných elektronech, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}}$ zářivou sílu způsobenou absorpcí záření ve spektrálních čarách a $\boldsymbol{g}_{\mathrm{grav}}$

[1]Druhou možností popisu pohybu kontinua je Langrangeův přístup, kdy stav pohybující se tekutiny vyšetřujeme vzhledem ke zvolené částici.

gravitační sílu (vše vztaženo na jednotku hmotnosti). Mezi základní hydrodynamické rovnice patří ještě rovnice pro energii, ale protože se zabýváme pouze izotermickými hvězdnými větry, tuto rovnici neuvažujeme.

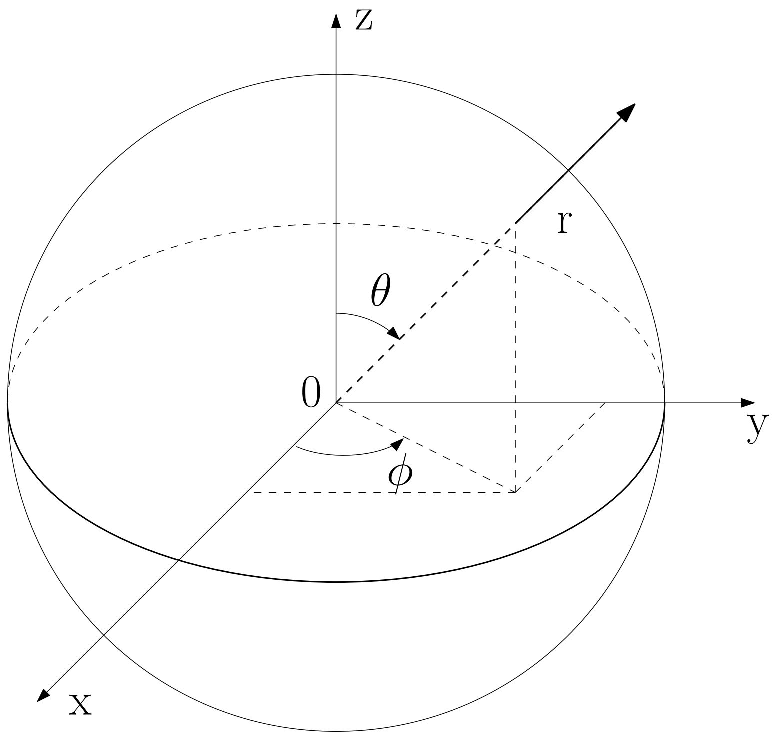
Hvězdný vítr horkých hvězd můžeme z důvodu jeho nízké hustoty a vysoké teploty aproximovat modelem ideálního plynu. V takovém případě platí stavová rovnice pro ideální plyn:

$$p = a^2 \rho, \tag{3.3}$$

kde a značí izotermickou rychlost zvuku,

$$a^2 = \frac{\mathcal{R}T}{\overline{m}} \tag{3.4}$$

kde $\mathcal{R} = 8.31.10^7\,\mathrm{g\,cm^2\,s^{-2}\,K^{-1}\,mol}$ je molární plynová konstanta a $\overline{m}$ je střední atomová hmotnost částic vyjádřená v hmotnostech atomu H (běžně se tato veličina označuje písmenem μ, kvůli možné záměně se směrovým úhlem značíme jinak). Pro plně ionizovaný plyn slunečního složení je $\overline{m} = 0.602$ (Lamers & Cassinelli, 1999).



Obrázek 3.1: Soustavu rovnic řešíme ve sférických souřadnicích se středem v centru hvězdy.

Soustavu rovnic ve vektorovém tvaru (3.1)-(3.2) převedeme do sférických souřadnic (viz obr. 3.1), jednotlivé síly mají ve sférických souřadnicích následující složky: $\boldsymbol{g}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{rad}} = (g^{\mathrm{C}}_{\mathrm{rad}}, 0, 0)$, $\boldsymbol{g}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{rad}} = (g^{\mathrm{L}}_{\mathrm{rad}}, 0, 0)$ a $\boldsymbol{g}_{\mathrm{grav}} = (-g_{\mathrm{grav}}, 0, 0)$, kde $g^{\mathrm{C}}_{\mathrm{rad}}$ je určena vztahem (2.4), $g^{\mathrm{L}}_{\mathrm{rad}}$ výrazem (2.45) a pro velikost gravitační síly platí:

$$g_{\mathrm{grav}} = \frac{GM_*}{r^2}. \tag{3.5}$$

Gravitační síla je značně redukována účinky zářivé síly kontinua (viz § 2.1), proto se běžně zavádí efektivní hmotnost hvězdy $M_{\mathrm{eff}} = M_*(1-\Gamma)$. Vztah pro gravitační sílu (3.5) a zářivou sílu kontinua (2.4) tak můžeme s využitím (2.7) zapsat do jednoho výrazu:

$$g_{\mathrm{eff}} = \frac{GM_*(1-\Gamma)}{r^2}. \tag{3.6}$$

3.2 Aproximace

Než se začneme zabývat dalšími úpravami soustavy rovnic (3.1)-(3.2), zavedeme zjednodušující předpoklady, které výrazně usnadní nalezení jejího řešení.

- Jednorozměrný model větru. Hydrodynamické vícerozměrné modely hvězdného větru nabízejí reálnější pohled na danou problematiku, protože umožňují započítat jevy, které v případě jednorozměrných hvězdných větrů nejsou možné. Přesto i jednoduchý jednorozměrný model dokáže velmi dobře posat hvězdný vítr v jeho základních charakteristikách. Dále diskutováno v § 3.3.

- Stacionární model větru. Časově závislé modely jednorozměrného izotermického větru se zářivou silou vyjádřenou v Sobolevově aproximaci (Owocki a kol., 1988; Votruba, 2006) vedou k řešení, které svými základními charakteristikami odpovídá časově nezávislým modelům. Modely s obecnější zářivou silou (Owocki a kol., 1988) vedou k nestabilním řešením.

- Izotermický vítr. Srovnání výsledků modelu izotermického a neizotermického hvězdného větru (PPK) ukázalo velmi podobné výsledky. Neizotermickými modely větru se zabýval také (Krtička & Kubát, 2001). Předpokladem izotermického hvězdného větru odpadá nutnost řešit rovnici pro energii. V našem modelu předpokládáme $T(r) = T_{\mathrm{eff}}$.

- Jednosložkový vítr. Dvousložkový model hvězdného větru horkých hvězd (Krtička & Kubát, 2000) ukázal, že pro hvězdy s malou hodnotou rychlosti ztráty hmoty ($\sim 10^{-12}\,\mathrm{M}_\odot$/rok) dochází k prudkému poklesu rychlosti větru v jejich blízkosti v porovnání s jednosložkovým hvězdným větrem; pro hvězdy s velkou hodnotou rychlosti ztráty hmoty ($\sim 10^{-6}\,\mathrm{M}_\odot$/rok) se oba modely shodují. V případě O a B hvězd tak můžeme hvězdný vítr dobře aproximovat jednou složkou.

- Zanedbání viskozity. Pokud se na problematiku vnitřního odporu prostředí podíváme z pohledu Reynoldsova čísla, pak v případě větrů horkých hvězd nabývá toto číslo velmi vysokých hodnot, což odpovídá zanedbatelnému vlivu třecích sil (Castor a kol., 1976). Navíc třísložkový model hvězdného větru se zahrnutím viskozních sil (Krtička & Kubát, 2001) ukázal, že pro hvězdy s relativně vysokou hustotou toku, vysokou hodnotou rychlosti ztráty hmoty, je efekt zanedbatelný a výsledky modelu jsou velmi podobné výsledkům jednosložkového modelu. Pro hvězdy s nižší hustotou toku se viskózní síly projevují výrazněji, vedou k hustšímu a pomalejšímu toku. Zanedbání tohoto jevu pro O hvězdy a rané B hvězdy je tak relevantní.

- Zanedbání magnetického pole. Studium modelů hvězdných větrů se zahrnutím magnetického pole (Friend & MacGregor, 1984; MacGregor a kol., 1992) ukázalo, že intenzita magnetického pole menší než 100 G nijak významně neovlivňuje dynamiku hvězdného větru. U některých horkých hvězd se podařilo identifikovat magnetická pole i mnohem silnější (Donati a kol., 2002), které již dynamiku hvězdného větru ovlivňují. Ud-Doula & Owocki (2002) magnetohydrodnamickými simulacemi ukázali, že pro případ veleobra typu OB vlivem magnetického pole dochází k nárůstu hustoty a poklesu rychlosti toku v oblasti rovníku. Magnetické pole může navíc výrazně přispívat ke ztrátě momentu hybnosti hvězdy (Ud-Doula a kol., 2009), což např. v případě chemicky pekuliární hvězdy spektrální třídy B2 vede ke zpomalování hvězdné rotace až o $\sim 0.5\,\mathrm{s/rok}$ (Mikulášek a kol., 2008). Protože však magnetické pole horkých hvězd je pozorováno velmi zřídka, jeho vliv v našich výpočtech zanedbáváme.

S ohledem na tato zjednodušení upravíme dále soustavu rovnic (3.1)-(3.2). Protože nás zajímají pouze stacionární, časově nezávislá řešení, položíme v soustavě rovnic (3.1)-(3.2) $\partial/\partial t = 0$. S využitím výrazu (3.6) a (A.39)-(A.41) dostáváme:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\rho v_\phi) = 0, \quad (3.7)$$

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{{v_\theta}^2}{r} - \frac{{v_\phi}^2}{r} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_{\mathrm{eff}} - g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} = 0, \quad (3.8)$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi\cos\theta}{r\sin\theta}v_\phi + \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} = 0, \quad (3.9)$$

$$v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\phi\cos\theta}{r\sin\theta}v_\theta + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{1}{r\rho\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} = 0. \quad (3.10)$$

Nyní provedeme další zjednodušení soustavy rovnic. Omezíme se jednorozměrný model ($\partial/\partial\theta = 0$, $\partial/\partial\phi = 0$) a budeme vyšetřovat základní vlastnosti hvězdného větru v rovině rovníku ($\theta = \pi/2$), kde se nejvýrazněji projevují účinky rotace hvězdy na hvězdný vítr. Nepředpokládáme žádný pohyb ve směru od pólů k rovníku ($v_{\mathrm{th}} = 0$). S využitím stavové rovnice (3.3) dostáváme soustavu rovnic v tomto tvaru:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r) = 0, \qquad (3.11)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{{v_\phi}^2}{r} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{GM_*(1-\Gamma)}{r^2} - g^{\mathrm{L}}_{\mathrm{rad}} = 0. \qquad (3.12)$$

Řešením soustavy hydrodynamických rovnic (3.11)-(3.12) získáme profil rychlosti a hustoty větru, $v_r(r)$ a $\rho(r)$, hvězdného větru. Mezi globální charakteristiky hvězdného větru patří rychlost ztráty hmoty (*mass loss rate*), $\dot{M}$, a tzv. konečná rychlost hvězdného větru (*terminal velocity*), v_∞. Rychlost ztráty hmoty udává množství hmoty, které hvězda ztrácí za jednotku času. Pro O hvězdy se setkáváme s hodnotami až $10^{-5}\,\mathrm{M}_\odot/\mathrm{rok}$, nicméně $\dot{M}$ může nabývat hodnot i o několik řádů menších (Mokiem a kol., 2007). Konečná rychlost hvězdného větru udává rychlost větru ve vzdálenosti $r \to \infty$. V případě O hvězd dosahuje rychlost několik tisíc km/s (Puls a kol., 2006), u B hvězd pouhých několik desítek km/s (Zickgraf a kol., 1996). Rychlost ztráty hmoty snadno určíme integrací rovnice (3.11):

$$4\pi r^2 \rho v_r = \dot{M} = \mathrm{konst.} \qquad (3.13)$$

3.3 Rotace

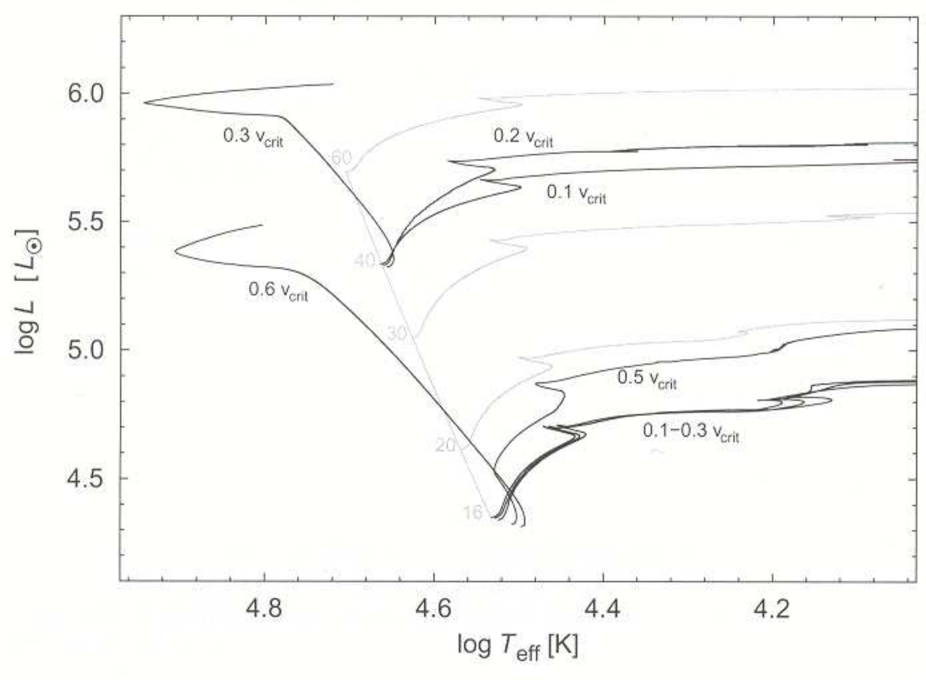
Než se začneme zabývat podrobněji rotací hvězdného větru, zavedeme značení, které budeme dodržovat i v následujících kapitolách. Předně rotační rychlost na povrchu hvězdy značíme v_{rot}. Úhlovou rotační rychlost značíme obvyklým písmenem ω. Dále v_{crit} budeme značit kritickou rotační rychlost. To je taková rotační rychlost, kdy je v rovnováze síla gravitační a síla odstředivá. Rotační rychlost můžeme také vyjádřit jako podíl $v_{\mathrm{rot}}/v_{\mathrm{crit}}$, který budeme značit písmenem Ω.

Horké hvězdy představují rychle rotující objekty, jejichž rotační rychlosti dosahují i několika stovek km/s (Conti & Ebbets, 1977; Penny, 1996; Steele a kol., 1999; Abt a kol., 2002; Markova a kol., 2004; Repolust a kol., 2004), v některých případech rotační rychlost tvoří významný podíl vzhledem ke kritické rotační rychlosti (Yudin, 2001). V případě horkých hvězd je proto nutné do hydrodynamických rovnic zahrnout rotaci.

Rotace hvězdy hraje důležitou roli také z hlediska vývoje hvězdy (Yoon & Langer, 2005). Na obrázku 3.2[2] je zachycen vývoj hvězd s různou hmotností v závislosti na jejich rotačních rychlostech. Z obrázku je patrné, že vývoj hvězdy s velkou hmotností se dramaticky mění již pro relativně malé hodnoty rotační rychlosti.

Z důvodu dalšího zjednodušení zavedeme následující omezení:

[2]Soukromá komunikace s prof. Norbertem Langrem (email: nlanger@astro.uni-bonn.de).



Obrázek 3.2: Vliv rotace hvězdy na její vývoj pro různé hmotnosti hvězd (Yoon & Langer, 2005).

- Jednorozměrný model. Závislost základních charakteristik hvězdného větru na jediné proměnné (r) představuje jistá omezení. Vícerozměrné modely hvězdného větru naznačují, že kolem rychle rotujících B hvězd dochází k formování hvězdného disku.

  Model rotující B hvězdy s výraznou závislostí optické hloubky na úhlu θ mezi pólem a rovníkem hvězdy (Lamers & Pauldrach, 1991) ukázal, že pro určitou teplotu hvězdy (a pro určitý úhel θ) dochází ke skokovému nárůstu optické hloubky v Lymanově kontinuu (Pauldrach & Puls, 1990), přičemž se uplatňuje závislost optické hloubky na povrchové teplotě hvězdy a také von Zeipelův teorém (von Zeipel, 1924):

$$T(\theta) \sim g_{\mathrm{grav}}(\theta)^{1/4}. \tag{3.14}$$

  V důsledku toho dochází k nárůstu hustoty větru, přičemž poměr mezi hustotou větru na rovníku a hustotou na pólu může dosahovat až 10^2. Tento efekt, v odborné literatuře známý jako tzv. *bi-stability effect*, se nejúčiněji projevuje u hvězd s efektivními teplotami $15\,000\,\mathrm{K} < T_{\mathrm{eff}} < 30\,000\,\mathrm{K}$ (Lamers & Pauldrach, 1991). Model hvězdného větru zahrnující zploštění hvězdy a gravitační ztemnění (Pelupessy a kol., 2000) pro hvězdy s $T_{\mathrm{eff}} \sim 25\,000\,\mathrm{K}$ ukázal, že tento efekt vede pouze k 10krát větší hustotě rovníkového větru oproti větru polárnímu. Musíme ale poznamenat, že tento efekt byl studován pro rotační rychlosti hvězdy $\Omega < 0.6$. Efekt samotný tak nestačí k vysvětlení velmi hustých okolohvězdných disků horkých hvězd (Zickgraf a kol., 1985).

Existenci disků okolo rotujících horkých hvězd potvrzoval i kinematický osově symetrický model hvězdného větru hnaného zářením se zanedbáním gradientu tlaku plynu (Bjorkman & Cassinelli, 1993). V tomto modelu je hvězdný vítr plynem neinteragujících částic. Rotace hvězdy způsobuje stáčení trajektorií částic z obou hemisfér směrem k rovině rovníku, což vede ke zvýšené hustotě toku v rovníkové oblasti. Pro určitou hodnotu rotační rychlosti se trajektorie z obou hemisfér v rovníkové rovině dostávájí velmi blízko sebe, hvězdný vítr z obou polokoulí stalčuje vítr v rovině rovníku a tento tlak dává vzniknout hustému disku, v literatuře známému jako *wind compressed disk - WCD*. Poměr hustot toku mezi rovníkem a pólem dosahuje 10^3. Hydrodynamické simulace WCD modelu (Owocki a kol., 1994) potvrdily vznik disku kolem rychle rotující hvězdy, nicméně s méně výrazným poměrem hustot mezi rovníkovým a polárním větrem.

- Sféricky symetrický tvar hvězdy. Pokud hvězda rotuje vysokou rychlostí, dochází k významné deformaci jejího tvaru. Nechť R_{pol} značí poloměr hvězdy na pólu a R_{rov} poloměr hvězdy na rovníku, potom platí:

$$R_{\mathrm{rov}} = R_{\mathrm{pol}} \left(1 - \frac{v_{\mathrm{rot}}^2 R_{\mathrm{pol}}}{2GM_*(1-\Gamma)}\right)^{-1}, \tag{3.15}$$

  kde v_{rot} odpovídá rotační rychlosti na rovníku (Cranmer & Owocki, 1995). Poloměr hvězdy na rovníku může být až o 50% větší než poloměr na pólu. Pro rotační rychlost $\Omega = 0.5$, v případě veleobra spektrální třídy O, je rovníkový poloměr delší asi o 10% ve srovnání s polárním poloměrem, v případě O hvězdy hlavní posloupnosti je tato hodnota menší (Petrenz & Puls, 1996). Pro B hvězdu dochází k protažení rovníkového poloměru o stejnou hodnotu při rotační rychlosti $\Omega = 0.75$ (Araújo & Pacheco, 1989).

- Zanedbání gravitačního ztemnění. Se zavedením modelu sféricky symetrického tvaru hvězdy souvisí potlačení efektu, který nazýváme gravitační ztemnění. Rotace hvězdy způsobuje její zploštění oproti kulovému tvaru, povrchové gravitační zrychlení se mění v závislosti na úhlu θ a tím se mění i povrchová teplota (rov. (3.14)) a tedy zářivý tok. Model hvězdného větru pro B hvězdy se započtením efektu zploštění hvězdy a gravitačního ztemnění (Araújo a kol., 1994) ukázal malý vliv obou těchto efektů na dynamiku větru. Výrazněji se oba efekty projevily až při rotačních rychlostech $\Omega \sim 0.9$. Hydrodynamické simulace zahrnující zploštění hvězdy a gravitační ztemnění (Cranmer & Owocki, 1995) ukázaly další potlačení vzniku velmi hustého disku okolo hvězdy (WCD model).

- Zanedbání neradiálních sil. Hydrodynamický model větru B hvězdy se započtením neradiální zářivé síly, gravitačního ztemnění a zploštění hvězdy vlivem rotace (Owocki a kol., 1996) ukázal nejen úplné potlačení vzniku disku v rovině rovníku, ale naopak koncentraci hmoty v okolí pólů. Velikost neradiální složky zářivé síly tvoří sice asi 10% velikosti radiální složky, nicméně její dynamické účinky jsou velmi podstatné v blízkosti hvězdy, protože zde hvězdný vítr dosahuje relativně malých rychlostí, kolem 100 km/s.

Na základě těchto předpokladů určíme blíže druhý člen pohybové rovnice (3.12), člen $-{v_\phi}^2(r)/r$, který odpovídá odstředivému zrychlení působícímu na částice větru. Protože na hvězdný vítr působí pouze centrální síly, platí zákon zachování momentu hybnosti:

$$R_* v_{\mathrm{rot}} = \text{konst.} = r v_\phi(r), \tag{3.16}$$

kde v_{rot} odpovídá rotační rychlosti v rovině rovníku. Rotaci hvězdy často zapisujeme pomocí bezrozměrné veličiny Ω, proto určíme ještě kritickou rotační rychlost (pro sféricky symetrickou hvězdu):

$$v_{\mathrm{crit}} = \sqrt{\frac{GM_*(1-\Gamma)}{R_*}}. \tag{3.17}$$

3.4 Řešení hydrodynamických rovnic

Rovnice (3.11)-(3.12) tvoří soustavu nelineárních diferenciálních rovnic pro rychlost a hustotu. Vyřešení této soustavy komplikuje nelineární závislost zářivé síly na gradientu rychlosti (2.45). Proto je potřeba řešit rovnice numericky. Při analýze řešení soustavy z důvodu zjednodušení neuvažujeme rotaci hvězdy a používáme CAK model zářivé síly (2.38). Popis řešení pro tento model větru je možné nalézt v Lamers & Cassinelli (1999), analýzu řešení pro m-CAK model zářivé síly je možné nalézt v práci Krtička (2001).

Nejprve se podíváme na velmi jednoduchou idealizaci hvězdného větru urychlovaného zářivou silou (viz Chandrasekhar, 1934). Předpokládejme, že na iont ve hvězdném větru působí gravitační síla a dále síla, která působí proti síle gravitační a jejíž velikost je $s-$násobkem síly gravitační (což představuje velmi zjednodušeně zářivou sílu), pak platí:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = (s-1)\frac{GM_*}{r^2}. \tag{3.18}$$

Rovnici jednou zintegrujeme a za předpokladu, že na spodním okraji platí $v(R_*) = v_0$ dostáváme:

$$v^2(r) = v_0^2 + \frac{2GM_*(s-1)}{R_*}\left(1 - \frac{R_*}{r}\right). \tag{3.19}$$

Můžeme si všimnout, že pro $r \rightarrow \infty$ rychlost nabývá maximální hodnoty. Hvězdné větry horkých hvězd zpravidla dosahují rychlostí až 10^3 km/s, naproti tomu v těsné blízkosti hvězd se rychlosti větru pohybují kolem několika km/s, proto zanedbáme v_0 a dostáváme:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_*(s-1)}{R_*}} \sim v_{\mathrm{esc}}, \tag{3.20}$$

kde $v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{2GM_*/R_*}$ značí únikovou rychlost z hvězdy. Dosazením (3.20) do (3.19) a za předpokladu velmi malých rychlostí v těsné blízkosti hvězdy obdržíme:

$$v(r) = v_0 + v_\infty \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta, \tag{3.21}$$

kde $\beta = 1/2$. Vztah pro rychlost (3.21) se nazývá běžně $\beta-$zákon a představuje velmi užívanou aproximaci rychlostního pole hvězdných větrů horkých hvězd. Parametr β kontroluje strmost profilu větru, proto méně strmým profilům odpovídají větší hodnoty tohoto parametru (viz § 4.3).

Nyní se vrátíme k řešení původní soustavy rovnic (3.11)-(3.12). Soustavu přepíšeme do jediné rovnice dosazením (3.11) do (3.12):

$$\left(1 - \frac{a^2}{v_r^2}\right) r^2 v_r v_r' + GM_*(1-\Gamma) - 2a^2 r - C(r^2 v_r v_r')^\alpha = 0 = F(r, v_r, v_r'), \tag{3.22}$$

kde $v_r' = \mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r$ a C obsahuje pouze konstanty:

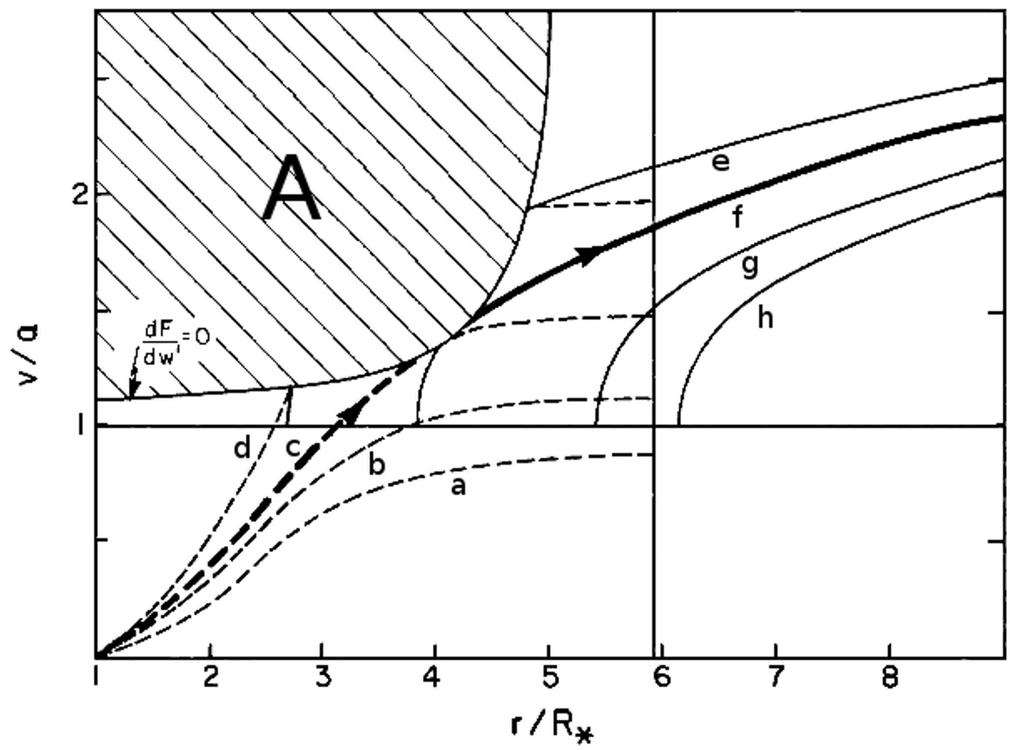
$$C = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} L_*}{4\pi c} k \left(\frac{4\pi}{\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} v_{\mathrm{th}} \dot{M}}\right)^\alpha. \tag{3.23}$$

Numerická řešení rovnice (3.22) znázorňuje obrázek 3.3. V obrázku jsou navíc vyznačeny dva významné body, zvukový bod a Parkerův bod. Zvukový bod nastává v takové vzdálenosti od hvězdy, kde rychlost hvězdného větru dosahuje rychlosti zvuku, $v_r(r) = a$. Pohybová rovnice slunečního větru (Parker, 1958)

$$\frac{1}{v_r}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = \frac{\dfrac{2a^2}{r} - \dfrac{GM_*}{r^2}}{v_r^2 - a^2}, \tag{3.24}$$

má ve zvukovém bodě singularitu, jmenovatel pohybové rovnice je roven nule. Bod, ve kterém nastává singularita, se nazývá kritický bod, r_{crit}. Parkerův bod odpovídá bodu, kdy je roven nule čitatel pohybové rovnice (3.24). V případě slunečního větru kritický bod, zvukový bod a Parkerův bod splývají do bodu jednoho, nicméně pro hvězdné větry urychované zářivou silou toto neplatí.

Pohybová rovnice hvězdného větru se zářivou silou (3.22) má nekonečně mnoho řešení, která lze rozdělit do několika charakteristických skupin. Čtyři různé třídy řešení dostáváme integrací směrem od fotosféry. Společnou charakteristikou těchto řešení je podzvuková počáteční rychlost, $v_r(R_*) < a$. Pro jednotlivá řešení dále platí:



Obrázek 3.3: Numerické řešení pohybové rovnice (3.22) pro CAK model zářivé síly (2.38) pro různé hodnoty počáteční rychlosti větru (podle Cassinelli, 1979).

- Počáteční rychlost $v_r^{(0)}(R_*)$ je příliš malá, řešení a) dosahuje Parkerova bodu, ale zůstává podzvukové, $v_r(r) < a$, členy v rovnici (3.22) jsou záporné.
- Počáteční rychlost $v_r^{(0)}(R_*) < v_r^{(1)}(R_*) < v_r^{(2)}(R_*)$, řešení b) překračuje rychlost zvuku a dosahuje Parkerova bodu, ale nevyruší se členy v pohybové rovnici.
- Počáteční rychlost $v_r^{(2)}(R_*)$, řešení c) překračuje rychlost zvuku, dotýká se zakázané oblasti A v jednom bodě, dosahuje Parkerova bodu.
- Počáteční rychlost $v_r^{(3)}(R_*) > v_r^{(0)}(R_*)$ je příliš velká, řešení d) překračuje velmi brzy rychlost zvuku a končí v zakázané oblasti A před dosažením Parkerova bodu.

Další čtyři skupiny řešení dostaneme integrací z $r = \infty$ směrem ke hvězdě. Pro tato řešení je společné $v_r(\infty) \gg a$. Pro jednotlivá řešení dále platí:

- Počáteční rychlost $v_r^{(5)}(\infty) > v_r^{(6)}(\infty)$ je příliš velká, řešení e) prochází Parkerovým bodem, ale končí v zakázané oblasti A před dosažením zvukového bodu.

- Počáteční rychlost $v_r^{(6)}(\infty)$, řešení f) prochází Parkerovým bodem, dotýká se zakázané oblasti A v jednom bodě a dosahuje zvukového bodu.
- Počáteční rychlost $v_r^{(8)}(\infty) < v_r^{(7)}(\infty) < v_r^{(6)}(\infty)$, řešení g) prochází Parkerovým bodem, nicméně ve zvukovém bodě se nevyruší druhý a třetí člen pohybové rovnice (3.22).
- Počáteční rychlost $v_r^{(8)}(\infty)$ je příliš malá, řešení h) dosahuje velmi rychle zvukového bodu.

Jediné řešení, které má tu vlastnost, že v blízkosti fotosféry dosahuje velmi malých rychlostí a ve velkých vzdálenost nabývá vysokých rychlostí, je takové, které hladce prochází kritickým bodem. Jedná se o kombinaci řešení c) a f), které se v singulárním bodě dotýkají oblasti A. Při dané hustotě na spodním okraji nastává toto řešení pouze pro jednu hodnotu počáteční rychlosti větru, a tím i rychlosti ztráty hmoty (3.13). Polohou kritického bodu je tak jednoznačně dána hodnota rychlosti ztráty hmoty hvězdy. Požadujeme tedy, aby v singulární bodě měla rovnice (3.22) pouze jediné řešení, musí platit:

$$\frac{\partial F}{\partial v_r'}\Big|_{r=r_{\mathrm{crit}}} = 0, \tag{3.25}$$

kterou nazýváme podmínka singularity. Dále požadujeme, aby v kritickém bodě byl spojitý gradient rychlosti, to znamená, že v tomto bodě existuje i $v_r'' = \mathrm{d}^2 v_r/\mathrm{d}r^2$. Podmínku nazýváme regulární podmínkou. Získáme ji z pohybové rovnice (3.22). Podél každé křivky řešení platí:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = 0 = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial v_r}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} + \frac{\partial F}{\partial v_r'}\frac{\mathrm{d}v_r'}{\mathrm{d}r}. \tag{3.26}$$

S využitím (3.25) dostáváme regulární podmínku:

$$\frac{\partial F}{\partial r} + v_r'\frac{\partial F}{\partial v_r}\Big|_{r=r_{\mathrm{crit}}} = 0. \tag{3.27}$$

Řešením rovnic (3.22), (3.25) a (3.27) získáme jednoznačně polohu a rychlost v kritickém bodě, kterým řešení prochází. Ze znalosti polohy kritického bodu pak můžeme jednoznačně určit rychlost ztráty hmoty.

Kapitola 4

Numerické řešení

Hydrodynamické rovnice popisující hvězdný vítr tvoří systém nelineárních diferenciálních rovnic. Získat řešení těchto rovnic je složité jednak z důvodu nelinearity rovnic vzhledem k rychlosti, ale také díky komplikované závislosti zářivé síly na gradientu rychlosti. Rovnice proto řešíme numericky. K tomu je potřeba diskretizovat prostor řešení, přepsat diferenciální rovnice do diferenčních rovnic, zvolit vhodnou numerickou metodu a v neposlední řadě i vhodné počáteční nebo okrajové podmínky.

Numerický postup aplikujeme na jednorozměrný stacionární izotermický osově symetrický model hvězdného větru, který je popsán rovnicemi (3.11)-(3.12):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\rho v_r) = 0, \tag{4.1}$$

$$v_r\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} + \frac{{v_\phi}^2}{r} - \frac{a^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r} - \frac{GM_*(1-\Gamma)}{r^2}, \tag{4.2}$$

se zářivou silou vyjádřenou v CAK aproximaci (2.45):

$$g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^{ref} L_*}{4\pi r^2 c}\frac{D_{\mathrm{f}}k}{(\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ref}} v_{\mathrm{th}})^\alpha}\left(\frac{10^{-11}\,\mathrm{cm}^3\,n_{\mathrm{e}}}{W}\right)^\delta \left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^\alpha, \tag{4.3}$$

kde složka rychlosti odpovídající rotaci v_ϕ je odvozena z platnosti zákona zachování momentu hybnosti (3.16), izotermická rychlost zvuku a je dána vztahem (3.4), faktor W a D_{f} výrazy (2.40) a (2.43).

4.1 Diskretizace prostoru

Výsledkem analytického řešení rovnic je spojitý průběh hledaných veličin na nezávislých proměnných, v našem případě se jedná o funkce $v_r(r)$, $\rho(r)$. Naproti tomu numerické metody vyžadují rozdělení prostoru na síť jednotlivých bodů. Řešit hydrodynamické rovnice potom znamená určovat řešení rovnic v jednotlivých bodech sítě, řešením rovnic tak získáme diskrétní závislost hledaných veličin.

Volba hustoty sítě ovlivňuje, jak moc je dané řešení přesné, nicméně je potřeba mít na paměti, že příliš hustě zvolená síť zvyšuje časovou náročnost výpočtu.

Vzdálenost jednotlivých uzlů sítě tvoří v našem modelu aritmetickou posloupnost, přičemž v určitém uzlovém bodě sítě se mění její hustota. Nechť NR značí počet bodů sítě, r_1 první bod sítě a r_{NR} poslední bod sítě, potom platí:

$$r_i = r_{i-1} + d, \quad i = 2, \ldots, NR, \quad \begin{cases} d = 0.0006\, R_*, & r_i < 1.15\, R_*, \\ d = 0.12\, R_*, & r_i \geq 1.15\, R_*, \end{cases} \tag{4.4}$$

kde d značí diferenci aritmetické posloupnosti. Dvojí hustota sítě je zvolena z důvodu přesného určení polohy kritického bodu. V případě, že se kritický bod nachází v těsné blízkosti hvězdy ($\sim 1.1\, R_*$), vede změna parametrů modelu pouze k malým změnám jeho polohy ($\sim 0.01\, R_*$). Pokud se ale kritický bod nachází dále od hvězdy, pak se jeho poloha pro různé parametry modelu mění výrazněji ($\sim 1\, R_*$). Zda se kritický bod nachází blízko hvězdy nebo daleko od ní závisí zejména na rotaci (viz § 5). Hodnota $1.15\, R_*$ je zvolena podle nejvzdálenější polohy, ve které se kritický bod nachází v těsné blízkosti hvězdy. Počet bodů sítě volíme $NR = 400 - 700$. Řešení počítáme obvykle do vzdálenosti $r_{\mathrm{NR}} < 100\, R_*$. První bod sítě, r_1, odpovídá buď poloměru hvězdy nebo poloze kritického bodu. Je to z toho důvodu, že řešení hydrodynamických rovnic je kombinace řešení pod kritickým bodem a řešení nad kritickým bodem (viz § 3.4). Pro každé řešení volíme novou síť s příslušnou okrajovou podmínkou: pro získání podkritického řešení odpovídá spodní okraj poloměru hvězdy, u nadkritického řešení odpovídá spodní okraj poloze kritického bodu.

4.2 Aproximace derivací

Abychom mohli řešit hydrodynamické rovnice na zvolené síti, přepíšeme derivace na diference. Podobně jako Krtička (2001) používáme obecnou tříbodovou aproximaci derivace. Pro derivovanou veličinu X (např. rychlost) platí:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=r_i} \approx y_i \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta r_{i+1}} + (1 - y_i)\frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}, \quad i = 2, \ldots, NR - 1 \tag{4.5}$$

kde

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}, \tag{4.6}$$

$$y_i = \frac{r_i - \overline{r}_i}{\overline{r}_{i+1} - \overline{r}_i}, \tag{4.7}$$

$$\overline{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}). \tag{4.8}$$

Výše uvedené schéma vede ke stabilnějším výpočtům pro nelineární síť bodů. Přestože používáme síť lineární, v takovém případě $y_i = 1/2$, ponecháváme schéma v jeho obecném tvaru. Na vnějším okraji sítě používáme dvoubodovou aproximaci derivace:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}|_{r=r_i} \approx \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}, \quad i = NR. \tag{4.9}$$

Přepis nelineárních hydrodynamických diferenciálních rovnic pomocí diferencí na algebraické rovnice je uveden v § B.1.

4.3 Metoda úplné linearizace

Existují dvě nejrozšířenější metody pro nalezení numerického řešení stacionárních rovnic popisujících hvězdný vítr. První z nich, používaná více v minulosti, vychází ze znalosti polohy kritického bodu (rychlosti a gradientu rychlosti v kritickém bodě) a řešení rovnic od kritického bodu směrem ke hvězdě a směrem od hvězdy (CAK). Druhá metoda využívá k nalezení numerického řešení počátečního odhadu řešení a Newtonovy-Raphsonovy metody. Tuto metodu používáme i my a proto se ji budeme více věnovat.

Numerická metoda pro výpočet modelů hvězdných větrů hnaných zářením, kterou poprvé pro výpočet použili Nobili & Turolla (1988), je rozšířením Henyeyovy metody (Henyey a kol., 1964) založené na Newtonově-Raphsonově iterační metodě. V teorii hvězdných atmosfér se obvykle užívá označení metoda úplné linearizace (viz např. Mihalas, 1978). Tato metoda je také popsána v Krtička (2003). Algebraické rovnice popisující hvězdný vítr můžeme formálně zapsat následujícím způsobem:

$$\mathrm{P}\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{4.10}$$

kde P je nelineární operátor. Sloupcový vektor $\boldsymbol{\psi}$ je vektor proměnných, jehož sloupec tvoří hustoty a rychlosti větru v jednotlivých bodech sítě:

$$\boldsymbol{\psi} = (\rho_1, v_{r_1}, \rho_2, v_{r_2}, \ldots, \rho_{\mathrm{NR}}, v_{r_{\mathrm{NR}}})^{\mathrm{T}}. \tag{4.11}$$

Rovnice (4.10) tvoří nelineární systém rovnic, proto k řešení použijeme iterační metodu. Řešení $\boldsymbol{\psi}$ můžeme zapsat pomocí počátečního odhadu řešení $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{0}}$ jako

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{\mathbf{0}} + \delta\boldsymbol{\psi}. \tag{4.12}$$

Dosazením do (4.10) a omezením se na první dva členy rozvoje dostáváme iterační předpis Newtonovy-Raphsonovy metody (Hubeny & Lanz, 1992):

$$\mathrm{J}^n \delta\boldsymbol{\psi}^{n+1} = -\mathrm{P}^n \boldsymbol{\psi}^n, \tag{4.13}$$

kde písmeno n označuje iterační krok a J označuje Jacobián. Pro jednotlivé členy Jacobiho matice platí:

$$J_{kl}^n = \frac{\partial P_k}{\partial \psi_l} \tag{4.14}$$

Rovnice (4.13) tvoří soustavy lineárních algebraických rovnic pro neznámé opravy $\delta\boldsymbol{\psi}^{n+1}$, na základě kterých určíme řešení v $(n+1)$ kroku. Jednotlivé členy Jacobiánu a tvary operátoru P můžeme nalézt v § B.1. K modelování hvězdného větru používáme programovací jazyk `FORTRAN`, použité numerické metody jsou součástí balíčku `LAPACK`[1].

Abychom mohli hledat řešení, musíme nejprve učinit odhad řešení $\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{0}}$. Rychlost hvězdného větru aproximujeme $\beta-$zákonem (3.21):

$$v_r(r) = v_r(R_*) + v_\infty \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta, \tag{4.15}$$

kde parametr β určuje strmost rychlostního profilu hvězdného větru, vyšší hodnota β odpovídá méně strmějšímu rychlostnímu profilu. Fitováním modelů hvězdných větrů OB hvězd s teplotami od 40 000 K do 50 000 K PPK určili $\beta \sim 0.8$, Curé (2004) našel lepší shodu pro $\beta \sim 1$. Na základě těchto zjištění volíme parametr $\beta = 0.8-1.0$. $\beta-$zákon je vhodný odhad pro rychlá řešení větru, nicméně pro získání nadkritických řešení rychle rotujících větrů je tato aproximace nevhodná. Pro odhad rychlosti v nadkritické části volíme jednoduchou fitovací funkci:

$$v_r(r) = a_1 - \frac{a_2}{r^{0.5}}, \tag{4.16}$$

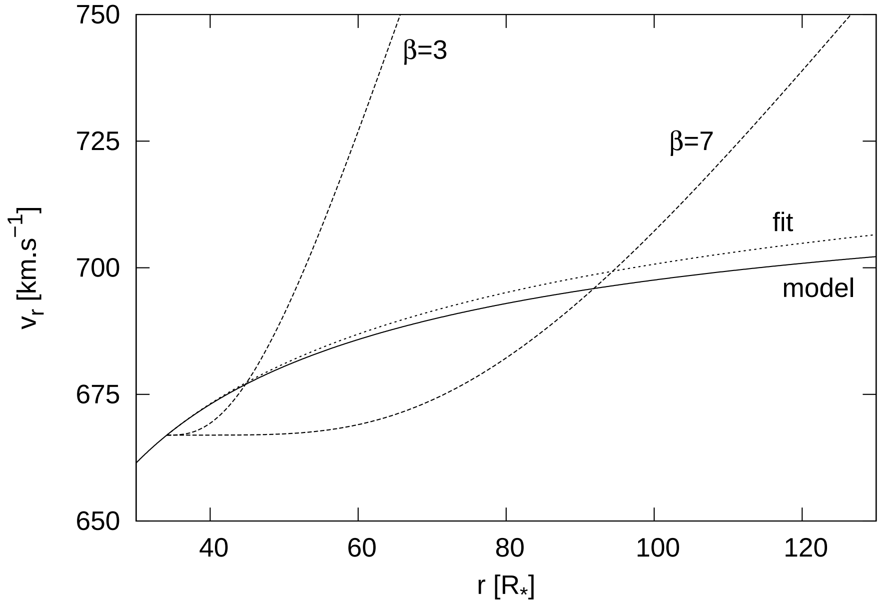
kde a_1, a_2 jsou konstanty určené fitováním několika posledních bodů podkritického řešení. Výhodu aproximace rychlostního pole výrazem (4.16) místo $\beta-$zákona ukazuje obrázek 4.1. Hustotu větru snadno dopočítáme z rovnice (3.13), přičemž $\dot{M}$ zde vystupuje jako volný parametr.

4.4 Okrajové podmínky

Řešení soustavy rovnic (3.11)-(3.12) vyžaduje určit okrajové podmínky, tedy rychlost a hustotu větru na spodním okraji, v_{r_1} a ρ_1. Tyto veličiny nelze volit libovolně, ale tak, aby řešení procházelo kritickým bodem (viz § 3.4). Velmi vhodné je proto užití tzv. metody střelby (*shooting method*) (Krtička, 2003), jejímž účelem je volit podmínky v jednom bodě (na spodním okraji) tak, aby řešení procházelo jiným bodem (kritickým bodem).

Nejprve tedy na spodním okraji zvolíme hustotu, která se během výpočtu nemění. Zároveň na spodním okraji volíme rychlost. Z § 3.4 víme, že rychlost v kritickém bodě je větší než rychlost zvuku. Navíc v těsné blízkosti hvězdy je rychlost větru ještě menší. Proto stačí volit takovou rychlost, aby platilo: $v_{r_1} \leq a$. Potom provedeme Newtonovy-Raphsonovy iterace. Pokud model nekonverguje, je zvolená hustota příliš velká a musíme zvolit hodnotu menší. V případě, že model konverguje, ověříme, zda je splněna kritická podmínka.

[1]http://www.netlib.org/lapack



Obrázek 4.1: Porovnání odhadu rychlosti v nadkritické oblasti pomocí $\beta-$zákona pro $\beta = 3$ a $\beta = 7$ a funkce (4.16). Parametry hvězdy odpovídají modelu P-42 z tabulky 5.1.

Kritická podmínka je dána rovnicí (3.25). Provedením derivace v (3.11), dosazením do (3.12) a následným zderivováním podle gradientu rychlosti dostáváme kritickou podmínku ve tvaru:

$$v_r - \frac{a^2}{v_r} - \frac{\partial g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}}}{\partial v_r'} = 0, \tag{4.17}$$

kde

$$\frac{\partial g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}}}{\partial v_r'} = g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} \left[\alpha \left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} \right)^{-1} + A \frac{r}{v_r} \right], \tag{4.18}$$

$$A = \frac{(\alpha+1)\left[(1+\sigma)^{\alpha} - \mu_*(1+\mu_*\sigma)^{\alpha}\right]}{(1+\sigma)^{\alpha+1} - (1+\mu_*\sigma)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{1+\sigma} - \frac{1}{\sigma}. \tag{4.19}$$

V případě, že kritická podmínka není splněná ani v jednom bodě, je okrajová hustota malá a musíme zvolit větší. Tento postup opakujeme, dokud nenajdeme takové konvergentní řešení, které kritickou podmínku splňuje. Tak získáme řešení pod kritickým bodem. Pro získání nadkritického řešení zvolíme nový spodní okraj, tím je poloha kritického bodu. Novými okrajovými podmínkami jsou rychlost a hustota v kritickém bodě. Provedením několika iterací dostáváme nadkritické řešení. Celkové řešení je spojení podkritického a nadkritického řešení (viz § 3.4).

Tabulka 4.1: Použité hodnoty parametrů k, α a δ pro výpočet zářivé síly (PPK; Curé 2004).

T_{eff}[K]	k	α	δ
20 000	0.320	0.565	0.020
25 000	0.300	0.500	0.070
30 000	0.170	0.590	0.090
40 000	0.124	0.640	0.070
50 000	0.124	0.640	0.070

4.5 Parametry zářivé síly

Zbývá ještě doplnit trojici parametrů k, α a δ, které aproximativním způsobem popisují soubor čar přispívajících k zářivé síle. K tomuto účelu používáme parametry z tabulky 4.1. Tyto parametry spočítali PPK na základě Abbottových výpočtů parametrů pro prvky od H po Zn a pro případné ionizační stupně I až VI (Abbott, 1982). Hodnota parametrů je konstantní pro celý vítr. V některých případech, zejména za účelem porovnání našich výpočtů s výpočty jiných autorů, přebíráme parametry zářivé síly podle dané srovnávací práce. Pro teploty $T_{\text{eff}} < 20\,000\,\text{K}$ používáme trojici parametrů zářivé síly podle práce Shimady a kol. (1994), pokud není uvedeno jinak.

Kapitola 5

Modelování rotujících hvězdných větrů

V této kapitole podáváme výsledky modelování rotujícího jednorozměrného osově symetrického hvězdného větru urychlovaného zářením. Do určité hodnoty rotační rychlosti hvězdy, kterou nazýváme přechodová rotační rychlost (*break-up rotation velocity*) (Madura a kol., 2007) a značíme $v_{\rm rot}^{\rm switch}$, resp. $\Omega_{\rm switch} = v_{\rm rot}^{\rm switch}/v_{\rm crit}$, získáváme řešení, kdy hvězdný vítr je poměrně řídký a rychlý, v odborné literatuře označován jako CAK řešení větru (*CAK wind*) nebo rychlé řešení (*fast solution*). Při dalším zvyšování rotační rychlosti hvězdy (pro $v_{\rm rot} > v_{\rm rot}^{\rm switch}$) mnoho autorů oznamovalo numerické problémy, které znemožňovaly získání řešení za předpokladu m-CAK modelu zářivé síly (PPK; Araújo a kol. 1994; Ceniga a kol. 2008).

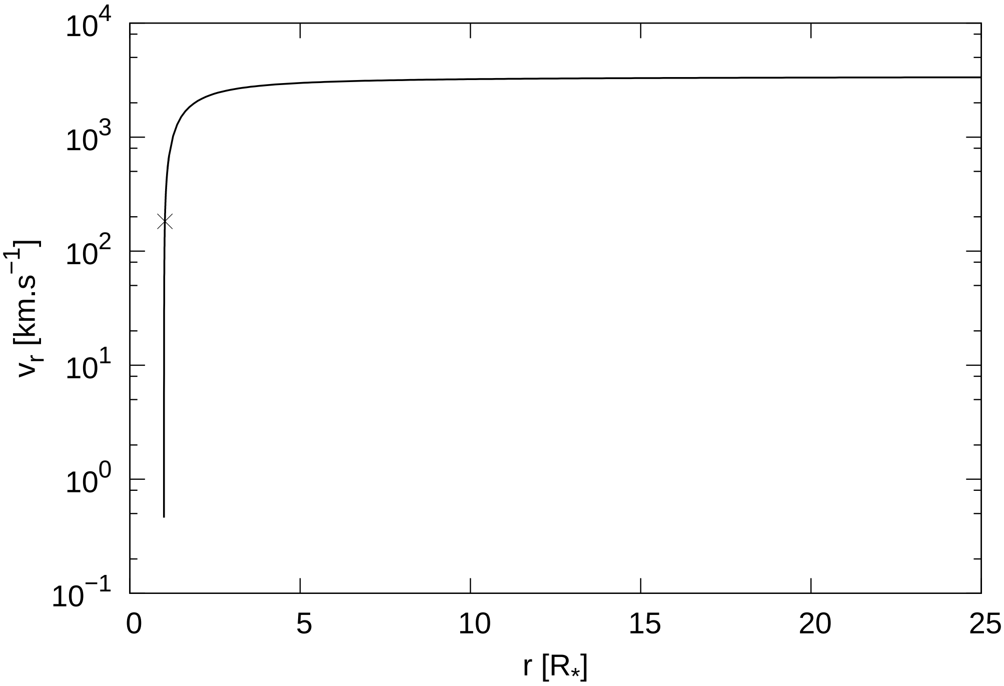
Pokud rotační rychlost překročí přechodovou rotační rychlost, přechází CAK řešení do nové třídy řešení (Curé, 2004; Curé & Rial, 2004), v literatuře běžně označovaná jako pomalá řešení (*slow solution*), pro kterou je charakteristická malá rychlost a vysoká hustota hvězdného větru. Tato řešení by mohla odpovědět na otázku hustých disků okolo velmi rychle rotujících horkých hvězd.

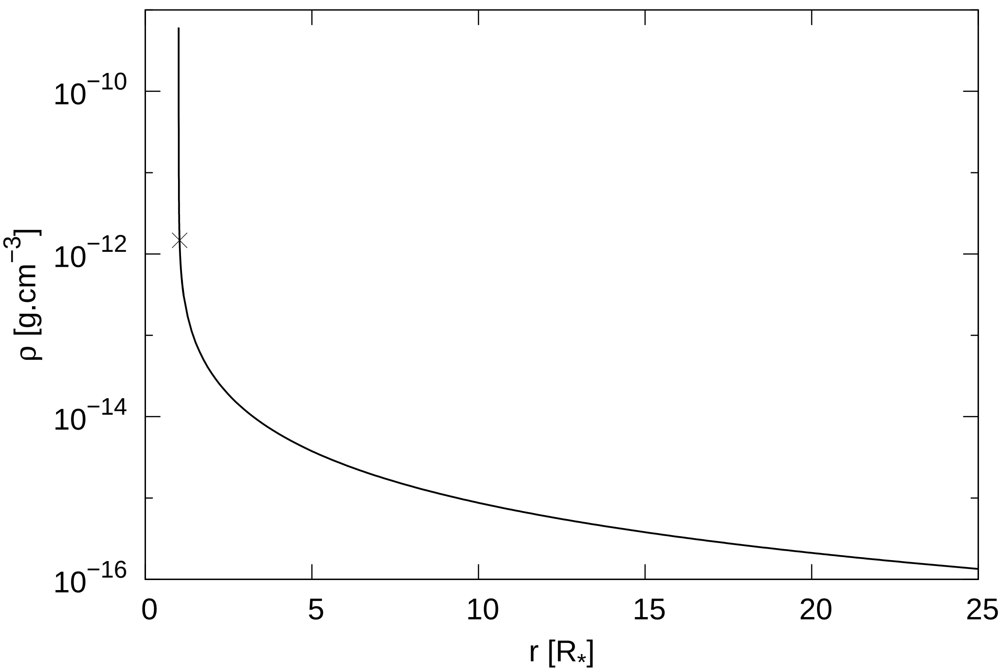
Vliv rotace hvězdy na hvězdný vítr sledujeme v rovině rovníku, protože v této oblasti je působení odstředivé síly na částice hvězdného větru nejvýraznější. Směrem k pólům se účinky odstředivé síly snižují a na pólech jsou nulové. Z toho důvodu se nerotující hvězdný vítr označuje jako polární.

5.1 Testové výpočty pro nerotující větry

Než se budeme zabývat řešením rotujících hvězdných větrů, provedeme testové výpočty pro nerotující vítr.

Řešíme soustavu rovnic (3.11)-(3.12), přičemž $v_{\rm rot} = 0\,{\rm km/s}$. Parametry modelu a také parametry zářivé síly jsou převzaty z PPK. Numerické řešení modelu hvězdného větru ukazuje obrázek 5.1. Rychlost větru (viz obr. 5.1, nahoře) velmi strmě narůstá v blízkosti hvězdy, kde zářivá síla dosahuje svého maxima, a již ve vzdálenosti několika poloměrů hvězdy se dostává na hodnoty blízké konečné





Obrázek 5.1: Řešení nerotujícího hvězdného větru. Křížkem vyznačena poloha kritického bodu. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-50 z tabulky 5.1. *Horní graf*: Rychlostní profil. *Dolní graf*: Hustotní profil.

rychlosti hvězdného větru. Např. ve vzdálenosti $r \sim 50\,R_*$ dosahuje rychlost větru 99 % hodnoty rychlosti ve vzdálenosti $\sim 200\,R_*$. Hustota hvězdného větru (viz obr. 5.1, dole) v těsné blízkosti hvězdy velmi prudce klesá v důsledku strmého nárůstu rychlosti větru (viz rov. 3.13). Dále od hvězdy je pokles hustoty pozvolnější, protože rychlost větru již tolik neroste, $\rho \sim 1/r^2$. Na obrázku je také vyznačena poloha kritického bodu, který se nachází v těsné blízkosti hvězdy, $r_{\rm crit} \doteq 1.029\,R_*$. Poloha kritického bodu je významně ovlivněna faktorem $D_{\rm f}$ (2.43).

Výsledky výpočtů globálních charakteristik větru ukazuje tabulka 5.1. Z těchto výsledků je patrné, že hodnoty rychlosti ztráty hmoty se mírně liší oproti hodnotám odvozeným z pozorování. Hodnoty konečné rychlosti větru vychází podhodnoceny vzhledem k pozorování. Nicméně porovnáním našich výsledků s výpočty PPK nalézáme výbornou shodu.

5.2 Rychlá řešení rotujících hvězdných větrů

V této části se zabýváme modely rotujících hvězdných větrů, kdy rotační rychlosti hvězd jsou menší než přechodová rotační rychlost, $v_{\rm rot} < v_{\rm rot}^{\rm switch}$. Rotaci hvězdného větru počítáme ze zákona zachování momentu hybnosti (3.16). Rotace hvězdy způsobuje, že na každou částici hvězdného větru působí navíc odstředivá síla, jejíž velikost můžeme vyjádřit jako odstředivé zrychlení vztažené na jednotku hmotnosti:

$$g_{\rm ods}(r) = v_{\rm rot}^2 \frac{R_*^2}{r^3}. \tag{5.1}$$

Obrázek 5.2 zachycuje modely hvězdného větru pro několik rotačních rychlostí hvězdy, jejíž parametry odpovídají modelu P-44 z tabulky 5.1. Čím je vyšší rotace hvězdy, tím je konečná rychlost větru menší. Tento pokles není nijak výrazný ani pro relativně vysoké rotační rychlosti, např. pro $v_{\rm rot} \sim 200\,{\rm km/s}$ je konečná rychlost větru menší o méně než 5 %. Navíc růst rychlosti větru v blízkosti hvězdy není tak strmý jako v případě nerotujícího modelu. Konečná rychlost větru závisí na efektivní únikové rychlosti (3.20). Protože rotace hvězdy způsobuje pokles únikové rychlosti, dochází také k poklesu konečné rychlosti větru.

Rotace hvězdy ovlivňuje také hustotu hvězdného větru. Obrázek 5.3 znázorňuje poměr mezi hustotou rovníkového větru a polárního větru pro několik rotačních rychlostí hvězdy; parametry modelu odpovídají hvězdě z předchozího příkladu. Na první pohled je patrné, že vyšší rotační rychlost hvězdy vede k hustějšímu rovníkovému větru vzhledem k větru polárnímu. Nicméně nárůst hustoty větru v rovině rovníku je významný pouze v těsné blízkosti hvězdy a pouze pro vysoké rotační rychlosti, pro $\Omega \sim 0.30$ je hustota rovníkového větru oproti polárnímu větru větší pouze o 20 %, pro rotační rychlost $\Omega \sim 0.75$ dosahuje hustota rovníkového větru 18krát vyšší hodnoty v porovnání s polárním větrem.

Tabulka 5.1: Porovnání výsledků našich modelů s hodnotami odvozenými z pozorování (Wilson & Dopita 1985; PPK; Pauldrach 1987; Groenewegen a kol. 1989).

Model	Sp. typ	T_{eff} [K]	R_* [$R_\odot$]	$\log g$	$\dot{M}$(poz.) [$\mathrm{M}_\odot$/rok]	$\dot{M}$(vyp.) [$\mathrm{M}_\odot$/rok]	v_∞(poz.) [km/s]	v_∞(vyp.) [km/s]	Hvězda	Zdroj
P-50	O4V(f)	50 000	12.0	4.08	$4.0\,10^{-6}$	$3.7\,10^{-6}$	3440	3408	9−Sgr	PPK
P-44	O5V(f)	44 260	9.3	4.12		$8.6\,10^{-7}$	3340	3436	HD 93 204	Groenewegen a kol. (1989)
P-42	O6ef	42 000	17.0	4.05	$4.0\,10^{-6}$	$5.0\,10^{-6}$	2500	2413	λ−Cep	PPK
Pa-42	O4f	42 000	19.0	3.50	$5.0\,10^{-6}$	$1.2\,10^{-5}$	2550	1556	ζ−Pup	Pauldrach (1987)
P-41	O7V(f)	40 080	9.1	4.06		$4.8\,10^{-7}$	3060	3279	15-Mon	Groenewegen a kol. (1989)
P-40	O6.5V	40 000	5.8	4.05	$1.3\,10^{-7}$	$2.0\,10^{-7}$	2600	2508	HD 42 088	PPK
P-30	O9.5I	30 000	29.0	3.45	$2.3\,10^{-6}$	$1.8\,10^{-6}$	2290	2195	ζ−Ori A	PPK
P-20	B1Iab	20 300	27.4	2.91		$6.5\,10^{-7}$	1580	1275	ρ−Leo	Wilson & Dopita (1985)
P-19	B1Ib	19 900	26.2	2.92	$5.9\,10^{-7}$	$4.9\,10^{-7}$	1500	1288	ζ−Per	Wilson & Dopita (1985)
M-45	O5V	45 000	12.0	4.00		$2.0\,10^{-6}$		3257		Curé (2004)
M-25	B1V	25 000	5.3	4.03		$1.9\,10^{-9}$		1576		Curé (2004)
Mv-25	B	25 000	16.6	3.00		$5.1\,10^{-7}$		677		Venero a kol. (2008)
Mp-25	B	25 000	18.0	3.17		$3.0\,10^{-7}$		940		Pelupessy a kol. (2000)
M-23	B2V	23 000	4.5	4.05		$8.7\,10^{-10}$		1396		Bjorkman & Cassinelli (1993)
M-20	B2V	20 000	4.0	4.11		$9.3\,10^{-10}$		1903		Madura a kol. (2007)
Mp-20	B	20 000	59.0	2.3		$1.5\,10^{-5}$		620		Lamers & Pauldrach (1991)
M-17	B4III	17 200	7.0	3.48		$1.7\,10^{-9}$		689		Zickgraf (2001)

V těsné blízkosti hvězdy výrazně působí na částice větru zářivá síla kontinua a gravitační síla (viz efektivní gravitační síla (3.6)), dále gradient tlaku plynu a odstředivá síla; působení zářivé síly způsobené absorpcí záření v čarách je zanedbatelné (viz obr. 5.4). Strukturu větru v této oblasti můžeme odhadnout z rovnice (3.12). Po zanedbání příslušných členů přepíšeme rovnici do tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\frac{GM_*(1-\Gamma)}{a^2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} + R_*^2\frac{v_{\mathrm{rot}}^2}{a^2}\frac{\mathrm{d}r}{r^3}. \tag{5.2}$$

Integrací rovnice (5.2) obdržíme rozložení hustoty větru v blízkosti hvězdy:

$$\rho(r) = \rho_1 \exp\left[-\frac{GM_*(1-\Gamma)}{a^2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) + \frac{v_{\mathrm{rot}}^2 R_*^2}{2a^2}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right], \tag{5.3}$$

kde r_1 odpovídá spodnímu okraji a ρ_1 spodní okrajové hustotě. Rozložení hustoty hvězdného větru v blízkosti hvězdy ukazuje obrázek 5.5. Pro danou rotační rychlost je znázorněn numerický výpočet a zároveň příslušný odhad hustoty podle výrazu (5.3).

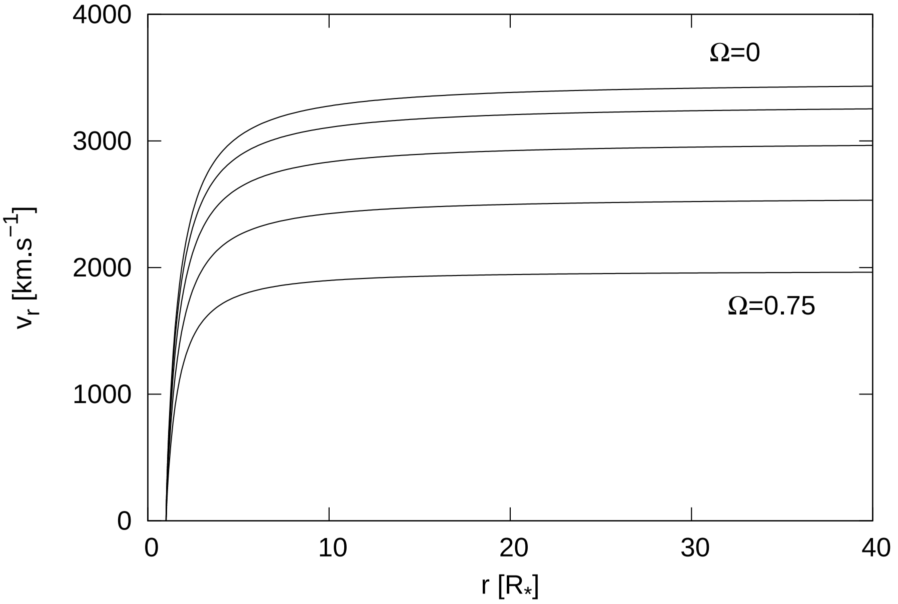
Pro případ nerotující hvězdy, ve výrazu (5.3) je druhý člen v závorce nulový, působí na částice větru v těsné blízkosti hvězdy proti vlivu gravitační síly významně zářivá síla kontinua a gradient tlaku plynu (viz obr. 5.4, vlevo). Hustota větru v této oblasti ($v_r < a$) velmi dobře odpovídá hustotě hydrostatického modelu (viz obr. 5.5). Prudký pokles hustoty větru vede k poklesu gradientu tlaku plynu a nárůstu rychlosti větru (ve větru existuje gradient rychlosti), což vede k postupnému zvyšování příspěvku zářivé síly v čarách, $g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} \sim v_r \mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r$, která se stále více podílí na jeho urychlování. Ve zvukovém bodě ($v_r = a$) velikost zářivé síly převažuje nad gravitační silou a částicím větru již nic nebrání nabývat vysokých rychlostí. Dále od hvězdy velikost zářivé síly klesá, $g_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{L}} \sim 1/r^2$, růst rychlosti částic je tak velmi pozvolný a hustota větru klesá mírněji, $\rho \sim 1/r^2$, než v podzvukové oblasti.

Pro případ rotující hvězdy je situace v těsné blízkosti hvězdy podobná, nyní však na částice větru působí navíc odstředivá síla (viz obr. 5.4, vpravo). Působení odstředivé síly redukuje účinky gravitační síly a má tak podobný efekt jako by hvězda měla nižší hmotnost:

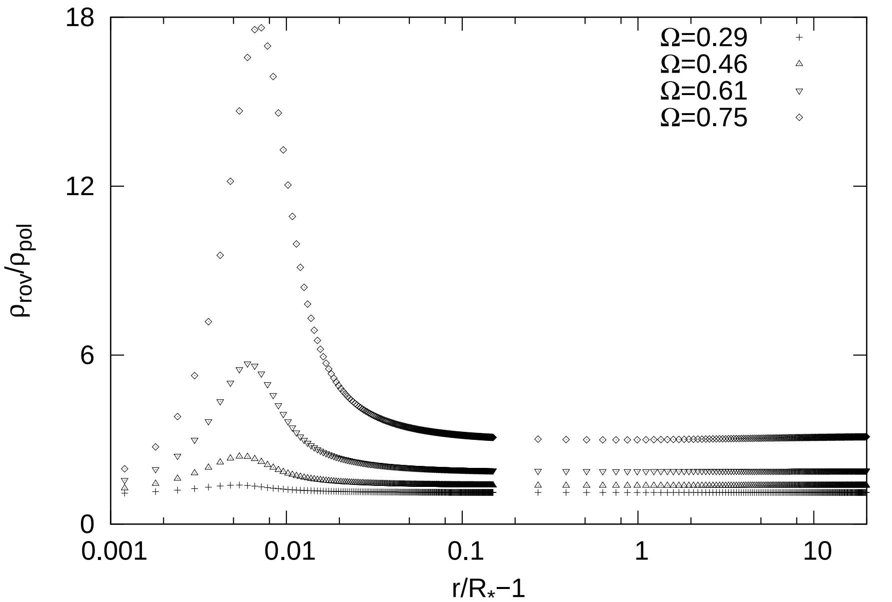
$$M_{\mathrm{eff.}} \to M_{\mathrm{eff.}}\left(1-\Omega^2\right), \tag{5.4}$$

kde jsme sloučili druhý a čtvrtý člen rovnice (3.12) s využitím (3.17). Díky odstředivé síle se do prostoru v těsné blízkosti hvězdy uvolňuje z atmosféry více částic. Pokles hustoty větru v této oblasti je méně strmý než v případě nerotující hvězdy (viz obr. 5.5) a tak gradient tlaku plynu působí do větší vzdálenosti než v případě nerotující hvězdy (viz obr. 5.4, vpravo). Rotace hvězdy vede ke strmému růstu poměru hustot mezi rovníkovým a polárním větrem (obr. 5.3). Z výrazu (5.3) pro poměr hustot dostáváme:

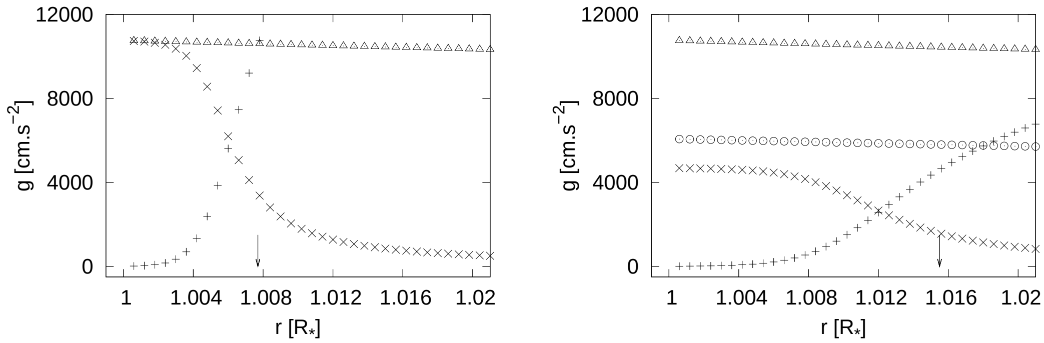
$$\frac{\rho_{\mathrm{rov}}}{\rho_{\mathrm{pol}}} = \exp\left[\frac{R_*^2 v_{\mathrm{rot}}^2}{2a^2}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right]. \tag{5.5}$$



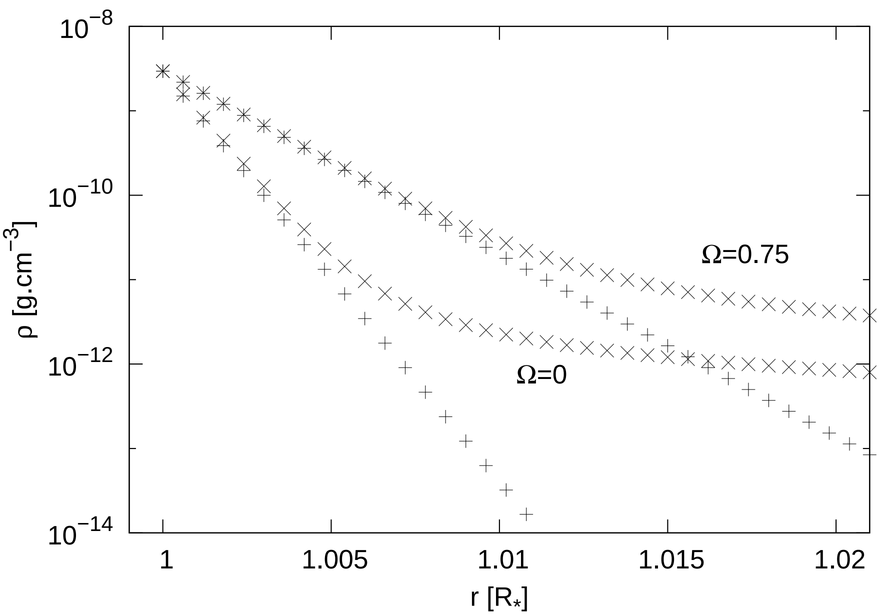
Obrázek 5.2: Rychlostní profily rotujícího hvězdného větru. Modely větru pro rotační rychlosti $\Omega = 0$, 0.29, 0.46, 0.61 a 0.75. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-44 z tabulky 5.1.



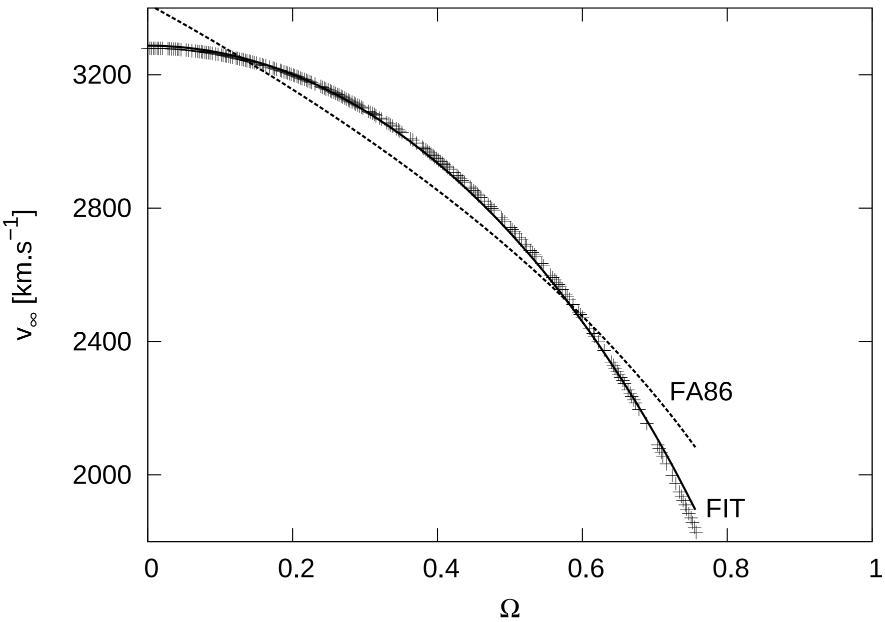
Obrázek 5.3: Porovnání poměru hustot mezi rovníkovým a polárním větrem pro různé rotační rychlosti. Modely větru počítány pro rotační rychlosti $\Omega = 0.29$, 0.46, 0.61 a 0.75. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-44 z tabulky 5.1.



Obrázek 5.4: Porovnání velikostí sil působících na částice větru v těsné blízkosti hvězdy: efektivní gravitační síla (△), odstředivá síla (⊙), gradient tlaku plynu (×), zářivá síla způsobená absorpcí v čarách (+). Šipka označuje polohu zvukového bodu. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-44 z tabulky 5.1. *Vlevo*: $\Omega = 0$. *Vpravo*: $\Omega \sim 0.75$.



Obrázek 5.5: Porovnání numerického řešení rozložení hustoty větru (×) s hydrostatickým modelem podle výrazu (5.3) (+). Modely větru vypočteny pro rotační rychlosti $\Omega = 0$ a 0.75. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-44 z tabulky 5.1.



Obrázek 5.6: Konečná rychlost hvězdného větru v_∞ v závislosti na rotační rychlosti hvězdy Ω. Křížky představují numerické výpočty. "FA86" značí fit převzatý z práce Friend & Abbott (1986), rov. (5.6), "FIT" značí fit opravený námi, rov. (5.7). Parametry hvězdy odpovídají modelu P-41 z tabulky 5.1. Jeden bod odpovídá modelu hvězdného větru pro jednu hodnotu rotační rychlosti hvězdy.

Strmý nárůst poměru hustot vede ke strmému poklesu poměru příslušných rychlostí. Zvukový bod nastává dále od hvězdy a také vliv zářivé síly způsobené absorpcí záření v čarách se významněji začne uplatňovat od větších vzdáleností v porovnání s nerotující hvězdou (viz obr. 5.4, vpravo).

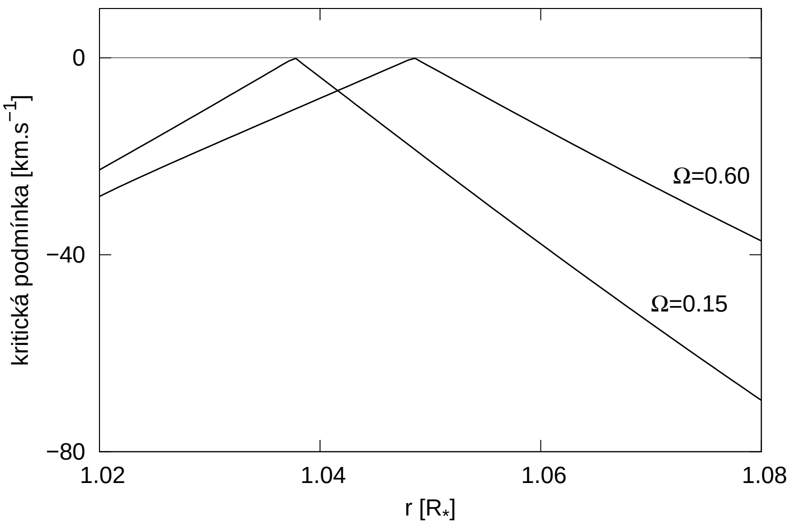
V předchozím jsme ukázali, že s rostoucí rotační rychlostí hvězdy klesá konečná rychlost hvězdného větru (obr. 5.2). Friend & Abbott (1986) fitováním numerických výpočtů modelů rotujících hvězd obdrželi závislost konečné rychlosti hvězdného větru na rotační rychlosti:

$$\frac{v_\infty}{v_{\mathrm{esc}}} \approx 3 \left(\frac{v_{\mathrm{esc}}}{10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \right)^{0.2} (1-\Omega)^{0.35}, \tag{5.6}$$

přičemž konečná rychlost větru slabě závisí také na únikové rychlosti z hvězdy. Naše numerické výpočty zároveň s fitovací funkcí (5.6) zachycuje obrázek 5.6. Na první pohled je zřejmé, že jejich fit příliš neodpovídá numerickým výpočtům. Proto jsme použili upravenou fitovací funkci:

$$\frac{v_\infty}{v_{\mathrm{esc}}} \approx 2.9 \left(\frac{v_{\mathrm{esc}}}{10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}}} \right)^{0.2} (1-\Omega^2)^{0.65}, \tag{5.7}$$

která pro model hvězdy P-41 dává mnohem lepší shodu.



Obrázek 5.7: Kritická podmínka (4.18) pro rotační rychlosti $\Omega = 0.15$ a 0.60. Kritický bod se nachází v místě, kde je splněna singulární podmínka (3.25). Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1.

S rostoucí rotační rychlostí hvězdy nacházíme kritický bod dále od hvězdy, přesto jeho poloha se i přes vysoké rotační rychlosti výrazně nemění a zůstává stále v blízkosti hvězdy (viz obr. 5.7). Jeho poloha je určena zejména korekčním faktorem D_{f} (2.43).

5.3 Pomalá řešení rotujících hvězdných větrů

Předchozí oddíl pojednával o modelech rotujícího hvězdného větru pro rotační rychlosti $v_{\mathrm{rot}} < v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$. Vypočítaný model větru představoval relativně řídký a rychlý hvězdný vítr. V tomto oddílu se zabýváme rotujícími hvězdnými větry, jejichž rotační rychlosti $v_{\mathrm{rot}} > v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$. Řešení pro velmi rychle rotující hvězdný vítr publikoval poprvé Curé (2004). Zahrnutí dalších jevů (Curé a kol., 2005) by mohlo odpovědět na otázku hvězdných disků okolo rychle rotujících hvězd.

5.3.1 Globální charakteristiky rychle rotujících větrů

Globální charakteristiky rotujících hvězdných větrů shrnují tabulky 5.2 až 5.9. Každá tabulka je sestrojena pro různou trojici parametrů T_{eff}, $\log g$ a R_*, která odpovídá modelům O a B hvězd, jejichž parametry jsou zvlášť uvedeny v tabulce 5.1. Jednotlivé řádky tabulek 5.2 až 5.9 odpovídají modelům hvězdného větru pro příslušnou hodnotu rotační rychlosti. Rotační rychlost hvězdy je uvedena v prvním a ve druhém sloupci. Ve třetím sloupci je uvedena poloha kritického

Tabulka 5.2: Závislost r_{crit}, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-50 z tabulky 5.1.

v_{rot} [km/s]	Ω	r_{crit}/R_*	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.031	3408	$3.74.10^{-6}$
52	0.063	1.031	3400	$3.75.10^{-6}$
98	0.119	1.031	3379	$3.78.10^{-6}$
144	0.174	1.031	3344	$3.82.10^{-6}$
160	0.194	1.031	3329	$3.84.10^{-6}$
190	0.230	1.031	3296	$3.89.10^{-6}$
230	0.278	1.032	3243	$3.96.10^{-6}$
270	0.327	1.032	3178	$4.06.10^{-6}$
300	0.363	1.033	3122	$4.14.10^{-6}$
354	0.428	1.034	3003	$4.33.10^{-6}$
370	0.448	1.034	2963	$4.39.10^{-6}$
396	0.479	1.035	2893	$4.51.10^{-6}$
422	0.511	1.036	2817	$4.65.10^{-6}$
450	0.544	1.037	2726	$4.82.10^{-6}$
486	0.588	1.039	2596	$5.07.10^{-6}$
518	0.627	1.041	2466	$5.35.10^{-6}$
540	0.653	1.043	2368	$5.58.10^{-6}$
578	0.699	1.046	2177	$6.05.10^{-6}$
602	0.728	1.049	2038	$6.41.10^{-6}$
624	0.755	1.053	1893	$6.81.10^{-6}$
643	0.778	24.79	843	$7.23.10^{-6}$
676	0.818	25.39	816	$7.27.10^{-6}$
684	0.828	25.51	809	$7.28.10^{-6}$
698	0.845	25.75	796	$7.30.10^{-6}$
716	0.866	26.11	780	$7.32.10^{-6}$
726	0.878	26.35	771	$7.34.10^{-6}$
736	0.890	26.59	762	$7.35.10^{-6}$
750	0.907	26.83	750	$7.37.10^{-6}$
762	0.922	27.19	740	$7.39.10^{-6}$
772	0.934	27.31	732	$7.40.10^{-6}$
782	0.946	27.55	723	$7.42.10^{-6}$
792	0.958	27.79	715	$7.43.10^{-6}$
802	0.970	28.03	707	$7.45.10^{-6}$
806	0.975	28.15	703	$7.45.10^{-6}$
816	0.987	28.39	695	$7.47.10^{-6}$
824	0.997	28.63	689	$7.48.10^{-6}$

Tabulka 5.3: Závislost $r_{\rm crit}$, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-45 z tabulky 5.1.

$v_{\rm rot}$ [km/s]	Ω	$r_{\rm crit}/R_*$	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.031	3257	$2.02.10^{-6}$
40	0.051	1.031	3252	$2.02.10^{-6}$
102	0.129	1.031	3224	$2.04.10^{-6}$
158	0.200	1.031	3176	$2.08.10^{-6}$
186	0.235	1.032	3145	$2.10.10^{-6}$
216	0.273	1.032	3105	$2.13.10^{-6}$
242	0.306	1.032	3065	$2.17.10^{-6}$
272	0.344	1.033	3012	$2.21.10^{-6}$
298	0.377	1.034	2961	$2.25.10^{-6}$
330	0.418	1.034	2890	$2.32.10^{-6}$
356	0.450	1.035	2826	$2.37.10^{-6}$
384	0.486	1.036	2749	$2.45.10^{-6}$
416	0.526	1.037	2652	$2.55.10^{-6}$
444	0.562	1.038	2557	$2.65.10^{-6}$
472	0.597	1.040	2452	$2.77.10^{-6}$
506	0.640	1.042	2309	$2.95.10^{-6}$
534	0.676	1.044	2177	$3.12.10^{-6}$
560	0.709	1.047	2039	$3.32.10^{-6}$
596	0.754	1.053	1813	$3.67.10^{-6}$
615	0.778	25.03	810	$3.89.10^{-6}$
626	0.792	25.27	799	$3.90.10^{-6}$
638	0.807	25.51	787	$3.91.10^{-6}$
652	0.825	25.75	774	$3.92.10^{-6}$
664	0.840	25.99	764	$3.93.10^{-6}$
676	0.855	26.23	753	$3.94.10^{-6}$
692	0.876	26.59	739	$3.95.10^{-6}$
704	0.891	26.83	728	$3.96.10^{-6}$
714	0.903	27.07	720	$3.97.10^{-6}$
726	0.919	27.31	709	$3.98.10^{-6}$
734	0.929	27.55	703	$3.98.10^{-6}$
744	0.941	27.79	694	$3.99.10^{-6}$
754	0.954	28.03	686	$4.00.10^{-6}$
762	0.964	28.15	679	$4.01.10^{-6}$
774	0.979	28.51	669	$4.02.10^{-6}$
782	0.990	28.75	663	$4.03.10^{-6}$
788	0.997	28.87	658	$4.03.10^{-6}$

Tabulka 5.4: Závislost r_{crit}, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu Pa-42 z tabulky 5.1.

v_{rot} [km/s]	Ω	r_{crit}/R_*	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.052	1556	$1.18.10^{-5}$
30	0.074	1.052	1550	$1.18.10^{-5}$
60	0.148	1.052	1534	$1.20.10^{-5}$
90	0.221	1.053	1505	$1.22.10^{-5}$
120	0.295	1.055	1465	$1.26.10^{-5}$
134	0.330	1.055	1441	$1.28.10^{-5}$
166	0.408	1.058	1377	$1.35.10^{-5}$
181	0.445	1.059	1341	$1.39.10^{-5}$
196	0.482	1.061	1301	$1.43.10^{-5}$
224	0.551	1.065	1214	$1.54.10^{-5}$
240	0.590	1.069	1156	$1.62.10^{-5}$
255	0.627	1.073	1095	$1.71.10^{-5}$
270	0.664	1.077	1028	$1.81.10^{-5}$
286	0.704	1.084	946	$1.95.10^{-5}$
307	0.755	1.097	816	$2.18.10^{-5}$
311	0.764	12.43	450	$2.22.10^{-5}$
316	0.777	12.43	444	$2.23.10^{-5}$
320	0.787	12.55	440	$2.23.10^{-5}$
325	0.800	12.67	436	$2.24.10^{-5}$
329	0.809	12.79	432	$2.24.10^{-5}$
334	0.822	12.79	427	$2.25.10^{-5}$
339	0.834	12.91	422	$2.25.10^{-5}$
343	0.844	13.03	418	$2.26.10^{-5}$
347	0.854	13.15	415	$2.26.10^{-5}$
353	0.868	13.27	409	$2.27.10^{-5}$
358	0.881	13.39	404	$2.28.10^{-5}$
362	0.891	13.51	401	$2.28.10^{-5}$
366	0.900	13.63	397	$2.28.10^{-5}$
371	0.913	13.75	393	$2.29.10^{-5}$
375	0.923	13.87	389	$2.30.10^{-5}$
379	0.932	13.99	385	$2.30.10^{-5}$
384	0.945	14.11	381	$2.31.10^{-5}$
388	0.955	14.23	377	$2.31.10^{-5}$
393	0.967	14.35	373	$2.32.10^{-5}$
398	0.979	14.47	369	$2.33.10^{-5}$
400	0.984	14.59	367	$2.33.10^{-5}$

Tabulka 5.5: Závislost $r_{\rm crit}$, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-40 z tabulky 5.1.

$v_{\rm rot}$ [km/s]	Ω	$r_{\rm crit}/R_*$	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.039	2508	$1.98.10^{-7}$
30	0.048	1.039	2504	$1.98.10^{-7}$
60	0.096	1.039	2493	$1.99.10^{-7}$
104	0.167	1.040	2464	$2.02.10^{-7}$
152	0.244	1.040	2412	$2.07.10^{-7}$
182	0.292	1.041	2370	$2.11.10^{-7}$
212	0.340	1.042	2319	$2.17.10^{-7}$
230	0.369	1.043	2284	$2.20.10^{-7}$
244	0.391	1.043	2255	$2.24.10^{-7}$
256	0.410	1.044	2228	$2.27.10^{-7}$
268	0.430	1.044	2199	$2.30.10^{-7}$
282	0.452	1.045	2164	$2.34.10^{-7}$
296	0.474	1.046	2126	$2.39.10^{-7}$
310	0.497	1.047	2086	$2.44.10^{-7}$
324	0.519	1.047	2043	$2.49.10^{-7}$
340	0.545	1.049	1990	$2.56.10^{-7}$
358	0.574	1.050	1926	$2.65.10^{-7}$
370	0.593	1.052	1881	$2.72.10^{-7}$
386	0.619	1.053	1816	$2.82.10^{-7}$
400	0.641	1.056	1755	$2.91.10^{-7}$
430	0.689	1.061	1610	$3.16.10^{-7}$
446	0.715	1.064	1521	$3.32.10^{-7}$
468	0.750	1.071	1382	$3.59.10^{-7}$
481	0.771	20.59	653	$3.77.10^{-7}$
488	0.782	20.71	645	$3.78.10^{-7}$
504	0.808	21.07	630	$3.79.10^{-7}$
516	0.827	21.31	619	$3.80.10^{-7}$
530	0.849	21.55	606	$3.82.10^{-7}$
538	0.862	21.79	599	$3.82.10^{-7}$
548	0.878	22.03	590	$3.84.10^{-7}$
558	0.894	22.27	581	$3.85.10^{-7}$
566	0.907	22.39	574	$3.85.10^{-7}$
576	0.923	22.63	566	$3.87.10^{-7}$
590	0.946	22.99	554	$3.88.10^{-7}$
600	0.962	23.35	546	$3.89.10^{-7}$
614	0.984	23.71	534	$3.91.10^{-7}$

Tabulka 5.6: Závislost $r_{\rm crit}$, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1.

$v_{\rm rot}$ [km/s]	Ω	$r_{\rm crit}/R_*$	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.037	2195	$1.77.10^{-6}$
46	0.067	1.037	2189	$1.78.10^{-6}$
90	0.132	1.038	2171	$1.80.10^{-6}$
134	0.196	1.038	2140	$1.83.10^{-6}$
182	0.266	1.039	2093	$1.89.10^{-6}$
226	0.330	1.040	2035	$1.97.10^{-6}$
242	0.354	1.040	2011	$2.00.10^{-6}$
260	0.380	1.041	1981	$2.04.10^{-6}$
276	0.403	1.041	1952	$2.09.10^{-6}$
292	0.427	1.041	1921	$2.13.10^{-6}$
308	0.450	1.042	1887	$2.18.10^{-6}$
326	0.476	1.043	1847	$2.24.10^{-6}$
338	0.494	1.044	1818	$2.29.10^{-6}$
356	0.520	1.044	1772	$2.37.10^{-6}$
378	0.552	1.046	1710	$2.48.10^{-6}$
396	0.579	1.047	1655	$2.58.10^{-6}$
410	0.599	1.049	1608	$2.67.10^{-6}$
420	0.614	1.049	1573	$2.73.10^{-6}$
430	0.628	1.050	1536	$2.81.10^{-6}$
455	0.665	1.053	1432	$3.02.10^{-6}$
486	0.709	25.27	653	$3.35.10^{-6}$
490	0.716	25.39	648	$3.36.10^{-6}$
510	0.745	25.87	630	$3.38.10^{-6}$
530	0.775	26.35	613	$3.40.10^{-6}$
554	0.810	26.95	593	$3.43.10^{-6}$
572	0.836	27.55	579	$3.45.10^{-6}$
580	0.848	27.79	572	$3.46.10^{-6}$
588	0.859	28.03	566	$3.47.10^{-6}$
596	0.871	28.27	559	$3.48.10^{-6}$
608	0.888	28.63	550	$3.49.10^{-6}$
622	0.909	29.11	539	$3.51.10^{-6}$
638	0.932	29.59	527	$3.53.10^{-6}$
648	0.947	29.95	519	$3.54.10^{-6}$
656	0.959	30.19	513	$3.55.10^{-6}$
661	0.966	30.43	510	$3.56.10^{-6}$
670	0.979	30.67	503	$3.57.10^{-6}$
675	0.986	30.91	500	$3.58.10^{-6}$

Tabulka 5.7: Závislost $r_{\rm crit}$, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-25 z tabulky 5.1.

$v_{\rm rot}$ [km/s]	Ω	$r_{\rm crit}/R_*$	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.035	1576	$1.88.10^{-9}$
52	0.084	1.035	1568	$1.89.10^{-9}$
98	0.158	1.035	1548	$1.94.10^{-9}$
146	0.235	1.036	1514	$2.02.10^{-9}$
176	0.283	1.037	1486	$2.09.10^{-9}$
204	0.328	1.038	1453	$2.17.10^{-9}$
220	0.354	1.038	1432	$2.22.10^{-9}$
240	0.386	1.039	1403	$2.30.10^{-9}$
262	0.422	1.040	1368	$2.40.10^{-9}$
286	0.460	1.041	1324	$2.53.10^{-9}$
306	0.492	1.042	1283	$2.66.10^{-9}$
324	0.521	1.043	1242	$2.80.10^{-9}$
346	0.557	1.045	1186	$2.99.10^{-9}$
362	0.582	1.046	1140	$3.16.10^{-9}$
382	0.615	1.049	1074	$3.40.10^{-9}$
400	0.643	21.55	521	$3.66.10^{-9}$
412	0.663	21.91	510	$3.67.10^{-9}$
424	0.682	22.15	501	$3.69.10^{-9}$
432	0.695	22.39	495	$3.70.10^{-9}$
440	0.708	22.63	489	$3.71.10^{-9}$
460	0.740	23.11	474	$3.74.10^{-9}$
476	0.766	23.59	462	$3.76.10^{-9}$
482	0.775	23.83	458	$3.77.10^{-9}$
488	0.785	24.07	453	$3.78.10^{-9}$
496	0.798	24.31	448	$3.79.10^{-9}$
512	0.824	24.79	436	$3.81.10^{-9}$
516	0.830	24.91	434	$3.82.10^{-9}$
522	0.840	25.15	430	$3.83.10^{-9}$
528	0.849	25.39	425	$3.84.10^{-9}$
542	0.872	25.87	416	$3.86.10^{-9}$
552	0.888	26.23	409	$3.88.10^{-9}$
562	0.904	26.59	403	$3.89.10^{-9}$
572	0.920	26.95	397	$3.91.10^{-9}$
578	0.930	27.19	393	$3.92.10^{-9}$
584	0.940	27.43	389	$3.93.10^{-9}$
590	0.949	27.67	385	$3.94.10^{-9}$
608	0.978	28.03	374	$3.97.10^{-9}$

Tabulka 5.8: Závislost r_{crit}, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-20 z tabulky 5.1.

v_{rot} [km/s]	Ω	r_{crit}/R_*	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$\mathrm{M}_\odot$/rok]
0	0.000	1.016	1903	$9.25.10^{-10}$
48	0.081	1.016	1895	$9.31.10^{-10}$
80	0.134	1.016	1880	$9.43.10^{-10}$
130	0.218	1.017	1844	$9.73.10^{-10}$
146	0.245	1.017	1828	$9.87.10^{-10}$
182	0.305	1.017	1785	$1.02.10^{-9}$
198	0.332	1.017	1763	$1.04.10^{-9}$
228	0.383	1.018	1715	$1.09.10^{-9}$
256	0.430	1.019	1663	$1.14.10^{-9}$
282	0.473	1.019	1607	$1.21.10^{-9}$
314	0.527	1.020	1528	$1.30.10^{-9}$
336	0.564	1.021	1466	$1.38.10^{-9}$
368	0.618	1.023	1362	$1.53.10^{-9}$
396	0.665	1.025	1255	$1.70.10^{-9}$
409	0.686	1.026	1199	$1.80.10^{-9}$
429	0.720	21.67	486	$1.98.10^{-9}$
450	0.755	22.15	469	$1.98.10^{-9}$
466	0.782	22.63	458	$1.98.10^{-9}$
476	0.799	22.87	450	$1.98.10^{-9}$
484	0.812	23.11	445	$1.98.10^{-9}$
492	0.826	23.35	439	$1.99.10^{-9}$
502	0.843	23.59	432	$1.99.10^{-9}$
510	0.856	23.83	426	$1.99.10^{-9}$
516	0.866	24.07	422	$1.99.10^{-9}$
524	0.879	24.31	417	$1.99.10^{-9}$
532	0.893	24.55	411	$1.99.10^{-9}$
540	0.906	24.79	406	$2.00.10^{-9}$
548	0.920	25.03	401	$2.00.10^{-9}$
554	0.930	25.27	397	$2.00.10^{-9}$
562	0.943	25.51	392	$2.00.10^{-9}$
568	0.953	25.75	388	$2.00.10^{-9}$
576	0.967	25.99	383	$2.00.10^{-9}$
582	0.977	26.23	379	$2.01.10^{-9}$
590	0.990	26.47	375	$2.01.10^{-9}$
592	0.994	26.59	373	$2.01.10^{-9}$

Tabulka 5.9: Závislost $r_{\rm crit}$, v_∞, a $\dot{M}$ na rotační rychlosti hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-17 z tabulky 5.1.

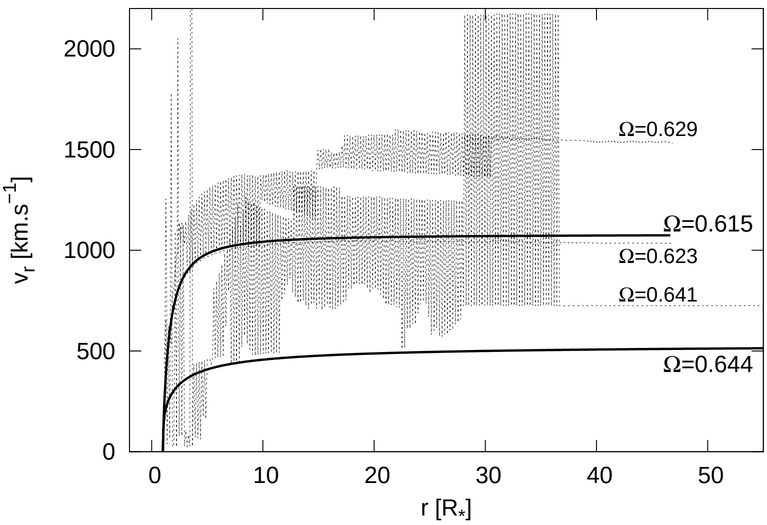
$v_{\rm rot}$ [km/s]	Ω	$r_{\rm crit}/R_*$	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]
0	0.000	1.092	688	$1.74.10^{-9}$
19	0.047	1.092	686	$1.75.10^{-9}$
46	0.114	1.093	680	$1.79.10^{-9}$
68	0.168	1.094	670	$1.84.10^{-9}$
87	0.215	1.095	659	$1.91.10^{-9}$
94	0.232	1.096	654	$1.94.10^{-9}$
104	0.257	1.097	646	$1.99.10^{-9}$
113	0.279	1.098	638	$2.04.10^{-9}$
120	0.296	1.099	631	$2.09.10^{-9}$
127	0.314	1.100	623	$2.13.10^{-9}$
134	0.331	1.101	615	$2.18.10^{-9}$
142	0.351	1.103	605	$2.25.10^{-9}$
159	0.393	1.106	580	$2.41.10^{-9}$
197	0.488	15.67	335	$2.94.10^{-9}$
206	0.509	15.91	327	$2.97.10^{-9}$
222	0.548	16.39	315	$3.04.10^{-9}$
229	0.566	16.63	310	$3.07.10^{-9}$
236	0.583	16.99	305	$3.10.10^{-9}$
244	0.603	17.23	300	$3.13.10^{-9}$
253	0.625	17.59	293	$3.17.10^{-9}$
259	0.640	17.83	289	$3.20.10^{-9}$
271	0.669	18.31	281	$3.25.10^{-9}$
278	0.687	18.67	277	$3.28.10^{-9}$
286	0.706	19.03	271	$3.32.10^{-9}$
291	0.719	19.15	268	$3.35.10^{-9}$
302	0.746	19.75	261	$3.41.10^{-9}$
313	0.773	20.23	254	$3.47.10^{-9}$
320	0.790	20.59	250	$3.50.10^{-9}$
330	0.815	21.07	244	$3.56.10^{-9}$
341	0.842	21.67	237	$3.63.10^{-9}$
350	0.864	22.15	232	$3.68.10^{-9}$
356	0.879	22.51	228	$3.72.10^{-9}$
365	0.901	22.99	223	$3.77.10^{-9}$
374	0.924	23.47	218	$3.83.10^{-9}$
382	0.943	23.95	214	$3.88.10^{-9}$

bodu získaná na základě splnění kritické podmínky (4.18). Čtvrtý sloupec obsahuje rychlost hvězdného větru ve velké vzdálenosti od hvězdy. Jedná se zpravidla o vzdálenost několika desítek poloměrů hvězdy, s dalším zvyšováním vzdálenosti se rychlost větru nijak výrazně nemění (viz § 5.1) a proto tuto rychlost můžeme považovat za konečnou rychlost hvězdného větru. Pátý sloupec tabulky obsahuje hodnotu rychlosti ztráty hmoty.

Pohledem na tabulky zjistíme, že malé hodnoty rotačních rychlostí, $\Omega < 0.2$, mají velmi malý vliv na globální charakteristiky větrů bez ohledu na model hvězdy; poloha kritického bodu, konečná rychlost hvězdného větru ani rychlost ztráty hmoty se nijak výrazně nemění v porovnání s případy nerotujících modelů hvězd. Zahrnutí rotace do pohybové rovnice vede ke změně velikosti efektivní gravitační síly, nicméně při rotační rychlosti $\Omega = 0.2$ se velikost efektivní gravitační síly na povrchu hvězdy zmenší o 4 % (5.4).

Vyšší rotační rychlost více ovlivňuje globální charakteristiky větrů v porovnání s pomalu rotujícími modely. Čím více se blíží hodnota rotační rychlosti hodnotě přechodové rotační rychlosti, tím více roste rychlost ztráty hmoty a klesá konečná rychlost větru. Konečná rychlost větru je výrazně menší, např. pro model hvězdy P-50 rotující rychlostí $\Omega \sim 0.76$ dosahuje konečná rychlost větru téměř poloviční hodnoty ve srovnání s nerotujícím modelem, u modelu M-20 pro rotační rychlost $\Omega \sim 0.67$ dosahuje konečná rychlost větru 2/3 hodnoty nerotujícího modelu. Velké rotační rychlosti ovlivňují také rychlost ztráty hmoty. Rychlost ztráty hmoty v oblasti rovníku se nijak výrazně nemění pro malé rotační rychlosti, nicméně pro $\Omega \rightarrow \Omega_{\mathrm{switch}}$ postupně přechází ve strmý růst (viz § 5.2), pro model hvězdy P-40 rotující rychlostí $\Omega \sim 0.75$ je rychlost ztráty hmoty 1.8krát vyšší než pro případ nerotujícího modelu. Naproti tomu poloha kritického bodu se nijak výrazně nemění a kritický bod se stále nachází v těsné blízkosti hvězdy (viz obr. 5.7). Rychlost ztráty hmoty je dána polohou kritického bodu. Protože požadujeme, aby rychlost větru hladce přecházela z nízkých rychlostí blízko povrchu hvězdy do vysokých rychlostí daleko od hvězdy, pak poloha kritického bodu a tím i rychlost ztráty hmoty je určena jednoznačně pro zadanou hustotu na spodním okraji (viz § 3.4). Rotace hvězdy polohu kritického bodu příliš neovlivňuje, jeho poloha je dána korekčním faktorem (2.43), nicméně rotace vede k vyšší rychlosti větru na povrchu hvězdy, což má za následek vyšší hodnotu rychlosti ztráty hmoty.

Jestliže hvězda rotuje rychlostí $\Omega > \Omega_{\mathrm{switch}}$, pak řešením hydrodynamických rovnic dostáváme pomalá řešení. Pro tyto rotační rychlosti se objevuje nová třída kritických bodů nacházejících se daleko od hvězdy, zatímco třída kritických bodů, která přísluší rychlým řešením (m-CAK kritické body) a tedy rotačním rychlostem $\Omega < \Omega_{\mathrm{switch}}$, zaniká. Např. pro model hvězdy P-30 rotující rychlostí $\Omega \sim 0.8$ ($> \Omega_{\mathrm{switch}}$) dostáváme polohu kritického bodu ve vzdálenosti $r_{\mathrm{crit}} \sim 27\,R_*$. V případě rychlých řešení se kritický bod nacházel blízko povrchu hvězdy, pro $\Omega \sim 0.63$ ($< \Omega_{\mathrm{switch}}$) $r_{\mathrm{crit}} \sim 1.05\,R_*$ (viz tab. 5.6). Poloha kritického bodu již není určována korekčním faktorem (2.43), který má vliv na dynamiku větru pouze v těsné

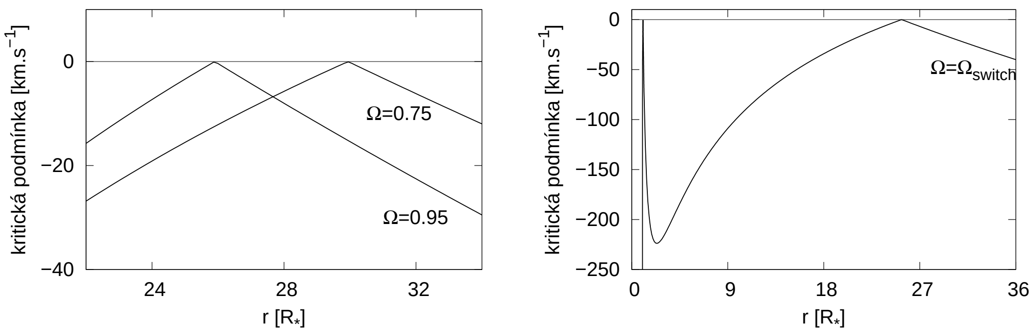


Obrázek 5.8: Rychlostní profily větru pro rotační rychlosti $\Omega \rightarrow \Omega_{\text{switch}}$. Poslední rychlé řešení a první pomalé řešení zakresleno plnou čarou, oscilující řešení tečkovaně. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-25 z tabulky 5.1. $\Omega_{\text{switch}} = 0.644$.

blízkosti hvězdy, jak tomu bylo v případě rychlých řešení. Pro rotační rychlosti $\Omega > \Omega_{\text{switch}}$ poloha kritického bodu výrazně závisí na rotační rychlosti hvězdy.

Mezi posledním rychlým řešením a prvním pomalým řešením uvedeným v tabulkách 5.2 až 5.9 se vyskytuje mezera. Řádek nad mezerou odpovídá poslednímu možnému rychlému řešení, řádek pod mezerou prvnímu pomalému řešení, které nastává pro $\Omega = \Omega_{\text{switch}}$. V tomto případě je kritická podmínka splněna současně ve dvou bodech: v m-CAK kritickém bodě i v novém kritickém bodě (viz obr. 5.9, vpravo). Pro každý model hvězdy tak daná mezera v tabulce reprezentuje interval rotačních rychlostí, pro který se při výpočtech modelů větrů objevují numerické potíže. Jestliže od posledního rychlého řešení zvyšujeme rotační rychlost, pak dostáváme řešení, která jsou nestabilní. Nestabilní řešení dostáváme také v případě, kdy pro $\Omega = \Omega_{\text{switch}}$ požadujeme, aby řešení procházelo m-CAK kritickým bodem. Zvyšování rotační rychlosti ($\Omega \rightarrow \Omega_{\text{switch}}$) navíc způsobuje skokové změny konečné rychlosti větru. Tato řešení ukazuje obrázek 5.8 pro model hvězdy M-25 (viz tab. 5.1). V obrázku je zakresleno pro srovnání poslední rychlé řešení ($\Omega \sim 0.615$) a první pomalé řešení ($\Omega \sim 0.644$). Míra nestability řešení je také ovlivněna hustotou zvolené sítě, na které hydrodynamické rovnice řešíme (řešení pro $\Omega \sim 0.641$). Pro různé modely hvězd je interval, ve kterém dostáváme nestabilní řešení větru, různě široký. Numerické problémy při výpočtech modelů větrů oznamovali např. PPK, nicméně tyto se týkali získání řešení pro vysoké rotační rychlosti, které se nám narozdíl od nich získat podařilo.

Pohledem na tabulky 5.2 až 5.9 zjistíme, že přechod mezi rychlým a pomalým řešením nastává pro různé hodnoty rotační rychlosti Ω_{switch} (více § 5.3.3).



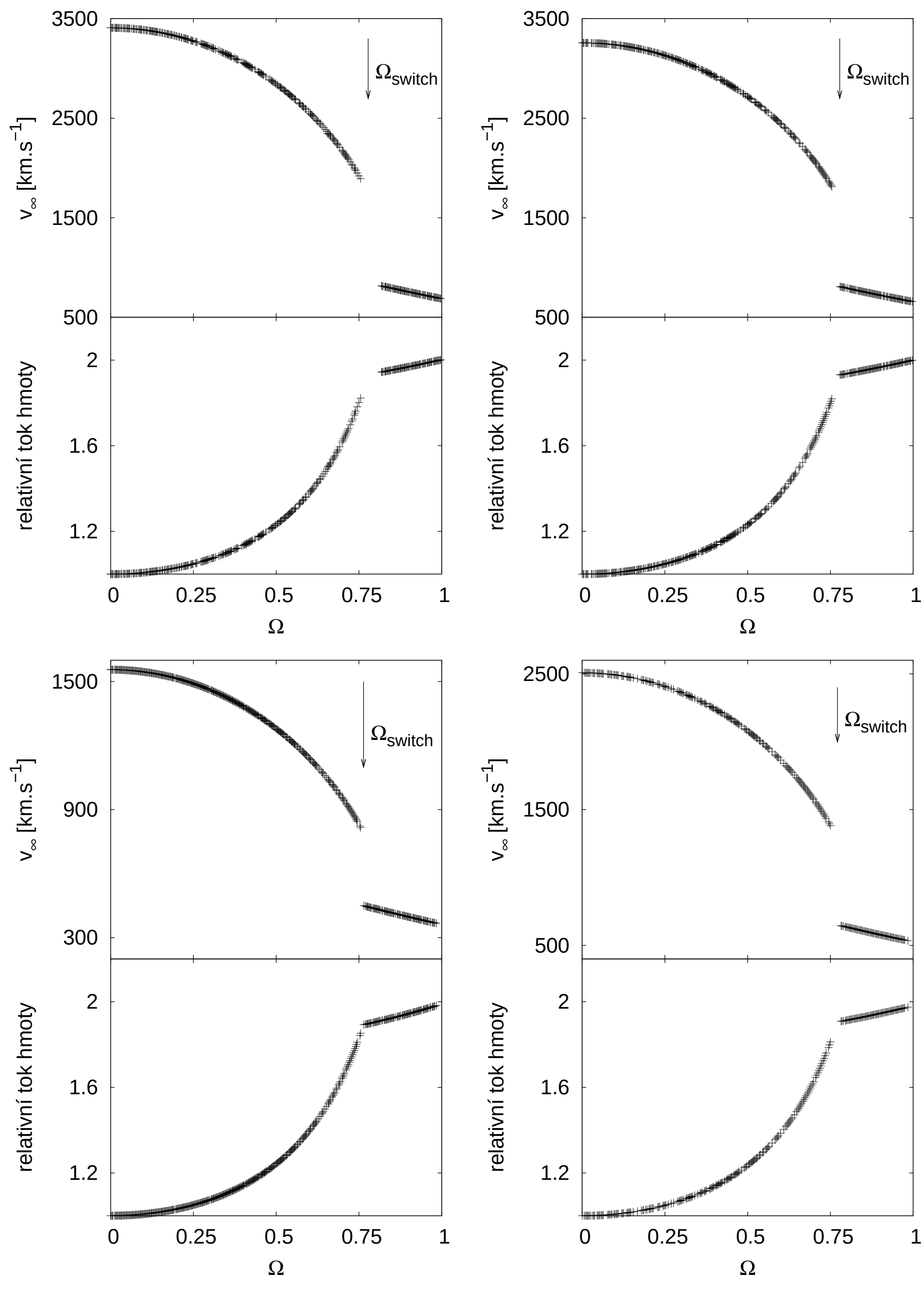
Obrázek 5.9: Průběh kritické podmínky (4.18). Kritický bod se nachází v místě, kde je splněna kritická podmínka. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1. *Vlevo*: Průběh kritické podmínky pro rotační rychlosti $\Omega = 0.75$ a 0.95. *Vpravo*: Průběh kritické podmínky pro rotační rychlost $\Omega = \Omega_{\rm switch}$.

Velmi vysoké rotační rychlosti způsobují prudký pokles konečné rychlosti větru v porovnání s nerotujícím modelem, např. pro model hvězdy M-20 dosahuje konečná rychlost větru jen 300 km/s při $\Omega \to 1$, což představuje pokles na 16 % hodnoty nerotujícího modelu. U všech modelů můžeme dále pozorovat, že zvýšení rotační rychlosti nad hodnotu $\Omega_{\rm switch}$ nepůsobí další výrazný pokles konečné rychlosti větru (viz obr. 5.10 a 5.11). Tok hmoty z hvězdy pro rotační rychlosti $\Omega > \Omega_{\rm switch}$ roste velmi zvolna, např. pro model hvězdy M-25 je relativní tok hmoty v rovníkové oblasti téměř dvojnásobný, pokud hodnota rotační rychlosti dosáhne hodnoty přechodové rotační rychlosti, pro $\Omega = 0.9$ dostáváme relativní tok hmoty mírně zvýšený, $\dot{M}(\Omega)/\dot{M}(\Omega = 0) = 2.07$ (viz tab. 5.7). Podobná situace nastává pro všechny modely (viz obr. 5.10 a 5.11).

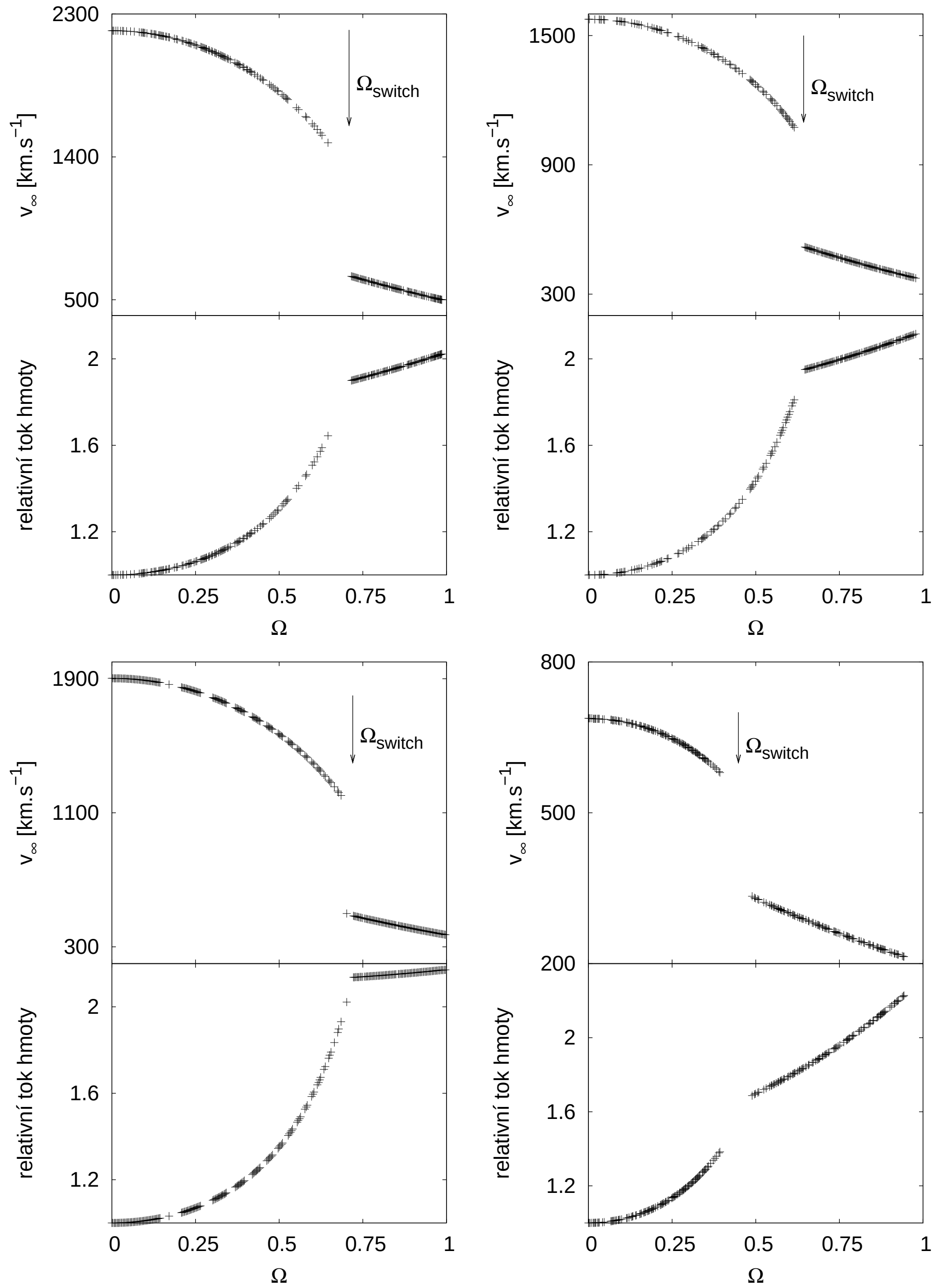
Výsledky našeho modelování můžeme porovnat s numerickými výpočty, které provedl Curé (2004). Zvolíme stejné parametry modelu hvězdy i modelu zářivé síly: M-25, $k = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.07$. Porovnání výpočtů pro nerotující vítr a pro vítr rotující rychlostí $\Omega = 0.8$ ukazuje tabulka 5.10. Přestože nacházíme relativně dobrou shodu v případě rychle rotujícího větru, pro $\Omega = 0$ dostáváme výsledky, které se odlišují mnohem více. Odlišnost výsledků může být způsobena jak v rozdílném přístupu metody řešení, tak také různým nastavením parametrů větru. V našem modelu větru zadáváme spodní okrajovou podmínku pevnou volbou hustoty na spodním okraji (viz § 4.4). Naproti tomu Curé užívá další velmi rozšířený způsob zadání hustoty fotosféry a to pomocí vzorce:

$$\int_{R_*}^{\infty} \sigma_{\rm e}\rho(r){\rm d}r = \frac{2}{3}. \tag{5.8}$$

Nicméně i tato podmínka vede k nastavení hustoty na spodním okraji, tedy hustoty fotosféry. Každé hodnotě optické tloušťky fotosféry odpovídá vždy jedna hodnota hustoty fotosféry a naopak (Araújo, 1995). Oba přístupy jsou ekvivalentní, odlišnost ve výpočtech nezpůsobují. Dalším prvkem, který může ovlivnit



Obrázek 5.10: Konečná rychlost hvězdného větru a relativní tok hmoty v závislosti na rotační rychlosti hvězdy. Relativní tok hmoty je vyjádřen jako poměr $\dot{M}(\Omega)/\dot{M}(\Omega = 0)$. V grafech šipkou vyznačena přechodová rotační rychlost. *Vlevo nahoře*: P-50. *Vpravo nahoře*: M-45. *Vlevo dole*: Pa-42. *Vpravo dole*: P-40.



Obrázek 5.11: Konečná rychlost hvězdného větru a relativní tok hmoty v závislosti na rotační rychlosti hvězdy. Relativní tok hmoty je vyjádřen jako poměr $\dot{M}(\Omega)/\dot{M}(\Omega = 0)$. V grafech šipkou vyznačena přechodová rotační rychlost. *Vlevo nahoře*: P-30. *Vpravo nahoře*: M-25. *Vlevo dole*: M-20. *Vpravo dole*: M-17.

Tabulka 5.10: Porovnání výpočtů modelů hvězdného větru s výpočty provedenými Curé (2004) pro rotační rychlosti $\Omega = 0$ a 0.8. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-25 z tabulky 5.1, parametry zářivé síly: $k = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.07$.

Ω	r_{crit}/R_*	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$\mathrm{M}_\odot$/rok]	
0	1.035	1576	$1.88.10^{-9}$	
	1.014	2025	$3.18.10^{-9}$	Curé (2004)
0.8	24.31	447	$3.79.10^{-9}$	
	23.63	443	$6.85.10^{-9}$	Curé (2004)

Tabulka 5.11: Rychlost ztráty hmoty v závislosti na spodní okrajové hustotě a chemickém složení. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-25 z tabulky 5.1.

		$\dot{M}[10^{-9}\,\mathrm{M}_\odot/\mathrm{rok}]$	
Ω	$\rho_0[\mathrm{g/cm}^3]$	jen H	$N(\mathrm{He})/N(\mathrm{H}) = 0.1$
0.0	1.10^{-10}	2.484	1.891
	1.10^{-11}	2.466	1.877
	2.10^{-12}	2.452	1.867
0.5	1.10^{-10}	3.577	2.718
	1.10^{-11}	3.549	2.697
	2.10^{-12}	3.528	2.681

výsledný model, je chemické složení větru. Chemické složení větru vstupuje do našeho modelu přes elektronovou opacitu (2.6). Pro čistě vodíkový vítr dostáváme $\sigma_\mathrm{e} \sim 0.4\ \mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^2$ (2.6). V našem případě volíme hmotnostní zastoupení vodíku ve větru $X = 0.716$, což odpovídá poměru počtu atomů helia vzhledem k počtu atomů vodíku $\sim 1/10$. Pro tuto hodnotu dostáváme pro elektronovou opacitu $\sigma_\mathrm{e} \sim 0.34\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{cm}^2$. Curé tuto hodnotu neudává.

Vliv nastavení spodní okrajové hustoty a chemického složení větru na model větru shrnuje tabulka 5.11. Pro tři různé hodnoty spodní okrajové hustoty a dvě různé volby chemického složení větru zachycuje změnu rychlosti ztráty hmoty pro rotační rychlosti $\Omega = 0$ a 0.5. Různá volba spodní okrajové hustoty má pouze nepatrný vliv na rychlost ztráty hmoty, přičemž tento vliv rotace větru nijak neovlivňuje. Naproti tomu rychlost ztráty hmoty je zančně ovlivňována chemickým složením větru. Elektronová opacita ve výrazu pro zářivou sílu vystupuje jako konstanta úměrnosti, $g^{\mathrm{L}}_{\mathrm{rad}} \sim \sigma_\mathrm{e}^{(1-\alpha)}$, pro čistě vodíkový vítr je zářivá síla větší o $\sim 10\,\%$ v celém větru, což vede k nárůstu $\dot{M}$ o $30\,\%$.

5.3.2 Disk okolo rychle rotujících horkých hvězd

Doposud jsme se zabývali vlivem odstředivé síly na charakteristiky hvězdného větru v rámci jednorozměrného modelu. Tyto výsledky můžeme také snadno aplikovat ve dvourozměrném modelu. Za předpokladu sféricko-symetrického tvaru hvězdy platí pro rotační rychlost na povrchu hvězdy:

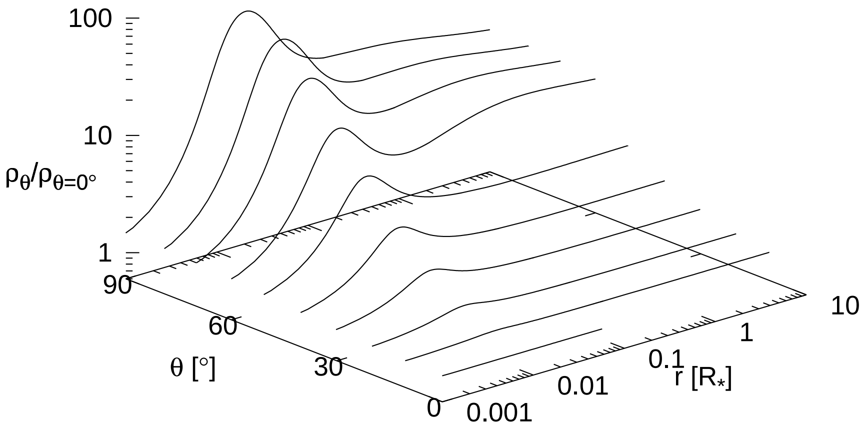
$$v_{\mathrm{rot}}(\theta) = v_{\mathrm{rot}}(\theta = 90^\circ)\sin\theta, \tag{5.9}$$

kde úhel θ je úhel mezi pólem a rovníkem hvězdy (viz obr. 3.1) a $v_{\mathrm{rot}}(\theta = 90^\circ)$ je rotační rychlost na rovníku. Pro úhel $\theta = 0^\circ$, který odpovídá pólu hvězdy, dostáváme $v_{\mathrm{rot}} = 0\,\mathrm{km/s}$, tzn. model větru pro nerotující hvězdu odpovídá hvězdnému větru, který uniká z pólů hvězdy (označujeme jako polární vítr). Rotační rychlost na rovníku v_{rot} dostáváme pro úhel $\theta = 90^\circ$ a tak platí, že model větru pro rotační rychlost v_{rot} odpovídá modelu větru, který uniká z rovníku hvězdy, jejíž rotační rychlost na rovníku dosahuje hodnoty v_{rot} (označujeme jako rovníkový vítr). Dvourozměrný model větru dostáváme potom tak, že každému úhlu θ přiřadíme model větru spočtený pro rotační rychlost podle vztahu 5.9.

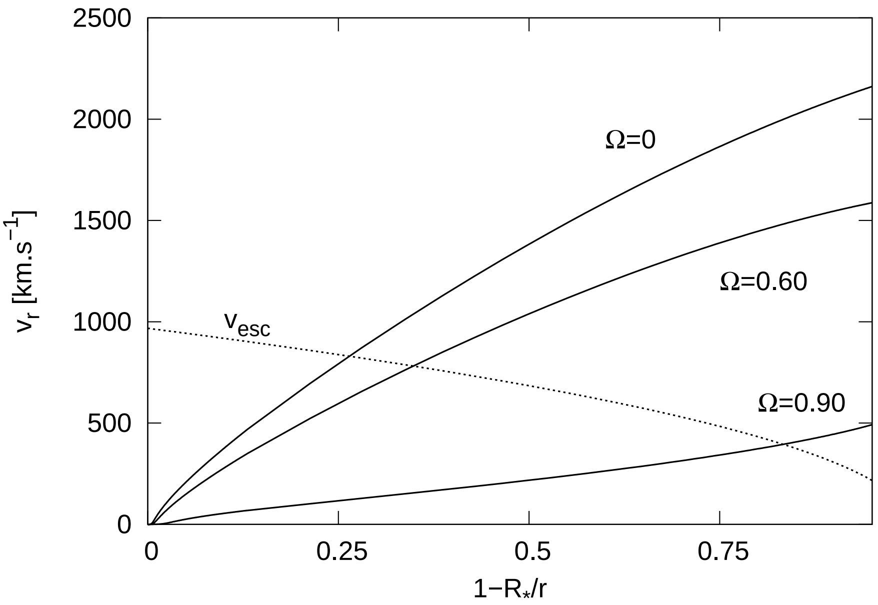
Výsledný dvourozměrný model větru pro model hvězdy P-20 (viz tab. 5.1) ukazuje obrázek 5.12, přičemž každá křivka představuje podíl mezi hustotním profilem větru pro daný úhel θ a hustotním profilem pro $\theta = 0^\circ$. Každá křivka tak udává, kolikrát je hustota větru pro daný úhel θ větší v porovnání s hustotou polárního větru. Dvourozměrný model větru byl vytvořen následujícím způsobem. Rotační rychlost hvězdy na rovníku byla zvolena $v_{\mathrm{rot}} = 328\,\mathrm{km/s}$ ($\Omega = 0.9$). Hustotní profily pro rotační rychlosti hvězdy menší než je hodnota na rovníku odpovídají hustotním profilům pro úhly θ podle vztahu 5.9. Jednotlivé křivky v grafu jsou vypočtené pro rotační rychlosti $v_{\mathrm{rot}} = 0\,\mathrm{km/s}$, $60\,\mathrm{km/s}$, $112\,\mathrm{km/s}$, $165\,\mathrm{km/s}$, $212\,\mathrm{km/s}$, $254\,\mathrm{km/s}$, $284\,\mathrm{km/s}$, $308\,\mathrm{km/s}$, $322\,\mathrm{km/s}$ a $328\,\mathrm{km/s}$, které odpovídají modelům pro tyto úhly: $\theta = 0^\circ$, 11°, 20°, 30°, 40°, 51°, 60°, 70°, 79° a 90°.

Z obrázku je patrné, že maximálního hustotního poměru dosahuje hvězdný vítr pro oblast rovníku. Zde se nejvíce projevuje působení odstředivé síly a proto se v dalším zaměříme právě na rovníkovou oblast.

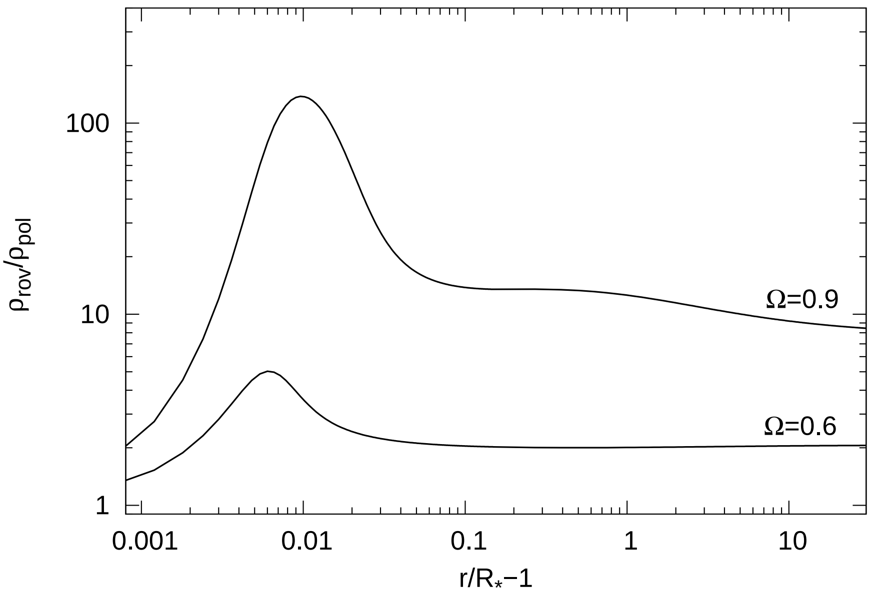
Na obrázku 5.13 je znázorněno porovnání rychlostních profilů větru pro rotační rychlosti $\Omega = 0.9$ náležející k pomalým řešením, $\Omega = 0.6$, které patří do skupiny rychlých řešení (viz tab. 5.6), a nerotující vítr. Zároveň je zde zakreslen průběh únikové rychlosti z hvězdy. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1. Mezi pomalým a rychlým řešením jsou nápadné dvě odlišnosti. Konečná rychlost hvězdného větru je výrazně menší v porovnání s rychlým řešením, $1600\,\mathrm{km/s} \rightarrow 550\,\mathrm{km/s}$. Ve vzdálenosti $\sim 1.5\,R_*$ dosahuje pomalé řešení rychlosti $\sim 150\,\mathrm{km/s}$, zatímco rychlé řešení ($\Omega = 0.6$) dosahuje rychlosti $\sim 800\,\mathrm{km/s}$. Nárůst rychlosti větru blízko hvězdy je v případě pomalého řešení mnohem pozvolnější, rychlost hvězdného větru dosahuje $90\,\%$ konečné rychlosti větru ve vzdálenosti $\sim 19\,R_*$, v případě rychlého řešení již ve vzdálenosti $\sim 5\,R_*$. Částice větru přesto unikají z gravitačního pole hvězdy, jak naznačuje průběh únikové rychlosti.



Obrázek 5.12: Porovnání poměru hustot větru $\rho(\theta)/\rho(\theta = 0°)$ v závislosti na úhlu θ. Rovníková rotační rychlost $\Omega = 0.9$. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-20 z tabulky 5.1.



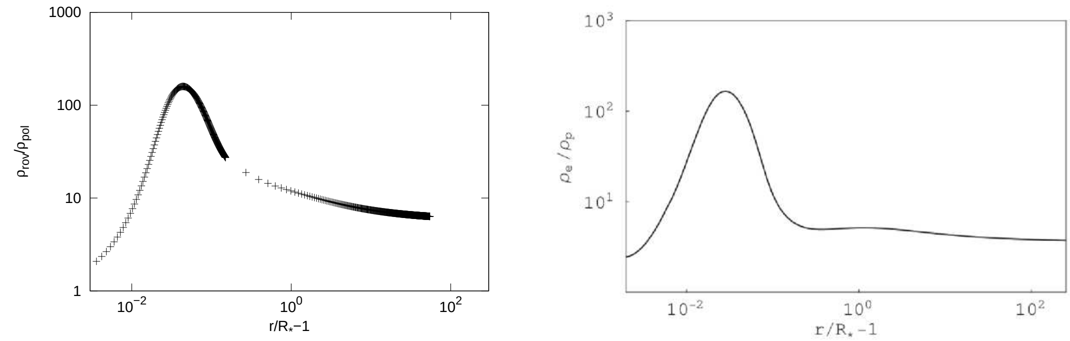
Obrázek 5.13: Porovnání rychlostního profilu modelu větru pro rotační rychlosti $\Omega = 0.6$ a 0.9. Pro srovnání zakreslen model nerotujícího větru a průběh únikové rychlosti částic (přerušovaná čára) v závislosti na poloze ve větru. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1.



Obrázek 5.14: Porovnání poměru hustot mezi rovníkovým a polárním větrem pro rotační rychlosti $\Omega = 0.6$ a 0.9. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1.

Vliv rotace hvězdy na hustotu větru ukazuje obrázek 5.14. Na tomto obrázku jsou znázorněny poměry hustot mezi rovníkovým a polárním větrem pro rotační rychlosti $\Omega = 0.6$ a $\Omega = 0.9$. Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z předchozího příkladu. Poměr hustot v těsné blízkosti hvězdy dosahuje svého maxima, dále od hvězdy je přibližně konstantní. Nárůst poměru hustot v těsné blízkosti hvězdy je způsoben mírnějším poklesem hustoty rotujícího větru ve srovnání s nerotujícím větrem (viz obr. 5.5). V této oblasti je vítr urychlován převážně zářivou silou kontinua a gradientem tlaku plynu, jehož působení v případě rotující hvězdy zasahuje do větší vzdálenosti (viz obr. 5.4). Poměr hustot pro $\Omega = 0.6$ dosahuje v těsné blízkosti hvězdy $\rho_{\text{rov}}/\rho_{\text{pol}} \sim 5$, dále od hvězdy je hustota větru asi 2krát větší v porovnání s polárním větrem. V případě velmi rychle rotujícího větru, $\Omega = 0.9$, jsou poměry hustot výraznější. Hustota větru je do velkých vzdáleností 10krát větší v porovnání s polárním větrem a v těsné blízkosti hvězdy dosahuje poměr hustot $\rho_{\text{rov}}/\rho_{\text{pol}} \sim 10^2$. V těsné blízkosti hvězdy tak vzniká hustý disk, který dosahuje do vzdálenosti $1.2\,R_*$, přičemž dále od hvězdy se šíří relativně pomalý a hustý vítr.

Obrázek 5.15 ukazuje porovnání výsledku našeho modelu (vlevo) s modelem započítavajícím rotační zploštění hvězdy a zářivou sílu vypočítanou s ohledem na rozdílné teploty rovníkových a polárních oblastí (vpravo; Venero a kol., 2008). Autoři uvádí vznik hustého disku do vzdálenosti $r < 2\,R_*$. Pro účely srovnání používáme stejný model: model hvězdy Mv-25 (viz tab. 5.1), $\Omega = 0.9$. Výsledkem



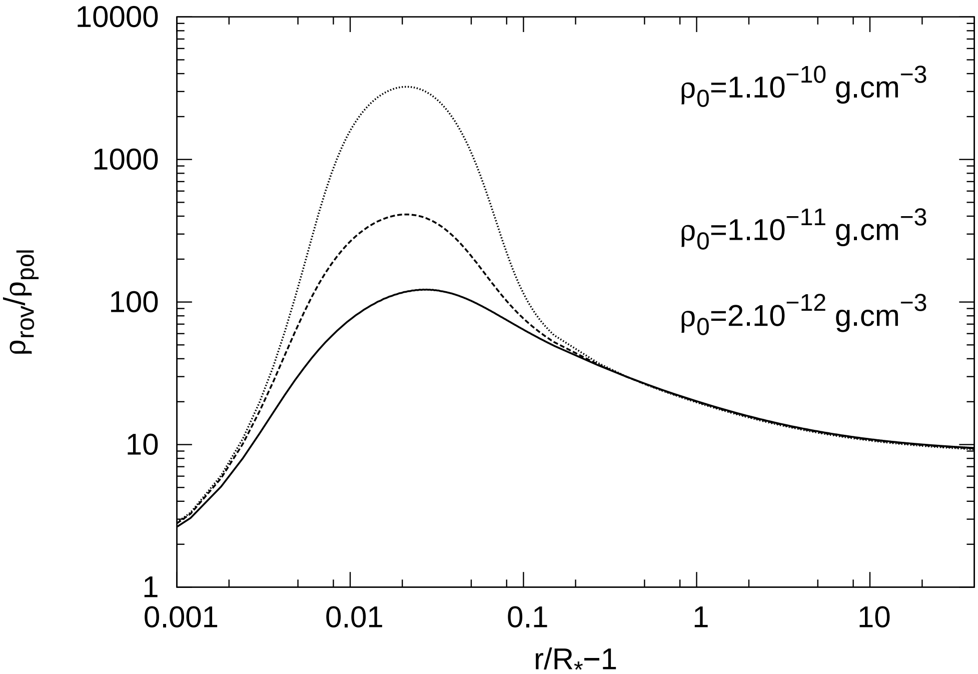
Obrázek 5.15: Poměr hustot mezi rovníkovým a polárním větrem. Parametry hvězdy odpovídají modelu Mv-25 z tabulky 5.1. $\Omega = 0.9$. *Vlevo*: Výsledek našeho modelování. *Vpravo*: Venero a kol. (2008).

našeho modelování vzniká v těsné blízkosti hvězdy hustý disk s velmi podobným hustotním poměrem mezi rovníkovým a polárním větrem jako získali Venero a kol. (2008). Musíme ale poznamenat, že autory uvedená hodnota pro rozsah disku je značně nadsazená. Disk se vytváří do vzdálenosti asi $1.2\,R_*$, ve vzdálenosti $r = 1.5\,R_*$ dosahuje poměr hustot asi 15.

Obrázek 5.16 ukazuje, jakým způsobem ovlivňuje hustota větru na spodním okraji celkové rozložení hustoty ve větru. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-25 z tabulky 5.1, kritická rotační rychlost hvězdy $v_{\mathrm{crit}} = 622\,\mathrm{km/s}$. Čím vyšší je hustota větru na spodním okraji, tím větší je hustota disku v těsné blízkosti hvězdy. Pro $\Omega = 0.98$ a $\rho_0 = 10^{-9}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ je poměr hustot velmi vysoký, $\rho_{\mathrm{rov}}/\rho_{\mathrm{pol}} \sim 10^3 - 10^4$. Velmi hustý disk se nachází v těsné blízkosti hvězdy ($r < 2\,R_*$). Volba spodní okrajové hustoty na hustotu větru dále od hvězdy nemá téměř žádný vliv a je pro všechny hustoty na spodním okraji téměř stejná, $\rho_{\mathrm{rov}}/\rho_{\mathrm{pol}} \sim 10^1$.

5.3.3 Přechodová rotační rychlost

V předchozích částech jsme ukázali, že v těsné blízkosti rychle rotujících hvězd se vytváří velmi hustý disk. Disk okolo hvězdy vzniká právě tehdy, pokud rotační rychlost hvězdy dosáhne přechodové rotační rychlosti nebo hodnoty vyšší. Z tabulek 5.2-5.9 je patrné, že pomalé řešení nastává pro různé hodnoty rotační rychlosti hvězd. Hodnoty přechodové rotační rychlosti pro jednotlivé modely hvězd shrnuje tabulka 5.12. Pro model hvězdy M-25 dosahuje přechodová rotační rychlost $\Omega_{\mathrm{switch}} = 0.643$, u modelu M-17 hodnoty ještě menší, $\Omega_{\mathrm{switch}} = 0.488$. Takto nízké hodnoty rotačních rychlostí, pro které nastává pomalé řešení, získali Curé a kol. (2011) pro jasné veleobry spektrální třídy A. Autoři udávají vznik disku pro $\Omega < 0.4$, nicméně řešení byla získána pro relativně vysoké hodnoty parametru δ, který byl volen libovolně. Jak ukážeme níže, vhodné nastavení hodnoty parame-



Obrázek 5.16: Porovnání poměru hustot mezi rovníkovým a polárním větrem pro spodní okrajové hustoty $\rho_0 = 2.10^{-12}\,\mathrm{g\ cm}^{-3}$, $1.10^{-11}\,\mathrm{g\ cm}^{-3}$ a $1.10^{-10}\,\mathrm{g\ cm}^{-3}$. Modely větru počítány pro rotační rychlost $\Omega = 0.98$. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-25 z tabulky 5.1.

Tabulka 5.12: Vypočítaná hodnota $v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$ (resp. Ω_{switch}) pro daný spektrální typ hvězdy.

Model	Sp. typ	T_{eff} [K]	$v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$ [km/s]	Ω_{switch}
M-17	B4III	17 200	197.4	0.488
M-20	B	20 000	429.2	0.720
M-23	B2V	23 000	394.5	0.670
M-25	B1V	25 000	399.9	0.643
P-30	O9.5I	30 000	485.5	0.709
P-40	O6.5V	40 000	480.8	0.771
Pa-42	O4f	42 000	310.6	0.764
M-45	O5V	45 000	614.7	0.778
P-50	O4(f)V	50 000	643.2	0.778

Tabulka 5.13: Vliv změny T_{eff} na hodnotu $v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$ (resp. Ω_{switch}). Parametry hvězdy odpovídají modelu P-30 z tabulky 5.1.

T_{eff} [K]	k	α	δ	v_{crit} [km/s]	$v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$ [km/s]	Ω_{switch}
30000	0.170	0.590	0.090	684	485.5	0.709
25000	0.170	0.590	0.090	721	512.8	0.711
25000	0.300	0.500	0.070	721	464.0	0.643

tru δ dokáže snížit rotační rychlost hvězdy, pro kterou vzniká hustý rovníkový disk. Hodnota přechodové rotační rychlosti tak může záviset buď na parametrech samotné hvězdy nebo na parametrech hvězdného větru. Závislost $v_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{switch}}$ (resp. Ω_{switch}) na teplotě větru ukazuje tabulka 5.13. Pokud se mění pouze teplota větru (parametry zářivé síly zůstávají stejné), pak Ω_{switch} se téměř nemění. Stejné chování vykazuje změna poloměru hvězdy nebo její hmotnosti. Odlišná situace nastává, pokud se se změnou teploty mění i multiplikativní konstanty zářivé síly. V takovém případě se přechodová rotační rychlost mění výrazněji. Efektivní teplota hvězdy určuje, které absorpční čáry se nejvíce podílejí na urychlování hvězdného větru (viz obr. 2.1). Protože je těchto čar velmi mnoho, zavedli CAK aproximativní přístup, kdy pro danou teplotu hvězdy určili trojici parametrů k, α, δ, které popisují soubor čar přispívajících významně k urychlování větru (viz § 2.3.2). Vzhledem k tomu, že multiplikativní konstanty zářivé síly byly

Tabulka 5.14: Vliv změny multiplikativních konstant zářivé síly k, α, δ na $v_{\rm rot}^{\rm switch}$, $\Omega_{\rm switch}$ a další charakteristiky větru. Parametry hvězdy odpovídají modelu M-45 z tabulky 5.1.

k	α	δ	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$/rok]	$r_{\rm crit}$ [R_*]	$v_{\rm rot}^{\rm switch}$ [km/s]	$\Omega_{\rm switch}$
0.062	0.640	0.070	811	$1.15.10^{-6}$	25.03	613.3	0.776
0.124	0.640	0.070	810	$3.89.10^{-6}$	25.03	614.7	0.778
0.248	0.640	0.070	809	$1.31.10^{-5}$	25.03	616.1	0.780
0.124	0.540	0.070	705	$1.10.10^{-6}$	21.55	537.2	0.680
0.124	0.640	0.070	810	$3.89.10^{-6}$	25.03	614.7	0.778
0.124	0.740	0.070	949	$1.00.10^{-5}$	29.35	690.2	0.873
0.124	0.640	0.035	807	$3.47.10^{-6}$	23.95	639.0	0.809
0.124	0.640	0.070	810	$3.89.10^{-6}$	25.03	614.7	0.778
0.124	0.640	0.105	815	$4.43.10^{-6}$	26.11	588.5	0.745

vypočítány aproximativním způsobem, nic nebrání tomu, abychom se podívali, jakým způsobem se mění výstupní parametry modelu větru se změnou jednotlivých parametrů zářivé síly.

Tabulka 5.14 ukazuje vliv změny parametrů k, α, δ na hodnotu přechodové rotační rychlosti a další charakteristiky větru. V dané trojici řádků oddělených mezerou se mění vždy pouze jeden prarametr zářivé síly, přičemž ostatní parametry jsou převzaty z PPK (viz také tab. 4.1). Z tabulky je patrné, že změna parametru k má velmi nepatrný vliv na změnu přechodové rotační rychlosti, nicméně významně ovlivňuje hodnotu rychlosti ztráty hmoty. Přechodová rotační rychlost velmi silně závisí na pramateru α, méně výrazně závisí na parametru δ. Přechodová rotační rychlost dosahuje nižších hodnot v případě menších hodnot parametru α, tedy pokud pro danou teplotu zvýhodňujeme opticky tenké čáry. S klesající hodnotou parametru α klesá rychlost ztráty hmoty i konečná rychlost větru. Pokud se má zachovat tok z hvězdy, je potřeba zvýšit hodnotu parametru k; parametr δ má na rychlost ztráty hmoty malý vliv.

5.3.4 Jev bistability

Jev bistability, v odborné literatuře označovaný jako *bi-stability effect*, je jev, kdy se u dané hvězdy mohou vyskytovat dva druhy větru, přičemž přechod od jednoho druhu větru ke druhému je způsoben malou změnou parametrů hvězdy, např. efektivní teploty. Tento jev poprvé objevili Pauldrach & Puls (1990), kteří u hvězdy P Cygni zjistili, že vítr může být rychlý a řídký nebo pomalý a hustý a to v závislosti na opacitě větru pro vlnovou délku čáry Lα. Pro hodnoty optické hloubky menší než jedna je vítr pomalý zatímco pro hodnoty větší než jedna je vítr rychlý. Změna optické hloubky způsobuje skokovou změnu základních parametrů větru, která se v literatuře označuje jako tzv. *bi-stability jump*.

Při určité hodnotě střední hustoty větru při povrchu hvězdy (nebo také efektivní teploty hvězdy nebo elektronové teploty větru) se vítr stává opticky tlustým pro záření vodíkového nebo heliového kontinua. To má za následek výraznou změnu v ionizační struktuře větru. Protože je nyní záření Lymanova kontinua blokováno vysokou opacitou vodíku, nedochází k fotoionizaci těžších prvků, jejichž fotoionizační hrana leží za Lymanovou hranou. Těžší prvky proto přecházejí do nižších ionizačních stavů. Ve srovnání s čarami odpovídajícími vyšším ionizačním stavům jsou tyto čáry méně opticky tlusté (menší hodnota parametru α), nicméně je jich mnohem více (větší hodnota parametru k). To vede k nárůstu zářivé síly, poklesu konečné rychlosti větru a nárůstu rychlosti ztráty hmoty a tím i toku hmoty z hvězdy. Následkem toho roste hustota větru (3.13), což dále podporuje rekombinační procesy ve větru. Výsledkem tohoto procesu je ustavení nové zářivé rovnováhy ve větru.

Jev bistability byl zaznamenán také u jasných veleobrů v okolí teploty $T_{\mathrm{eff}} = 21\,000\,\mathrm{K}$ (Lamers a kol., 1995), která odpovídá přibližně spektrálnímu typu B1. Pro teploty $T_{\mathrm{eff}} > 21\,000\,\mathrm{K}$ vítr urychlují absorpce záření ionty ve vyšších ionizačních stavech, jejichž čáry jsou většinou opticky tlusté, zatímco pro $T_{\mathrm{eff}} < 21\,000\,\mathrm{K}$ je vítr urychlován absorpcemi záření čarami iontů nižších ionizačních stavů, kterým odpovídá mnohem více čar, jež jsou opticky tenké.

Ke změně základních parametrů hvězdy při jejím povrchu může dojít např. vlivem rotace hvězdy. Rotace hvězdy má za následek různé hodnoty efektivního gravitačního zrychlení na povrchu hvězdy a tak pro určitý úhel mezi pólem a rovníkem hvězdy, který budeme značit θ_{b}, může dojít k takové změně optické hloubky větru, že pro úhly $\theta > \theta_{\mathrm{b}}$ vane z hvězdy pomalý a hustý vítr, zatímco pro $\theta < \theta_{\mathrm{b}}$ se jedná o rychlý a řídký vítr. Tento jev poprvé studovali Lamers & Pauldrach (1991), příslušný model větru bývá v literatuře označován jako tzv. *rotation induced bi-stability model*. Velmi rychle rotující hvězdy nezachovávají sféricky symetrický tvar, ale dochází k jeho výrazné deformaci: polární poloměr rotující hvězdy je kratší, rovníkový delší (3.15). V důsledku toho je v oblasti pólů vyšší povrchové gravitační zrychlení i teplota, v rovníkové oblasti nižší povrchové gravitační zrychlení a teplota (3.14). Od pólů k rovníku klesá povrchové gravitační zrychlení, tím roste tok hmoty z hvězdy a klesá konečná rychlost větru. Pro určitou hodnotu $\log g$, které odpovídá úhel θ_{b}, je tok hmoty tak velký a rychlost větru tak malá, že prudce vzroste optická hloubka větru v Lymanově kontinuu. Ionty přispívající k urychlování větru přejdou do nižších ionizačních stavů. Hlavní příspěvek k zářivé síle se tak přesunuje z čar vyšších ionizačních stavů iontů v Lymanově kontinuu na čáry v Balmerově kontinuu odpovídající nižším ionizačním stavům. To vede k dalšímu nárůstu toku hmoty z hvězdy a poklesu rychlosti větru, což má za následek další zvyšování optické hloubky větru pro záření Lymanova kontinua. Lamers & Pauldrach (1991) určili závislost $\tau_{\rm L}$ na toku hmoty z hvězdy F_m a konečné rychlosti větru v_∞ pro hvězdy s teplotou $T_{\rm eff} \sim 20\,000\,{\rm K}$:

$$\tau_{\rm L}(\theta) \sim F_m^2 v_\infty^{-2} R_*^{-3} f(T_{\rm L}) \sim (1 - \Omega^2 \cos\theta)^{-6.5}, \tag{5.10}$$

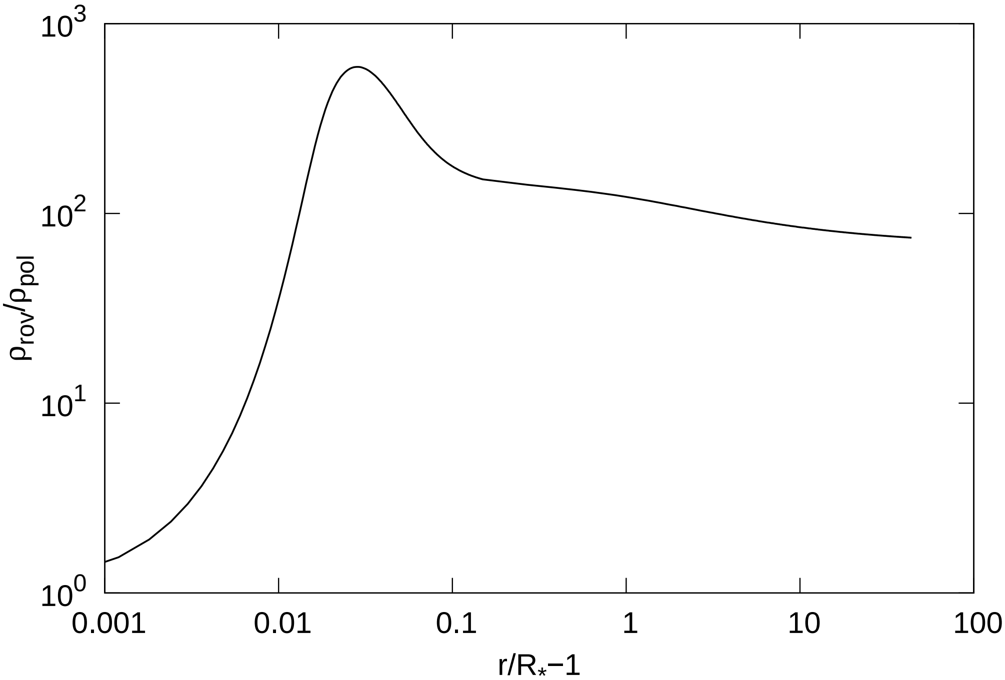
kde funkce $f(T_{\rm L})$ vyjadřuje závislost $\tau_{\rm L}$ na jasové teplotě hvězdy v Lymanově kontinuu. Optická hloubka větru velmi silně závisí na rychlosti rotace a na úhlu θ; pokud hvězda rotuje rychlostí $\Omega = 0.75$, pak $\tau_{\rm L}$ ve srovnání s hodnotou na pólu vzroste 39krát pro $\theta = 50°$ a 216krát pro $\theta = 90°$. Protože $\rho \sim F_m \sim \dot{M}$ a zároveň $\rho \sim 1/v_r$ (viz rov. 3.13), vzroste výrazně i hustota větru a pro úhly $\theta > \theta_{\rm b}$ tak vzniká velmi hustý disk okolo hvězdy. Úhel $\theta_{\rm b}$ určíme ze vztahu 5.10. Např. pro model hvězdy Mp-20 (viz tab. 5.1) dostáváme $\tau_{\rm L} = 0.049$. Disk se tvoří pro hodnoty $\tau_{\rm L} \sim 3$, což při rotační rychlosti $\Omega = 0.7$ nastává pro úhel $\theta_{\rm b} = 75°$ (Lamers & Pauldrach, 1991).

Rozhodujícím faktorem pro nastavení větrů rozdílných vlastností rotující hvězdy je opacita větru, která musí v oblasti pólů nabývat hodnoty menší než jedna a v oblasti rovníku hodnoty větší. Výše uvedený model větru je možný pouze u některých spektrálních typů hvězd. Hvězdy, jejíchž efektivní teplota $T_{\rm eff} > 30\,000\,{\rm K}$, dosahují vysokých hodnot rychlosti ztráty hmoty, nicméně vítr těchto hvězd zůstává opticky tenký i v rovníkových oblastech. Pro hvězdy s efektivními teplotami $T_{\rm eff} < 15\,000\,{\rm K}$ je tok hmoty z hvězdy malý i pro $v_{\rm rot} \to v_{\rm crit}$ a tak vítr zůstává také opticky tenký. Velmi efektivní zůstává tento model větru pro hvězdy uvnitř tohoto teplotního intervalu, kterému odpovídají rané hvězdy spektrální třídy B. Mezi hvězdami spektrální třídy B se vyskytuje skupina hvězd, v jejichž spektrech pozorujeme jednak velmi široké UV rezonanční čáry rozšířené do modré oblasti spektra a zároveň úzké Balmerovské emisní čáry, přičemž spektra těchto hvězd vykazují navíc výrazný IR exces (viz např. Swings, 2006). Jedná se o hvězdy označované jako jasní B[e] veleobři. Současný výskyt širokých i úzkých čar ve spektrech těchto objektů nasvědčuje přítomnosti dvou různých složek toku: rychlýmu a řídkému toku v oblasti pólů a hustému a pomalému toku v oblasti rovníku. Návrh modelu, který by objasňoval výskyt dvojího druhu větru, podal Zickgraf a kol. (1985) a označuje se jako Zickgrafův model. Jedním z výstupu modelu je vysoký poměr mezi rovníkovou a polární hustotou větru, $\rho_{\rm rov}/\rho_{\rm pol} \sim 10^2 - 10^3$.

V předchozí části (viz § 5.3.2) jsme ukázali, že zářivě hnaný vítr v kombinaci s velmi rychlou rotací hvězdy sice vede ke vzniku velmi hustého disku v rovníkové oblasti, ale pouze v těsné blízkosti hvězdy; dále od hvězdy se jedná "jen" o hustší a pomalejší vítr (viz obr. 5.15, vlevo), což na vysvětlení hustých disků v okolí jasných B[e] veleobrů nestačí. Teorie rotujících hvězdných větrů hnaných zářením podává mnohem lepší výsledky, pokud navíc započítáme změnu optické hloubky větru způsobenou změnou teploty na povrchu hvězdy (Pauldrach & Puls, 1990).

Pelupessy a kol. (2000) spočítali poměr hustot mezi rovníkovým a polárním větrem pro model rotujícího jasného veleobra spektrální třídy B. Zářivou sílu parametrizovali trojicí parametrů k, α a δ, kterou spočítali zvlášť pro polární (pod skokem) a zvlášť pro rovníkovou (nad skokem) oblast, v důsledku rozdílných teplot se na zářivé síle podílí různé skupiny iontů. Parametry zářivé síly spočítali na základě NLTE modelů větrů hvězd spektrální třídy B, které vypočítali Vink a kol. (1999). Vypočítaný poměr hustot, $\rho_{\mathrm{rov}}/\rho_{\mathrm{pol}} \sim 10$, k vysvětlení disku v okolí jasných B[e] veleobrů nestačí. Musíme ale poznamenat, že řešení byla získána pro rotační rychlosti $\Omega < 0.6$ ($\Omega_{\mathrm{switch}} \sim 0.65$) a tedy pouze pro rychlá řešení větru. Pro pomalá řešení ($\Omega > \Omega_{\mathrm{switch}}$) provedli výpočty Curé a kol. (2005) a získali hodnotu poměru hustot ve větru o řád vyšší v porovnání s rychlými řešeními.

Pro výpočet modelu větru s rotačními rychlostmi $\Omega > \Omega_{\mathrm{switch}}$ použijeme stejné parametry modelu hvězdy a stejné parametry zářivé síly jako Pelupessy a kol. (2000): model Mp-25 (viz tab. 5.1); $k = 0.06$ a $\alpha = 0.65$ ($T_{\mathrm{eff}} = 30\,000\,\mathrm{K}$ pro oblast pólů), $k = 0.57$ a $\alpha = 0.45$ ($T_{\mathrm{eff}} = 17\,000\,\mathrm{K}$ pro rovníkovou oblast), v obou případech volíme $\delta = 0$. V oblasti rovníku se tak na urychlování větru podílí více čar, přičemž většina z nich je opticky tenkých. Výsledek modelování ukazuje obrázek 5.17. Na obrázku je zachycen poměr hustot mezi rovníkovým a polárním větrem pro rotační rychlost $\Omega = 0.90$. V těsné blízkosti hvězdy se nachází velmi hustý disk, $\rho_{\mathrm{rov}}/\rho_{\mathrm{pol}} \sim 10^3$. Disk vzniká působením zářivé síly kontinua a gradientu tlaku plynu. Jeho vznik je navíc podporován odstředivou silou, která uvolňuje do prostoru v blízkosti hvězdy tím více částic, čím je rotace hvězdy větší. Výsledek je tak stejný jako v případě rychle rotujících větrů bez započítání efektu bi-stability (viz § 5.3). Dále od hvězdy ($r > 2\,R_*$) poměr hustot klesá, $\rho_{\mathrm{rov}}/\rho_{\mathrm{pol}} \sim 10^2$ Curé a kol. (2005), ale dosahuje 10krát větší hodnoty, než bez započtení bi-stability efektu (viz obr. 5.15, vlevo). Navíc hustotní poměr je vyšší v celém větru. Započítání efektu bi-stability tak vede ke vzniku hustého okolohvězdného disku.



Obrázek 5.17: Poměr hustot mezi rovníkovým a polárním větrem. Parametry hvězdy odpovídají modelu Mp-25 z tabulky 5.1, $\Omega = 0.90$.

Kapitola 6

Závěr

Hvězdné větry horkých hvězd jsou urychlovány absorpcí záření ve spektrálních čarách iontů uhlíku, dusíku, železa a dalších; k zářivé síle tak přispívá velmi mnoho čar. Zářivou sílu je možno vypočítat současným řešením hydrodynamických rovnic, rovnice přenosu záření a jejich momentů a rovnic statistické rovnováhy. Místo tohoto časově náročného a komplikovaného způsobu jsem k výpočtu zářivé síly použil velmi efektivní CAK aproximaci (CAK; Abbott 1982; PPK).

V disertační práci jsem se zabýval výpočty modelů rotujících hvězdných větrů horkých hvězd. Tyto modely velmi dobře odpovídají větrům hvězd spektrálních tříd O a B, které v důsledku intenzivního zářivého pole ztrácí prostřednictvím hvězdného větru značné množství hmoty (např. Wilson & Dopita, 1985) a které patří mezi rychle rotující objekty (např. Markova a kol., 2004). Model větru je popsán soustavou nelineárních diferenciálních rovnic, jejíž řešení jsem získával numericky. Pro tento účel jsem vytvořil program `vitr.f90`, který je rozšířením programu poskytnutého J. Krtičkou (2003). Zaměřil jsem se na časově nezávislý, jednorozměrný, osově symetrický, izotermický, jednosložkový model hvězdného větru. Rotaci hvězdného větru jsem počítal ze zákona zachování momentu hybnosti.

Rotace hvězdy významně ovlivňuje dynamiku hvězdného větru. Odstředivá síla působící na částice větru velmi efektivně snižuje účinky gravitace, která je v případě hvězd s vysokými zářivými výkony navíc významně redukována zářivou silou kontinua. Z hvězdné atmosféry uniká více částic, hustota větru blízko povrchu hvězdy klesá pozvolněji v porovnání s nerotující hvězdou a tím se rozšiřuje oblast, ve které působí významněji gradient tlaku plynu. Struktura větru blízko povrchu hvězdy tak velmi dobře odpovídá hydrostatickému modelu atmosféry. Mnoho autorů udává vysoký poměr hustot mezi rovníkovým a polárním (t.j. bez zahrnutí rotace) větrem právě v této oblasti, důvodem není působení zářivé síly v čarách, ale vliv gradientu tlaku plynu a zářivé síly kontinua. Dále musím poznamenat, že tato oblast není nijak rozsáhlá a dosahuje do vzdálenosti $1.1\,R_*$ až $1.2\,R_*$. Ve větších vzdálenostech je hustota větru pouze zvýšená. Působení odstředivé síly na částice větru je nicméně významné pro vyšší rotační rychlosti.

Pro rotační rychlosti $\Omega < 0.2$ nezávisle na zvoleném modelu dochází ke změnám globálních charakteristik větru v řádu pouhých několika procent.

Pokud rotační rychlost hvězdy překročí přechodovou rotační rychlost (*break-up rotation velocity;* Madura a kol., 2007), dojde k výrazné změně charakteru řešení (Curé, 2004). Rychlost větru v těsné blízkosti hvězdy narůstá velmi zvolna v porovnání s CAK řešením a ve velkých vzdálenostech dosahuje asi 1/5 hodnoty rychlosti polárního větru. Protože rychlost ztráty hmoty v rovníkové oblasti dosahuje asi dvojnásobné hodnoty v porovnání s polárním větrem, vychází poměr hustot mezi rovníkovým a polárním větrem asi 10. V těsné blízkosti hvězdy je poměr hustot 100, nicméně oblast, ve které dochází k vytvoření disku, je velmi úzká. Např. Venero a kol. (2008) uvádí disk pro $r < 2\,R_*$, ovšem přepočítáním jeho modelu jsem získal $r < 1.2\,R_*$, pro $r = 1.5\,R_*$ dosahuje poměr hustot jen asi 15. Samotná rotace hvězdy v kombinaci se zářivou silou tak nemůže být zodpovědná za vznik hustých disků okolo rychle rotujících horkých hvězd.

Přesto teorie rotujících hvězdných větrů urychlovaných zářením nabízí možné řešení v otázce hustých disků v okolí B[e] hvězd. Do modelu je třeba zahrnout změnu optické hloubky větru vlivem změny např. teploty nebo hustoty větru, která je způsobená rotací (*bi-stability effect;* Lamers & Pauldrach, 1991). Vlivem rotace hvězdy dochází k deformaci jejího tvaru a nastavení povrchové teploty hvězdy v závislosti na úhlu mezi pólem a rovníkem hvězdy. Pro určitou hodnotu rotační rychlosti hvězdy hustota větru vzroste natolik, že dojde ke změně ionizační struktury větru a tím i složení iontů přispívajících nejvíce k urychlování hvězdného větru. Přestože v modelu používám sféricky symetrický tvar hvězdy s konstatní povrchovou teplotou, započítal jsem tento jev, podobně jako Curé a kol. (2005), rozdílnou parametrizací zářivé síly v oblasti pólu a rovníku. Přepočítáním modelu uvedeného v práci Pelupessy a kol. (2000) jsem získal velmi podobné výsledky jako Curé a kol. (2005), v rovníkové rovině vzniká hustý disk, přičemž poměr hustot dosahuje asi 100 v celém větru, a blízko hvězdy je tato hodnota ještě asi o jeden řád vyšší.

Model větru, který jsem v disertační práci prezentoval, ukazuje možnost vzniku hustých disků v okolí raných hvězd spektrální třídy B a potvrzuje zároveň výsledky publikované v předchozích letech. Přesto je potřeba další vylepšení modelu, jako např. zahrnutí neradiálních složek sil nebo započtení změny tvaru hvězdy vlivem vysokých rotačních rychlostí, které umožní více odhalit, zda pomalá řešení hvězdného větru odpovídají pozorovaným diskům velmi rychle rotujících B hvězd.

Příloha A

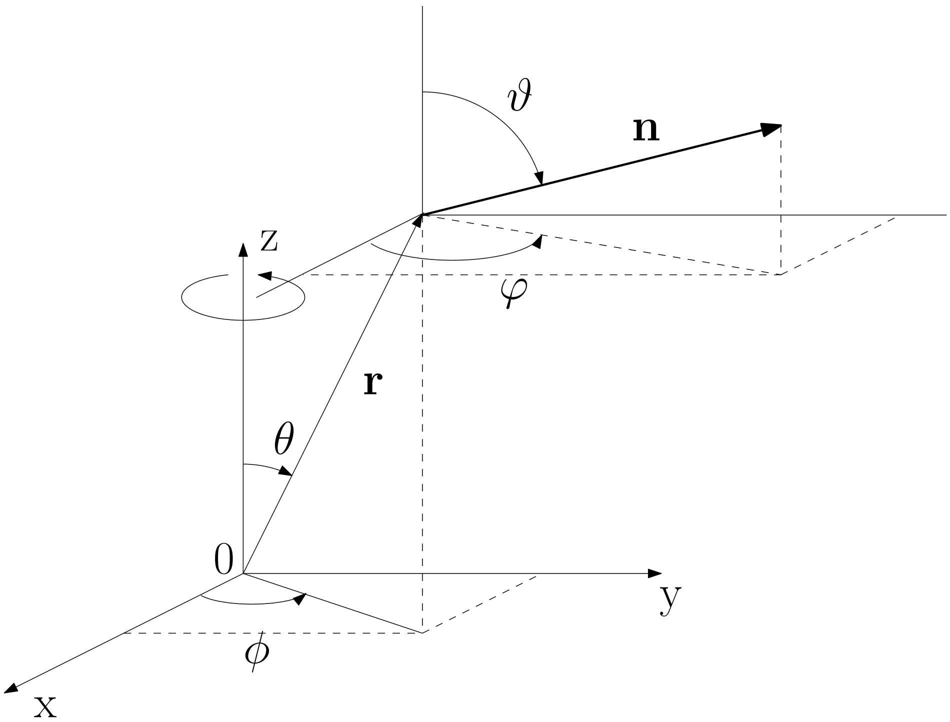
Sférické souřadnice

A.1 Odvození vztahu $\boldsymbol{n} \cdot \nabla(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})$

Odvození tohoto vztahu můžeme najít v Koninx (1992). Pro vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ ve sférických souřadnicích platí:

$$\boldsymbol{v} = v_r \hat{\boldsymbol{r}} + v_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{A.1}$$

kde $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ tvoří ortonormální bázi. Tuto bázi získáme z transformačních rovnic



Obrázek A.1: Schéma zvolené souřadné soustavy. Střed hvězdy je označen jako 0. Vektor $\boldsymbol{n}$ značí směr šíření záření z místa $\boldsymbol{r}$ ve hvězdném větru.

mezi kartézskou a sférickou soustavou souřadnic:

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \tag{A.2}$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta, \tag{A.3}$$
$$z = r\cos\theta, \tag{A.4}$$

kde (r, ϕ, θ) představuje soustavu souřadnic s počátkem umístěným ve středu hvězdy (obr. A.1). Vektory ortonormální báze ve sférických souřadnicích mají následující tvar:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$
$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Pro vektor ve směru záření, $\boldsymbol{n}$, platí:

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

kde (φ, ϑ) označují lokální souřadnice v místě $\boldsymbol{r}$ ve hvězdném větru. Spočítáme projekci vektoru rychlosti do směru šíření záření, platí:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = v_r(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}) + v_\phi(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}) + v_\theta(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}). \tag{A.9}$$

Jednotlivé skalární součiny mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} &= \cos\phi\sin\theta\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\phi\sin\theta\sin\varphi\sin\vartheta + \cos\theta\cos\vartheta = \\
&= \sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi) + \cos\theta\cos\vartheta, && \text{(A.10)} \\
\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin\phi\cos\varphi\sin\vartheta + \cos\phi\sin\varphi\sin\vartheta = \sin\vartheta\sin(\varphi-\phi), && \text{(A.11)} \\
\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\phi\cos\theta\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\phi\cos\theta\sin\varphi\sin\vartheta - \sin\theta\cos\vartheta = \\
&= \cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi) - \sin\theta\cos\vartheta, && \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

přičemž jsme využili součtových vzorců

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{A.13}$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \tag{A.14}$$

Pro skalární součin (A.9) můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} &= v_r(\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\cos\theta\cos\vartheta)+v_\phi\sin\vartheta\sin(\varphi-\phi)+\\ &+ v_\theta(\cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)-\sin\theta\cos\vartheta). \qquad \text{(A.15)}\end{aligned}$$

Operátor nabla má ve sférických souřadnicích tvar:

$$\boldsymbol{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \qquad \text{(A.16)}$$

Tento operátor aplikujeme na skalární součin (A.15), pro jednotlivé složky vektoru dostáváme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial v_r}{\partial r}(\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\cos\theta\cos\vartheta)+\\ &+ \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\sin\vartheta\sin(\varphi-\phi)+\\ &+ \frac{\partial v_\theta}{\partial r}(\cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)-\sin\theta\cos\vartheta) \qquad \text{(A.17)}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}(\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\cos\theta\cos\vartheta)+\\ &+ \frac{v_r}{r}(\cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)-\sin\theta\cos\vartheta)+\\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\sin\vartheta\sin(\varphi-\phi)+\\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}(\cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)-\sin\theta\cos\vartheta)+\\ &- \frac{v_\theta}{r}(\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\cos\theta\cos\vartheta) \qquad \text{(A.18)}\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}(\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\cos\theta\cos\vartheta)+\\ &+ \frac{v_r}{r\sin\theta}\sin\theta\sin\vartheta\sin(\varphi-\phi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\sin\vartheta\sin(\varphi-\phi)-\\ &- \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\\ &+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}(\cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)-\sin\theta\cos\vartheta)+\\ &+ \frac{v_\theta}{r\sin\theta}\cos\theta\sin\vartheta\sin(\varphi-\phi). \qquad \text{(A.19)}\end{aligned}$$

Zavedeme substituci

$$\begin{aligned}a_1 &= \sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)+\cos\theta\cos\vartheta, \qquad \text{(A.20)}\\ a_2 &= \cos\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi)-\sin\theta\cos\vartheta, \qquad \text{(A.21)}\\ a_3 &= \sin\vartheta\sin(\varphi-\phi), \qquad \text{(A.22)}\\ a_4 &= -\sin\vartheta\cos(\varphi-\phi) \qquad \text{(A.23)}\end{aligned}$$

a po dosazení do výrazu pro gradient rychlostního pole ve směru záření dostáváme:

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}a_1+\frac{\partial v_\phi}{\partial r}a_3+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}a_2,\right.\\ &\quad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}a_1+\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}a_3+\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}a_2+v_r a_2-v_\theta a_1\right),\\ &\quad \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi}a_1+\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}a_3+\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}a_2+v_r\sin\theta a_3+v_\phi a_4+\right.\\ &\quad \left.\left.+v_\theta\cos\theta a_3\right)\right). \end{aligned} \tag{A.24}$$

Tento vektor vynásobíme skalárně s vektorem $\boldsymbol{n}$ a dostáváme hledaný výraz:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= \left[\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\right]_r(\boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{r}})+\left[\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\right]_\theta(\boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{\theta}})+\left[\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\right]_\phi(\boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{\phi}})=\\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r}a_1^2+\frac{\partial v_\phi}{\partial r}a_1a_3+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}a_1a_2+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}a_1a_2+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}a_2a_3+\\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}a_2^2+\frac{v_r}{r}a_2^2-\frac{v_\theta}{r}a_1a_2+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}a_1a_3+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}a_3^2+\\ &+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}a_2a_3+\frac{v_r\sin\theta}{r\sin\theta}a_3^2+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}a_3a_4+\frac{v_\theta\cos\theta}{r\sin\theta}a_3^2=\\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r}a_1^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)a_2^2+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)a_3^2+\\ &+ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r}\right)a_1a_2+\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)a_1a_3+\\ &+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)a_2a_3+\frac{v_\phi}{r\sin\theta}a_3a_4. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Nejjednodušším případem je hvězda zářící jako bodový zdroj. Platí: $\varphi=\phi$, $\vartheta=\theta$. Potom ze substitučních rovnic (A.20-A.23) dostaneme:

$$a_1 = 1, \tag{A.26}$$

$$a_2 = 0, \tag{A.27}$$

$$a_3 = 0, \tag{A.28}$$

$$a_4 = -\sin\vartheta. \tag{A.29}$$

Dosazením do výrazu pro projekci gradientu rychlostního pole do směru záření (A.25) získáme:

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{\partial v_r}{\partial r}. \tag{A.30}$$

Dalším velmi častým případem je radiální rychlostní pole, ale neradiální pole záření. Předpokládáme osově symetrický vítr, $\varphi=\phi$, s nenulovou pouze radiální složkou rychlosti. Hvězda září jako rovnoměrně jasný disk, platí tedy $\vartheta = \pi/2$ a ze substitučních rovnic (A.20-A.23) tak dostaneme:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin\theta, && \text{(A.31)}\\ a_2 &= \cos\theta, && \text{(A.32)}\\ a_3 &= 0, && \text{(A.33)}\\ a_4 &= -1. && \text{(A.34)} \end{aligned}$$

Dosazením do (A.25) obdržíme:

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r}\sin\theta^2 + \frac{v_r}{r}\cos\theta^2. \qquad \text{(A.35)}$$

A.2 Odvození vztahu $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$

Výraz $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ rozepíšeme s využitím (A.1) a (A.16):

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &= \left(v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(v_r\hat{\boldsymbol{r}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \\ &= v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_r\hat{\boldsymbol{r}}) + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + v_r\frac{\partial}{\partial r}(v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}) + \\ &+ \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r\hat{\boldsymbol{r}}) + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}) + \\ &+ \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_r\hat{\boldsymbol{r}}) + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}). \qquad \text{(A.36)} \end{aligned}$$

K dalšímu výpočtu spočítáme jednotlivé parciální derivace vektorů (A.5)-(A.7), které můžeme symbolicky zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} & -\hat{\boldsymbol{r}} & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}\sin\theta & \hat{\boldsymbol{\phi}}\cos\theta & -\hat{\boldsymbol{r}}\sin\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad \text{(A.37)}$$

Provedením derivací v (A.36) s využitím (A.37) dostáváme:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &= v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \\ &+ \frac{v_\theta v_r}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{{v_\theta}^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \\ &+ \frac{v_\phi v_r}{r}\hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{{v_\phi}^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{v_\phi\cos\theta}{r\sin\theta}(v_\theta\hat{\boldsymbol{\phi}} - v_\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}). \qquad \text{(A.38)} \end{aligned}$$

Pro jednotlivé složky vektoru $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$ tak můžeme psát:

$$((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v})_r \quad : \quad v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{{v_\theta}^2}{r} - \frac{{v_\phi}^2}{r} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}, \tag{A.39}$$

$$((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v})_\theta \quad : \quad v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi \cos\theta}{r\sin\theta}v_\phi, \tag{A.40}$$

$$((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v})_\phi \quad : \quad v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi \cos\theta}{r\sin\theta}v_\theta + \frac{v_\phi v_r}{r}. \tag{A.41}$$

Příloha B

Diferenční rovnice

V tomto oddíle uvádíme diferenční rovnice hvězdného větru pro případ jednorozměrného izotermického osově symetrického modelu, které vychází z diferenciálních rovnic (3.11)-(3.12), přičemž uvažujeme m-CAK model zářivé síly (2.45). Vzhledem k symetrii modelu uvádíme místo v_r pouze v.

B.1 Rovnice kontinuity

Pro vnitřní body sítě, $i = 2, .., (NR-1)$, s využitím výrazů pro y_i (4.7), Δr_i (4.6) platí:

$$P_{2i-1} = y_i \frac{r_{i+1}^2 \rho_{i+1} v_{i+1} - r_i^2 \rho_i v_i}{\Delta r_{i+1}} + (1 - y_i) \frac{r_i^2 \rho_i v_i - r_{i-1}^2 \rho_{i-1} v_{i-1}}{\Delta r_i} = 0 \tag{B.1}$$

$$J_{2i-1,2i-3} = -\frac{(1 - y_i) r_{i-1}^2 v_{i-1}}{\Delta r_i} \tag{B.2}$$

$$J_{2i-1,2i-2} = -\frac{(1 - y_i) r_{i-1}^2 \rho_{i-1}}{\Delta r_i} \tag{B.3}$$

$$J_{2i-1,2i-1} = \left[\frac{(1 - y_i)}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \right] r_i^2 v_i \tag{B.4}$$

$$J_{2i-1,2i} = \left[\frac{(1 - y_i)}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \right] r_i^2 \rho_i \tag{B.5}$$

$$J_{2i-1,2i+1} = \frac{y_i r_{i+1}^2 v_{i+1}}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.6}$$

$$J_{2i-1,2i+2} = \frac{y_i r_{i+1}^2 \rho_{i+1}}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.7}$$

Pro poslední bod sítě ($i = NR$) platí:

$$P_{2i-1} = \frac{r_i^2 \rho_i v_i - r_{i-1}^2 \rho_{i-1} v_{i-1}}{\Delta r_i} = 0 \tag{B.8}$$

$$J_{2i-1,2i-3} = -\frac{r_{i-1}^2 v_{i-1}}{\Delta r_i} \tag{B.9}$$

$$J_{2i-1,2i-2} = -\frac{r_{i-1}^2 \rho_{i-1}}{\Delta r_i} \tag{B.10}$$

$$J_{2i-1,2i-1} = \frac{r_i^2 v_i}{\Delta r_i} \tag{B.11}$$

$$J_{2i-1,2i} = \frac{r_i^2 \rho_i}{\Delta r_i} \tag{B.12}$$

B.2 Pohybová rovnice

Pro vnitřní body sítě, $i = 2, .., (NR - 1)$, platí:

$$P_{2i} = v_i \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{GM_*(1-\Gamma)}{r_i^2} - v_{\mathrm{rot}} \frac{R_*^2}{r_i^3} + \\ + \frac{a^2}{\rho_i} \left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right]_i - \frac{C}{r_i^2} \rho_i^{(\delta-\alpha)} \left[D_{\mathrm{f}}\right]_i \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i^\alpha = 0, \tag{B.13}$$

kde výraz

$$\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}\right]_i = \left[y_i \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta r_{i+1}} + (1 - y_i) \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}\right] \tag{B.14}$$

označuje kompaktní zápis diference libovolné veličiny X, a dále

$$\left[D_{\mathrm{f}}\right]_i = \frac{(1+\sigma_i)^{(\alpha+1)} - (1 + \mu_{c_i}^2 \sigma_i)^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)(1-\mu_{c_i}^2)\sigma_i (1+\sigma_i)^\alpha}, \tag{B.15}$$

kde $\mu_{c_i}^2 = 1 - R_*^2/r_i^2$ a

$$\sigma_i = \frac{r_i}{v_i} \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i - 1. \tag{B.16}$$

S využitím předchozího, veličiny A (4.19) a veličiny $\overline{s}_i$, pro kterou platí: $\overline{s}_i = (r_i/v_i)[\mathrm{d}v/\mathrm{d}r]_i$, mají jednotlivé členy Jacobiho matice tento tvar:

$$J_{2i,2i-3} = -\frac{a^2(1-y_i)}{\rho_i \Delta r_i} \tag{B.17}$$

$$J_{2i,2i-2} = -\frac{v_i(1-y_i)}{\Delta r_i} + \frac{C}{r_i^2}\rho_i^{(\delta-\alpha)}\left[D_\mathrm{f}\right]_i \frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}\left[\alpha + \overline{s}_i \cdot A_i\right]\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i^{\alpha-1} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned} J_{2i,2i-1} &= \frac{a^2}{\rho_i^2}\left[\frac{(1-y_i)\rho_{i-1}}{\Delta r_i} - \frac{y_i\rho_{i+1}}{\Delta r_{i+1}}\right] + \\ &+ (\alpha-\delta)\frac{C}{r_i^2}\rho_i^{(\delta-\alpha-1)}\left[D_\mathrm{f}\right]_i\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i^{\alpha} \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned} J_{2i,2i} &= \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i + v_i\left[\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right] - \frac{C}{r_i^2}\rho_i^{(\delta-\alpha)}\left[D_\mathrm{f}\right]_i\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i^{(\alpha-1)} \\ &\left[\alpha\left[\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right] + \right. \\ &+ \left.\overline{s}_i \cdot A_i\left[\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} - \frac{1}{v_i}\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i\right]\right] \end{aligned} \tag{B.20}$$

$$J_{2i,2i+1} = \frac{a^2}{\rho_i}\left[\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right] \tag{B.21}$$

$$J_{2i,2i+2} = \frac{v_i y_i}{\Delta r_{i+1}} - \frac{C}{r_i^2}\rho_i^{(\delta-\alpha)}\left[D_\mathrm{f}\right]_i \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\left[\alpha + \overline{s}_i \cdot A_i\right]\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_i^{(\alpha-1)} \tag{B.22}$$

Pro poslední bod sítě ($i = NR$) je možné použít opět dvoubodovou aproximaci derivace, nicméně nabízí se jednodušší způsob. Na vnějším okraji získáme rychlost pomocí extrapolace hodnot dvou předchozích bodů sítě na základě rovnosti derivací v těchto bodech:

$$P_{2i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{i-1} - v_{i-2}}{\Delta r_{i-1}} = 0 \tag{B.23}$$

$$J_{2i,2i-4} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.24}$$

$$J_{2i,2i-2} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.25}$$

$$J_{2i,2i} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.26}$$

Příloha C

Stručný popis programu

Numerické modely hvězdného větru jsme získali pomocí programu `vitr.f90` vyvinutého v programovacím jazyku `FORTRAN` s využitím balíčku `LAPACK`. Jádro programu tvoří Newtonova-Raphsonova iterační metoda, pomocí které řešíme soustavu hydrodynamických rovnic. Program pracuje s několika vstupními soubory: `konst.f90`, `parametry`, `forceMP.dat`, `vstup.f90`, `funkce.f90` a `fito.f90`, jejichž popis s ukázkami některých souborů se nachází níže. Výstupem modelování je rychlostní a hustotní profil větru uložený do souboru `model` a základní charakteristiky větru v souboru `rotace`. Program počítá v jednotkách CGS.

Při výpočtu modelu větru se uplatňuje následující postup. Program nejprve spouští modul `vstup.f90`, který načte vstupní parametry modelu hvězdy a modelu větru - soubor `parametry` - a určí příslušné parametry zářivé síly - soubor `forceMP.dat` - podle zvolené efektivní teploty hvězdy. Uvedený modul dále dopočítává ostatní parametry hvězdy a vše převádí do soustavy jednotek CGS. Tím končí práce modulu `vstup.f90`. V programu se dále nastavuje síť, na které se počítá model větru. Poté dochází k nastavení odhadu hustoty a rychlosti větru, přičemž se využívá modulu `funkce.f90`. Nyní následuje vlastní iterační proces, který pro pevně zadanou hustotu větru na spodním okraji hledá rychlost větru na spodním okraji, dokud není nalezeno konvergující řešení. Pokud pro zadanou spodní okrajovou hustotu iterační proces nekonverguje, je potřeba změnit spodní okrajovou hustotu větru nebo některý další vstupní parametr. V případě nalezení konvergujícího řešení je určena poloha kritického bodu, přičemž splnění kritické podmínky je možno ověřit v souboru `krpod`. Řešení hvězdného větru od spodního okraje po kritický bod je uloženo do souboru, jehož název je načten z proměnné model. Poté je opět nastavena síť, jejíž levá okrajová hodnota odpovídá poloze kritického bodu. Dále dochází k nastevení odhadu hustoty a rychlosti, přičemž pro pomalu rotující větry ($\Omega < \Omega_{\rm switch}$) je využit opět modul `funkce.f90`, zatímco pro rychle rotující větry ($\Omega > \Omega_{\rm switch}$) je odhad rychlosti vypočítán na základě interpolace podkritického řešení a následné extrapolace na nové síti pomocí modulu `fito.f90`. Po pár iteracích je většinou dopočítáno řešení od kritického bodu dále od hvězdy, které je uloženo do souboru s podkritickým řešením. Nakonec je vytvořen soubor `rotace`, do kterého jsou uloženy základní charakteristitky hvězdného větru.

Vstupní soubory

`konst.f90` – soubor konstant.

`forceMP.dat` – soubor obsahuje multiplikativní konstanty zářivé síly v závislosti na efektivní teplotě hvězdy; první sloupec T_{eff}, druhý sloupec parametr k, třetí sloupec parametr α, čtvrtý sloupec parametr δ.

`parametry` – soubor obsahuje vstupní parametry modelu hvězdy a modelu větru: T_{eff}, R_*, v_∞, $\log g$, v_{rot}, β, hmotnostní zastoupení vodíku X, počet cyklů střelby, v_0, ρ_0, model - proměnná obsahuje název souboru výsledného modelu větru (max. 5 znaků).

```
40000.0  5.8  2600.0 !-- teff, RHv [RSl], vterm [km/s]
4.05                 !-- log g
100.0  0.8  0.715  !-- vrot [km/s], beta, hmot. zastoupeni H
30                   !-- max pocet cyklu strelby
0.001e5 2.0e-9 !-- sp. okraj: rychlost [km/s], hustota [g/cm3]
m40                  !-- nazev souboru vypocitaneho modelu
```

`vstup.f90` – modul, který ze souboru `forceMP.dat` načítá multiplikativní konstanty zářivé síly a parametry hvězdy a větru ze souboru `parametry`, příslušné veličiny převádí do soustavy jednotek CGS a dopočítává ostatní potřebné parametry hvězdy a větru.

`funkce.f90` – modul obsahuje výpočet rychlosti pomocí $\beta-$zákona a výpočet geometrického faktoru zředění.

`fito.f90` – modul, který vypočítává odhad rychlosti v nadkritické oblasti využitím interpolace několika posledních bodů podkritického řešení a následné extrapolace; pouze pro rotační rychlosti $\Omega > \Omega_{\text{switch}}$.

Výstupní soubory

`krpod` – soubor obsahuje závislost kritické podmínky na vzdálenosti.

```
                   ...........................
    25.2700000000001       -2.34760405202728
    25.3900000000001       -1.89541024945720
    25.5100000000001       -1.44297682274114
```

```
25.6300000000001      -0.996032834850908
25.7500000000001      -0.545174276352588
25.8700000000001      -9.639087819966211E-002
25.9900000000001      -0.336877950150963
26.1100000000001      -0.816740056328894
26.2300000000001       -1.27771705059801
26.3500000000001       -1.74471558961191
26.4700000000001       -2.20501377254720
26.5900000000001       -2.66843788791243
                .........................
```

`model` – soubor obsahuje závislost rychlosti a hustoty hvězdného větru na vzdálenosti od středu hvězdy; první sloupec r/R_*, druhý sloupec $1 - R_*/r$, třetí sloupec v_r[km/s], čtvrtý sloupec ρ[g/cm^3].

```
                .........................
  1.012600    0.01244322       1.89039    5.99145E-11
  1.013200    0.01302803       2.20492    5.13068E-11
  1.013800    0.01361215       2.56488    4.40542E-11
  1.014400    0.01419558       2.97456    3.79418E-11
  1.015000    0.01477833       3.43800    3.27884E-11
  1.015600    0.01536038       3.95884    2.84410E-11
  1.016200    0.01594174       4.54008    2.47706E-11
  1.016800    0.01652242       5.18396    2.16683E-11
  1.017400    0.01710242       5.89181    1.90426E-11
  1.018000    0.01768173       6.66401    1.68162E-11
  1.018600    0.01826036       7.49990    1.49244E-11
  1.019200    0.01883830       8.39792    1.33128E-11
  1.019800    0.01941557       9.35558    1.19360E-11
                .........................
```

`rotace` – soubor obsahuje základní charakteristiky hvězdného větru v závislosti na rotační rychlosti hvězdy; první sloupec v_{rot}[km/s], druhý sloupec Ω, třetí sloupec $r_{\mathrm{crit}}[R_*]$, čtvrtý sloupec v_∞[km/s], pátý sloupec $\dot{M}[\mathrm{M}_\odot/\mathrm{rok}]$.

```
120.0 0.192  1.0396  2449.      2.035E-07
193.0 0.309  1.0414  2352.      2.131E-07
248.0 0.397  1.0432  2246.      2.246E-07
528.0 0.846 21.5506   608.      3.815E-07
```

Literatura

ABBOTT, D. C. The theory of radiatively driven stellar winds. II. The line acceleration. *The Astrophysical Journal 259* (1982), p. 282.

ABT, H. A., LEVATO, H., & GROSSO, M. Rotation velocities of B stars. *The Astrophysical Journal 573* (2002), p. 359.

ARAÚJO, F. X. The equatorial plane of Be stars: an outflow driven by optically thin lines? *Astronomy & Astrophysics 298* (1995), p. 179.

ARAÚJO, F. X., & FREITAS PACHECO, J. A. Radiatively driven winds with azimuthal symmetry: application to Be stars. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 241* (1989), p. 543.

ARAÚJO, F. X., FREITAS PACHECO, J. A., & PETRINI, D. Radiative wind models with azimuthal symmetry - II. A latitude-dependent wind for Be and B[e] stars. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 267* (1994), p. 501.

BJORKMAN, J. E., & CASSINELLI, J. P. Equatorial disk formation around rotating stars due to ram pressure confinement by the stellar wind. *The Astrophysical Journal 409* (1993), p. 429.

CASSINELLI, J. P. Stellar winds. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics 17* (1979), p. 275.

CASTOR, J. I. On the force associated with absorption of spectral line radiation. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 169* (1974), p. 279.

CASTOR, J. I., ABBOTT, D. C., & KLEIN, R. I. Radiation driven winds in of stars. *The Astrophysical Journal 195* (1975), p. 157.

CASTOR, J. I., ABBOTT, D. C., & KLEIN, R. I. 1976, *Physique des mouvements dans les atmosphéres stellaires* (1976), No 250, Eds. R. Cayrel & M. Steinberg, p. 363.

CENIGA, M., KRTIČKA, J., & KUBÁT, J., *Mass Loss from Stars and the Evolution of Stellar Clusters* (2008), ASP Conference Series Vol. 388, Eds. A. de Koter, L. J. Smith & L. B. F. M. Waters, p. 155.

CONTI, P. S., & EBBETS, D. Spectroscopic studies of O-type stars. VII. Rotational velocities $v \sin i$ and evidence for macroturbulent motions. *The Astrophysical Journal 213* (1977), p. 438.

CRANMER, S. R., & OWOCKI, S. P. The effect of oblatennes and gravity darkening on the radiation driving in winds from rapidly rotating B stars. *The Astrophysical Journal 440* (1995), p. 308.

CURÉ, M. The influence of rotation in radiation-driven wind from hot stars: new solutions and disk formation in Be stars. *The Astrophysical Journal 614* (2004), p. 929.

CURÉ, M., & RIAL, D. F. The influence of rotation in radiation driven winds from hot stars. II. CAK topological analysis. *Astronomy & Astrophysics 428* (2004), p. 545.

CURÉ, M., RIAL, D. F., & CIDALE, L. Outflowing disk formation in B[e] supergiants due to rotation and bi-stability in radiation driven winds. *Astronomy & Astrophysics 437* (2005), p. 929.

CURÉ, M., CIDALE, L., & GRANADA, A. Slow radiation-driven wind solutions of A-type supergiants. *The Astrophysical Journal 737* (2011), p. 18.

DONATI, J. F., BABEL, J., HARRIES, T. J. A KOL. The magnetic field and wind confinement of θ^1 Orionis C. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 333* (2002), p. 55.

UD-DOULA, A., & OWOCKI, S., *International Conference on magnetic fields in O, B and A stars* (2002), ASP Conference Series Vol. 305, Eds. L. A. Balona, H. F. Henrichs & R. Medupe, p. 343.

UD-DOULA, A., OWOCKI, S. P., & TOWNSEND, R. H. D. Dynamical simulations of magnetically channelled line-driven stellar winds - III. Angular momentum loss and rotational spin-down. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 392* (2009), p. 1022.

FRIEND, D. B., & ABBOTT, D. C. The theory of radiatively driven stellar winds. III. Wind models with finite disk correction and rotation. *The Astrophysical Journal 311* (1986), p. 701.

FRIEND, D. B., & MACGREGOR, K. B. Winds from rotating, magnetic, hot stars. I. General model results. *The Astrophysical Journal 282* (1984), p. 591.

GEHRZ, R. D., HACKWELL, J. A., & JONES, T. W. Infrared observations of Be stars from 2.3 to 19.5 microns. *The Astrophysical Journal* (1974), p. 675.

Groenewegen, M. A. T., Lamers, H., & Pauldrach, A. The winds of O-stars. II. The terminal velocities of stellar winds of O-type stars. *Astronomy & Astrophysics 221* (1989), p. 78.

Henyey, L. G., Forbes, J. E., & Gould, N. L. A new method of automatic computation of stellar evolution. *The Astrophysical Journal 139* (1964), p. 306.

Hubeny, I. & Lanz, T. Accelerated complete-linearization method for calculating NLTE model stellar atmospheres. *Astronomy & Astrophysics 262* (1992), p. 501.

Chandrasekhar, S. On the hypothesis of the radial ejection of high-speed atoms for the Wolf-Rayet stars and the novae. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 94* (1934), p. 522.

Koninx, J. P. *Aspects of Stellar Wind Theory.* PhD thesis, University Utrecht, 1992.

Krtička, J. *PhD thesis.* Masaryk University Brno, 2001.

Krtička, J., *Stellar atmosphere modeling* (2003), ASP Conference Series Vol. 288, Eds. I. Hubeny, D. Mihalas & K. Werner, p. 259.

Krtička, J., & Kubát, J. Isothermal two-component stellar wind of hot stars. *Astronomy & Astrophysics 359* (2000), p. 983.

Krtička, J., & Kubát, J. Multicomponent radiatively driven stellar winds. I. Nonisothermal three-component wind of hot B stars. *Astronomy & Astrophysics 369* (2001), p. 222.

Krtička, J., & Kubát, J. Comoving frame models of hot star winds. I. Test of the Sobolev approximation in the case of pure line transitions. *Astronomy & Astrophysics 519* (2010), p. 50.

Kudritzki, R. P., Pauldrach, A., Puls, J. a kol. Radiation-driven winds of hot stars. VI. Analytical solutions for wind models including the finite cone angle effect. *Astronomy & Astrophysics 219* (1989), p. 205.

Lamers, H., & Cassinelli, J. P. *Introduction to stellar winds.* Cambridge University Press, UK, 1999.

Lamers, H., & Pauldrach, A. The formation of outflowing disks around early-type stars by bi-stable radiation-driven winds. *Astronomy & Astrophysics 244* (1991), p. 244.

Lamers, H., Snow, T. P., & Lindholm, D. M. Terminal velocities and the bistability of stellar winds. *The Astrophysical Journal 455* (1995), p. 269.

LANDAU, L. D., & LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics, 2nd. ed., Course of theoretical physics; v. 6.* Butterworth-Heinemann, UK, 1987.

LUCY, L. B., & SOLOMON, P. M. Mass loss by hot stars. *The Astrophysical Journal 159* (1970), p. 879.

MACGREGOR, K. B., FRIEND, D. B., & GILLILAND, R. L. Winds from rotating, magnetic, hot stars: consequences for the rotational evolution of O and B stars. *Astronomy & Astrophysics 256* (1992), p. 141.

MADURA, T. I., OWOCKI, S. P., & FELDMEIER, A. A nozzle analysis of slow-acceleration solutions in one-dimensional models of rotating hot-star winds. *The Astrophysical Journal 660* (2007), p. 687.

MARKOVA, N., PULS, J., REPOLUST, T. A KOL. Bright OB stars in the Galaxy. I. Mass-loss and wind-momentum rates of O-type stars: A pure Hα analysis accounting for line-blanketing. *Astronomy & Astrophysics 413* (2004), p. 693.

MIHALAS, D. *Stellar atmospheres, 2nd ed.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1978.

MIKULÁŠEK, Z., KRTIČKA, J., HENRY, G. W. A KOL. The extremely rapid rotational braking of the magnetic helium-strong star HD 37776. *Astronomy & Astrophysics 485* (2008), p. 585.

MILNE, E. A. On the possibility of the emission of high-speed atoms from the Sun and stars. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 86* (1926), p. 459.

MOKIEM, M. R., DE KOTER, A., VINK, J. S. A KOL. The empirical metallicity dependence of the mass-loss rate of O- and early B-type stars. *Astronomy & Astrophysics 473* (2007), p. 603.

MORTON, D. C. Mass loss from three OB supergiants in Orion. *The Astrophysical Journal 150* (1967b), p. 535.

MORTON, D. C. The far-ultraviolet spectra of six stars in Orion. *The Astrophysical Journal 147* (1967a), p. 1017.

NOBILI, L. & TUROLA, R. Henyey method revisited: An application to problems involving critical points. *The Astrophysical Journal 333* (1988), p. 248.

OWOCKI, S. P. Winds from hot stars. *Reviews in Modern Astronomy 3* (1990), p. 98.

OWOCKI, S. P., CASTOR, J. I., & RYBICKI, G. B. Time-dependent models of radiatively driven stellar winds. I. Nonlinear evolution of instabilities for a pure absorption model. *The Astrophysical Journal 335* (1988), p. 914.

Owocki, S. P., Cranmer, S. R., & Blondin, J. M. Two-dimensional hydrodynamical simulations of wind-compressed disks around rapidly rotating B stars. *The Astrophysical Journal 424* (1994), p. 887.

Owocki, S. P., Cranmer, S. R., & Gayley, K. G. Inhibition of wind-compressed disk formation by nonradial line forces in rotating hot-star wind. *The Astrophysical Journal 472* (1996), p. 115.

Parker, E. N. Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields. *The Astrophysical Journal 128* (1958), p. 664.

Pauldrach, A. Radiation driven winds of hot luminous stars. III. Detailed statistical equilibrium calculations for hydrogen to zinc. *Astronomy & Astrophysics 183* (1987), p. 295.

Pauldrach, A., Hoffmann, T. L., & Lennon, M. Radiation-driven winds of hot luminous stars. XIII. A description of NLTE line blocking and blanketing towards realistic models for expanding atmospheres. *Astronomy & Astrophysics 375* (2001), p. 161.

Pauldrach, A., & Puls, J. Radiation-driven winds of hot luminous stars. VIII. The bistable wind of the luminous blue variable P Cygni (B1 Ia^+). *Astronomy & Astrophysics 237* (1990), p. 409.

Pauldrach, A., Puls, J., & Kudritzki, R. P. Radiation-driven winds of hot luminous stars. Improvements of the theory and first results. *Astronomy & Astrophysics 164* (1986), p. 86.

Pelupessy, I., Lamers, H., & Vink, J. S. The radiation driven winds of rotating B[e] supergiants. *Astronomy & Astrophysics 359* (2000), p. 695.

Penny, L. R. Projected rotational velocities of O-type stars. *The Astrophysical Journal 463* (1996), p. 737.

Petrenz, P., & Puls, J. Hα line formation in hot star winds: the influence of rotation. *Astronomy & Astrophysics 312* (1996), p. 195.

Petrenz, P., & Puls, J. 2-D non-LTE models of radiation driven winds from rotating early-type stars. I. Winds with an optically thin continuum. *Astronomy & Astrophysics 358* (2000), p. 956.

Puls, J. Radiation-driven winds of hot luminous stars. IV. The influence of multi-line effects. *Astronomy & Astrophysics 184* (1987), p. 227.

Puls, J., Markova, N., Scuderi, S. a kol. Bright OB stars in the Galaxy. III. Constraints on the radial stratification of the clumping factor in hot star winds from a combined Hα, IR and radio analysis. *Astronomy & Astrophysics 454* (2006), p. 625.

Repolust, T., Puls, J., & Herrero, A. Stellar and wind parameters of galactic O-stars. The influence of line-blocking/blanketing. *Astronomy & Astrophysics 415* (2004), p. 349.

Petrenz, P., & Puls, J. A generalization of the Sobolev method for flows with nonlocal radiative coupling. *The Astrophysical Journal 219* (1978), p. 654.

Shimada, M. R., Ito, M., Hirata, R. a kol. *IAU Symposium* (1994), Vol. 162, Pulsation, rotation and mass loss in early-type stars, Eds. L. A. Balona, H. F. Henrichs & J. M. Le Contel, p. 487.

Snow, T. P., Lamers, H., Lindholm, D. G. a kol. An atlas of ultraviolet P Cygni profiles. *The Astrophysical Journal Supplement Series 95* (1994), p. 163.

Snow, T. P., & Morton, D. C. Copernicus ultraviolet observations of mass-loss effects in O and B stars. *The Astrophysical Journal Supplement Series 32* (1976), p. 429.

Sobolev, V. *Moving envelopes of stars.* Harvard University Press, 1960.

Steele, I. A., Negueruela, I., & Clark, J. S. A representative sample of Be stars. I. Sample selection, spectral classification and rotational velocities. *Astronomy & Astrophysics Supplement Series 137* (1999), p. 147.

Swings, J.-P., *Stars with the B[e] phenomenon* (2006), ASP Conference Series Vol. 355, Eds. M. Kraus & A. S. Miroshnichenko, p. 3.

Venero, R. O. J., Curé, M., Cidale, L. S. a kol. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* (2008), Vol. 33, Massive stars: fundamental parameters and circumstellar interactions, Eds. P. Benaglia, G. L. Bosch & C. E. Cappa, p. 94.

Vink, J. S., de Koter, A., & Lamers, H. On the nature of the bi-stability jump in the winds of early-type supergiants. *Astronomy & Astrophysics 350* (1999), p. 181.

Votruba, V. *PhD thesis.* Masaryk University Brno, 2006.

Wilson, I. R. G., & Dopita, M. A. An empirical investigation of mass-loss in OB stars. *Astronomy & Astrophysics 149* (1985), p. 295.

Yoon, S. C., & Langer, N. Evolution of rapidly rotating metal-poor massive stars towards gamma-ray bursts. *Astronomy & Astrophysics 443* (2005), p. 643.

Yudin, R. V. Statistical analysis of intrinsic polarization, IR excess and projected rotational velocity distributions of classical Be stars. *Astronomy & Astrophysics 368* (2001), p. 368.

VON ZEIPEL, H. The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses. *The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 84* (1924), p. 665.

ZICKGRAF, F. J. New spectroscopic observations of the B[e]/K binary system MWC 623. *Astronomy & Astrophysics 375* (2001), p. 122.

ZICKGRAF, F. J. *Stars with the B[e] phenomenon* (2006), ASP Conference Series Vol. 355, Eds. M. Kraus & A. S. Miroshnichenko, p. 135.

ZICKGRAF, F. J., HUMPHREYS, R. M., LAMERS, H. A KOL. Spectroscopic study of the outflowing disk winds of B[e] supergiants in the Magellanic Clouds. *Astronomy & Astrophysics 315* (1996), p. 510.

ZICKGRAF, F. J., WOLF, B., STAHL, O. A KOL. The hybrid spectrum of the LMC hypergiant R126. *Astronomy & Astrophysics 143* (1985), p. 421.