

# NLTE MODELY POHYBUJÍCÍCH SE HVĚZDNÝCH ATMOSFÉR

Disertační práce

Daniela Korčáková

Přírodovědecká fakulta Masarykovy University  
Brno 2003





Děkuji svému školiteli RNDr. Jiřímu Kubátovi, CSc., za pomoc při orientaci v problematice hvězdných spekter a za podnětné rady a připomínky. Také děkuji Mgr. Filipu Hrochovi za neuvěřitelnou trpělivost při učení Fortranu 90 a RNDr. Petru Hadravovi, CSc., za odhalení chyby ve vícerozměrném modelu.



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Rovnice přenosu záření</b>	<b>9</b>
2.1	Základní veličiny popisující záření . . . . .	9
2.2	Odvození rovnice přenosu záření . . . . .	10
2.3	Momenty rovnice přenosu záření . . . . .	12
2.4	Rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí . . . . .	14
2.4.1	Lorentzova transformace rovnice přenosu . . . . .	14
2.4.2	Rovnice přenosu záření v pohybující se soustavě . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Rovnice statistické rovnováhy</b>	<b>19</b>
3.1	Lokální termodynamická rovnováha . . . . .	19
3.2	Rovnice statistické rovnováhy . . . . .	22
3.3	Koeficienty opacity a emisivity . . . . .	24
3.4	LTE a NLTE efekty . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Metody řešení statické rovnice přenosu záření</b>	<b>28</b>
4.1	1D metody - statický případ . . . . .	28
4.1.1	Analytické řešení . . . . .	28
4.1.2	Feautrierova metoda . . . . .	29
4.1.3	Metoda proměnných Eddingtonových faktorů . . . . .	30
4.1.4	Metoda nespojitých konečných prvků . . . . .	31
4.2	Dvoudimenzionální metody . . . . .	35
4.2.1	Metoda nespojitých konečných prvků . . . . .	35
4.2.2	Metoda dlouhých charakteristik . . . . .	36
4.2.3	Metoda krátkých charakteristik . . . . .	36
4.2.4	Metoda řešení rovnice přenosu záření v osové symetrii . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Řešení rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí</b>	<b>43</b>
5.1	Jednodimenzionální případ - rovinná geometrie . . . . .	44
5.1.1	Řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace . . . . .	44
5.1.2	Řešení rovnice přenosu záření v soustavě spojené s prostředím bez aberace . . . . .	45

5.1.3	Řešení rovnice přenosu záření v soustavě spojené s prostředím s aberací . . . . .	48
5.2	Dvoudimenzionální případ - osová symetrie . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Testy metod</b>	<b>53</b>
6.1	Metoda nespojitých konečných prvků . . . . .	54
6.1.1	Statický případ . . . . .	54
6.1.2	Nenulový gradient rychlostního pole . . . . .	54
6.2	Osově symetrické řešení . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Iterační schéma</b>	<b>64</b>
7.1	Lambda iterace . . . . .	64
7.2	Metoda přibližných lambda operátorů (ALI) . . . . .	65
7.3	Konvergence lambda iterace a ALI . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Popis programů</b>	<b>68</b>
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Einsteinovy koeficienty a účinné průřezy</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Diferenční schéma</b>	<b>75</b>
<b>C</b>	<b>Vstupní model atmosféry</b>	<b>85</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Cílem této disertační práce je vyvinout numerickou metodu pro řešení NLTE problému přenosu záření vhodnou pro rychle rotující B hvězdy s hvězdným větrem.

O většině vesmírných objektů získáme informaci pouze prostřednictvím záření. Mnoho údajů o hvězdách můžeme zjistit ze spektra hvězd. Pro určení základních parametrů hvězd, jako je efektivní povrchová teplota, tíhové zrychlení na povrchu, hustota a chemické složení byla vyvinuta metoda křivek růstu (Van der Held, 1931). V poslední době se však od této metody upouští, neboť nám není schopna poskytnout přesnější údaje o hvězdách.

Parametry hvězd se určují porovnáním spektra hvězd se sítí syntetických spekter. První modely syntetických spekter byly vytvořeny pouze za předpokladu statické planparalelní atmosféry a lokální termodynamické rovnováhy. Nejvíce používaný je Kuruczův (1970) *ATLAS* (<http://kurucz.harvard.edu/>) a Hubeného (1988) model *TLUSTY* (<http://tlusty.gsfc.nasa.gov/>), který již zahrnuje rovnice statistické rovnováhy. Dalším velmi známým NLTE modelem je Wernerův (1986) *PRO2*, který je součástí rozsáhlejšího projektu Tübingenské university *TMAP* (<http://astro.uni-tuebingen.de/groups/stellar/tmap/index.html>). Postupně se geometrie problému začala více přibližovat k reálné situaci a objevily se sféricky symetrické modely (Mihalas & Hummer, 1974). Jedním z volně dostupných je i *ATA* (<http://www.asu.cas.cz/~kubat/ATA/>) od Kubáta (1994). Pro studium slunečních protuberancí a akrečních disků bylo nutné vytvořit dvourozměrné modely. Ty však nejsou vhodné pro případ těsných dvojhvězd nebo mlhovin. Začaly proto vznikat třídimenzionální modely. Nejznámějším z nich je *MULTI* (<http://www.astro.uio.no/~matsc/mul22/>) od Carlssona (1986), který však nezahrnuje výpočty teploty. Je proto vhodný spíše pro modely slunečních protuberancí se zadanou teplotní strukturou.

Z detailního studia profilů čar ve spektrech jsme schopni získat informaci o rychlostním poli. K dispozici však musíme mít vhodný model. Při zahrnutí rychlostního pole se výpočet velmi zkomplikuje a často se používá pouze aproximačních řešení, např. Sobolevovy aproximace (Sobolev, 1957), nebo se počítá

pouze s malými rychlostmi. Ve sférické symetrii je nevhodnější pro nerelativistické rychlosti Hillierův model *CMFGEN* a pro relativistické rychlosti *PHOENIX* (<http://phoenix.physast.uga.edu/>), který vytvořil Hauschildt a kol. (1997) a rozšířil jej Baron & Hauschildt (1998). Ve více rozměrech zatím není vytvořen vhodný model hvězdné atmosféry, protože přenos záření je v tomto případě velmi komplikovaný. V současné době je tento problém jedním z hlavních úkolů modelování hvězdných spekter. Soustřeďují se na něj například skupiny kolem Fabiani Bendicho a Trujillo Bueno (Španělsko), Carlssona (universita v Oslo) nebo Folini (Švýcarsko).

Ačkoliv se přenosem záření lidé zabývají již od počátků spektroskopie, není zdaleka vyřešen. Důvod je v tom, že jde o nelineární úlohu. Chceme-li, například, zjistit pole záření, musíme znát schopnost prostředí absorbovat a emitovat záření. Tyto vlastnosti jsou určeny obsazením hladin přítomných prvků, které ovšem závisí také na poli záření. Proto se přistupuje k numerickým iterativním metodám.

Z hydrostatických modelů zjistíme průběh teploty a elektronové koncentrace ve hvězdě. Tyto veličiny zde budeme považovat za neměnné, ačkoliv záření ovlivní zpětně i teplotu prostředí. Hlavním přínosem této práce jsou nové metody řešení rovnice přenosu záření a na jejich testování je toto přiblížení dostatečné. V prvním iteračním cyklu předpokládáme platnost lokální termodynamické rovnováhy. Pomocí Boltzmannovy excitační a Sahovy ionizační rovnice zjistíme obsazení hladin. Ty použijeme pro výpočet opacity a emisivity. Vyřešíme rovnici přenosu záření, ze které získáme pole záření v celé atmosféře. Tuto informaci potřebujeme pro rovnice statistické rovnováhy, ze kterých získáme nové obsazení hladin. Celý iterační cyklus opakujeme do požadované přesnosti.

Tomuto schématu také odpovídá řazení práce. Jako první jsou v kapitole 2 popsány základní charakteristiky záření a je odvozena rovnice přenosu záření. Její tvar je zde zapsán pro různé případy – v nejjednodušší planparalelní statické geometrii, ale také pro pohybující se prostředí. Podrobněji je zde rozebrána Lorentzova transformace rovnice přenosu záření.

V následující kapitole jsou uvedeny rovnice statistické rovnováhy včetně speciálního případu lokální termodynamické rovnováhy. Dále jsou zde rozepsány vztahy pro výpočet opacity a emisivity. Na konci kapitoly jsou uvedeny výsledky z numerického modulu *atm*.

Ve 4. kapitole jsou popsány některé numerické metody řešení rovnice přenosu záření. V jednorozměrné geometrii je podrobněji rozebrána metoda nespojitých konečných prvků, která v astronomii není příliš často využívána, ačkoliv pro některé případy je vhodnější nežli klasické metody. Ve více rozměrech je zde uvedena metoda využívající osové symetrie hvězd, která je kombinací metody krátkých a dlouhých charakteristik.

Metoda nespojitých konečných prvků i metoda využívající osové symetrie hvězd jsou v následující kapitole (5) zobecněny pro případ pohybujícího se prostředí. V jednorozměrném případě je diskutován také vliv aberace.

Tyto numerické metody jsou testovány na příkladu typické B hvězdy hlavní posloupnosti v lokální termodynamické rovnováze. Jejich výsledky jsou shrnuty



v kapitole 6.

Celý iterační cyklus (lambda iterace) je popsán v následující kapitole (7). Také je zde ukázána základní myšlenka metody využívající asymptotického lambda operátoru (ALI) a zdůvodněno použití lambda iterací v této práci.

Vytvořené programy a moduly jsou stručně popsány v kapitole 8.

Na závěr (kap. 9) jsou shrnuty výsledky numerických metod i jejich testů.

## Kapitola 2

# Rovnice přenosu záření

Rovnice přenosu záření je jednou ze základních rovnic popisujících stavbu hvězdné atmosféry. Ve své podstatě jde o Boltzmannovu kinetickou rovnici pro fotony. Popis přenosu záření pomocí rozdělovací funkce fotonů je poněkud těžkopádný, proto Boltzmannovu kinetickou rovnici upravujeme do tvaru rovnice přenosu záření, ve které nám vystupují pouze makroskopické veličiny.

Dříve než přejdeme k samotné rovnici přenosu záření, připomeneme si veličiny, které popisují pole záření.

### 2.1 Základní veličiny popisující záření

Jednou ze základních veličin, kterou popisujeme pole záření, je jeho specifická intenzita  $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$ . Je to množství energie z jednotkového frekvenčního intervalu, které projde v daném směru jednotkovou plochou do jednotkového prostorového úhlu za jednotku času.

Středováním specifické intenzity  $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$  přes všechny prostorové úhly získáme střední intenzitu

$$J(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \int I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega. \quad (2.1)$$

K popisu pole záření používáme také monochromatickou hustotu energie záření

$$E_R(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{4\pi}{c} J(\mathbf{r}, \nu, t). \quad (2.2)$$

Integrací přes všechny frekvence získáme celkovou hustotu energie záření

$$E_R(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty J(\mathbf{r}, \nu, t) d\nu = \frac{4\pi}{c} J(\mathbf{r}, t). \quad (2.3)$$

Další důležitou charakteristikou záření je jeho tok  $\tilde{F}(\mathbf{r}, \nu, t)$

$$\tilde{F}(\mathbf{r}, \nu, t) = \int I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} d\omega. \quad (2.4)$$

V astrofyzice používáme veličinu  $F(\mathbf{r}, \nu, t) = \tilde{F}(\mathbf{r}, \nu, t)/\pi$  a zavádíme také Eddingtonovský tok

$$H(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{\tilde{F}(\mathbf{r}, \nu, t)}{4\pi}. \quad (2.5)$$

Rozložení pole záření v prostoru charakterizujeme tenzorem tlaku záření

$$P(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \int I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} \mathbf{n} d\omega. \quad (2.6)$$

Aritmetický průměr diagonálních komponent tohoto tenzoru můžeme považovat za střední tlak záření

$$\bar{P} = \frac{1}{3} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}). \quad (2.7)$$

V planparalelní i sféricky symetrické geometrii je tenzor tlaku záření diagonální

$$P(\mathbf{r}, \nu, t) = \begin{pmatrix} p_R & 0 & 0 \\ 0 & p_R & 0 \\ 0 & 0 & p_R \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3p_R - E_R & 0 & 0 \\ 0 & 3p_R - E_R & 0 \\ 0 & 0 & 3p_R - E_R \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

kde

$$p_R(z, \nu, t) = \frac{4\pi}{c} K(z, \nu, t) \quad (2.9)$$

a  $K(z, \nu, t)$  je druhý Eddingtonovský moment intenzity

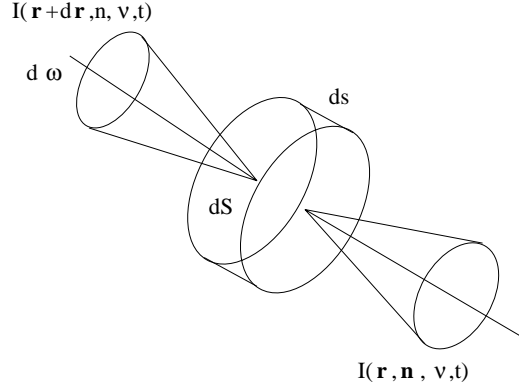
$$K(z, \nu, t) = \frac{1}{2} \int I(z, \mu, \nu, t) \mu^2 d\mu. \quad (2.10)$$

Zavedli jsme zde označení  $\mu = \cos\theta$ .

## 2.2 Odvození rovnice přenosu záření

Předpokládejme, že máme válcový objemový element tloušťky  $ds$  a příčného průřezu  $dS$  (viz obr. 2.1). Rozdíl mezi množstvím energie v intervalu frekvencí  $d\nu$ , která vychází z objemu v  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  a v čase  $t + \Delta t$  v jednotkovém prostorovém úhlu a vchází do něj v  $\mathbf{r}$  a čase  $t$  v jednotkovém prostorovém úhlu, je roven rozdílu energie vyzářené a absorbované za čas  $dt$  v daném elementu do daného prostorového úhlu v intervalu frekvencí  $d\nu$

$$[I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) - I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] dS d\omega d\nu dt = [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] dS d\omega d\nu dt. \quad (2.11)$$



Obrázek 2.1: Schéma pro odvození rovnice přenosu záření.

$\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$  je koeficient emise a  $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$  je koeficient absorpce.  $s$  je vzdálenost počítaná podél paprsku, je tedy  $\Delta t = ds/c$ . Pro intenzitu potom platí

$$I(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) + \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} \right]. \quad (2.12)$$

Derivaci ve směru lze vyjádřit pomocí derivací podle souřadnicových os

$$\frac{\partial I}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (2.13)$$

Dosazením (2.13) a (2.12) do (2.11) dostaneme rovnici přenosu záření

$$\left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \right] I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t). \quad (2.14)$$

Toto je nejobecnější tvar rovnice přenosu záření.

Ve stacionárním případě je člen  $\partial I / \partial t = 0$ . Pro rovinnou atmosféru, kde se charakteristiky prostředí mění pouze se souřadnicí  $z$  (planparalelní geometrie), se rovnice ještě zjednoduší

$$\mu \frac{dI(z, \mathbf{n}, \nu)}{dz} = \eta(z, \mathbf{n}, \nu) - \chi(z, \mathbf{n}, \nu) I(z, \mathbf{n}, \nu). \quad (2.15)$$

$z$  počítáme od nitra atmosféry k pozorovateli.

V nepohybujících se oblastech, je-li izotropní rozptyl, jsou koeficienty emisivity a absorpce izotropní

$$\mu \frac{dI(z, \mathbf{n}, \nu)}{dz} = \eta(z, \nu) - \chi(z, \nu) I(z, \mathbf{n}, \nu). \quad (2.16)$$

V mnoha situacích je výhodné místo souřadnice  $z$  zavést optickou hloubku definovanou

$$d\tau(\nu) = -\chi(z, \nu) dz. \quad (2.17)$$

Dosažením do (2.16) získáme nejjednodušší tvar rovnice přenosu záření

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \nu)}{d\tau} = -S(\tau, \nu) + I(\tau, \mu, \nu), \quad (2.18)$$

kde

$$S(\tau, \nu) = \frac{\eta(\tau, \nu)}{\chi(\tau, \nu)} \quad (2.19)$$

je zdrojová funkce.

Rovnice přenosu záření je po matematické stránce integrodiferenciální rovnicí. Na pravé straně vystupuje buď opacita a emisivita, nebo zdrojová funkce. Tyto veličiny však také závisí na poli záření. Analyticky jde tato rovnice vyřešit pouze pro velmi zjednodušené případy (viz Mihalas, 1982, kap. 2.2). Proto byla vyvinuta řada numerických metod (kap. 4).

## 2.3 Momenty rovnice přenosu záření

Momenty rovnice přenosu záření mají důležitý fyzikální význam. Vyjadřují zákony zachování zářivé energie a impulsu. Těchto rovnic se s výhodou používá při řešení problému přenosu záření.

Rovnici přenosu záření (2.14) zintegrujeme přes celý prostor

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega + \int (\mathbf{n} \cdot \nabla) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega = \\ \int [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

První integrál je úměrný střední intenzitě záření (viz 2.1) a druhý je energie na frekvenci  $\nu$  (viz 2.4). Rovnici můžeme tedy přepsat

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial J(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{F}(\mathbf{r}, \nu, t) = \int [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \quad (2.21)$$

Zintegrujeme-li tuto rovnici přes všechny frekvence a přihlédneme-li ke vztahu pro monochromatickou hustotu energie záření (2.2) získáme

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \tilde{F}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\nu \int [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \quad (2.22)$$

Tato rovnice vyjadřuje zákon zachování zářivé energie.

V planparalelní geometrii, jestliže jsou koeficienty absorpce a emise izotropní, má tato rovnice nejjednodušší tvar

$$\frac{\partial H(z, \nu)}{\partial z} = \eta(z, \nu) - \chi(z, \nu) J(z, \nu). \quad (2.23)$$

$H(z, \nu)$  je zde Eddingtonovský tok definovaný (2.5). Zavedeme-li místo souřadnice  $z$  optickou hloubku  $\tau$  (2.17), dostaneme první momentovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial H(\tau, \nu)}{\partial \tau} = J(\tau, \nu) - S(\tau, \nu). \quad (2.24)$$

Abychom získali rovnici vyjadřující zákon zachování hybnosti, musíme rovnici přenosu záření (2.14) vynásobit  $\mathbf{n}$  a opět integrovat přes celý prostor

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{n} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega + c \int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega = \\ \int \mathbf{n} [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.25)$$

První integrál je roven toku záření (2.4) a druhý tenzoru tlaku záření (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{F}(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial t} + \nabla \cdot P(\mathbf{r}, \nu, t) \\ = \frac{1}{c} \int \mathbf{n} [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tuto rovnici zintegrujeme přes všechny frekvence a získáme rovnici vyjadřující zákon zachování impulsu

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot P(\mathbf{r}, t) = \\ \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int \mathbf{n} [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Jsou-li koeficienty absorpce a emise izotropní, potom je člen v integrálu nulový. V planparalelní geometrii se situace ještě zjednoduší

$$\frac{\partial K(z, \nu)}{\partial z} = -\chi(z, \nu) H(z, \nu). \quad (2.28)$$

$K(z, \nu)$  je druhý Eddingtonovský moment intenzity (2.9, 2.10). Ve škále optických hloubek je

$$\frac{\partial K(\tau, \nu)}{\partial \tau(\nu)} = H(\tau, \nu). \quad (2.29)$$

Momentových rovnic lze s výhodou využít pro řešení rovnice přenosu záření. Zbavíme se tak explicitní úhlové závislosti a rozměr soustavy se sníží. Problém však nastane při jejich řešení, protože momentová rovnice řádu  $n$  vždy obsahuje moment  $n + 1$ . Pro uzavření soustavy zavádíme například proměnný Eddingtonův faktor

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu}. \quad (2.30)$$

## 2.4 Rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí

U horkých hvězd s hvězdným větrem, u rozpínajících se mlhovin, nov, supernov, Wolf-Rayetových hvězd, u extragalaktických rádiových zdrojů nebo při studiu rychlých změn slunečních protuberancí se nevyhneme řešení rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí.

Rovnice přenosu záření v čáře se vlivem Dopplerova jevu velmi zkomplikuje. Ačkoliv se čára posune poměrně málo, velmi se změní absorpční schopnost na dané frekvenci pro nepohybujícího se pozorovatele. Pro kontinuum můžeme použít statických rovnic, protože koeficient absorpce kontinua se jen zanedbatelně změní v intervalu frekvencí, ve kterém dochází k Dopplerově jevu.

Nejprve si ukažme Lorentzovu transformaci rovnice přenosu záření.

### 2.4.1 Lorentzova transformace rovnice přenosu

V objektech jako jsou supernovy, kompaktní extragalaktické rádiové zdroje nebo například kvasary se záření šíří přes velmi rychle se pohybující prostředí. V těchto případech nemůžeme zanedbat efekty speciální teorie relativity. Musíme tedy vědět, jak se transformuje rovnice přenosu záření. Odvození Lorentzovy transformace této rovnice si ukážeme jen v krátkosti postupem rozebraným v knize Mihalas (1982).

Předpokládejme, že se soustava vůči pozorovateli pohybuje konstantní rychlostí podél osy  $z$ . Indexy  $_0$  budeme označovat veličiny vztahující se k soustavě spojené s prostředím. Dále pro jednoduchost předpokládejme, že řešíme přenos záření v jednodimenzionálním případě v rovinné geometrii s rovinnou homogenitou kolmo na směr pohybu. Tento problém v soustavě spojené s pozorovatelem popisuje rovnice (2.16). Abychom získali tvar této rovnice v soustavě spojené s prostředím, musíme vyjádřit všechny veličiny v soustavě pozorovatele pomocí odpovídajících veličin v soustavě spojené s prostředím.

Lorentzova transformace prostoročasových souřadnic má v tomto případě tvar

$$\mathbf{x}_0 = L\mathbf{x}, \quad (2.31)$$

kde

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ ict_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = v/c. \quad (2.32)$$

Vztah pro specifickou intenzitu získáme, uvědomíme-li si, že počet fotonů, procházejících plochou  $dS$  orientovanou kolmo na osu  $z$  ve frekvenčním intervalu

$d\nu$  do prostorového úhlu  $d\omega$  pod úhlem  $\theta$  vzhledem k ose  $z$  za čas  $dt$ , musí být v obou soustavách stejný.

$$N = \frac{I(\mu, \nu)}{h\nu} d\omega d\nu dS \cos\theta dt, \quad (2.33)$$

$$N_0 = \frac{I_0(\mu_0, \nu_0)}{h\nu_0} d\omega_0 d\nu_0 (dS \cos\theta_0 dt_0 + \frac{dS \nu dt_0}{c}), \quad (2.34)$$

kde  $\mu = \cos\theta = n_z$ . Pro jednoduchost jsme zde předpokládali, že plocha  $dS$  je v klidu vzhledem k soustavě spojené s pozorovatelem. V rovnici (2.34) udává první člen počet fotonů, které projdou plochou  $dS$ , kdyby se v soustavě spojené s prostředím nepohybovala. Druhý člen určuje počet fotonů v objemu  $dS \nu dt$ , kterým projde plocha  $dS$  za čas  $dt$ .

Pro porovnání výrazů (2.33) a (2.34) potřebujeme znát transformační vztahy mezi jednotlivými veličinami. Ty zjistíme z transformace čtyřvektoru hybnosti pro fotony  $\mathbf{P} = \frac{h\nu}{c}(n_x, n_y, n_z, i)^T$ . Obecné transformační vztahy pro kovariantní čtyřvektory jsou

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{L}\mathbf{B}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}_0. \quad (2.36)$$

V našem případě je

$$(\nu_0 n_x^0, \nu_0 n_y^0, \nu_0 n_z^0, i \nu_0)^T = [\nu n_x, \nu n_y, \nu \gamma (n_z - \beta), i \nu \gamma (1 - n_z \beta)]^T. \quad (2.37)$$

Poslední složka této rovnice vyjadřuje Dopplerův jev, který s použitím  $(n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$  můžeme přepsat do přehlednějšího tvaru

$$\nu_0 = \nu \gamma (1 - \mu \beta). \quad (2.38)$$

Ze třetí a čtvrté složky získáme výraz pro aberaci

$$\mu_0 = \frac{\mu - \beta}{1 - \mu \beta} \quad (2.39)$$

a z prvních dvou dokážeme invariantnost úhlu  $\phi = \phi_0$ . Z rovnic pro Dopplerův jev (2.38) a aberaci (2.39) získáme transformační vztahy

$$d\nu_0 = \frac{\nu_0}{\nu} d\nu \quad d\mu_0 = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 d\mu \quad (2.40)$$

Použijeme-li vzorec pro dilataci času  $\Delta t_0 = \gamma \Delta t$  můžeme všechny veličiny do (2.33) a (2.34) dosadit a získat transformační vztah pro specifickou intenzitu

$$\frac{I(\mu, \nu)}{\nu^3} = \frac{I_0(\mu_0, \nu_0)}{\nu_0^3}. \quad (2.41)$$



Nyní potřebujeme zjistit vztahy pro transformaci opacity a emisivity. Vztah pro emisivitu určíme z požadavku, aby počet fotonů vyzářených za čas  $dt$  do prostorového úhlu  $d\omega$  a v intervalu frekvencí  $d\nu$  byl v obou soustavách stejný

$$\frac{\eta(\nu)d\omega d\nu dV dt}{h\nu} = \frac{\eta_0(\nu_0)d\omega_0 d\nu_0 dV_0 dt_0}{h\nu_0}. \quad (2.42)$$

Dosazením za  $d\omega$  a  $d\nu$  z (2.40) a s přihlédnutím k invariantnosti prostoročasového elementu  $dV dt$  získáme

$$\frac{\eta(\nu)}{\nu^2} = \frac{\eta_0(\nu_0)}{\nu_0^2}. \quad (2.43)$$

Předpokládejme, že v dané inerciální soustavě platí zářivá rovnováha, potom platí také ve všech ostatních inerciálních soustavách

$$\eta(\nu) = \chi(\nu)I, \quad (2.44)$$

$$\eta_0(\nu_0) = \chi_0(\nu_0)I_0. \quad (2.45)$$

Dosadíme-li výrazy pro transformaci koeficientu emisivity (2.43) a specifické intenzity (2.41), získáme

$$\chi(\nu) = \frac{\nu_0}{\nu} \chi_0(\nu_0). \quad (2.46)$$

Pro vyjádření rovnice přenosu záření v soustavě spojené s pohybujícím se prostředím potřebujeme ještě znát transformaci gradientu  $\partial/\partial t$  a  $\partial/\partial z$ . Operátor  $\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right]^T$  je čtyřvektorem a platí pro něj rovnice (2.35) a (2.36)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right)^T = \left[ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \gamma \left( \frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} \right), \frac{\gamma}{ic} \left( \frac{\partial}{\partial t_0} - c\beta \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \right]^T. \quad (2.47)$$

Nyní známe již všechny potřebné veličiny. Můžeme je dosadit do rovnice přenosu záření (2.16) a po úpravě dostaneme její vyjádření v soustavě spojené s prostředím

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial z_0} \right) I_0(\mu_0, \nu_0) = \eta_0(\nu_0) - \chi_0(\nu_0)I_0(\mu_0, \nu_0). \quad (2.48)$$

Pro případ planparalelní atmosféry, kdy je vektor rychlosti pohybu rovnoběžný s vektorem kolmým na rovinu atmosféry, je rovnice přenosu záření invariantní. Tohoto poznatku využijeme dále v kapitole 5.1.1. V obecném případě rovnice přenosu záření invariantní není.

### 2.4.2 Rovnice přenosu záření v pohybující se soustavě

V předchozím paragrafu jsme dokázali Lorentzovskou invariantnost rovnice přenosu záření pro daný speciální případ. Nyní si ukážeme, jak řešit problém obecnějšího rychlostního pole.

Do rovnice přenosu záření (2.16) dosadíme transformační vztahy pro intenzitu (2.41), koeficient emise (2.43) a koeficient absorpce (2.46)

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3 I_0(z_0, \mu_0, \nu_0, t_0) \right] = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 [\eta_0(\nu_0) - \chi_0(\nu_0)I_0(z_0, \mu_0, \nu_0, t_0)]. \quad (2.49)$$

Za předpokladu, že se frekvence s časem nemění, zderivujeme levou stranu rovnice. Po zkrácení  $(\nu/\nu_0)^2$  obdržíme

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial z}\right) I_0(z_0, \mu_0, \nu_0, t_0) + 3\mu I_0(z_0, \mu_0, \nu_0, t_0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) = \eta_0(\nu_0) - \chi_0(\nu_0)I_0(z_0, \mu_0, \nu_0, t_0). \quad (2.50)$$

Parciální derivace  $\partial/\partial t$  a  $\partial/\partial z$  přejdou v soustavě spojené s prostředím na

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial z_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial \mu_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \frac{\partial \nu_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \nu_0}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial t_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial z_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \frac{\partial \nu_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \nu_0}. \quad (2.52)$$

Pomocí Lorentzovy transformace (2.31) a vztahů pro aberaci (2.39) a Dopplerův jev (2.38) můžeme tyto derivace vyjádřit

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} - \beta c \frac{\partial}{\partial z_0}, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial z_0} + (\mu_0^2 - 1) \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \nu_0 \mu_0 \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial \nu_0}. \quad (2.54)$$

Protože u hvězd jsou rychlosti mnohem menší než rychlost světla, zanedbali jsme členy vyššího řádu než  $v/c$  a položili  $\gamma = 1$ . Nyní můžeme dosadit za parciální derivace do rovnice přenosu záření (2.50). Pomocí vztahu pro Dopplerův jev (2.38) upravíme také člen s derivací frekvence podle  $z$ . Dále zanedbáme členy řádu  $v/c$  a vyšší a obdržíme výsledný tvar

$$\left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \left(\mu_0 + \frac{v}{c}\right) \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\mu_0(\mu_0^2 - 1)}{c} \frac{\partial v}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 \mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z_0} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + 3 \frac{\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z_0} \right] I_0(t_0, z_0, \mu_0, \nu_0) = \eta_0(z_0, \nu_0) - \chi_0(z_0, \nu_0)I_0(t_0, z_0, \mu_0, \nu_0). \quad (2.55)$$

Někdy se při nerelativistických rychlostech používá tvar rovnice (2.55) zahrnující pouze Dopplerův jev. Získáme jej zanedbáním všech členů řádu  $v/c$  a aberačního

$$\mu_0 \frac{\partial I_0(z_0, \mu_0, \nu_0)}{\partial z_0} - \frac{\mu_0^2 \nu_0}{c} \frac{\partial v}{\partial z_0} \frac{\partial I_0(z_0, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} = \eta_0(z_0, \nu_0) - \chi_0(z, \nu_0) I_0(z_0, \mu_0, \nu_0). \quad (2.56)$$

Dříve než přikročíme k řešení těchto rovnic, podíváme se v následující kapitole na koeficienty opacity a emisivity.

## Kapitola 3

# Rovnice statistické rovnováhy

Abychom mohli řešit rovnici přenosu záření, potřebujeme znát opacitu a emisivitu. Tyto veličiny jsou závislé na obsazení elektronových hladin v atomu. Pokud je látka v termodynamické rovnováze, můžeme použít Sahovu a Botzmannovu rovnici. Bohužel, reálné atmosféry hvězd nejsou v termodynamické rovnováze (Mihalas, 1982). V některých situacích lze předpokládat, že je termodynamická rovnováha splněna lokálně. Potom řešíme Sahovu a Botzmannovu rovnici pro více malých oblastí. Většinou však předpoklad termodynamické rovnováhy není splněn ani lokálně a musíme řešit kompletní systém rovnic statistické rovnováhy.

### 3.1 Lokální termodynamická rovnováha

V termodynamické rovnováze mají stavové veličiny (tlak, hustota, vnitřní energie, teplota) ve všech místech stejnou hodnotu. Naměřená barevná teplota, kinetická, excitační i ionizační se shodují. Stav plynu je zde popsán termodynamickou teplotou  $T$  a celkovým počtem částic  $N$ .

Rychlosti částic se zde řídí Maxwellovým rozdělením, které nám udává pravděpodobnost toho, že částice bude mít rychlost z intervalu  $(v, v + dv)$

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv, \quad (3.1)$$

kde  $m$  je hmotnost částice a  $k$  Boltzmannova konstanta. Z tohoto zákona vychází nejpravděpodobnější rychlost

$$v_0 = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \quad (3.2)$$

a střední kvadratická rychlost

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Obsazení hladin v daném iontu popisuje Boltzmannova excitační rovnice

$$\left( \frac{n_{ijk}}{n_{0jk}} \right) = \left( \frac{g_{ijk}}{g_{0jk}} \right) \exp \left( -\frac{\chi_{ijk}}{kT} \right), \quad (3.4)$$

kde  $n$  je počet elektronů na dané hladině,  $g$  statistická váha hladiny a  $\chi$  excitační energie hladiny. Index  $i$  označuje hladinu daného atomu  $k$  v  $j$ -tém stupni ionizace. Někdy je výhodnější obsazení dané hladiny vyjádřit ne k základní hladině atomu nebo iontu (s indexem 0), ale k libovolné hladině

$$\left( \frac{n_{mjk}}{n_{ljk}} \right) = \left( \frac{g_{mjk}}{g_{ljk}} \right) \exp \left( -\frac{(\chi_{mjk} - \chi_{ljk})}{kT} \right). \quad (3.5)$$

Boltzmannovu rovnici můžeme také zapsat vzhledem k celkovému počtu atomů v daném stavu

$$N_{jk} = \sum_i n_{ijk} = \frac{n_{0jk}}{g_{0jk}} \sum_i g_{ijk} \exp \left( -\frac{\chi_{ijk}}{kT} \right) = \frac{n_{0jk}}{g_{0jk}} U_{jk}(T), \quad (3.6)$$

kde

$$U_{jk}(T) = \sum_i g_{ijk} \exp \left( -\frac{\chi_{ijk}}{kT} \right) \quad (3.7)$$

je stavová suma. Boltzmannova rovnice má potom tvar

$$\left( \frac{n_{ijk}}{N_{jk}} \right) = g_{ijk} \exp \left( -\frac{\chi_{ijk}}{kT} \right) / U_{jk}(T). \quad (3.8)$$

Tento zápis je výhodný pro dosazení do rovnice ionizační rovnováhy, abychom získali informaci o počtu elektronů ve všech hladinách a ve všech stupních ionizace.

Ionizační rovnováhu nám charakterizuje Sahova rovnice

$$n_{0,0,k} = n_{0,1,k} n_e \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \left( \frac{g_{0,0,k}}{g_{0,1,k}} \right) \exp \left( \frac{\chi_{I,0,k}}{kT} \right), \quad (3.9)$$

kde  $\chi_{I,0,k}$  je ionizační energie. Obecnější zápis, kdy obsazení v libovolném ionizačním stavu  $j$  získáme z  $j+1$  stavu, je

$$n_{0,j,k} = n_{0,j+1,k} n_e \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \left( \frac{g_{0,j,k}}{g_{0,j+1,k}} \right) \exp \left( \frac{\chi_{I,j,k}}{kT} \right). \quad (3.10)$$

Často potřebujeme znát obsazení hladiny v daném excitovaném a ionizačním stavu. Do Sahovy ionizační rovnice proto dosadíme Boltzmannovu excitační rovnici (3.4)

$$n_{ijk} = n_{0,j+1,k} n_e \frac{g_{i,j,k}}{g_{0,j+1,k}} C_I T^{-3/2} \exp \left[ \frac{\chi_{I,j,k} - \chi_{i,j,k}}{kT} \right] = n_{0,j+1,k} n_e \Phi_{ijk}(T), \quad (3.11)$$

kde konstanta  $C_I = 2,07 \cdot 10^{-16}$ . Tento výraz můžeme s pomocí (3.6) přepsat na

$$n_{ijk} = N_{j+1,k} n_e \frac{g_{0,j+1,k}}{U_{j+1,k}(T)} \Phi_{ijk}(T) = N_{j+1,k} n_e \tilde{\Phi}_{ijk}(T). \quad (3.12)$$

Sumací přes všechny vázané stavy a s využitím (3.6) získáme vzorec pro výpočet celkového počtu atomů v následujícím stupni ionizace

$$\left( \frac{N_{j,k}}{N_{j+1,k}} \right) = n_e \frac{U_{j,k}(T)}{U_{j+1,k}(T)} C_I T^{-3/2} \exp \left( \frac{\chi_{Ijk}}{kT} \right) = n_e \tilde{\Phi}_{jk}(T). \quad (3.13)$$

Z tohoto vztahu můžeme získat poměr počtu atomů chemického prvku  $k$  v  $j$ -tém stupni ionizace ku celkovému počtu atomů daného prvku.

$$\frac{N_{j,k}}{N_k} = \frac{(N_{J_k-1,k}/N_{J_k k}) \cdots (N_{j,k}/N_{j+1,k})}{1 + \frac{N_{J_k-1,k}}{N_{J_k k}} + \frac{N_{J_k-1,k}}{N_{J_k k}} \frac{N_{J_k-2,k}}{N_{J_k-1,k}} + \cdots + \frac{N_{J_k-1,k}}{N_{J_k k}} \cdots \frac{N_{0k}}{N_{1k}}}. \quad (3.14)$$

V termodynamické rovnováze (ozn. \*) je pole záření izotropní a je popsáno Planckovým vyzářovacím zákonem

$$I_\nu^*(T) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \exp \left( \frac{h\nu}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Intenzita je v tomto případě funkcí pouze frekvence a teploty. V rovnovážném stavu musí být energie, která je absorbována daným objemem, rovna energii, kterou tento objem látky vyzáří

$$\eta_\nu d\nu dV d\omega = \chi_\nu I_\nu^*(T) d\nu dV d\omega, \quad (3.16)$$

tedy

$$I_\nu^*(T) = \eta_\nu / \chi_\nu = S_\nu(T). \quad (3.17)$$

Vidíme, že je zde intenzita rovna zdrojové funkci a ta Planckově funkci. K této situaci se blíží oblasti hluboko pod fotosférou hvězd, ale ne v jejich atmosférách. Tam lze někdy předpokládat, že podmínky termodynamické rovnováhy jsou splněny jen v malých oblastech. Tato aproximace se označuje jako *lokální termodynamická rovnováha*.

Za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy můžeme atmosféru hvězdy rozdělit do malých oblastí (buněk), ve kterých je látka charakterizovaná svou teplotou. Vzhledem k tomu, že záření, vycházející z hvězdy prochází oblastmi s různou teplotou, již není izotropní, je nutné pro zjištění pole záření řešit rovnici přenosu záření.

## 3.2 Rovnice statistické rovnováhy

Jestliže nelze použít přiblížení lokální termodynamické rovnováhy, musíme pro získání obsazení hladin řešit systém rovnic statistické rovnováhy (blíže viz např. Mihalas, 1982)

$$\frac{\partial n_{ik}}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_{ik} \mathbf{v}) + \sum_{j \neq i} (n_{jk} P_{ji} - n_{ik} P_{ij}). \quad (3.18)$$

$P_{ij}$  je celková pravděpodobnost přechodu z hladiny  $i$  na hladinu  $j$ , která je dána součtem pravděpodobností přechodu díky zářivým ( $R_{ij}$ ) a srážkovým ( $C_{ij}$ ) procesům.

$$P_{ij} = R_{ij} + C_{ij} \quad (3.19)$$

Na levé straně rovnice (3.18) je časová změna koncentrace chemického prvku  $k$  v některém  $i$ -tém stavu v daném objemu. Ta je rovna toku částic přes povrch ohraničující danou oblast a rozdílem rychlosti přírůstku z druhých hladin  $j$  díky zářivým a srážkovým procesům a rychlosti úbytku na ostatní hladiny  $j$ . Dále se budeme zabývat statickým případem, ve kterém se tvar této rovnice zjednoduší

$$n_{ik} \sum_{j \neq i} P_{ij} = \sum_{j \neq i} n_{jk} P_{ji}. \quad (3.20)$$

Celková pravděpodobnost přechodu díky zářivým procesům je

$$R_{ij} = \int d\Omega \int \frac{d\nu}{h\nu} [U_{ij}(\mu, \nu) + V_{ij}(\mu, \nu) I_{\mu, \nu}], \quad (3.21)$$

kde  $U_{ij}$  a  $V_{ij}$  jsou pro čáru

$$U_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{h\nu}{4\pi} A_{ij} \phi_{ij}(\mu, \nu) & \text{pro } i > j \\ 0 & i < j, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$V_{ij} \equiv \frac{h\nu}{4\pi} B_{ij} \phi_{ij}(\mu, \nu).$$

Poslední výraz platí jak pro  $i > j$ , tak i pro  $i < j$ . Pro kontinuum platí

$$U_{ij} \equiv \begin{cases} n_e \Phi_{ij}(T) \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \alpha_{ij}(\nu) & \text{pro } i > j \\ 0 & i < j, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$V_{ij} \equiv \begin{cases} n_e \Phi_{ij}(T) e^{-\frac{h\nu}{kT}} \alpha_{ij}(\nu) & \text{pro } i > j \\ \alpha_{ij}(\nu) & i < j. \end{cases}$$

Tyto veličiny zde zavádíme proto, že s jejich pomocí můžeme pravděpodobnosti zářivých přechodů pro kontinuum a čáru zapsat formálně stejně, což je velmi užitečné při tvorbě programů (Rybicki & Hummer, 1992). V těchto výrazech je  $n_e$  koncentrace elektronu a  $\Phi_{ij}$  Saha–Boltzmannova funkce (3.11).  $A_{ji}$ ,  $B_{ji}$

a  $B_{ij}$  jsou Einsteinovy koeficienty přechodu.  $\alpha_{ij}(\nu)$  je účinný průřez vázaně-volných přechodů (A.5) (v tomto případě popisuje index  $i$ , nebo  $j$  ionizaci, nebo rekombinaci). Tyto veličiny jsou blíže popsány v dodatku A.

Pravděpodobnosti srážkových přechodů jsou pro excitační srážky (viz např. Mihalas, 1982)

$$C_{ij} = C_0 n_e T^{1/2} 14,5 f_{ij} \left( \frac{I_H}{E_0} \right)^2 u_0 e^{-u_0} \Gamma_e(u_0), \quad (3.24)$$

kde  $u_0 = E_0/kT$ , energie  $E_0 = h\nu$ ,  $I_H$  je ionizační energie, konstanta

$$C_0 = \pi a_0^2 (8k/m_e \pi)^{1/2}$$

a faktor

$$\Gamma_e = \begin{cases} 0,276 e^{u_0} E_1 & \text{pro } u_0 \leq 14 \\ 0,066 u_0^{-1/2} (1 + 1,5/u_0) & u_0 > 14. \end{cases}$$

$E_1$  je zde ionizační energie. Pro pravděpodobnosti obrácených přechodů můžeme využít

$$n_j C_{ji} = n_j \left( \frac{n_i}{n_j} \right)^* C_{ij}. \quad (3.25)$$

Indexem \* jsou označeny veličiny v lokální termodynamické rovnováze, tedy pro  $(n_i/n_j)^*$  použijeme Boltzmannovu rovnici (3.5).

Pravděpodobnosti ionizačních srážek můžeme získat z (Jefferies, 1968)

$$C_{ik} = 1,55 \cdot 10^{13} n_e T^{-1/2} \bar{g}_i \alpha(\nu_0) e^{-u_0} / u_0. \quad (3.26)$$

$\bar{g}_i$  je 0,1 pro vodík, 0,2 pro helium a pro ostatní prvky 0,3.  $\alpha(\nu_0)$  je ionizační účinný průřez (A.5).

Pomocí veličin  $U_{ij}$  a  $V_{ij}$  rozepíšeme rovnice statistické rovnováhy

$$\sum_j n_j C_{ji} + \sum_j \int d\Omega \int \frac{d\nu}{h\nu} (n_j U_{ji} + n_j V_{ji} I_{\nu\nu}) = \sum_j n_i C_{ij} + \sum_j \int d\Omega \int \frac{d\nu}{h\nu} (n_i U_{ij} + n_i V_{ij} I_{\nu\nu}), \quad (3.27)$$

kde  $i, j$  nabývají postupně hodnot od jedné do zvoleného počtu hladin daného iontu plus jedna. Poslední rovnice charakterizuje vázaně-volné přechody. Tento systém rovnic je lineárně závislý. Na uzavření soustavy potřebujeme ještě jednu rovnici, kterou může být buď rovnice zachování počtu částic, rovnice zachování náboje, nebo abundanční rovnice. Je-li relativní zastoupení prvku vůči vodíku malé  $\alpha_k/\alpha_H \ll 1$ , potom je výhodné použít abundanční rovnici

$$\sum_{i,j} n_{ij,k} - (\alpha_k/\alpha_H) \left( \sum_i n_{i,H} + n_p \right) = 0, \quad (3.28)$$



kde  $n_p$  je koncentrace protonů. Další možností je využít zákon zachování náboje

$$\sum_k \sum_j j \sum_i n_{ijk} + n_p = n_e, \quad (3.29)$$

nebo zákon zachování počtu částic

$$\sum_k \sum_j \sum_i n_{ijk} = N. \quad (3.30)$$

V reálné situaci je systém rovnic (3.27) velice rozsáhlý. Každý prvek má velké množství hladin a i kdybychom vzali v úvahu pouze nejdůležitější prvky, nacházející se v hvězdné atmosféře, bude výpočet této soustavy rovnic velice náročný. Proto se v praxi využívá skutečnosti, že mezi hladinami, které mají velmi blízké energie, dochází převážně ke srážkovým přechodům. Vlivem srážkových přechodů se mezi těmito hladinami ustaví termodynamická rovnováha a pro získání obsazení hladin není potřeba řešit rovnice statistické rovnováhy. Tyto blízké hladiny se sloučí do tzv. superhladin (Anderson, 1989, Hubeny & Lanz, 1995). Přitom se musí brát ohled také na paritu hladin, jelikož přechody mezi povolenými a zakázanými hladinami jsou mnohem méně pravděpodobné. Soustava rovnic (3.27) se řeší právě pro superhladinu a obsazení hladin se následně spočítá z požadavku termodynamické rovnováhy mezi jednotlivými hladinami superhladin. V případě molekul superhladinu tvoří rotační hladiny o stejném vibračním čísle.

Frekvenční síť musí být zvolena dostatečně hustě, aby integrace přes frekvence nebyla zatížena příliš velkou chybou. To znamená přibližně 5 – 9 bodů na čáru. V kontinuu se volí síť tak, aby byla v logaritmické škále ekvidistantní, přičemž  $\Delta \log(\nu) \simeq 0.1$ .

Nyní již můžeme rovnice statistické rovnováhy vyřešit a získat tak obsazení hladin, které potřebujeme znát pro výpočet opacity a emisivity.

### 3.3 Koeficienty opacity a emisivity

Emisivita a opacita nám charakterizují interakci látky se zářením.

Celková opacita, tedy schopnost prostředí pohlcovat záření, je pro hvězdnou atmosféru dána schopností látky absorbovat záření díky vázaně–vázaným, vázaně–volným, volně–volným procesům a Thomsonovu rozptylu

$$\chi_\nu = \sum_i \sum_{j>i} \left( n_i - \frac{g_i}{g_j} n_j \right) \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i (n_i - n_i^* e^{-\frac{h\nu}{kT}}) \alpha_{ik}(\nu) + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}) + n_e \sigma_e. \quad (3.31)$$

$n_i$ ,  $n_j$  je obsazení  $i$ -té a  $j$ -té hladiny a  $g_i$ ,  $g_j$  jsou odpovídající statistické sumy hladin.  $\alpha_{ij}(\nu)$  je účinný průřez vázaně–vázaných přechodů,  $\alpha_{ik}(\nu)$  vázaně–volných a  $\alpha_{kk}(\nu, T)$  volně–volných přechodů (viz dodatek A).  $\nu$  je frekvence

záření,  $h$  Planckova konstanta,  $k$  Boltzmannova konstanta a  $T$  je elektronová teplota.  $n_k$  označuje koncentraci atomů daného chemického prvku  $k$  a  $n_e$  koncentraci elektronů. V posledním členu je  $\sigma_e$  Thomsonův účinný průřez.

Schopnost látky vyzařovat záření charakterizuje emisivita

$$\eta_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \sum_i \sum_{j>i} \frac{g_i}{g_j} n_j \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i n_i^* e^{-\frac{h\nu}{kT}} \alpha_{ik}(\nu) + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right] + n_e \sigma_e, \quad (3.32)$$

kde, jako dříve v rovnici (3.31), první člen popisuje vázaně–vázané procesy, druhý vázaně–volné, třetí volně–volné procesy a poslední člen charakterizuje vliv Thomsonova rozptylu.

Poměr emisivity ku opacitě určuje zdrojovou funkci  $S_\nu$

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}, \quad (3.33)$$

kteřá je v termodynamické rovnováze rovna Planckově vyzařovací funkci.

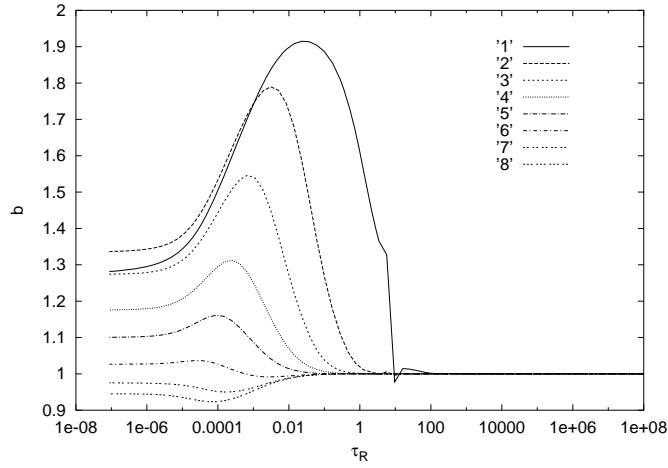
Ze zadaných parametrů hvězdné atmosféry (teploty a elektronové koncentrace) jsme již schopni spočítat obsazení hladin a z nich koeficienty opacity a emisivity. Tyto veličiny potřebujeme znát pro řešení rovnice přenosu záření, kterému se budeme věnovat v následující kapitole. Ještě dříve se ale pojďme podívat na některé jevy spojené s NLTE předpokladem.

### 3.4 LTE a NLTE efekty

V přiblížení lokální termodynamické rovnováhy se v dané oblasti rychlosti částic řídí rovnovážným Maxwellovým rozdělením. Platí zde princip detailní rovnováhy, kdy pro libovolné dvě hladiny je počet přechodů z hladiny s nižší energií ( $i$ ) na hladinu s vyšší energií ( $j$ )  $n_i P_{ij}$  (tzv. rate nahoru) roven počtu přechodů z hladiny s vyšší energií na hladinu s nižší energií  $n_j P_{ji}$  (rate dolů). V NLTE je počet elektronů, které přijdou do dané hladiny ze *všech* ostatních hladin roven počtu elektronů, které tuto hladinu opustí na *všechny* ostatní hladiny (3.20). I v tomto případě předpokládáme, že rychlosti částic jsou Maxwellovské. V rovnicích statistické rovnováhy (3.27) jsme brali v úvahu jak srážkové, tak také zářivé přechody. Jsou-li zářivé raty zanedbatelné ve srovnání se srážkovými, pak vzhledem k tomu, že rychlosti částic jsou Maxwellovské, dojde k ustavení rovnováhy. Tato situace nastává v hustém prostředí hluboko pod fotosférou hvězdy. Naopak, v horních vrstvách atmosféry je nízká hustota a převažuje zářivý rate. Kdyby intenzita záření byla rovna Planckově funkci, potom i zde by se ustavila termodynamická rovnováha. Z nitra hvězdy však přichází mnohem více záření než z povrchu, proto dojde k jejímu porušení.

K termalizaci různých hladin dochází za odlišných podmínek. Vzhledem k tomu, že energetický rozdíl mezi hladinami s velkým kvantovým číslem je malý,

je kinetická energie částic při srážkách i při nízké teplotě dostatečná na excitaci nebo ionizaci těchto hladin. Proto u těchto hladin dojde mnohem dříve k termalizaci, než u hladin s nízkým kvantovým číslem. Na obr. 3.1 je zachycena změna



Obrázek 3.1: Průběh  $b$  faktoru v závislosti na Rosselandově optické hloubce pro osm hladin vodíku (1 – základní hladina).  $b$ -faktory jsou spočítány pomocí numerického modulu *atm* (viz kap. 8) ze vstupních parametrů uvedených v tabulce v dodatku C.

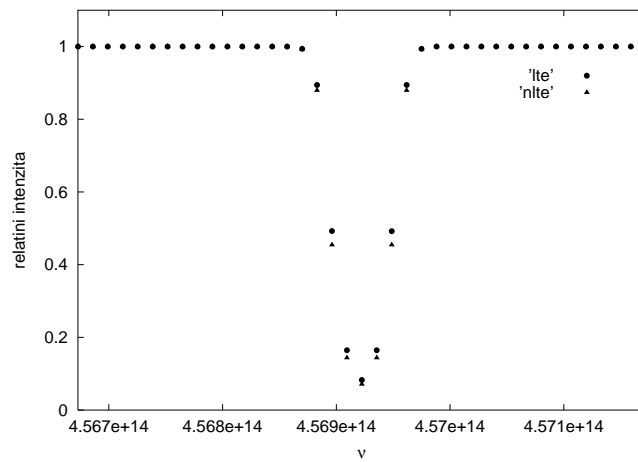
poměru obsazení hladiny v NLTE a LTE, tzv.  $b$  faktoru

$$b_i = \frac{n_i}{n_i^*}, \quad (3.34)$$

v závislosti na Rosselandově optické hloubce  $\tau_R$ . Ta je určena Rosselandovou střední opacitou definovanou

$$\bar{\chi}_R = \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \quad (3.35)$$

Jak je vidět z obrázku 3.1 základní hladina atomu vodíku se termalizuje až ve větších optických hloubkách, zatímco hladiny s velkým hlavním kvantovým číslem už v poměrně řídkých oblastech. K termalizaci třetí hladiny dochází v optické hloubce blízké k 0,5, což znamená, že se čára  $H\alpha$  v NLTE nebude příliš lišit od LTE výpočtu (viz obr. 3.2). Tyto výsledky byly získány z numerického modulu *atm.f90* (viz kap. 8) ze vstupních parametrů uvedených v tabulce v dodatku C.



Obrázek 3.2: Srovnání profilů čáry  $H\alpha$  čáry za předpokladu LTE a NLTE. Vzhledem k tomu, že druhá a třetí hladina jsou při Rosselandově optické hloubce rovné jedné ještě termalizovány (viz obr. 3.1), neliší se příliš profil čáry v LTE a NLTE.

## Kapitola 4

# Metody řešení statické rovnice přenosu záření

V kapitole 2 jsme se seznámili s rovnicí přenosu záření. Jde o integrodiferenciální rovnici jejíž řešení není jednoduché. Pouze pro nejjednodušší závislosti zdrojové funkce na optické hloubce lze provést její analytické řešení. V ostatních případech musíme přistoupit k numerickým metodám.

Popíšeme si zde základní myšlenky numerických metod nejčastěji používaných v přenosu záření. Mezi jednodimenzionálními metodami patří ke klasickým Feautrierova metoda. Podrobněji si rozebereme metodu nespojitých konečných prvků, která sice dosud není tak často používána, ale dovoluje nám řešit obecnější situace. Ve více rozměrech si ukážeme řešení pomocí krátkých i dlouhých charakteristik a řešení využívající osové symetrie hvězd.

### 4.1 1D metody - statický případ

#### 4.1.1 Analytické řešení

Analytické řešení rovnice přenosu záření je možné pouze pro jednoduché závislosti zdrojové funkce na optické hloubce a to jen v jednorozměrném statickém případě.

Planparalelní statický tvar rovnice přenosu záření (2.18) je

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \nu)}{d\tau} = -S(\tau, \nu) + I(\tau, \mu, \nu). \quad (4.1)$$

Předpokládejme, že známe zdrojovou funkci  $S$ . Metodou variace konstant získáme výraz pro intenzitu

$$I(\tau_1, \mu, \nu) = I(\tau_2, \mu, \nu)e^{-(\tau_2 - \tau_1)/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t)e^{-(t - \tau_1)/\mu} dt. \quad (4.2)$$

Tento postup se využívá jako součást metod, např. u vícerozměrných krátkých charakteristik (4.2.3). Oblast se rozdělí na malé buňky, ve kterých lze podél paprsku předpokládat lineární, nebo parabolickou závislost zdrojové funkce na optické hloubce.

#### 4.1.2 Feautrierova metoda

Feautrierova metoda (1964) je založená na převedení rovnice prvního řádu na rovnici druhého řádu. Pro názornost vezměme nejjednodušší případ planparalelní statické atmosféry. Přenos záření zde popisuje rovnice (2.18). Označíme-li intenzitu záření směřujícího z atmosféry  $I(\tau_\nu, \mu, \nu)$  a intenzitu záření vcházejícího zpět do nitra hvězdy  $I(\tau_\nu, -\mu, \nu)$ , pak tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\pm\mu \frac{\partial I(\tau_\nu, \pm\mu, \nu)}{\partial \tau_\nu} = I(\tau_\nu, \pm\mu, \nu) - S(\tau_\nu, \nu) \quad \text{kde} \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (4.3)$$

Zavedeme symetrickou a antisymetrickou lineární kombinaci intenzity  $I(\tau_\nu, \mu, \nu)$  a  $I(\tau_\nu, -\mu, \nu)$

$$u(\tau_\nu, \mu, \nu) = \frac{I(\tau_\nu, \mu, \nu) + I(\tau_\nu, -\mu, \nu)}{2}, \quad (4.4)$$

$$v(\tau_\nu, \mu, \nu) = \frac{I(\tau_\nu, \mu, \nu) - I(\tau_\nu, -\mu, \nu)}{2}. \quad (4.5)$$

Veličina  $u$  odpovídá střední intenzitě a  $v$  toku. Tyto výrazy dosadíme do rovnice přenosu záření (4.3) a získáme diferenciální rovnici 2. řádu

$$\mu^2 \frac{\partial^2 u_{\mu, \nu}}{\partial \tau_\nu^2} = u_{\mu, \nu} - S_\nu. \quad (4.6)$$

Pro přehlednost jsme opustili od indexu  $\tau_\nu$ , ačkoliv  $S$  a  $u$  jsou i nadále funkcemi optické hloubky. Tuto rovnici (4.6) dále řešíme Gaussovou eliminací (viz např. Press a kol., 1992).

Zavedeme diskrétní proměnné. Počet hloubkových bodů označíme  $D$ , počet dělení bodů pro úhly  $M$  a pro frekvenci  $N$ . Nahradíme-li v rovnici (4.6) derivace za diference, získáme soustavu rovnic (podrobněji např. Mihalas 1982)

$$-A_d \mathbf{u}_{d-1} + B_d \mathbf{u}_d - C_d \mathbf{u}_{d+1} = L_d. \quad (4.7)$$

Abychom mohli tento systém rovnic řešit, musíme použít hraničních podmínek. Horní hraniční podmínka má tvar

$$\mu \frac{\partial u_{\mu, \nu}}{\partial \tau_\nu} \Big|_0 = u - I(0, -\mu, \nu), \quad (4.8)$$

což v maticovém zápisu dá

$$B_1 \mathbf{u}_1 - C_1 \mathbf{u}_2 = L_1 = 0. \quad (4.9)$$

Je-li hvězda osamocená, můžeme na jejím povrchu zanedbat dopadající záření  $I(0, -\mu, \nu)$ . Dolní hraniční podmínku zapíšeme

$$\mu \frac{\partial u_{\mu, \nu}}{\partial \tau_\nu} \Big|_{\tau_{\nu, max}} = I_+ - u(\tau_{\nu, max}), \quad (4.10)$$

maticově

$$-A_D \mathbf{u}_{D-1} + B_D \mathbf{u}_D = L_D. \quad (4.11)$$

Ve velkých optických hloubkách můžeme předpokládat platnost difuzního přiblížení. Získáme tak u hvězd výraz pro člen  $L_D$

$$L_D = I_+ = I(\tau_{\nu, max}, \mu, \nu) = B_\nu(\tau_{\nu, max}) - \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \Big|_{\tau_{\nu, max}}. \quad (4.12)$$

Pro planetární mlhoviny, sluneční protuberance nebo jiné objekty budou mít hraniční podmínky (4.9) a (4.11) stejný tvar, změní se pouze výrazy pro intenzity  $I(0, -\mu, \nu)$  a člen  $L_D$  v rov. (4.11).

Z horní hraniční podmínky (4.9) vyjádříme specifickou intenzitu  $\mathbf{u}_1$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{C_1}{B_1} \mathbf{u}_2 + \frac{L_1}{B_1} = W_1 + V_1. \quad (4.13)$$

Tento výraz dosadíme do diferencované rovnice přenosu záření (4.7) a získáme

$$\mathbf{u}_d = W_d \mathbf{u}_{d+1} + V_d, \quad (4.14)$$

$$\text{kde} \quad W_d = (B_d - A_d W_{d-1})^{-1} C_d, \quad (4.15)$$

$$V_d = (B_d - A_d W_{d-1})^{-1} (L_d + A_d V_{d-1}). \quad (4.16)$$

Nejprve spočítáme pro  $d=1$  až  $D=D-1$  koeficienty  $W_d$  a  $V_d$ . Využijeme dolní hraniční podmínky, ze které plyne, že  $W_D = 0$  a tedy  $\mathbf{u}_D = V_D$ . Nyní se můžeme vrátit k rovnici (4.14) a vypočítat všechny zbývající Feautrierovy proměnné  $u$ .

Pro zahrnutí úhlové závislosti můžeme využít metodu proměnných Eddingtonových faktorů.

### 4.1.3 Metoda proměnných Eddingtonových faktorů

Pokud jsme již zjistili specifickou intenzitu, můžeme využít momentových rovnic pro zahrnutí úhlové závislosti (Auer & Mihalas, 1970). Z momentových rovnic (blíže viz 2.3)

$$H_\nu = \frac{\partial K_\nu}{\partial \tau_\nu}, \quad \frac{\partial K_\nu}{\partial \tau_\nu} = J_\nu - S_\nu \quad (4.17)$$

vyloučíme Eddingtonův tok  $H_\nu$  a zavedeme proměnný Eddingtonův faktor  $f_\nu$

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu}. \quad (4.18)$$

$J_\nu$ ,  $H_\nu$  a  $K_\nu$  jsou definovány v (2.1), (2.5) a (2.10). Výsledná rovnice je diferenciální rovnicí druhého řádu

$$\frac{\partial^2(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu. \quad (4.19)$$

Hraniční podmínky mají v tomto případě tvar

$$\left. \frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu} \right|_0 = h_\nu J_\nu(0) \quad \text{kde} \quad h_\nu = \frac{H_\nu(0)}{J_\nu(0)}, \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu} \right|_{\tau_{\nu, max}} = H_\nu(\tau_{\nu, max}). \quad (4.21)$$

Druhou rovnici můžeme za předpokladu, že ve velkých optických hloubkách platí difuzní přiblížení, přepsat

$$\left. \frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu} \right|_{\tau_{max}} = -\frac{1}{3} \left. \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \right|_{\tau_{max}}. \quad (4.22)$$

Rovnice (4.19) má stejný tvar jako rovnice (4.6), můžeme ji tedy řešit například Gaussovou eliminací, jako v předchozím případě. Na začátku iteračního cyklu předpokládáme známou zdrojovou funkci. V prvním cyklu můžeme vzít nejjednodušší případ, kdy je zdrojová funkce rovna Planckově. Vyřešíme rovnici přenosu záření (4.6) a získáme tak specifickou intenzitu, pomocí které vypočítáme střední intenzitu a druhý Eddingtonův moment a z nich Eddingtonův proměnný faktor. Vyřešíme momentové rovnice (4.19), ze kterých získáme zpřesněné hodnoty střední intenzity. S její pomocí vypočítáme zdrojovou funkci a vrátíme se na začátek cyklu.

V jedné dimenzi je Feautrierova metoda spolu s metodou proměnných Eddingtonových faktorů velmi často používána. Pro případ kompletní redistribuce, kdy nepotřebujeme znát všechny informace o frekvenční závislosti, tuto metodu zjednodušil Rybicki (1971).

#### 4.1.4 Metoda nespojitých konečných prvků

V poslední době se ve fyzice při numerickém řešení diferenciálních rovnic velmi často používá metoda konečných prvků (viz např. Rektorys, 1980). Nespojité konečné prvky jsou pouze její drobnou obměnou, kterou zavedl Goldin (1964) při řešení problému přenosu neutronů. V astronomii ji poprvé použil při přenosu záření Castor s kol. (1992). Do více rozměrů ji zobecnil Dykema s kol. (1996). Metodu konečných prvků použila ve třech dimenzích při řešení monochromatické statické rovnice přenosu záření Richlingová s kol. (2001).

Metoda nespojitých konečných prvků je zobecněním metody konečných prvků (viz např. Rektorys, 1980). Tato metoda hledá vhodné bázové funkce pro Galerkinovu metodu, která řeší diferenciální rovnici

$$Au = f. \quad (4.23)$$



$A$  je diferenciální operátor s definičním oborem  $D(A)$  hustým na reálném Hilbertově prostoru  $H$ ,  $u$  je hledané řešení a  $f$  vektor pravé strany. V Hilbertově prostoru zvolíme podprostor  $V_K$  a v něm hledáme přibližné řešení  $u_K$  ve tvaru

$$u_K = \sum_{k=1}^K a_k \phi_k. \quad (4.24)$$

Pro řešení musí platit

$$(Au_k - f, \phi_k) = 0 \quad k = 1, \dots, K, \quad (4.25)$$

kde kulaté závorky označují skalární součin definovaný

$$(u, v) = \int u(x)v(x)dx. \quad (4.26)$$

Funkce  $\phi_k$  jsou bázové funkce v podprostoru  $V_K$ . Zde jsme řešení v nekonečně dimenzionálním prostoru nahradili přibližným řešením z konečného podprostoru. Předpokládali jsme při tom, že podprostor  $V_K$  je dostatečně bohatý. V tomto případě je reziduum  $Au_K - f$  malé a lze jej zanedbat.

Bázové funkce v podprostoru  $V_K$  najdeme pomocí metody konečných prvků. Danou oblast rozdělíme na buňky a prvky báze zvolíme tak, aby byly nenulové jen v oblasti jedné buňky. Za bázové funkce pak bereme jednoduché funkce, nejčastěji polynomy. Nechť  $L$  označuje počet nenulových bázových funkcí v jedné buňce  $w_l$  ( $L = K/\text{počet buněk}$ ), potom pro každou buňku řešíme systém algebraických rovnic

$$\begin{aligned} (A(a_1 w_1 + \dots + a_L w_L) - f, w_1) &= 0, \\ \dots, \\ (A(a_1 w_1 + \dots + a_L w_L) - f, w_L) &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

U metody nespojitých konečných prvků do rovnic zahrneme reziduum  $\Delta u_K = Au_K - f$ , které vznikne nahrazením nekonečně rozměrného prostoru konečně dimenzionálním. Pro každou buňku potom máme místo (4.27) tuto soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} (A(a_1 w_1 + \dots + a_L w_L) - f, w_1) &= (\Delta a_1, w_1), \\ \dots, \\ (A(a_1 w_1 + \dots + a_L w_L) - f, w_L) &= (\Delta a_L, w_L). \end{aligned} \quad (4.28)$$

$\Delta a_l, l = 1, \dots, L$  jsou komponenty vektoru rezidua  $\Delta u_L$  v dané buňce. Reziduum lze interpretovat jako rozdíl mezi hodnotou hledané funkce v dané zóně a v předcházející. Systém algebraických rovnic (4.28) řešíme pro neznámé koeficienty  $a_l$  v každé buňce.

Získané řešení z dané buňky není přesně hledané řešení, ale velmi se mu blíží. Abychom obdrželi hledané řešení, v každém síťovém bodě zprůměrujeme hodnoty spočítané z okolních buněk. Tímto krokem se řešení vyhladí a můžeme

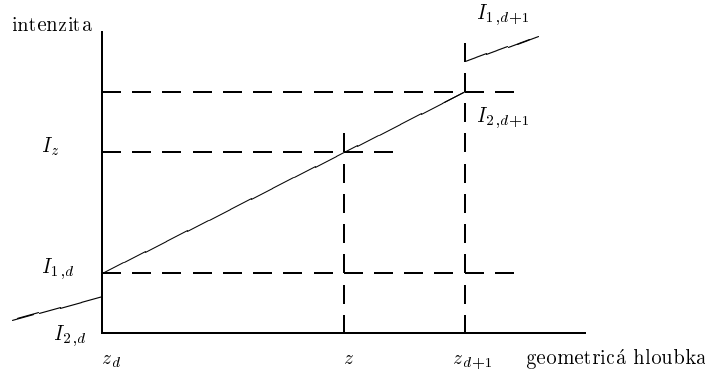
je považovat za řešení rovnice (4.23). Pro přenos záření v hvězdných atmosférách je tato metoda vhodná, protože veličiny, které nám vstupují do rovnice přenosu záření, se mění o několik řádů. Pro nalezení vhodné aproximace řešení bychom potřebovali při použití klasické metody konečných prvků hustší síť nebo složitější básové funkce. Metodu nespojitých konečných prvků nyní použijeme pro řešení statické rovnice přenosu záření v planparalelní geometrii.

### řešení rovnice přenosu záření v planparalelní geometrii

Ve statickém případě má rovnice přenosu záření tvar

$$\mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = \eta(z, \nu) - \chi(z, \nu)I(z, \mu, \nu). \quad (4.29)$$

Zavedeme diskretizaci geometrických hloubek  $z = \{z_d\}$ , ( $d = 1, \dots, D$ ). Index  $d = 1$  odpovídá nejhlubší vrstvě. V každé buňce předpokládáme lineární závislost intenzity na geometrické hloubce (viz obr.4.1). Intenzitu v libovolném bodě



Obrázek 4.1: Závislost intenzity na geometrické hloubce v buňce  $\langle z_d, z_{d+1} \rangle$ .

$z$  buňky  $\langle z_d, z_{d+1} \rangle$  můžeme vyjádřit vztahem

$$I(z) = \frac{z_{d+1} - z}{z_{d+1} - z_d} I_{1,d} + \frac{z - z_d}{z_{d+1} - z_d} I_{2,d+1}. \quad (4.30)$$

Intenzita je lineární kombinací prostorových funkcí s koeficienty rovnými intenzitě v síťových bodech intervalu  $I_{1,d}$  a  $I_{2,d+1}$ . Tyto funkce jsou básovými funkcemi. Označíme je  $w$

$$w_{1,d}(z) = \frac{z_{d+1} - z}{z_{d+1} - z_d}, \quad w_{2,d+1}(z) = \frac{z - z_d}{z_{d+1} - z_d}. \quad (4.31)$$

Předpokládáme také lineární závislost všech členů v rovnici (4.29) na geometrické hloubce v oblasti buňky.

$$\eta(z) = w_{1,d}(z)\eta_d + w_{2,d+1}(z)\eta_{d+1}, \quad (4.32)$$

$$\chi(z)I(z) = w_{1,d}(z)\chi_d I_{1,d} + w_{2,d+1}(z)\chi_{d+1} I_{2,d+1}. \quad (4.33)$$

Výraz pro intenzitu (4.30) spolu s těmito vztahy dosadíme do rovnice (4.29)

$$\begin{aligned} \mu \left( I_{1,d} \frac{dw_{1,d}}{dz_d} + I_{2,d+1} \frac{dw_{2,d+1}}{dz_d} \right) = \\ \eta_d w_{1,d} + \eta_{d+1} w_{2,d+1} - \chi_d I_{1,d} w_{1,d} - \chi_{d+1} I_{2,d+1} w_{2,d+1}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Tuto rovnici skalárně vynásobíme bázovými funkcemi (4.31) a získáme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} \mu I_{1,d} w_{1,d} \frac{dw_{1,d}}{dz_d} + \mu I_{2,d+1} w_{1,d} \frac{dw_{2,d+1}}{dz_d} = \eta_d w_{1,d} w_{1,d} + \eta_{d+1} w_{1,d} w_{2,d+1} - \\ \chi_d I_{1,d} w_{1,d} w_{1,d} - \chi_{d+1} I_{2,d+1} w_{1,d} w_{2,d+1}, \end{aligned} \quad (4.35a)$$

$$\begin{aligned} \mu I_{1,d} w_{2,d+1} \frac{dw_{1,d}}{dz_d} + \mu I_{2,d+1} w_{2,d+1} \frac{dw_{2,d+1}}{dz_d} = \eta_d w_{1,d} w_{2,d+1} + \eta_{d+1} w_{2,d+1} w_{2,d+1} - \\ \chi_d I_{1,d} w_{1,d} w_{2,d+1} - \chi_{d+1} I_{2,d+1} w_{2,d+1} w_{2,d+1} - (I_{1,d} - I_{2,d}) w_{2,d+1}. \end{aligned} \quad (4.35b)$$

Vektor rezidua je nenulový jen pro druhou rovnici. Jako vektor rezidua jsme zvolili rozdíl mezi aktuální a předchozí buňkou (skok v intenzitě). Rozdíl mezi řešením z aktuální a následující buňky je zahrnut až do rovnic pro následující buňku. Tyto rovnice zintegrujeme přes objem buňky a získáme soustavu algebraických rovnic

$$\mathcal{A}\mathbf{I} = \mathbf{b}. \quad (4.36)$$

Prvky matice  $\mathcal{A}$  a vektoru  $\mathbf{b}$  jsou

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} + \frac{\Delta z_d}{3} \chi_d + \frac{\Delta z_d}{2} & \frac{\mu}{2} + \frac{\Delta z_d}{6} \chi_{d+1} \\ -\frac{\mu}{2} + \frac{\Delta z_d}{6} \chi_d & \frac{\mu}{2} + \frac{\Delta z_d}{3} \chi_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \eta_d \frac{\Delta z_d}{3} + \eta_{d+1} \frac{\Delta z_d}{6} + I_{2,d} \frac{\Delta z_d}{2} \\ \eta_d \frac{\Delta z_d}{6} + \eta_{d+1} \frac{\Delta z_d}{3} \end{pmatrix}$$

a vektor řešení

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{1,d} \\ I_{2,d+1} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Tuto soustavu musíme řešit pro každou buňku. Výslednou intenzitu získáme například jako aritmetický průměr

$$I_d = \frac{I_{1,d} + I_{2,d}}{2}. \quad (4.39)$$

Pro řešení potřebujeme ještě znát hraniční podmínky. Spodní hraniční podmínku lze obecně vyjádřit

$$I_{2,1} = I(z_{min}, \mu, \nu) \quad (4.40)$$

a horní hraniční podmínku

$$I_{1,D} = I(z_{max}, -\mu, \nu). \quad (4.41)$$

U hvězd můžeme za spodní okrajovou podmínku (4.40) vzít například difuzní přiblížení

$$I_{2,1} = B_\nu(z = R_0) + \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \Big|_{z=R_0}. \quad (4.42)$$

V případě, že je hvězda osamocena, lze záření, které na její povrch dopadá zanedbat a horní hraniční podmínku (4.41) zapsat

$$I_{1,D} = 0. \quad (4.43)$$

U mlhovin se změní pouze spodní hraniční podmínka –  $I_{2,1}$  je rovno specifické intenzitě záření přicházející z centrální hvězdy. U akrečních disků je situace poněkud složitější. Disk rozdělíme na planparalelní vrstvy a hraniční podmínky jsou určeny zářením přicházejícím ze sousedních vrstev.

## 4.2 Dvoudimenzionální metody

Jednodimenzionální modely nám nedovolují popsat některé případy. Například pro studium chromosféry, korony, slunečních protuberancí, neradiálních oscilací, akrečních disků nebo nesférického větru u horkých hvězd musíme použít již dvoudimenzionální popis. Problém přenosu záření se tím podstatně zkomplikuje.

V opticky tenkých prostředích, například při výpočtu molekulových čar nebo ultrafialového kontinua, můžeme použít metodu Monte Carlo (Boissé, 1990). Bohužel pro opticky tlustá prostředí konverguje velmi pomalu. V těchto podmínkách lze využít metody, která vychází z difuzního přiblížení. Pokud řešíme problém přenosu záření v opticky tenkém i tlustém prostředí, musíme použít metodu diskrétní souřadnicové sítě. Této skupině metod se budeme více věnovat, protože jsou vhodné pro výpočet hvězdného spektra.

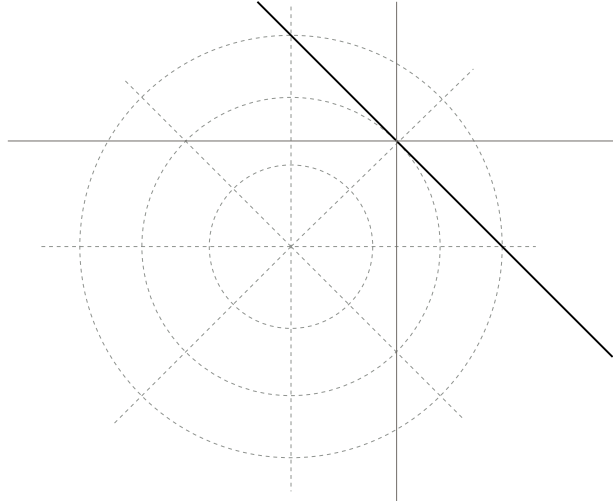
### 4.2.1 Metoda nespojitých konečných prvků

Metodu nespojitých konečných prvků ve dvou dimenzích vyvinul Dykema se svými kolegy (1996). Příliš se neliší od jednodimenzionálního případu. Pouze v rovnicích (4.28) se vyskytuje objemový integrál a plošný integrál, který charakterizuje změnu intenzity na hranici buněk. Ve dvou dimenzích máme více možností volby sítě, což nám umožňuje lépe využít případné symetrie problému.

Tato metoda se v praxi příliš nepoužívá pro svou náročnost na výpočetní čas. Podél každého zvoleného paprsku musíme řešit v každé buňce soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých (4.28), což je výpočetně mnohem náročnější než pouhé násobení, jako je tomu u níže popisovaných metod.

### 4.2.2 Metoda dlouhých charakteristik

Metodu dlouhých charakteristik použil pro řešení rovnice přenosu záření např. Cannon (1970). V každém síťovém bodě vedeme paprsek podél předem zvolených směrů. Podél tohoto paprsku interpolujeme charakteristiky prostředí – opacitu a zdrojovou funkci. Můžeme použít lineární i kvadratickou interpolaci. Obě mají své výhody i nevýhody, o kterých se zmíníme později. Podél paprsku (viz obr. 4.2) určíme optickou hloubku a řešíme rovnici přenosu záření některou z jednodimenzionálních metod. Takto získáme kompletně popsání pole záření.



Obrázek 4.2: Schéma dlouhých charakteristik.

Bohužel, tato metoda je velmi náročná na výpočetní čas a na paměť počítače. Proto byla vytvořena metoda krátkých charakteristik.

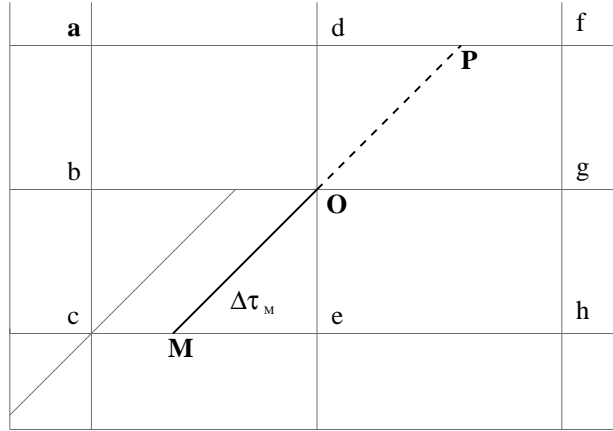
### 4.2.3 Metoda krátkých charakteristik

Metoda krátkých charakteristik (Kunasz & Auer, 1988) je obměnou předchozí metody. Rovnici přenosu záření podél paprsku řešíme pouze v oblasti jedné buňky ohraničené sítí (viz obr.4.3). V bodě  $M$  a  $O$  zjistíme interpolací opacitu a zdrojovou funkci. Mezi těmito body spočítáme optickou hloubku  $\Delta\tau_M$  a řešíme rovnici přenosu záření

$$I_O = I_M e^{-\Delta\tau_M} + \int_0^{\Delta\tau_M} S(t) e^{-(\Delta\tau_M - t)} dt. \quad (4.44)$$

$I_M$  je intenzita v bodě  $M$ , kterou zjistíme interpolací.  $S(t)$  je zdrojová funkce mezi body  $M$  a  $O$ .

Závislost zdrojové funkce na optické hloubce mezi body  $M$  a  $O$  můžeme vyjádřit buď lineárně, nebo parabolicky pomocí bodů  $M$ ,  $O$  a  $P$ . Lineární interpolace je použitelná pro libovolnou síť. Bohužel, řešení selhává ve velkých



Obrázek 4.3: Schéma krátkých charakteristik.

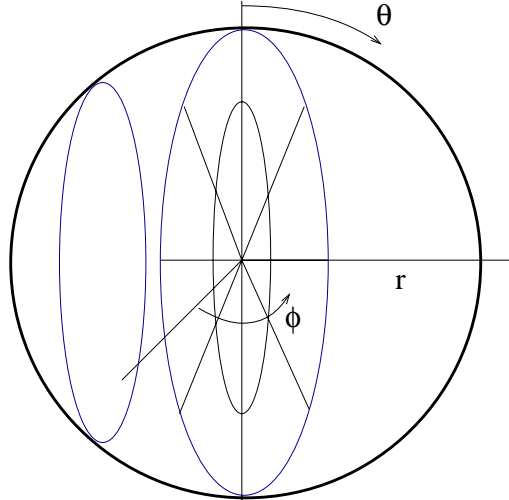
optických hloubkách, kde nezískáme difuzní přiblížení (Auer, 2003). Tomuto problému se vyhneme, použijeme-li kvadratickou interpolaci. Ta je i v mnoha případech přesnější, ale v oblastech s velkým gradientem zdrojové funkce můžeme získat nesmyslné řešení. V některých numerických modelech se proto používají obě interpolace v závislosti na charakteristikách prostředí v daných bodech sítě. Kvadratickou interpolaci jde ale použít pouze pro ortogonální síť. Charakteristiky prostředí v bodech  $M$ ,  $O$  a případně i  $P$  zjistíme buď lineární nebo parabolickou interpolací. Parabolickou interpolaci i zde lze použít pouze pro ortogonální síť.

Výpočetní čas pro metodu krátkých charakteristik je úměrný  $N_x N_z L$ , kde  $N_x$  je počet síťových bodů v ose  $x$ ,  $N_z$  v ose  $z$  a  $L$  je počet frekvenčně-úhlových bodů. Pro srovnání, výpočetní čas u metody dlouhých charakteristik je  $N_x^3 N_z^2 L$ . Z tohoto důvodu se metoda krátkých charakteristik velmi často používá, ačkoliv pole záření zde není tak globálně popsáno jako u metody dlouhých charakteristik.

#### 4.2.4 Metoda řešení rovnice přenosu záření v osové symetrii

V této kapitole využijeme osové symetrie. Tento předpoklad je splněn pro většinu hvězd. Pouze v případě těsných dvojhvězd může dojít k deformaci vlivem slapových sil sousední složky. Toto řešení přenosu záření také nelze použít u hvězd s velmi rozsáhlými skvrnami ve fotosféře. Například u některých rudých obrů nebo chemicky pekulárních hvězd. Metoda také není vhodná pro hvězdy s neradiálními pulzacemi. Na druhou stranu je tato metoda velmi užitečná při studiu hvězdného větru, hvězdné rotace nebo osově symetrických planetárních mlhovin. U těchto objektů je potřeba počítat s vícerozměrným přenosem záření, avšak kompletní 3D výpočet je zde zbytečně časově náročný.

Zavedeme sféricky symetrickou souřadnicovou síť  $(r, \theta, \phi)$ . Předpokládáme, že v každém síťovém bodě známe charakteristiky prostředí – opacitu a emisivitu. Hvězdou proložíme roviny, které jsou rovnoběžné s rovinou  $\theta = 0$  (viz obr. 4.4) (dále je budeme nazývat *podélnými rovinami*). V každé podélné rovině zvolíme

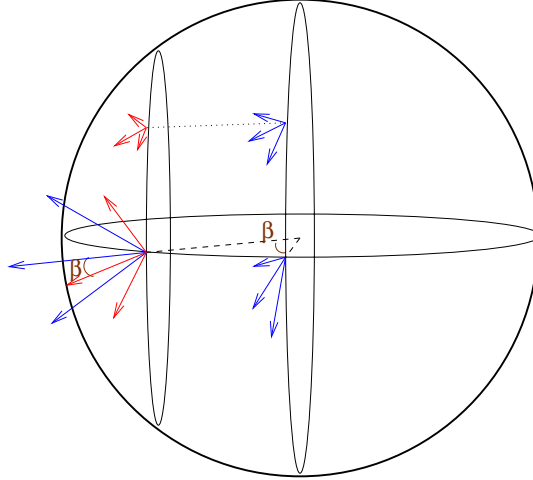


Obrázek 4.4: Schéma podélných rovin.

polární soustavu souřadnic a definujeme *síť kružnic a radiálních přímk* (viz obr. 4.6). Do nové souřadnicové soustavy interpolujeme opacitu, zdrojovou funkci a případně také rychlost pohybu prostředí. V tomto případě použijeme lineární interpolaci, protože jsme zvolili neortogonální síť. V každé podélné rovině řešíme přenos záření nezávisle.

V dané podélné rovině řešíme přenos záření nejprve s využitím horní hraniční podmínky směrem ke středu roviny a potom v opačném směru, kdy použijeme spodní hraniční podmínku. V rovinách, které protínají centrální oblasti hvězdy, můžeme za spodní hraniční podmínku vzít difuzní přiblížení. V ostatních rovinách tuto podmínku nahradíme intenzitou záření, kterou jsme spočítali z předchozího kroku (výpočet ve směru od povrchu hvězdy).

Pro získání celkového pole záření využijeme osové symetrie problému. V každé podélné rovině známe pole záření. Jako výchozí rovinu zvolíme podélnou rovinu, která prochází středem hvězdy. V síťových bodech této roviny známe pole záření ve zvolených směrech ležících v této rovině. Pole záření v ostatních směrech (mimo podélnou rovinu) získáme rotací ostatních podélných rovin kolem osy symetrie. Díky tomu je nutné zvolit síť bodů v podélných rovinách ve stejné vzdálenosti od roviny rovníku (viz obr. 4.5). To má za následek, že roviny vzdálenější od středu mají menší počet síťových bodů. To ovšem nevadí, protože v těchto oblastech je již optická hloubka malá.



Obrázek 4.5: Schéma pro popis celkového pole záření. Díky osové symetrii jsou úhly  $\beta$  shodné. Podélné roviny pak můžeme otočit kolem osy symetrie a získat pole záření v celém prostoru kolem síťového bodu.

#### řešení v podélné rovině ve směru od vnější hranice fotosféry k centrálním oblastem

Řešení začneme na horní hranici podélné roviny (hvězdném povrchu), kde známe specifickou intenzitu dopadajícího záření (horní hraniční podmínku). V každém síťovém bodě zvolíme na kvadrant tři paprsky, podél kterých budeme provádět integraci (viz obr. 4.6). Úhly, pod kterými vedeme paprsky, můžeme zvolit stejné jako v planparalelním případě, tj.  $\mu \simeq 0.9, 0.5, 0.1$ . Měříme je od normály síťové kružnice v daném bodě. Paprsky vedeme až k následující síťové kružnici, tedy povolujeme, aby paprsky protly i několik síťových radiálních přímek. Není potřeba brát více paprsků na kvadrant, neboť informaci o záření z dalších směrů získáme z řešení v ostatních podélných rovinách (viz obr. 4.5).

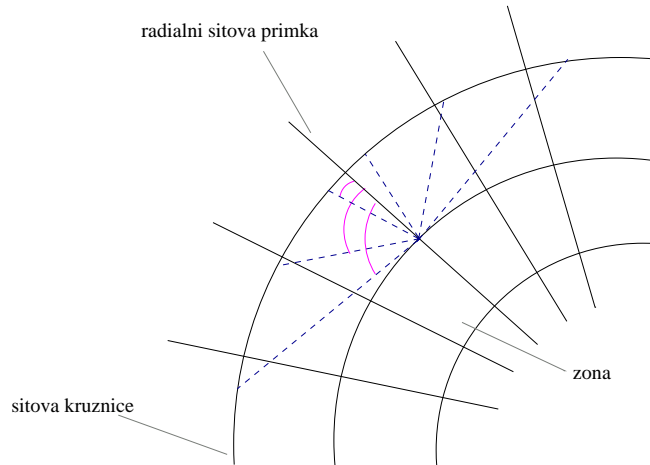
V bodech, ve kterých paprsky protínají síťové kružnice nebo radiální síťové přímky, interpolujeme intenzitu, opacitu, zdrojovou funkci a případně také rychlost pohybu prostředí. Použijeme lineární interpolaci, protože námi zvolená síť není ortogonální. Mezi jednotlivými průsečíky  $AB$ ,  $BC$  a  $CD$  (viz obr. 4.7) spočítáme optickou hloubku podél paprsku

$$\Delta\tau_{(AB)} = (\chi_{(A)} + \chi_{(B)})\Delta s_{(AB)}/2. \quad (4.45)$$

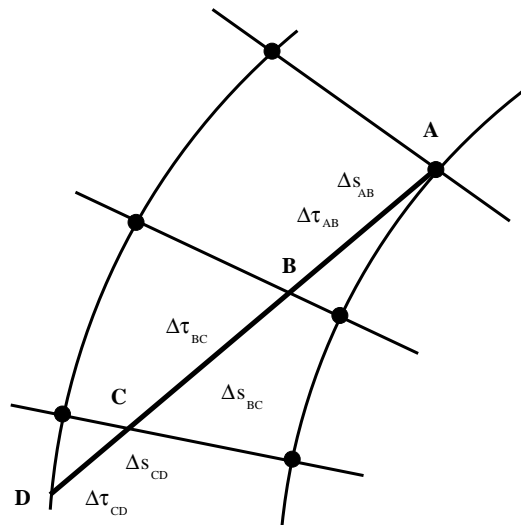
$\Delta s_{(AB)}$  je velikost úsečky mezi body  $A$  a  $B$ ,  $\Delta s_{(AB)} = |AB|$ . Integrací rovnice přenosu záření (2.18) získáme výraz pro specifickou intenzitu

$$I_{(B)} = I_{(A)}e^{-\Delta\tau_{(AB)}} + \int_0^{\Delta\tau_{(AB)}} S(t)e^{[-(\Delta\tau_{(AB)}-t)]} dt. \quad (4.46)$$





Obrázek 4.6: Schéma souřadnicové sítě pro výpočet intenzity od povrchu směrem k nitru hvězdy.



Obrázek 4.7: Integrace podél paprsku. Opacita a zdrojová funkce je známa ve zvýrazněných síťových bodech. V bodech *B*, *C* a *D* jejich hodnoty zjistíme lineární interpolací.

V každém úseku předpokládáme lineární závislost zdrojové funkce na optické hloubce

$$S(t) = at + b. \tag{4.47}$$

Koeficienty  $a$ ,  $b$  určíme pomocí hodnot zdrojové funkce v daných průsečících ( $A$  a  $B$ ). Integrál (4.46) můžeme za tohoto předpokladu analyticky vyjádřit

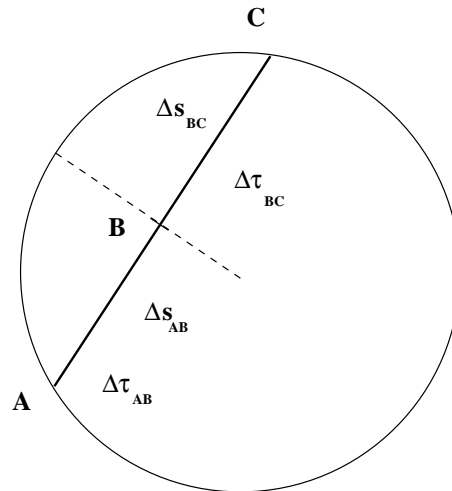
$$I_{(B)} = I_{(A)} e^{-\Delta\tau_{(AB)}} + a (\Delta\tau_{(AB)} - 1 + e^{-\Delta\tau_{(AB)}}) + b (1 - e^{-\Delta\tau_{(AB)}}) \quad (4.48)$$

a získat tak specifickou intenzitu v bodech  $B$ ,  $C$  a  $D$ .

Integraci podél paprsku provádíme na jednotlivých úsecích hned ze dvou důvodů. Vzhledem ke zvolené síti je parabolická aproximace zdrojové funkce na optické hloubce nevhodná (Kunasz & Auer, 1988). Na celém úseku  $AD$  by však lineární závislost zdrojové funkce na optické hloubce velmi špatně odpovídala skutečnosti. Druhým důvodem, proč používáme integraci po částech podél daného paprsku, je možnost zahrnutí rychlostního pole. V jednotlivých buňkách lze předpokládat konstantní rychlost prostředí a řešit statickou rovnici přenosu záření. Změnu rychlosti připustíme pouze na hranici buněk (blíže viz kap. 5.2).

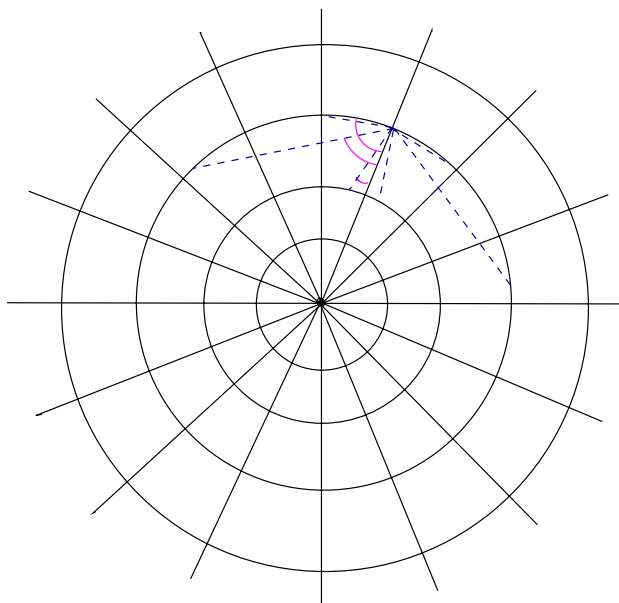
### řešení od nitra k povrchu

Postup je velmi podobný předchozímu. Z obr. 4.4 je patrné, že některé roviny neprotínají oblast spodní hraniční podmínky. Pro tyto roviny vezmeme jako spodní hraniční podmínku intenzitu záření, kterou jsme získali z předchozího kroku (řešení od povrchu směrem k centru). U těchto rovin musíme řešit přenos záření  $i$  v síťové kružnici s nejmenším poloměrem. Z daného bodu vedeme paprsky pod stejnými úhly jako v předchozím případě. Paprsek, podél kterého řešíme přenos záření, rozdělíme z výše popsaných důvodů na dvě oblasti (viz obr. 4.8). Nyní již můžeme přistoupit k řešení přenosu záření směrem od centra k povrchu.



Obrázek 4.8: Výpočet intenzity v oblasti síťové kružnice nejmenšího poloměru u podélných rovin neprotínajících oblast spodní hraniční podmínky.

V každém sířovém bodě zvolíme paprsky, nejlépe pod stejnými úhly jako v předchozím případě. Paprsky opět končí na nejbližší sířové kružnici (viz obr. 4.9), takže mohou protnout i více sířových přímek. V průsečících opět interpo-



Obrázek 4.9: Schéma pro výpočet intenzity z nitra hvězdy k jejímu povrchu.

lujeme intenzitu, opacitu, zdrojovou funkci, případně rychlost. Mezi průsečíky spočítáme optickou hloubku a integrujeme podél paprsku (4.48).

Tato metoda je ve své podstatě kombinací metody dlouhých a krátkých charakteristik. Umožňuje nám lépe popsat globální charakter pole záření než metoda krátkých charakteristik a výpočetní čas je přitom mnohem menší než u dlouhých charakteristik. Metoda je vhodná pro rychle rotující horké hvězdy. Také ji lze využít při studiu akrečních disků nebo u osově symetrických planetárních mlhovin.

## Kapitola 5

# Řešení rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí

Řada modelů na výpočet hvězdného spektra je statická (viz kap. 1). V některých situacích však pohyb látky nelze zanedbat. Problém přenosu záření se tím podstatně zkomplikuje, neboť koeficienty emise a absorpce se stanou úhlově závislé.

Pro kontinuum můžeme řešit statickou rovnici přenosu záření, protože v oblasti Dopplerova posuvu se koeficienty absorpce a emise změní jen velmi málo. V čáře se tyto koeficienty mohou velmi měnit, proto nemůžeme pohyb prostředí zanedbat. Pro řešení rovnice přenosu záření existují dvě skupiny metod – v soustavě spojené s prostředím a s pozorovatelem.

V soustavě spojené s pozorovatelem lze řešit komplikovanější pole rychlostí a to i ve více rozměrech. S rostoucím gradientem rychlosti musíme však použít více frekvenčních bodů, proto se tato metoda používá jen při malých rychlostech nepřesahujících několik tepelných rychlostí. Při velkých gradientech rychlostního pole můžeme využít Sobolevovu aproximaci, kde problém přenosu záření převedeme na výpočet pravděpodobnosti úniku fotonu (Sobolev, 1957).

Jak malé tak i velké gradienty rychlostí lze řešit v soustavě spojené s prostředím. Koeficienty absorpce a emise zde mají stejný tvar jako ve statickém případě, avšak v rovnici přenosu záření se objeví dodatečné členy vyjadřující změnu frekvence díky Dopplerovu jevu a aberaci. Velmi často se tato rovnice řeší pomocí Feautrierových proměnných (viz Mihalas a kol., 1975, 1976a, 1976b, 1976c, Mihalas & Kunasz 1978). Feautrierovu metodu lze použít jen pro monotónní rychlostní pole. Také není vhodná pro relativistické případy, kde díky aberaci dojde k zakřivení charakteristik (Mihalas, 1980). Vliv aberace a advekce lze zanedbat, je-li  $v/c \lesssim 0.01$  (viz Mihalas a kol., 1976b).

Tato podmínka je splněna pro většinu případů hvězdného větru a i u nov lze tyto jevy zanedbat (Hauschildt a kol., 1995). Práce Barona a kol. (1996) ukazuje,

že pro rychlosti větší než  $\sim 2000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  jsou tyto jevy už nezanedbatelné. Další studie vlivu aberace a advekce udělal Peraiah (1987, 1991), který zjistil významné odchylky střední intenzity a toku pro rychlosti mezi  $1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a  $5000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 5.1 Jednodimenzionální případ - rovinná geometrie

V kapitole 2.4 jsme odvodili tvar rovnice přenosu záření pro pohybující se prostředí v rovinné geometrii. Nyní se věnujme podrobněji jejímu řešení. Metadou nespojitých konečných prvků vyřešíme rovnici přenosu záření v jejím nejběžnějším tvaru v soustavě spojené s prostředím jak s vlivem aberace tak i bez něj. Nejdříve si však ukážeme řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace.

### 5.1.1 Řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace

V této kapitole využijeme invariatnosti rovnice přenosu záření vzhledem k Lorentzově transformaci (viz 2.4.1). Pohybuje-li se prostředí konstantní rychlostí, můžeme v soustavě s ním spojené řešit statickou rovnici přenosu záření. Je-li přítomen gradient rychlostního pole, lze danou oblast rozdělit na části, v nichž je rychlost látky přibližně konstantní. V každé buňce řešíme statickou rovnici a na hranici zón provedeme Lorentzovu transformaci frekvence a intenzity. Vzhledem k tomu, že se na hranici buněk mění intenzita záření skokem (z Lorentzovy transformace), můžeme s výhodou použít pro řešení rovnice přenosu záření metodu nespojitých konečných prvků (viz 4.1.4).

Zavedme diskrétní souřadnicovou síť geometrických hloubek  $\{z_d\}$ . V každé buňce předpokládejme konstantní rychlost látky. Změnu rychlosti dovolme jen na jejich hranici. Na hranici buněk se také skokem mění intenzita a frekvence podle transformace

$$I_{1,d} = \left( \frac{\nu_{d+1/2}}{\nu_{d-1/2}} \right)^3 I_{2,d}, \quad (5.1)$$

$$\nu_{d+1/2} = \nu_{d-1/2} \left( 1 - \mu \frac{\Delta v_d}{c} \right) \left( 1 - \frac{\Delta v_d^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

Index  $d + 1/2$  označuje vlastnosti v buňce mezi body  $d$  a  $d + 1$ .  $\Delta v_d$  je relativní rychlost sousedních cel. Nejsou-li rychlosti relativistické, můžeme položit  $(\nu_d/\nu_{d-1})^3 \approx 1$ .

V praxi zvolíme frekvenční body stejně jako ve statickém případě. Na hranicích zón zjistíme Dopplerův posuv z (5.2) a interpolujeme intenzitu  $I_{2,d}$  v těchto "nových" frekvencích. Je možné použít jak lineární, tak kvadratické interpolace. Výsledek se liší až na šestém řádu. Pro každou buňku a každou frekvenci řešíme rovnici (4.29) pomocí metody nespojitých konečných prvků popsanou v (4.1.4), tj. řešíme systém algebraických rovnic (4.36) s maticí  $\mathcal{A}$  a vektorem  $\mathbf{b}$  daných (4.37).

Tato metoda je efektivní v případě malých rychlostních gradientů. Na hranici každé buňky musíme zaručit, že frekvenční posuv nebude větší než Dopplerova pološířka. Aby tato podmínka byla splněna i pro velké gradienty rychlostí, rozdělíme oblast do více buněk, což zpomalí výpočet. Pro případ velkých rychlostních gradientů je lepší využít Sobolevovy aproximace.

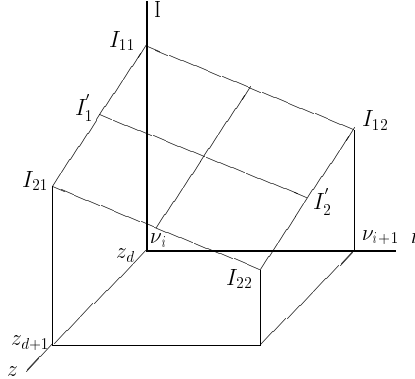
### 5.1.2 Řešení rovnice přenosu záření v soustavě spojené s prostředím bez aberace

Nyní se podíváme na přímé řešení rovnice přenosu záření v soustavě spojené s prostředím. I zde použijeme metodu nespojitých konečných prvků. Nejprve zanedbáme aberaci a budeme řešit rovnici (2.56)

$$\mu_0 \frac{\partial I_0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial z} - \frac{\mu_0^2 \nu_0}{c} \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial I_0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} = \eta_0(z, \nu_0) - \chi_0(z, \nu_0) I_0(z, \mu_0, \nu_0). \quad (5.3)$$

Tato rovnice platí pro nerelativistické rychlosti, kdy  $z \simeq z_0$ , proto v dalším textu opustíme od indexu  $_0$  u  $z$ .

Zavedeme diskrétní síť geometrických hloubek  $z = \{z_d\}$ ,  $d = 1, \dots, D$  a frekvencí  $\nu_0 = \{\nu_{0,n}\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Intenzitu uvnitř každé buňky vyjádříme jako lineární kombinaci intenzit v síťových bodech a prostorových funkcí. V každé buňce proložíme rovinu, která prochází intenzitou v síťových bodech (viz obr. 5.1) a zvolíme prostorové funkce



Obrázek 5.1: Schéma pro vyjádření intenzity v buňce.

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{z_{d+1} - z}{\Delta z_d}, & T_{d+1} &= \frac{z - z_d}{\Delta z_d}, \\ N_n &= \frac{\nu_{0,n+1} - \nu_0}{\Delta \nu_{0,n}}, & N_{n+1} &= \frac{\nu_0 - \nu_{0,n}}{\Delta \nu_{0,n}}, \end{aligned}$$

kde  $\Delta z_d = z_{d+1} - z_d$  a  $\Delta \nu_{0,n} = \nu_{0,n+1} - \nu_{0,n}$ . Dále použijeme zjednodušeného zápisu

$$T_1 = T_d, \quad T_2 = T_{d+1}, \quad N_1 = N_n, \quad N_2 = N_{n+1}.$$

Nejprve vyjádříme intenzitu  $I'_1$  (viz obr.5.1) mezi  $I_{11}$  a  $I_{21}$

$$I'_1 = I_{11} \frac{z_{d+1} - z}{\Delta z_d} + I_{21} \frac{z - z_d}{\Delta z_d} = T_1 I_{11} + T_2 I_{21} \quad (5.4)$$

a  $I'_2$  mezi  $I_{12}$  a  $I_{22}$

$$I'_2 = I_{12} \frac{z_{d+1} - z}{\Delta z_d} + I_{22} \frac{z - z_d}{\Delta z_d} = T_1 I_{12} + T_2 I_{22}. \quad (5.5)$$

Intenzitu v libovolném bodě buňky  $I_{z,\nu_0}$  zapíšeme

$$I_{z,\nu_0} = I'_1 \frac{\nu_{0,n+1} - \nu_0}{\Delta \nu_{0,n}} + I'_2 \frac{\nu_0 - \nu_{0,n}}{\Delta \nu_{0,n}} = N_1 I'_1 + N_2 I'_2 \quad (5.6)$$

a pomocí (5.4) – (5.6) upravíme na

$$I_{z,\nu_0} = T_1 N_1 I_{11} + T_2 N_1 I_{21} + T_1 N_2 I_{12} + T_2 N_2 I_{22}. \quad (5.7)$$

Pro jednodušší popis zavedeme

$$\begin{aligned} I_{11} &\longrightarrow I_1, & I_{12} &\longrightarrow I_3, \\ I_{21} &\longrightarrow I_2, & I_{22} &\longrightarrow I_4 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} w_1 &= T_1 N_1, & w_2 &= T_2 N_1, \\ w_3 &= T_1 N_2, & w_4 &= T_2 N_2. \end{aligned}$$

Vztah pro intenzitu nyní zjednodušeně zapíšeme

$$I_{z,\nu_0} = w_1 I_1 + w_2 I_2 + w_3 I_3 + w_4 I_4 = \sum_{k=1}^4 w_k I_k. \quad (5.8)$$

Tento výraz pro intenzitu a podobně pro emisivitu  $\eta$  a člen  $\chi I$  (viz kap. 4.1.4) dosadíme do rovnice přenosu záření (5.3) a pro každou buňku získáme

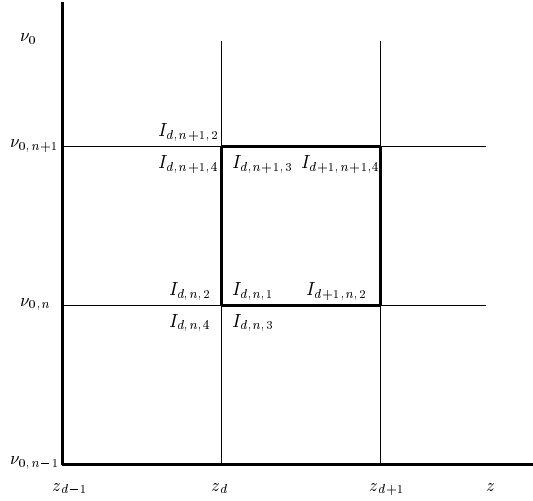
$$\mu_0 \sum_{k=1}^4 I_k \frac{\partial w_k}{\partial z} - \frac{\mu_0^2 \nu_0}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \sum_{k=1}^4 I_k \frac{\partial w_k}{\partial \nu_0} = \sum_{k=1}^4 w_k \eta_k - \sum_{k=1}^4 w_k \chi_k I_k, \quad (5.9)$$

kde  $\eta_k$  a  $\chi_k$  je emisivita a opacita v síťových bodech buňky.

Nyní tuto rovnici vynásobíme bázovými funkcemi  $w_l$  a zintegrujeme přes objem buňky

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left[ \mu_0 I_k \iint w_l \frac{\partial w_k}{\partial z} dz d\nu_0 - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z} I_k \nu_{0,k} \iint w_l \frac{\partial w_k}{\partial \nu_0} dz d\nu_0 \right] = \\ \sum_{k=1}^4 \left[ \eta_k \iint w_l w_k dz d\nu_0 - \chi_k I_k \iint w_l w_k dz d\nu_0 + (I - I^*) \iint w_l dz d\nu_0 \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Index \* označuje intenzitu z předchozí buňky. Poslední člen na pravé straně vyjadřuje skok intenzity na hranici zón. Pro jeho vyjádření použijeme obrázek 5.2.



Obrázek 5.2: Schéma pro vyjádření skoku intenzity na hranici buňky (viz rov. 5.11). Zvýrazněný čtverec označuje aktuální buňku.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{I}^*) = \begin{pmatrix} I_1 - (I_{d,n,2} + I_{d,n,3} + I_{d,n,4})/3 \\ 0 \\ I_3 - (I_{d,n+1,2} + I_{d,n+1,4})/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Pro každou buňku máme systém čtyř rovnic (5.10) pro vektor neznámých intenzit  $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(z_d, \nu_{0,n}) \\ I(z_{d+1}, \nu_{0,n}) \\ I(z_d, \nu_{0,n+1}) \\ I(z_{d+1}, \nu_{0,n+1}) \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$



V každé buňce řešíme rovnici

$$\mathcal{A}\mathbf{I} = \mathbf{b}. \quad (5.13)$$

Členy matice  $\mathcal{A}$  a vektoru  $\mathbf{b}$  jsou popsány v dodatku B.

Pro získání kompletního popisu pole záření celý proces zopakujeme. Využijeme-li nejprve např. spodní hraniční podmínku, vyřešíme ve směru z hlubokých vrstev k povrchu pro každou buňku soustavu rovnic (5.13). Potom celý proces zopakujeme, tentokrát v opačném směru s využitím horní hraniční podmínky. Za spodní hraniční podmínku můžeme vzít například difuzní přiblížení (4.42) a na horní hranici předpokládat, že nedopadá záření. Okrajové podmínky pro frekvence plynou přímo z tohoto řešení rovnice přenosu. V prvních buňkách  $\{d, 1\}$  je změna opacity a emisivity díky Dopplerovu jevu velmi malá, takže se zde řeší statická rovnice. Výslednou intenzitu v síťovém bodě  $\{d, n\}$  získáme podobně jako v předchozím případě (4.39)

$$I_{d,n} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 I_{d,n,k}. \quad (5.14)$$

### 5.1.3 Řešení rovnice přenosu záření v soustavě spojené s prostředím s aberací

Nyní popíšeme řešení rovnice přenosu záření se zahrnutím nejen Dopplerova jevu, ale také aberace (2.55)

$$\left[ \left( \mu_0 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mu_0(\mu_0^2 - 1)}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 \mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + 3 \frac{\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \right] I_0(z, \mu_0, \nu_0) = \eta_0(z, \nu_0) - \chi_0(z, \nu_0) I_0(z, \mu_0, \nu_0). \quad (5.15)$$

Ze stejného důvodu jako v předchozí kapitole jsme zde vynechali index  $_0$  u  $z$ .

Zavedeme diskrétní síť geometrických hloubek  $z = \{z_d\}$ , úhlů  $\mu_0 = \{\mu_i\}$  a frekvencí  $\nu_0 = \{\nu_{0,n}\}$ . Pro každou buňku zvolíme následující bázové funkce

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{z_{d+1} - z}{\Delta z_d}, & T_2 &= \frac{z - z_d}{\Delta z_d}, \\ M_1 &= \frac{\mu_{i+1} - \mu}{\Delta \mu_i}, & M_2 &= \frac{\mu - \mu_i}{\Delta \mu_i}, \\ N_1 &= \frac{\nu_{0,n+1} - \nu_0}{\Delta \nu_{0,n}}, & N_2 &= \frac{\nu_0 - \nu_{0,n}}{\Delta \nu_{0,n}}, \end{aligned}$$

kde  $\Delta z_d = z_{d+1} - z_d$ ,  $\Delta \mu_i = \mu_{i+1} - \mu_i$ , a  $\Delta \nu_{0,n} = \nu_{0,n+1} - \nu_{0,n}$ . Intenzitu v libovolném bodě buňky vyjádříme

$$\begin{aligned} I_0(z, \mu_0, \nu_0) &= R_1 M_1 N_1 I_{111} + R_2 M_1 N_1 I_{211} + R_1 M_2 N_1 I_{121} + R_2 M_2 N_1 I_{221} + \\ &R_1 M_1 N_2 I_{112} + R_2 M_1 N_2 I_{212} + R_1 M_2 N_2 I_{122} + R_2 M_2 N_2 I_{222}. \end{aligned}$$

Stejně jako v předchozí kapitole zavedeme označení

$$\begin{array}{ll}
I_{111} \longrightarrow I_1, & I_{211} \longrightarrow I_2, \\
I_{121} \longrightarrow I_3, & I_{221} \longrightarrow I_4, \\
I_{112} \longrightarrow I_5, & I_{212} \longrightarrow I_6, \\
I_{122} \longrightarrow I_7, & I_{222} \longrightarrow I_8, \\
\\ 
w_1 = R_1 M_1 N_1, & w_2 = R_2 M_1 N_1, \\
w_3 = R_1 M_2 N_1, & w_4 = R_2 M_2 N_1, \\
w_5 = R_1 M_1 N_2, & w_6 = R_2 M_1 N_2, \\
w_7 = R_1 M_2 N_2, & w_8 = R_2 M_2 N_2
\end{array}$$

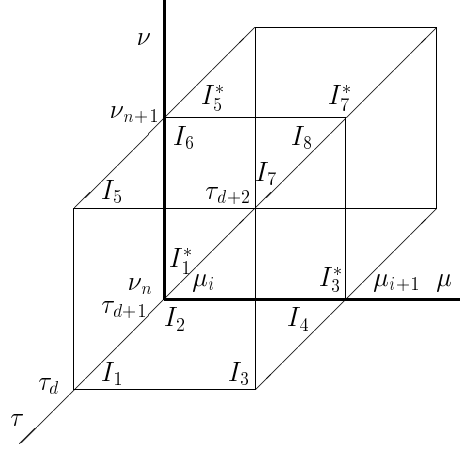
a přepíšeme vztah pro intenzitu  $I_0(z, \mu_0, \nu_0)$

$$I_0(z, \mu_0, \nu_0) = \sum_{k=1}^8 w_k I_k. \quad (5.16)$$

Tento výraz dosadíme do rovnice přenosu záření (5.15), vynásobíme bázovými funkcemi  $w_l$  a zintegrujeme přes objem buňky. Získáme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^8 \left[ \mu_{0,k} I_k \int w_l \frac{\partial w_k}{\partial z} dz d\mu_0 d\nu_0 + I_k \frac{v}{c} \int w_l \frac{\partial w_k}{\partial z} dz d\mu_0 d\nu_0 \right. \\
& + \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \mu_{0,k} (\mu_{0,k}^2 - 1) I_k \int w_l \frac{\partial w_k}{\partial \mu_0} dz d\mu_0 d\nu_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \nu_{0,k} \mu_0^2 I_k \int w_l \frac{\partial w_k}{\partial \nu_0} dz d\mu_0 d\nu_0 \\
& \left. + \frac{3}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \mu_{0,k}^2 I_k \int w_l w_k dz d\mu_0 d\nu_0 \right] = \sum_{k=1}^8 \left[ \eta_k \int w_l w_k dz d\mu_0 d\nu_0 \right. \\
& \left. - \chi_k I_k \int w_l w_k dz d\mu_0 d\nu_0 + (I_k - I_k^*) \int w_l dz d\mu_0 d\nu_0 \right]. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Poslední člen v rovnici (5.17) vyjadřuje skok v intenzitě na hranici zóny. Vyjádříme jej s pomocí obr. 5.3 jako



Obrázek 5.3: Schéma pro vyjádření skoku intenzity na hranici zóny.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{I}^*) = \begin{pmatrix} I_1 - (I_{d,i,n,2} + I_{d,i,n,3} + I_{d,i,n,4} + I_{d,i,n,5} + I_{d,i,n,6} + I_{d,i,n,7} + I_{d,i,n,8})/7 \\ 0 \\ I_3 - (I_{d,i+1,n,2} + I_{d,i+1,n,4} + I_{d,i+1,n,6} + I_{d,i+1,n,7} + I_{d,i+1,n,8})/5 \\ 0 \\ I_5 - (I_{d,i,n+1,2} + I_{d,i,n+1,3} + I_{d,i,n+1,4} + I_{d,i,n+1,6} + I_{d,i,n+1,7} + I_{d,i,n+1,8})/6 \\ 0 \\ I_7 - (I_{d,i+1,n+1,2} + I_{d,i+1,n+1,4} + I_{d,i+1,n+1,6} + I_{d,i+1,n+1,8})/4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Pro každou buňku máme soustavu osmi algebraických rovnic pro osm neznámých  $I_k$

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{b}. \quad (5.19)$$

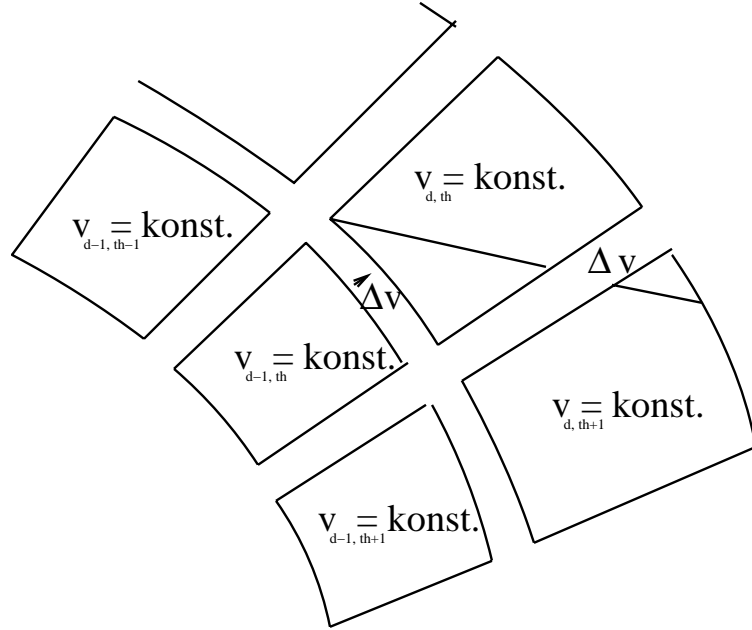
Řešení provádíme jak ve směru z horního okraje fotosféry k nitru hvězdy, tak i z hlubokých vrstev k fotosféře, abychom využili horní (4.43) i spodní okrajovou podmínku (4.42). Postup je podobný jako v předchozím případě. Nejprve řešíme rovnici podél frekvencí, potom úhlů a nakonec podél hloubkových bodů. Výsledná intenzita v síťovém bodě je

$$I_{d,i,n} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 I_{d,i,n,k}. \quad (5.20)$$

## 5.2 Dvoudimenzionální případ - osová symetrie

V kapitole 4.2.4 jsme popsali metodu řešení přenosu záření pro případ osové symetrie. Nyní se podívejme, jak do této metody zahrnout rychlostní pole.

Přenos záření budeme řešit v soustavě spojené s prostředím. Pro většinu případů lze zanedbat aberaci, proto dále budeme brát v úvahu pouze Dopplerův jev. V každém síťovém bodě vyjádříme opacitu a emisivitu v klidové soustavě. Předpokládáme, že rychlost prostředí je v dané buňce konstantní a mění se skokem pouze na hranici zón. Provedeme Lorentzovu transformaci frekvence (2.38) v každém průsečíku (viz obr. 5.4) a známou intenzitu na těchto frekvencích



Obrázek 5.4: Schéma pro řešení přenosu záření v osové symetrii pro případ nenulového gradientu rychlostního pole. Index  $d$  označuje měnící se radiální vzdálenost a index  $th$  úhlovou vzdálenost  $\theta$ .

interpolujeme do klidových frekvencí v dané buňce. Interpolaci intenzity do klidových frekvencí můžeme vzít jak lineární, tak kvadratickou. Výsledky se liší až na šestém řádu (viz kap. 5.1.1). Lorentzovu transformaci intenzity pro malé rychlosti provádět nemusíme, neboť rozdíl intenzit je zanedbatelný (5.1). V případě hvězdného větru horkých hvězd jsou naměřené rychlosti v nekonečno  $v_\infty$  kolem  $2000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Rozdělíme-li atmosféru přibližně na sto hloubkových vrstev, potom gradient mezi jednotlivými vrstvami je asi (závislost  $v(r)$  není lineární) kolem  $200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Z Dopplerova jevu (2.38) a vztahu pro transformaci intenzity (2.41) zjistíme, že  $I/I_0 = 1.0002$ . Tuto hodnotu lze ještě zanedbat. V každé buňce řešíme statickou rovnici přenosu záření v klidových frekvencích soustavy

spojené s danou buňkou.

Při Lorentzově transformaci musí být frekvenční posuv mezi jednotlivými buňkami menší než Dopplerova pološířka. Pro velké gradienty rychlostí musíme zjemnit síť a metoda se stává náročnější na výpočetní čas. Na druhou stranu nám tato metoda umožňuje řešit libovolný průběh rychlosti, což je velká výhoda, neboť mnoho metod předpokládá monotónní průběh rychlostního pole (např. Mihalas, Kunasz & Hummer, 1975).

Tato metoda je také velmi vhodná pro studium rotace hvězd. Velmi často se přenos záření v rotující hvězdě nahrazuje řešením planparalelní atmosféry. Výsledný profil je konvolucí získaného profilu čáry a rotačního profilu (Gray, 1976). Tento přístup však není přesný a v některých případech dokonce nepoužitelný. Při tomto postupu se zahrnuje vliv okrajového ztemnění pouze aproximativně a zcela se zanedbává jeho frekvenční závislost (Hadrava & Kubát, 2003). Pro přesné podchycení tohoto jevu musíme použít vícerozměrné modely. Pro studium rotace hvězd je výhodný model využívající osové symetrie, protože není tak časově náročný jako třídimenzionální modely a lze zde snadno zahrnout diferenciální rotaci.

## Kapitola 6

# Testy metod

V této kapitole rozebereme výsledky výše popsaných numerických modelů. Všechny metody řešení přenosu záření jsou testovány na modelu atmosféry B4 hvězdy hlavní posloupnosti získaného z hydrostatického sféricky symetrického numerického kódu ATA od Kubáta (2003) za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy. Ze vstupních parametrů – elektronové hustoty  $n_e$  a teploty  $T$  (dodatek C) je pro čáru vodíku  $H\alpha$  spočítána z numerického modelu *atm* opacita, emisivita a zdrojová funkce v síťových bodech. Při výpočtu těchto dat je použit předpoklad lokální termodynamické rovnováhy, ačkoliv s tímto numerickým modulem lze počítat přímo rovnice statistické rovnováhy. Výsledné hodnoty slouží jako vstupní parametry pro testy jednotlivých numerických metod řešení rovnice přenosu záření.

Pro testy modelů, zahrnujících rychlostní pole, jsme předpokládali radiální expanzi popsanou  $\beta$  zákonem (Cassinelli & Lamers, 1999)

$$v(r) = v_\infty \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{v_R}{v_\infty} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \frac{R}{r} \right\}^\beta, \quad (6.1)$$

kde parametr  $\beta$  je roven jedné. Jako rychlost ve fotosféře  $v_R$  je zvolena hodnota  $200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a rychlost v nekonečnu  $2000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pouze u dvoudimenzionálního osově symetrického modelu jsou tyto hodnoty dvakrát nižší.

U všech modelů předpokládáme, že na povrch hvězdy nedopadá žádné záření. Horní hraniční podmínka má potom tvar

$$I(z_D) = 0. \quad (6.2)$$

Jako spodní hraniční podmínku bereme difuzní přiblížení

$$I(z_1) = B_\nu(z_1) + \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \Big|_{z_1}. \quad (6.3)$$

Podotkněme, že indexování je zde “přehozené” (programové moduly počítají s geometrickou hloubkou) – indexem 1 je zde označována vrstva s nejmenší ge-

ometrickou hloubkou, tedy největší optickou hloubkou, a indexem  $D$  povrchové oblasti.

## 6.1 Metoda nespojitých konečných prvků

Metodu nespojitých konečných prvků nyní otestujeme na několika případech. Nejprve porovnáme řešení statické rovnice přenosu záření (4.1.4) s klasickou Feautrierovou metodou (4.1.2). Potom metodu nespojitých konečných prvků použijeme pro případ rychlostního pole s nenulovým gradientem. Rozebereme zde výsledky metody využívající lokální Lorentzovu transformaci (5.1.1) a také přímého řešení rovnice přenosu záření jak bez aberace (5.1.2), tak i se zahrnutím toho jevu (5.1.3).

### 6.1.1 Statický případ

Věnujme se nyní statickému případu bez rychlostního pole. Tuto nejjednodušší situaci popisuje rovnice (2.16)

$$\mu \frac{dI(z, \mathbf{n}, \nu)}{dz} = \eta(z, \nu) - \chi(z, \nu)I(z, \mathbf{n}, \nu). \quad (6.4)$$

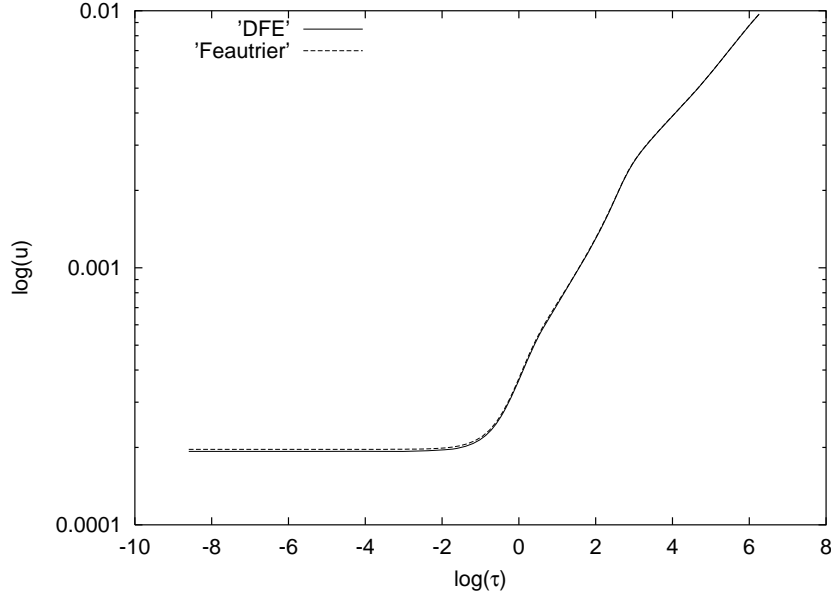
Řešení Feautrierovou metodou (4.1.2) a metodou nespojitých konečných prvků (4.1.4) je znázorněno na obr. 6.1, kde je v logaritmickém měřítku vykreslena závislost Feautrierovy proměnné  $u$  na optické hloubce  $\tau$ . Je vidět, že výsledky obou metod souhlasí. Maximální relativní odchylka v kontinuu je menší než 2% a v centru čáry menší než 1%. Použijeme-li v algoritmu pro metodu nespojitých konečných prvků analyticky vyjádřené řešení rovnice (4.36), potom je i výpočetní čas obou metod srovnatelný.

Metoda nespojitých konečných prvků dává stejně dobré výsledky jako častěji používaná Feautrierova metoda.

### 6.1.2 Nenulový gradient rychlostního pole

V kapitole (5.1) jsme se zabývali řešením rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí. Nejprve jsme využili výhody metody nespojitých konečných prvků, která nám dovoluje hledat řešení ve tvaru nespojitě funkce. Tato nespojitost nám vznikla v důsledku pohybu prostředí z Lorentzovy transformace intenzity a frekvence. Dále jsme si ukázali přímé řešení rovnice přenosu záření s nenulovým gradientem rychlostního pole a to jak bez aberace (kap. 5.1.2)

$$\mu_0 \frac{\partial I_0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial z} - \frac{\mu_0^2 \nu_0}{c} \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial I_0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} = \eta_0(z, \nu_0) - \chi_0(z, \nu_0)I_0(z, \mu_0, \nu_0), \quad (6.5)$$



Obrázek 6.1: Srovnání řešení planparalelní statické rovnice přenosu záření Feautrierovou metodou (prerušovaná čára) a metodou nespojitých konečných prvků (plná čára).

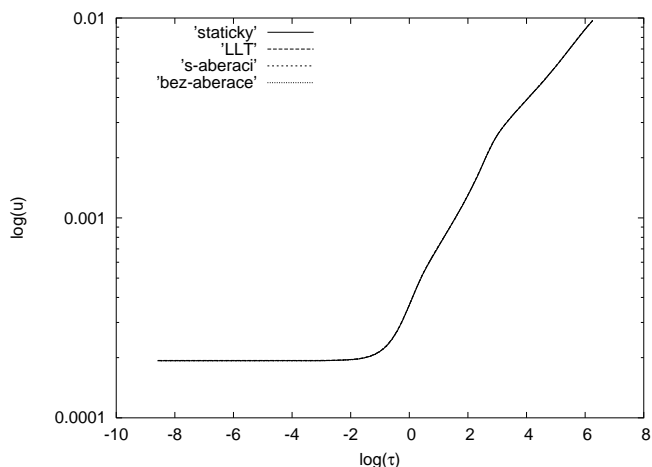
tak také se zahrnutím tohoto jevu (kap. 5.1.3)

$$\left[ \left( \mu_0 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mu_0(\mu_0^2 - 1)}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 \mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + 3 \frac{\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial z} \right] I_0(z, \mu_0, \nu_0) = \eta_0(z, \nu_0) - \chi_0(z, \nu_0) I_0(z, \mu_0, \nu_0). \quad (6.6)$$

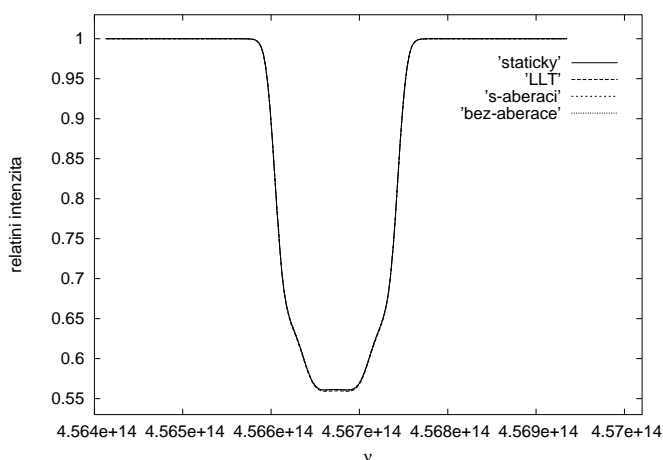
Nejprve tyto metody otestujeme pro případ nulového rychlostního gradientu, kdy by řešení mělo souhlasit se statickým z předchozí kapitoly. Výsledky jsou porovnány na obrázcích 6.2 a 6.3. Graf 6.2 zachycuje závislost Feautrierovy proměnné na optické hloubce. Na následujícím obrázku (6.3) je vykreslen profil  $H\alpha$  čáry získaný z těchto čtyř modelů. Z grafů je patrné, že jak závislost intenzity na optické hloubce, tak také závislost intenzity na frekvenci ve statickém případě velmi dobře souhlasí pro všechny modely.

Pro nenulový gradient rychlostního pole je závislost intenzity na frekvenci v soustavě spojené s prostředím zachycena na obr. 6.4. Závislost rychlosti na geometrické hloubce je zvolena tak, aby co nejlépe popisovala situaci pro hvězdný vítr B4 hvězdy (viz úvod této kapitoly). V tomto případě je efekt posunutí čáry výraznější než její deformace, ačkoliv čára i zde je mírně zdeformovaná. Můžeme vidět malou odchylku od řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace a přímého řešení rovnice přenosu záření. Příčina této malé neshody je v předpokladu konstantní rychlosti v dané buňce. Tento rozdíl můžeme ovlivnit volbou sítě,





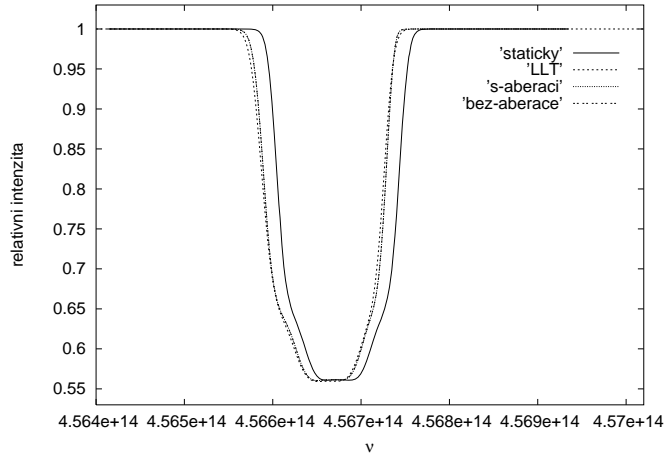
Obrázek 6.2: Závislost Feautrierovy proměnné na optické hloubce. Plná čára charakterizuje statické řešení, čárkovaná řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace, jemně čárkovaná řešení bez aberace a tečkovaná s aberací.



Obrázek 6.3: Závislost intenzity na frekvenci. Plná čára charakterizuje statické řešení, čárkovaná řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace, jemně čárkovaná řešení bez aberace a tečkovaná s aberací.

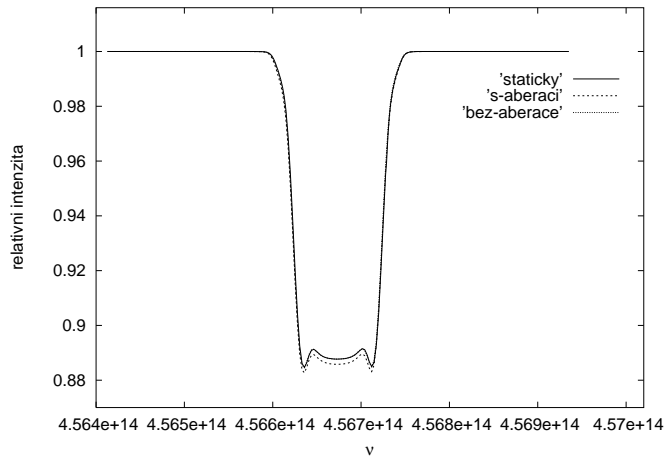
kterou se budeme zabývat níže. Výsledky přímého řešení rovnice přenosu záření jak s aberací, tak také bez ní spolu souhlasí. Podotkněme, že tento výsledek je pro úhel  $\mu (= \cos(\theta))$  přibližně 0.9. Pro velké úhly  $\theta$  by tato dvě řešení již nemusela souhlasit, neboť se může projevit vliv aberace.

Při malých úhlech  $\theta$  se aberace příliš neuplatňuje (viz (2.39)), proto metodu



Obrázek 6.4: Závislost intenzity na frekvenci v soustavě spojené s prostředím pro případ nenulového gradientu rychlostního pole. Plná čára charakterizuje statické řešení, čárkovaná řešení pomocí lokální Lorentzovy transformace, jemně čárkovaná řešení bez aberace a tečkovaná s aberací.

zahrnující aberaci a bez ní otestujeme pro velké úhly ( $\cos\theta = \mu = 4 \cdot 10^{-2}$ ). Výsledky z těchto modelů se liší jen málo (viz obr. 6.5). Můžeme říci, že v oblasti



Obrázek 6.5: Závislost intenzity na frekvenci pro velký úhel  $\theta$  ( $\cos\theta = \mu = 4 \cdot 10^{-2}$ ). Plná čára charakterizuje statické řešení, tečkovaná bez aberace a čárkovaná s aberací.

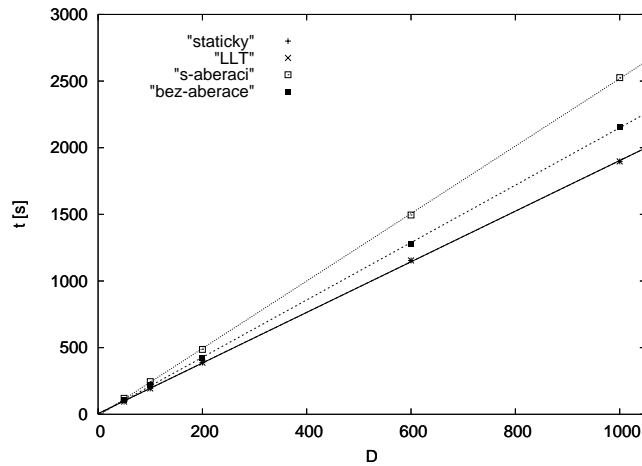
platnosti rovnic (6.5) a (6.6), tedy pro případ nereleativistických rychlostí, lze zanedbat vliv aberace. Podotkněme, že k podobným závěrům došel také Mihalas,

Kunasz & Hummer (1976b), nebo Hauschildt (1995).

Pro stabilitu řešení je lepší počítat v geometrické hloubce, než v optické. Zatímco optická hloubka se mění o několik řádů (až dvanáct), geometrická se změní jen málo (dva až tři řády). To v některých situacích může způsobit velkou chybu při výpočtu soustavy algebraických rovnic a řešení může začít oscilovat nebo divergovat. Problémy se stabilitou u této metody měl také Castor se svými kolegy (1992). Ti tento problém vyřešili nahrazením matice soustavy (4.36) jednotkovou maticí. Znamená to, že ačkoli si vybereme libovolnou bázi v Hilbertově podprostoru, prohlásíme ji po vykonání skalárního součinu za ortonormální bázi. Pro planoparalelní atmosféru bez rychlostního pole, na které tuto metodu testovali, jsou nediagonální prvky malé ve srovnání s diagonálními a tato substituce je přijatelná. V našem případě jsme k tomuto kroku nechtěli přistoupit, protože rozměr naší matice je větší a řešení by mohlo konvergovat ke špatnému výsledku. Proto jsme zvolili za nezávislou proměnnou geometrickou hloubku.

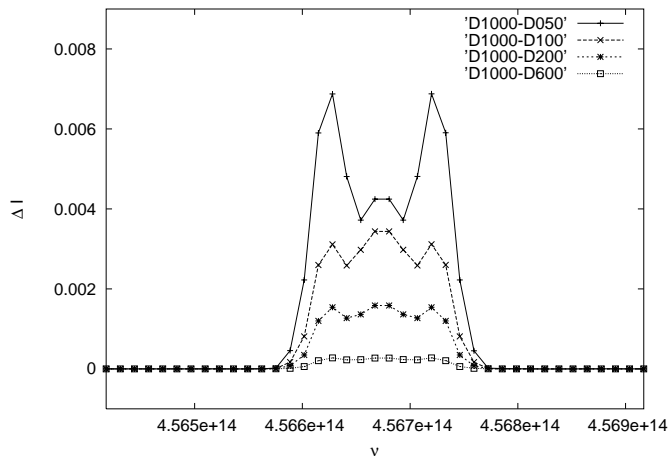
### testy sítě

Podívejme se nyní na některé numerické charakteristiky těchto modelů. Testy sítě ukazují lineární závislost počtu hloubkových bodů na výpočetním čase (viz obr. 6.6). Přesnost výpočtu na jemnosti hloubkové sítě je zachycena na obrázku

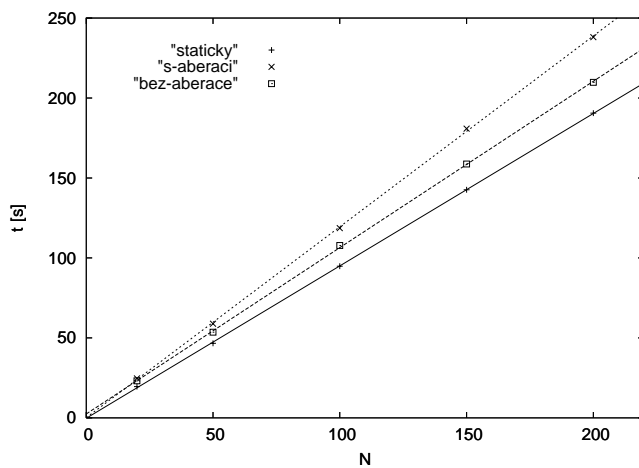


Obrázek 6.6: Závislost výpočetního času na počtu hloubkových bodů sítě  $D$ . Do grafu jsou také zaneseny regresní přímky.

6.7. Nejvýhodnější volba sítě je kolem sta hloubkových bodů pro celou hvězdnou atmosféru, což přibližně odpovídá optimální volbě sta bodů na interval optických hloubek  $\langle 1e^{-5}, 1e^5 \rangle$ . V tomto rozlišení je již dobře zachycena změna charakteristik prostředí na radiální vzdálenosti a výpočetní čas není velký. Závislost výpočetního času na počtu frekvenčních bodů je také lineární (viz obr. 6.8). V dynamickém případě je nutné vzít dostatek frekvenčních síťových bodů,

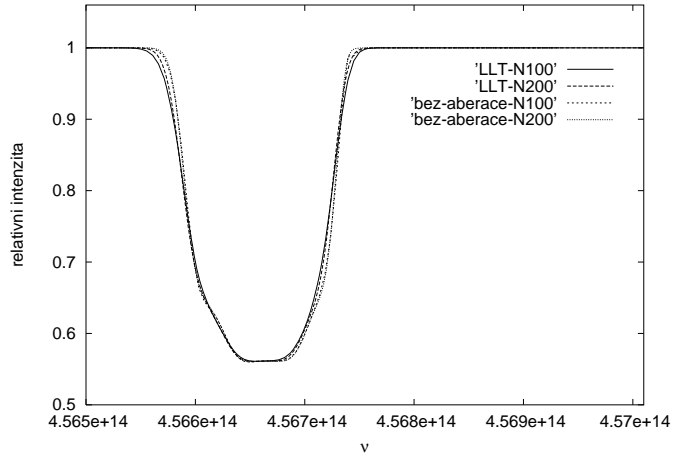


Obrázek 6.7: Závislost změny profilu spektrální čáry na volbě hloubkové sítě. Na y-ové ose je veličina  $\Delta I$  rozdíl intenzit spočítaných při tisíci hloubkových bodech a při 50 ( $D1000 - D050$ ), 100 ( $D1000 - D100$ ), 200 ( $D1000 - D200$ ) a 600 ( $D1000 - D600$ ).



Obrázek 6.8: Závislost výpočetního času na počtu frekvenčních bodů. Do grafu jsou zaneseny také regresní přímky.

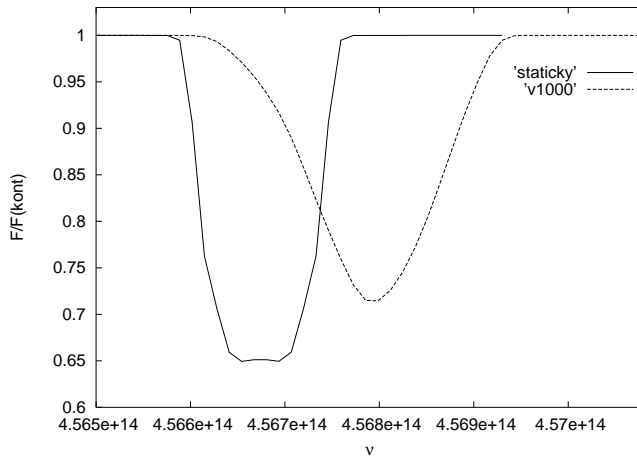
protože nyní řešíme diferenciální rovnici také vzhledem k proměnné  $\nu$  (viz obr. 6.9). Výše popsané modely mají stejný počet hloubkových geometrických bodů jako frekvenčních na čáru  $D = N = 100$ .



Obrázek 6.9: Srovnání profilu čáry při různém počtu frekvenčních bodů.

## 6.2 Osově symetrické řešení

V kapitole 4.2.4 jsme se zabývali řešením problému přenosu záření s využitím osově symetrie. Tuto metodu jsme v 5.2 zobecnili pro nenulový gradient rychlostního pole. Výsledný profil spektrální čáry jak pro statický, tak i dynamický případ je na obr. 6.10. V dynamickém případě, pouze pro test, je zvolena sféricky



Obrázek 6.10: Profil čáry  $H\alpha$  z modelu využívajícího osovou symetrii. Plná čára charakterizuje statické řešení, přerušovaná profil při nenulovém gradientu rychlostního pole.

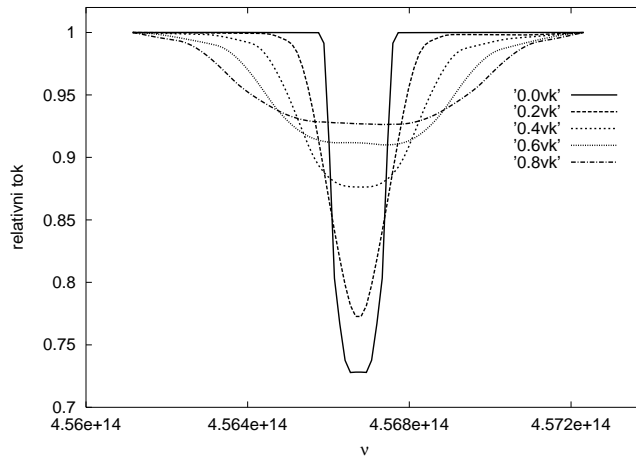
symetrická expanze. Tentokrát je rychlost ve fotosféře  $100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a rychlost

v nekonečnu  $1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Jak je patrné z obrázku 6.10, je profil čáry jak posunutý, tak také zdeformovaný. Pro náš případ B4 hvězdy s daným rychlostním polem (viz úvod této kapitoly) se ve spektrální čáře neobjeví emise. Je to způsobeno tím, že hvězda má velmi tenkou atmosféru, protože parametry atmosféry jsou z hydrostatického modelu. Aby byl problém zcela konzistentně vyřešen, bylo by potřeba vstupní parametry vzít z hydrodynamického modelu. V našem případě jsme chtěli pouze otestovat řešení rovnice přenosu záření a rovnic statistické rovnováhy a na to je hydrostatický model dostačující.

### rotace

Tento osově symetrický model dovoluje řešit přenos záření v celé hvězdě i se započtením rotační rychlosti. Na obr. 6.11 je zachycena změna profilu čáry  $\text{H}\alpha$



Obrázek 6.11: Změna profilu čáry  $\text{H}\alpha$  v závislosti na velikosti rotační rychlosti  $v(R_*)$ . Rotační rychlost je uvedena v násobcích kritické rotační rychlosti  $v_k$ .

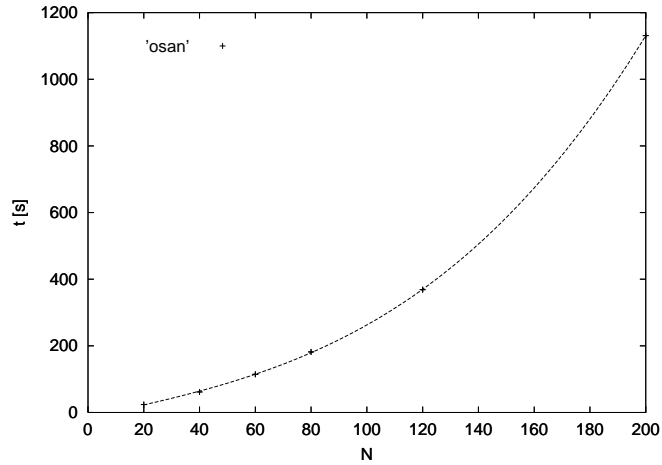
v závislosti na velikosti rotační rychlosti. Podobné profily tvaru U se pozorují. Rychlostní profil v tomto případě je převzat od Hummela a Vranckenové (2000)

$$v(r) = v(R_*) \left( \frac{r}{R_*} \right)^{-j}. \quad (6.7)$$

$R_*$  je poloměr hvězdy a  $v(R_*)$  je rotační rychlost ve fotosféře. Parametr  $j$  je roven  $1/2$  pro Keplerovskou rotaci a 1 pro rotační rychlost vyplývající ze zákona zachování úhlového momentu. Kroll a Hanuschik (1997) ukázali, že hodnota  $j = 1$  vyhovuje diskům formovaným hvězdným větrem, zatímco  $j = 1/2$  spíše akrečním diskům. Proto jsme pro tento test zvolili hodnotu  $j = 1$ .

## testy sítě

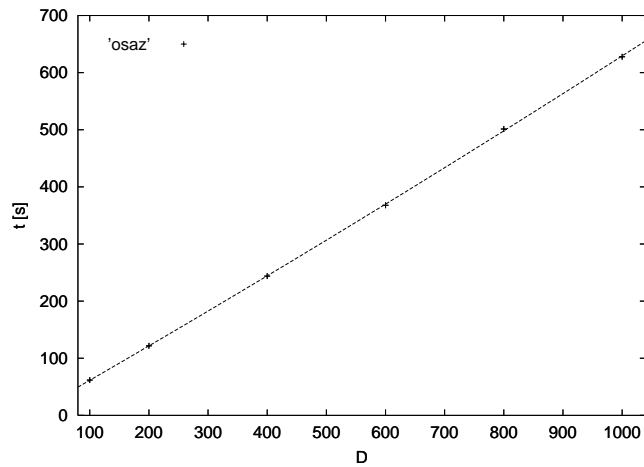
Závislost výpočetního času na počtu frekvenčních bodů není tak jednoduchá jako v předchozím případě. Proložená křivka na obr. 6.12 je polynomem třetího



Obrázek 6.12: Závislost výpočetního času na volbě frekvenční sítě.  $N$  je počet frekvenčních bodů.

stupně.

Parabolou lze proložit závislost výpočetního času počtu bodů v radiální vzdálenosti v rovině rovniku  $D$  obr. 6.13.



Obrázek 6.13: Závislost výpočetního času na volbě radiální sítě.  $D$  označuje počet hloubkových bodů.

Tato metoda využívající osové symetrie hvězd nám dovoluje lépe popsat globální charakter pole záření než metoda krátkých charakteristik a výpočetní čas není tak velký jako u metody dlouhých charakteristik. Umožňuje také řešit rovnici přenosu záření v rychlostním poli libovolného průběhu, avšak ne velkých gradientů. I zde platí, jako u předchozí metody využívající lokální Lorentzovy transformace (kap. 5.1.1), že frekvenční posuv mezi jednotlivými buňkami musí být menší než Dopplerova plošička. Při větších rychlostních gradientech je potřeba i zde zjemnit síť a výpočet se stává neefektivním. V tomto případě je nutno použít Sobolevovy aproximace (1957). Metodu využívající osové symetrie je možné použít nejen pro horké hvězdy s hvězdným větrem, ale také např. pro akreční disky.



# Kapitola 7

## Iterační schéma

Základním iteračním postupem je tzv. lambda iterace, která však velmi špatně konverguje. Proto vznikla řada metod (viz např. Hubený, 1992), které ji modifikují tak, aby byl výpočet co možná nejefektivnější. Nejpoužívanější z nich je metoda přibližných lambda operátorů, kterou si zde stručně popíšeme.

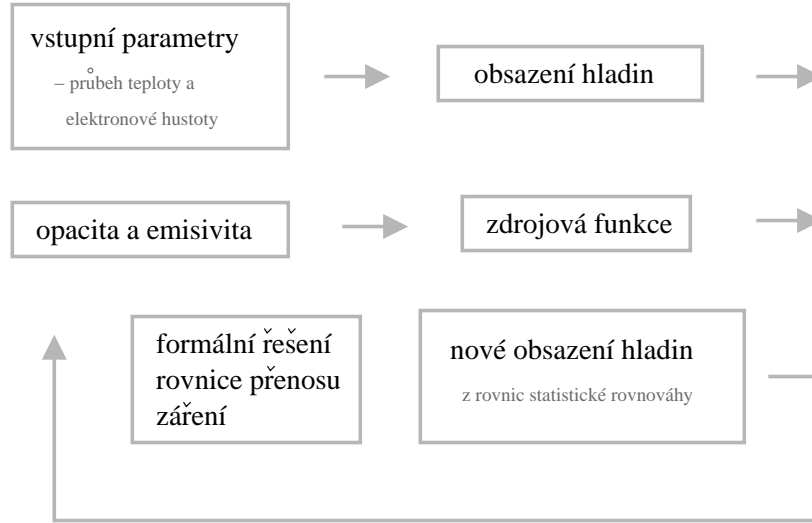
### 7.1 Lambda iterace

Iterační schéma, které používá tato práce, je zachyceno na obrázku 7.1. Nejprve předpokládáme platnost lokální termodynamické rovnováhy. Ze vstupních parametrů – teploty a elektronové hustoty – určíme pomocí Sahovy a Boltzmannovy rovnice obsazení hladin (3.14) a z nich opacitu (3.31) a emisivitu (3.32). První odhad obsazení hladin je také možné vzít z výstupu jiného NLTE výpočtu. Některou z metod řešení rovnice přenosu záření (kap. 5 nebo 4) zjistíme specifickou intenzitu a z ní střední intenzitu. Nyní již můžeme řešit rovnice statistické rovnováhy (3.18) a získat tak nové obsazení hladin, ze kterého určíme opacitu a emisivitu. Celý cyklus opakujeme do dosažení požadované přesnosti. Tento postup je znám jako  $\Lambda$  iterace. Lze jej schematicky zapsat pomocí  $\Lambda$  operátoru

$$J_{\nu}^{(n+1)} = \Lambda[S_{\nu}^{(n)}], \quad (7.1)$$

kde indexy  $n$  a  $n+1$  označují číslo iterace.  $\Lambda$  operátor nám charakterizuje jakýkoli postup, pomocí kterého ze známé zdrojové funkce získáme střední intenzitu.  $\Lambda$  operátor je obecně nekonečně dimenzionální matice. Při řešení přenosu záření zavádíme diskrétní souřadnicovou síť a tato matice se stane konečnědimenzionální. Pokud by střední intenzita byla určena pouze lokálními charakteristikami prostředí, byl by  $\Lambda$  operátor diagonální a řešení (7.1) by se velmi zjednodušilo.

$\Lambda$  iterace má bohužel jednu nevýhodu. Pro dosažení větší přesnosti je potřeba mnoho iteračních cyklů. Její konvergenční rychlost s rostoucím počtem iterací klesá. Kritérium konvergence (rozdíl mezi předchozím a aktuálním řešením) může být splněno i když ještě není dosaženo požadovaného (dokonvergovaného) řešení. Tento problém je diskutován např. v článku Auera (1991). Proto



Obrázek 7.1: Základní iterační schéma pro řešení přenosu záření. Z hydrostatických modelů získáme průběh teploty a elektronové hustoty, který dále budeme považovat za neměnný. Za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy spočítáme obsazení hladin v atomech a iontech a z nich koeficienty opacit a emisivity. Vyřešíme rovnici přenosu záření a výslednou intenzitu záření použijeme ke zpřesnění obsazení hladin vyplývajících z rovnic statistické rovnováhy. Opět spočítáme opacitu a emisivitu a celý cyklus opakujeme až do získání dostatečné přesnosti.

se začala používat metoda úplné linearizace (Auer & Mihalas, 1969) a později metoda přibližných lambda operátorů.

## 7.2 Metoda přibližných lambda operátorů (ALI)

Metodu přibližných lambda operátorů poprvé použil pro přenos záření Cannon (1973a, 1973b). (Někdy se tato metoda nazývá také metoda zrychlených lambda operátorů, nebo poruchová metoda.) Ve fyzice je známa spíše pod názvem “operator splitting” (Jacobi, 1845).

Základní myšlenka spočívá v tom, že se  $\Lambda$  operátor přepíše

$$\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*). \quad (7.2)$$

$\Lambda^*$  se nazývá aproximativní lambda operátor. Volíme jej co možná nejjednodušší, ale přitom musí stále popisovat charakter pole záření. Dosadíme-li tento výraz do rovnice (7.1) získáme

$$J_\nu^{(n+1)} = \Lambda^*[S_\nu^{(n)}] + (\Lambda - \Lambda^*)[S_\nu^{(n)}]. \quad (7.3)$$

Doposud máme stále klasickou lambda iteraci, která velmi špatně konverguje. Operátor  $\Lambda^*$  necháme nyní působit na  $S_\nu^{(n+1)}$  místo na  $S_\nu^{(n)}$

$$J_\nu^{(n+1)} = \Lambda^*[S_\nu^{(n+1)}] + (\Lambda - \Lambda^*)[S_\nu^{(n)}]. \quad (7.4)$$

Druhý člen je pouze korekčním členem, který jsme schopni určit z předchozí iterace. Tento výraz (7.4) dosadíme do zářivých ratů (3.21) v rovnicích statistické rovnováhy (3.20) a tyto rovnice linearizujeme. (Používáme-li např. aproximaci dvouhladinového atomu, dosadí se tento výraz za střední intenzitu do odpovídajících rovnic.) Výpočet se tak podstatně zrychlí, protože aproximativní lambda operátor je pouze lokální.

Metodu aproximativního lambda operátoru lze dále zrychlit pomocí extrapolace z předchozích iterací. Lze využít postupu Ng (1974) nebo metody Orthomin od Vinsome (1976), která je složitější, ale její konvergenční rychlost je větší.

### konstrukce $\Lambda^*$

Zvolit vhodný  $\Lambda^*$  není až tak jednoduché. Přibližný operátor musí mít základní vlastnosti přesného  $\Lambda$  operátoru, ale zároveň musí být snadno proveditelná jeho inverze ( $\Lambda^{-1}$ ).

Nejčastěji se využívá jedna ze tří technik. Cannon (1973a a 1973b) použil v  $\Lambda^*$  pro integraci přes úhly a frekvence kvadraturní vzorce nižších řádů, zatímco pro  $\Lambda$  kvadraturní vzorce vyšších řádů. Scharmer (1981) využil skutečnosti, že v jádru čáry je specifická intenzita rovna zdrojové funkci (“core saturation”, Rybicki, 1972) a pro křídla čar použil Eddington–Barbierovu relaci (viz např. Mihalas, 1982). Olson, Auer & Buchler (1986) ukázali, že nejvýhodnější je za  $\Lambda^*$  vzít diagonálu přesného  $\Lambda$  operátoru. Jejich závěr potvrdil Puls & Herrero (1988).

Ve více dimenzích je situace komplikovanější. Tvar aproximativního operátoru závisí na zvolené symetrii problému. Poprvé tuto úlohu vyřešil Olson & Kunasz (1987) pro metodu krátkých charakteristik.

Všechny metody hledající přibližný lambda operátor je možné přímo použít také pro pohybující se prostředí. Bohužel jen v soustavě spojené s pozorovatelem. V soustavě spojené s prostředím musíme metodu ošetřit o vzájemný pohyb jednotlivých bodů. Musíme zahrnout skutečnost, že se nám do oblasti jádra čáry dostávají fotony z původně modrého křídla. Naopak, fotony z jádra čáry se posouvají do červeného křídla. Metodu “core saturation” (Rybicki, 1972) pro soustavu spojenou s prostředím upravil Hamann (1985). Puls (1991) řešil přenos záření pro případ hvězdného větru v planparalelní geometrii. Do ALI iterace zahrnul jak Sobolevovu aproximaci, kterou je možno použít v oblastech velkých gradientů rychlostí, tak řešení rovnice přenosu v soustavě spojené s prostředím, které se musí použít v oblastech blízko fotosféry hvězd.

### 7.3 Konvergence lambda iterace a ALI

Metoda aproximativního lambda operátoru sice konverguje rychleji, ale lineárně. Z počátku, při malém počtu iterací, je konvergenční rychlost lambda iterace větší. Proto je výhodné řešit iterační cyklus nejprve pomocí lambda iterace a potom teprve využít aproximativního lambda operátoru, případně ještě některou z urychlujících metod (Ng, Orthomin).

V této práci jsme zvolili pouze metodu lambda iterace, protože klasická ALI metoda pro případ hvězdného větru často diverguje. Pauldrach & Herrero (1988) ukázali, že v opticky tlustém UV kontinuu, které se pozoruje u hvězd s hvězdným větrem, dochází k tomu, že zářivé raty dominují nad srážkovými i při velmi malém korekčním členu střední intenzity  $\Delta J = (\Lambda - \Lambda^*)[S_\nu^{(n)}]$  (viz (7.4)). Matice soustavy se stane špatně podmíněnou, získáme negativní obsazení hladin a metoda začne divergovat. Konvergenci ALI metody upravili působením poruchového lambda operátoru na rozdíl zdrojových funkcí z dané iterace a předešlé. Hledání vhodného poruchového operátoru je obecně ve více rozměrech a při přítomnosti rychlostního pole složitě. Vzhledem k tomu, že jsme chtěli převážně testovat nové metody formálního řešení rovnice přenosu záření, nepožadovali jsme velkou přesnost výsledku. Výpočet jsme ukončili již po několika iteracích, tedy v oblasti rychlejší konvergence klasické lambda iterace. Jsme si vědomi, že by bylo dále užitečné vytvořit poruchové operátory vhodné pro tyto metody a s jejich pomocí získat vyšší přesnosti výsledků. Na tento problém bychom se chtěli soustředit v dalším výzkumu a vytvořené programy a moduly upravit tak, aby se výpočet stal co nejefektivnějším.

## Kapitola 8

# Popis programů

Na závěr si popíšeme vytvořené programy a moduly tak, aby bylo možné s nimi snadno pracovat.

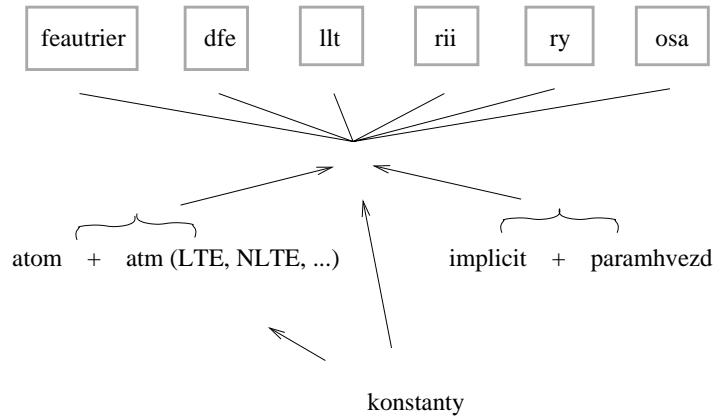
Programy jsou napsány pod linuxem v jazyku FORTRAN90, který je velmi vhodný právě pro numerické metody. V současné době vytvořila firma INTEL novou verzi kompilátoru optimálně využívajícího možnosti běžného PC a dala jej volně k dispozici.

Vstupními soubory jsou *konstanty.f90*, s hodnotami použitých konstant, *test.dat*, se sítí geometrických hloubek a průběhem teploty a elektronové koncentrace a *paramhvzd.f90*. V tomto souboru jsou parametry výpočtu modelu atmosféry. Můžeme volit mezi lokální termodynamickou rovnováhou (LTE) a NLTE. Lze zde zadat rychlost v nekonečnu, ve fotosféře, rotační rychlost nebo turbulentní. Také je možné ovlivnit výpočet srážkových ratů volbou vhodnějšího vztahu pro konkrétní případ. Relativní zastoupení jednotlivých prvků lze měnit v souboru *relzast.f90*. V *implicit.f90* jsou definovány všechny proměnné jako typ DOUBLE PRECISION. V programech jsou specifikovány pouze výjimky z tohoto typu. Také je zde definován rozměr nejdůležitějších polí – úhlů *endi*, frekvencí *endn* a předpokládaná horní mez počtu bodů v optické hloubce, nebo geometrické hloubce *endtau*. Všechny tyto soubory je možné podle potřeby editovat. Do ostatních programů již není potřeba zasahovat.

Programy používají moduly *atom.f90* a *atm.f90*. V *atom.f90* jsou atomární data – počet hladin daného prvku, atomové číslo, síla oscilátoru přechodů, energie hladin, klidová frekvence odpovídající daným přechodům, statistické váhy hladin, Einsteinovy koeficienty přechodu, ionizační energie a konstanta pro fotoionizační průřez. Většina dat je zde pouze pro vodík. Síly oscilátorů jsou převzaty od Petra Škody (1995) a z práce Wiese, Smith & Glennon (1966). V dalším modulu *atm.f90* jsou funkce používané při výpočtu – Dopplerova pološířka, Dopplerův profil, Planckova funkce, zdrojová funkce používaná jako aproximace v LTE (lineárně závislá na optické hloubce), výpočet koeficientu emise a absorpce, výpočet obsazení hladin v případě LTE i NLTE, účinné průřezy a pravděpodobnosti srážkových přechodů. Funkce pro výpočet integrálu  $E(1)$  je

převzata z programu Ivana Hubeného.

Hlavní programy pak již řeší pouze rovnici přenosu záření. Pro planparalelní a statický případ využívá *feautrier.f90* Feautrierovu metodu (kap. 4.1.2), zatímco *dfe.f90* metodu nespojitých konečných prvků (kap. 4.1.4). Další programy již řeší přenos záření v pohybujícím se prostředí (kap. 5.1). *llt.f90* používá metodu nespojitých konečných prvků ve statickém případě spolu s lokální Lorentzovou transformací (kap. 5.1.1). Přímé řešení rovnice přenosu záření je v *rii.f90* a *ry.f90*. V prvním z těchto programů je zanedbána aberace (kap. 5.1.2), zatímco druhý počítá i s tímto jevem (kap. 5.1.3). Osovou symetrii (kap. 4.2.4) využívá vícerozměrný program *osa.f90*, který je napsán rovnou pro rychlostní pole s nenulovým gradientem (kap. 5.2).



Obrázek 8.1: Schéma programů a programových modulů.

Kompilace programů se spouští příkazem  
`ifc -autodouble crout.f90 atom.f90 atm.f90 < zvolena_metoda.f90 >`  
 Pro řešení algebraických rovnic je zde použit modul *crout.f90*, který daný systém řeší LU rozkladem. Je převzat z klasické numerické knihovny *lapac* a pro *fortran90* jej přepsal Filip Hroch. Výsledný spustitelný soubor je uložen pod názvem *a.out*.

Výstupy z jednotlivých programů jsou uloženy v souborech *ifn.dat*, *ift.dat* a *ffn.dat*. V souboru *ifn.dat* je zachycena závislost vystupující intenzity na frekvenci pro úhel  $\cos\mu = 0,89$ . V souboru *ift.dat* je závislost intenzity ve stejném směru na optické hloubce v kontinuu. V posledním souboru je tok jako funkce frekvence.

# Kapitola 9

## Závěr

Tato práce se zabývá studiem přenosu záření v pohybujících se atmosférách horkých hvězd. Jsou zde vyvinuty a testovány některé nové nebo málo používané metody. V planparalelní geometrii je to metoda nespojitých konečných prvků (kap. 4.1.4 a 5.1), která pro případ rychlostního gradientu byla použita vůbec poprvé. Ve více rozměrech je zde popsána nová metoda využívající osové symetrie hvězd (kap. 4.2.4 a 5.2).

Metoda nespojitých konečných prvků (kap. 4.1.4) je zde nejprve porovnána s klasickou Feautrierovou metodou (kap. 4.1.2). Získané profily čar i závislost intenzity na optické hloubce se shodují (kap. 6.1.1). Maximální relativní odchylka těchto dvou metod je menší než 2% v kontinuu a 1% v centru čáry.

Statické řešení metodou nespojitých konečných prvků je dále využito pro případ rychlostního pole s nenulovým gradientem (kap. 5.1.1). Pomocí lokální Lorentzovy transformace je do skoku v intenzitě zahrnut Dopplerův jev i transformace intenzity. Ta je však pro nerelativistické rychlosti zanedbatelná. Touto metodou jde řešit libovolný průběh rychlosti, avšak pro velké gradienty rychlosti se stává neefektivní. Musíme zaručit, že frekvenční posun mezi jednotlivými buňkami nebude větší než Dopplerova pološířka. Pro velké gradienty rychlosti je nutné zjemnit danou síť a výpočet se tak velmi zpomalí. V těchto případech lze však použít Sobolevovu aproximaci.

Pomocí metody nespojitých konečných prvků je řešena rovnice přenosu záření v soustavě spojené s prostředím při nenulovém gradientu rychlostního pole a to pro dva případy – s aberací (kap. 5.1.3) a bez ní (kap. 5.1.2). Programy jsou zde testovány na příkladu typické B4 hvězdy (kap. 6.1). Pro daný rychlostní profil je pro čáru výraznější jev posunutí, nežli deformace. Tento výsledek souhlasí s pozorováním. Pro malé úhly  $\theta$  se profily z obou modelů shodují (obr. 6.4). Při velkých úhlech  $\theta$ , blízkých  $90^\circ$ , je patrná již malá odchylka (obr. 6.5). Dá se říci, v souladu s ostatními pracemi (Mihalas a kol. 1976b, Hauschildt 1995), že pro nerelativistické rychlosti je vliv aberace zanedbatelný. Tento poznatek nám velmi urychlí výpočet, neboť nemusíme pro každou buňku řešit soustavu osmi rovnic o osmi neznámých, ale jen čtyř rovnic pro čtyři neznámé.

Rovnici přenosu záření pomocí metody nespojitých konečných prvků je výhodnější řešit v geometrické hloubce než v optické. Ve škále optických hloubek může dojít při výpočtu matice soustavy (4.36) k numerické chybě a řešení může v některých případech oscilovat. Problémy se stabilitou u této metody měl také Castor se svými kolegy (1992).

Testy sítě (kap. 6.1.2) ukazují lineární závislost výpočetního času na počtu geometrických bodů a také na počtu frekvenčních bodů. Důležitým zjištěním je, že v případě nenulového gradientu rychlostního pole, musíme vzít dostatečný počet frekvenčních bodů (kolem 50 a více). Tentokrát řešíme diferenciální rovnici o dvou proměnných a je vhodné mít stejně jemnou síť jak v geometrických hloubkách, tak také ve frekvencích.

Pro vícerozměrné modely je zde ukázána nová metoda využívající osovou symetrii hvězd (kap. 4.2.4). Jde o kombinaci klasických metod krátkých a dlouhých charakteristik. Tato metoda nám dovoluje lépe popsat globální charakter pole záření než metoda krátkých charakteristik a výpočetní čas není tak velký jako u metody dlouhých charakteristik. Umožňuje také řešit rovnici přenosu záření v rychlostním poli (kap. 5.2) libovolného průběhu. Bohužel pro velké gradienty rychlostí je potřeba zjemnit síť a vzroste tak výpočetní čas. Metoda využívá, jako předchozí jednodimenzionální, lokální Lorentzovy transformace. Tuto metodu je možné použít nejen pro horké hvězdy s hvězdným větrem, ale také např. pro akreční disky. Je také velmi užitečná při studiu rotace hvězd.

Závislost výpočetního času na počtu frekvenčních bodů již není lineární, lze ji proložit polynomem třetího stupně (kap. 6.2). Závislost výpočetního času na počtu hloubkových bodů je parabolická.

Všechny předešlé metody řešení rovnice přenosu záření jsou zde testovány pro případ lokální termodynamické rovnováhy. Toto přiblížení je zvoleno jen pro urychlení výpočtu. V programových modulech (kap.8) je možné volit mezi řešením Boltzmannovy a Sahovy rovnice (kap. 3.1) a rovnic statistické rovnováhy (kap. 3.2).

Výsledkem práce jsou numerické metody a programy pro řešení problému přenosu záření. Pro výpočet rovnice přenosu záření je možné volit mezi několika metodami. Stačí-li nám přiblížení planparalelní atmosféry, ve které lze zanedbat pohyb hmoty, máme na výběr mezi klasickým Feautrierovým řešením a metodou nespojitých konečných prvků. V pohybuující se atmosféře je možné volit mezi metodou využívající lokální Lorentzovy transformace a přímým řešením rovnice přenosu záření metodou nespojitých konečných prvků a to jak s aberací, tak bez tohoto jevu. Pro přesnější výpočty syntetického spektra je potřeba počítat s vícerozměrnými modely. V tomto případě můžeme použít metodu využívající osové symetrie hvězd. Ta je napsána také pro pohybuující se prostředí. Výpočet obsazení hladin lze provádět jak za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy, tak také z rovnic statistické rovnováhy. Získáme přesnější výsledek, ale za cenu většího výpočetního času.

Programy a moduly lze využít při studiu horkých hvězd s hvězdným větrem



nebo u akrečních disků. Mohou být také velmi užitečné u hvězd rotujících rychlostí blízkou kritické rotační rychlosti. U těchto hvězd aproximace profilu čáry jako konvoluce statického planparalelního řešení a rotačního profilu již nemusí odpovídat skutečnosti. Po mírné úpravě spodní hraniční podmínky se mohou použít také pro osově symetrické planetární mlhoviny. Tyto programy a moduly nejsou vhodné pro hvězdy s velkými skvrnami v atmosféře, či pro těsné dvojhvězdy, u kterých je vlivem slapových sil zdeformována atmosféra.

## Příloha A

# Einsteinovy koeficienty a účinné průřezy

V kapitole 3.2 se vyskytují Einsteinovy koeficienty a účinné průřezy. Pro přehlednost textu jejich vyjádření uvádíme až zde v dodatku.

Einsteinovy koeficienty udávají pravděpodobnosti přechodu mezi hladinami. Spodní hladinu budeme označovat indexem  $i$  a horní  $j$ . Einsteinův koeficient absorpce  $B_{ij}$  je (blíže viz např. Mihalas, 1982)

$$B_{ij} = \frac{4\pi^2 e^2 f_{ij}}{m_e c h \nu}, \quad (\text{A.1})$$

kde  $f_{ij}$  je síla oscilátoru. Koeficient absorpce a stimulované emise  $B_{ji}$  je svázán vztahem

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}. \quad (\text{A.2})$$

Mezi koeficientem stimulované emise  $B_{ji}$  a spontánní emise  $A_{ji}$  platí

$$A_{ji} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ji}. \quad (\text{A.3})$$

Ve výrazech (3.23) se objevuje také účinný průřez  $\alpha_{ij}$ . U vázaně-vázaných přechodů můžeme účinný průřez vyjádřit

$$\alpha_{ij} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{ij} \frac{\Delta k}{\Delta \nu}, \quad (\text{A.4})$$

kde  $f_{ij}$  je síla oscilátoru,  $\Delta k$  počet volných stavů ve frekvenčním intervalu  $\Delta \nu$ . Pro fotoionizační účinný průřez platí

$$\alpha(\nu) = \frac{64\pi^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3}c h^6} \frac{1}{n^5 \nu^3} g_{II}(n, \nu). \quad (\text{A.5})$$

$g_{II}$  je Gauntův faktor pro vázaně–volné přechody (Menzel 1935, 1.46)

$$g_{II} = 1 - \frac{0,1728}{n^{2/3}} - \frac{0,0496}{n^{4/3}}. \quad (\text{A.6})$$

Účinný průřez volně–volných přechodů můžeme zapsat

$$\alpha(\nu, T) = \frac{4e^6}{3ch} \left( \frac{2\pi}{3km_e^3} \right)^{1/2} T^{-1/2} \nu^{-3} \bar{g}_{III}(\nu, T), \quad (\text{A.7})$$

kde střední Gauntův faktor pro volně–volné přechody (Menzel 1935, 2.25) je

$$\bar{g}_{III}(\nu, T) = 1 + 0,1728 \left( \frac{\nu}{RZ^2} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{2kT}{h\nu} \right). \quad (\text{A.8})$$

$R$  je zde Rydbergova konstanta a  $Z$  náboj atomu.

## Příloha B

# Diferenční schéma

V tomto dodatku rozepíšeme členy rovnic (5.10), (5.17), které můžeme formálně zapsat

$$\mathcal{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (\text{B.1})$$

V případě, kdy zanedbáváme aberaci (viz kap. 5.1.2, rovnice (5.10)), jsou prvky matice  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_n \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9} + \frac{\Delta z \Delta\nu}{4} \\ \mathcal{A}_{12} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_n \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\ \mathcal{A}_{13} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\ \mathcal{A}_{14} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} \\ \mathcal{A}_{21} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_n \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\ \mathcal{A}_{22} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_n \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9} \\ \mathcal{A}_{23} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} \\ \mathcal{A}_{24} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\ \mathcal{A}_{31} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_n \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{32} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_n \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} \\
\mathcal{A}_{33} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9} + \frac{\Delta z \Delta\nu}{4} \\
\mathcal{A}_{34} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\
\mathcal{A}_{41} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_n \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} \\
\mathcal{A}_{42} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{12} + \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_n \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\
\mathcal{A}_{43} &= -\mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{12} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\
\mathcal{A}_{44} &= \mu_0 \frac{\Delta\nu}{6} - \frac{\mu_0^2}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \nu_{n+1} \frac{\Delta z}{6} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9}
\end{aligned}$$

a prvky vektoru  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \eta_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9} + \eta_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \eta_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \eta_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} + \frac{I_{d,n,2} + I_{d,n,3} + I_{d,n,4}}{3} \\
b_2 &= \eta_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \eta_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9} + \eta_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} + \eta_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\
b_3 &= \eta_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \eta_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} + \eta_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9} + \eta_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \frac{I_{d,n+1,2} + I_{d,n+1,4}}{2} \\
b_4 &= \eta_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} + \eta_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \eta_{d,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} + \eta_{d+1,n+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{9}
\end{aligned}$$

V případě s aberací (viz kap. 5.1.3, rovnice (5.17)) jsou prvky matice  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z \Delta\mu}{18} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\mu \Delta\nu}{27} + \frac{\Delta z \Delta\mu \Delta\nu}{8} \\
\mathcal{A}_{12} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z \Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z \Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z \Delta\mu \Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{13} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z \Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z \Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z \Delta\mu \Delta\nu}{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{14} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{15} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{16} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{72} \\
\mathcal{A}_{17} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{72} \\
\mathcal{A}_{18} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{21} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{22} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27} \\
\mathcal{A}_{23} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{24} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{25} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{26} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{27} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{28} &= \left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{31} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{32} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{33} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27} + \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{8} \\
\mathcal{A}_{34} &= \left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{35} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{36} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{37} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{38} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{41} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{42} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{43} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{44} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27} \\
\mathcal{A}_{45} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{46} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{47} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{48} &= \left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{51} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{52} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{53} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{54} &= \left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{55} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27} + \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{8} \\
\mathcal{A}_{56} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{57} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{58} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{61} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{62} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{63} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{64} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{65} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{66} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27} \\
\mathcal{A}_{67} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{68} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{71} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{72} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216} \\
\mathcal{A}_{73} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{74} &= \left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{75} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{76} &= \left(\mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{77} &= -\left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27} + \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{8} \\
\mathcal{A}_{78} &= \left(\mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{81} &= -\left(\mu_{0,i} + \frac{v_d}{c}\right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz}\Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{216}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{82} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{72} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{83} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{72} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{84} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad + \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{85} &= - \left( \mu_{0,i} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{72} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{108} \\
\mathcal{A}_{86} &= \left( \mu_{0,i} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{36} - \frac{\mu_{0,i}(\mu_{0,i}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{54} \\
\mathcal{A}_{87} &= - \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_d}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\nu}{36} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_d \frac{\Delta z\Delta\mu}{36} + \chi_{d,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{56} \\
\mathcal{A}_{88} &= \left( \mu_{0,i+1} + \frac{v_{d+1}}{c} \right) \frac{\Delta\mu\Delta\nu}{18} + \frac{\mu_{0,i+1}(\mu_{0,i+1}^2 - 1)}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\nu}{18} \\
&\quad - \mu_{0,i+1}^2 \frac{\nu_{0,n+1}}{c} \frac{dv}{dz} \Big|_{d+1} \frac{\Delta z\Delta\mu}{18} + \chi_{d+1,n+1} \frac{\Delta z\Delta\mu\Delta\nu}{27}
\end{aligned}$$



## Příloha C

# Vstupní model atmosféry

Na testy programů v kapitole 6 byl použit výstup z hydrostatického modelu ATA od Kubáta (2003). V následující tabulce je výsledný model atmosféry pro hvězdu spektrálního typu B4.

$z(d)$ [cm]	$T(d)$ [K]	$n_e(d)$ [cm <sup>-3</sup> ]	$z(d)$ [cm]	$T(d)$ [K]	$n_e(d)$ [cm <sup>-3</sup> ]
2.2862507E+11	10869.33	1.2087334E+08	2.2725908E+11	11798.41	3.5495587E+13
2.2859749E+11	10871.11	1.5565563E+08	2.2723026E+11	11914.26	4.5219122E+13
2.2856988E+11	10872.91	2.0052332E+08	2.2720105E+11	12068.55	5.7414772E+13
2.2854223E+11	10874.71	2.5839916E+08	2.2717131E+11	12270.27	7.2621213E+13
2.2851456E+11	10876.52	3.3305214E+08	2.2714089E+11	12528.18	9.1470967E+13
2.2848688E+11	10878.34	4.2934243E+08	2.2710964E+11	12849.62	1.1471892E+14
2.2845919E+11	10880.16	5.5353549E+08	2.2707735E+11	13240.32	1.4328346E+14
2.2843149E+11	10881.97	7.1370837E+08	2.2704383E+11	13703.47	1.7833501E+14
2.2840379E+11	10883.77	9.2026996E+08	2.2700886E+11	14240.48	2.2141124E+14
2.2837608E+11	10885.55	1.1866316E+09	2.2697219E+11	14851.56	2.7455037E+14
2.2834839E+11	10887.31	1.5300680E+09	2.2693356E+11	15535.93	3.4030908E+14
2.2832070E+11	10889.04	1.9728199E+09	2.2689270E+11	16290.47	4.2150812E+14
2.2829302E+11	10890.72	2.5435123E+09	2.2684940E+11	17113.95	5.2092714E+14
2.2826536E+11	10892.36	3.2789661E+09	2.2680352E+11	18003.13	6.4184323E+14
2.2823772E+11	10893.95	4.2265177E+09	2.2675499E+11	18952.82	7.8885477E+14
2.2821010E+11	10895.49	5.4469899E+09	2.2670373E+11	19961.21	9.6801721E+14
2.2818252E+11	10896.97	7.0184887E+09	2.2664966E+11	21036.43	1.1863688E+15
2.2815497E+11	10898.38	9.0412928E+09	2.2659261E+11	22192.59	1.4518842E+15
2.2812747E+11	10899.70	1.1644098E+10	2.2653238E+11	23450.71	1.7733060E+15
2.2810002E+11	10900.88	1.4992139E+10	2.2646867E+11	24833.30	2.1604747E+15
2.2807264E+11	10901.84	1.9297694E+10	2.2640111E+11	26364.98	2.6243590E+15
2.2804532E+11	10902.44	2.4833720E+10	2.2632926E+11	28071.95	3.1771988E+15
2.2801808E+11	10902.53	3.1951684E+10	2.2625257E+11	29981.45	3.8328005E+15
2.2799092E+11	10902.03	4.1104624E+10	2.2617042E+11	32123.75	4.6068802E+15
2.2796385E+11	10900.97	5.2877084E+10	2.2608201E+11	34535.64	5.5183242E+15
2.2793687E+11	10899.61	6.8023408E+10	2.2598631E+11	37271.26	6.5926417E+15
2.2790998E+11	10898.41	8.7516950E+10	2.2588178E+11	40401.01	7.8689375E+15
2.2788316E+11	10897.91	1.1261283E+11	2.2576656E+11	43881.84	9.4007882E+15
2.2785642E+11	10898.67	1.4492799E+11	2.2563988E+11	47382.47	1.1278833E+16
2.2782974E+11	10901.14	1.8654342E+11	2.2550264E+11	50646.24	1.3655364E+16
2.2780310E+11	10905.84	2.4013307E+11	2.2535622E+11	53737.15	1.6662339E+16
2.2777650E+11	10913.35	3.0912736E+11	2.2520149E+11	56787.39	2.0422591E+16
2.2774991E+11	10924.34	3.9791981E+11	2.2503875E+11	59889.69	2.5085568E+16
2.2772333E+11	10939.45	5.1213412E+11	2.2486796E+11	63106.12	3.0837464E+16
2.2769673E+11	10959.12	6.5897143E+11	2.2468887E+11	66483.65	3.7905999E+16
2.2767009E+11	10981.80	8.4778709E+11	2.2450106E+11	70063.15	4.6565851E+16
2.2764376E+11	10745.77	1.1152910E+12	2.2430399E+11	73884.18	5.7145280E+16
2.2761763E+11	10829.46	1.4273560E+12	2.2409699E+11	77987.71	7.0033853E+16
2.2759129E+11	10929.20	1.8242781E+12	2.2387926E+11	82417.70	8.5691233E+16
2.2756469E+11	11037.59	2.3300047E+12	2.2364989E+11	87221.97	1.0465732E+17
2.2753782E+11	11148.33	2.9755770E+12	2.2340781E+11	92452.26	1.2756469E+17
2.2751070E+11	11255.31	3.8015103E+12	2.2315185E+11	98162.81	1.5515582E+17
2.2748332E+11	11352.59	4.8608780E+12	2.2288064E+11	104406.52	1.8831074E+17
2.2745573E+11	11434.12	6.2236334E+12	2.2259275E+11	111227.09	2.2809544E+17
2.2742798E+11	11495.12	7.9815046E+12	2.2228665E+11	118644.74	2.7585136E+17
2.2740010E+11	11536.20	1.0251265E+13	2.2196086E+11	126638.05	3.3334260E+17
2.2737213E+11	11567.58	1.3173932E+13	2.2161412E+11	135133.44	4.0294841E+17
2.2734408E+11	11602.42	1.6919765E+13	2.2124550E+11	144013.67	4.8785993E+17
2.2731593E+11	11649.40	2.1701062E+13	2.2085454E+11	153151.40	5.9221375E+17
2.2728761E+11	11712.65	2.7785210E+13	2.2044116E+11	162451.27	7.2115492E+17

Tabulka C.1: Tabulka vstupních dat pro testy modelů.

# Literatura

- Anderson, L. S., 1989, ApJ **339**, 558
- Auer, L. H., 1991, in Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models, ed. by L. Crivellari, I. Hubeny, and D. G. Hummer, NATO ASI Series C 341 (Kluwer, Dordrecht), p. 9
- Auer, L. H., 2003, in Stellar Atmosphere Modelling, Hubeny, I., Mihalas, D. & Werner, K., eds., ASP Conf. Ser. Vol. **288**, in press
- Auer, L. H., Fabiani Bendicho, P., Trujillo Bueno, J., 1994, A&A **292**, 599
- Auer, L. H., Mihalas, D., 1969, ApJ **158**, 641
- Auer, L. H., Mihalas, D., 1970, MNRAS **149**, 65
- Auer, L. H., Paletou, F., 1994, A&A **284**, 675
- Baron, E., Hauschildt, P. H., Mezzacappa, A., 1996, MNRAS **278**, 763
- Baron, E., Hauschildt, P. H., 1998, ApJ, **495**, 370
- Boissé, P. 1990, A&A **228**, 483
- Cannon, C. J., 1970, ApJ **161**, 255
- Cannon, C. J., 1973a, JQSRT **13**, 627
- Cannon, C. J., 1973b, ApJ **185**, 621
- Cannon, C. J., 1985, The transfer of spectral line radiation, Cambridge University Press, Cambridge
- Carlsson, M., 1986, Uppsala Astronomical Observatory Report **33**
- Cassinelli, J. P., Lamers, H. J. G. L. M., 1999, Introduction to Stellar Winds, Cambridge Univ. Press, Cambridge
- Castor, J. I., Dykema, P. G., Klein, R. I., 1992, ApJ **387**, 561
- Cidale, L. S., 1998, ApJ **502**, 824



- Dykema, P. G., Klein, R. I., Castor, J. I., 1996, ApJ **457**, 892
- Dykema, P. G., Klein, R. I., Castor, J. I., Greenbaum, A., Taylor, D., 1989, JQSRT **41**, 199
- Feautrier, P., 1964, C. R. Acad. Sci. Paris **258**, 3189
- Goldin, V. Ya, 1964, USSR Comp. Math. and Math. Phys. **4**, 136
- Gray, D. F., 1976, Observation and Analysis of Stellar Photospheres, John Wiley & Sons, New York
- Hadrava, P., Kubát, J. 2003, in Stellar Atmosphere Modelling, Hubeny, I., Mihalas, D., & Werner, K., eds., ASP Conf. Ser. Vol. **288**, in press
- Hamann, W. R., 1985, A&A **148**, 364
- Hanuschik, R. W., Kozok, J. R., 1988, A&A **189**, 147
- Hauschildt, P. H., 1992, JQSRT **47**, 433
- Hauschildt, P. H., Baron, E., Allard, F., 1997, ApJ, **483**, 390
- Hauschildt, P. H., Best, M., Wehrse, R., 1991 A&A, **247**, L21
- Hauschildt, P. H., Starrfield, S., Shore, S., Allard, F., Baron, E., 1995, ApJ **447**, 829
- Hubeny, I., 1988, Computer Physics Comm. **52**, 103
- Hubeny, I., 1992, in U. Heber and C. S. Jeffery (Eds.), The Atmospheres of Early-Type Stars, Lecture Notes in Physics **401**, Springer, 377
- Hubeny, I., Lanz, T., 1995, ApJ, **439**, 875
- Hummel, W., Vrancken, M., 2000, A&A **359**, 1075
- Jacobi, G. G., 1845, Astron. Nach. **22**, 297
- Jefferies, J., 1968, Spectral Line Formation, Waltham, Mass. Blaisdel
- Kroll, P., Hanuschik, R. W., 1997, in: IAU Coll. **163**, 494
- Kubát, J., 1994, A&A **287**, 179
- Kubát, J., 2003, in Stellar Atmospheres Modelling, Hubeny, I., Mihalas, D., & Werner, K., eds., ASP Conf. Ser. Vol **288**, in press
- Kunasz, P., Auer, L. H., 1988, JQSRT **39**, 67
- Kunasz, P., Olson G. L., 1988, JQSRT **39**, 1
- Marčuk, G. I., 1987, Numerické metody matematiky, Academia, Praha

- Kurucz, R. L., 1970, SAO Spec. Rep. **309**
- Menzel, D. Ch. L., Pekeris, 1935, MNRAS **96**, 77
- Mihalas, D., 1980, ApJ **237**, 534
- Mihalas, D., 1982, Zvezdnyje atmosfery 1, 2, Mir, Moskva
- Mihalas, D., 1985, J. Comput. Phys. **57**, 1
- Mihalas, D., Auer, L. H., Mihalas, B. W., 1978, ApJ **220**, 1001
- Mihalas, D., Hummer, D. G., 1974, ApJ **28**, 343
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., 1978, ApJ **219**, 635
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., 1986, J. Comput. Phys. **64**, 1
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., Hummer, D. G., 1975, ApJ **202**, 465
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., Hummer, D. G., 1976a, ApJ **203**, 647
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., Hummer, D. G., 1976b, ApJ **206**, 515
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., Hummer, D. G., 1976c, ApJ **210**, 419
- Ng, K. C., 1974, J. Chem. Phys. **61**, 2680
- Olson, G. L., Auer, L. H., Buchler, J. R., 1986, JQSRT **35**, 431
- Olson, G. L., Kunasz, P. B., 1987, JQSRT **38**, 325
- Pauldrach, A., Herrero, A., 1988, A&A **199**, 262
- Peraiah, A., 1987, ApJ **317**, 271
- Peraiah, A., 1991, ApJ **371**, 683
- Press, W., Vetterling, W. T., Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., 1992, Numerical recipes, Cambridge University Press, New York, USA
- Puls, J., 1991, A&A **248**, 581
- Puls, J., Herrero, A., 1988, A&A **204**, 219
- Rektorys, K., 1980, Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky, Academia, Praha
- Richling, S., Meinköhn, E., Kryzhevoi, N., Kanschat, G., 2001, A&A **380**, 776
- Rybicki, G. B., 1971, JQSRT **11**, 589
- Rybicki, G. B., 1972, in Line Formation in the Presence of Magnetic Fields, ed. by R. G. Athay, L. L. House, G. Newkirk (High Altitude Observatory, Boulder), p. 145

- Rybicki, G. B., Hummer, D. G., 1992, *A&A* **262**, 209
- Scharmer, G. B., 1981, *Apj* **249**, 720
- Sobolev, V., 1957, *Soviet. Astron.* **1**, 678
- Škoda, P., 1995, *Disertační práce*
- Van Der Held, E. F. M., 1931, *Z. Phys.* **70**, 508
- Vinsome, P. K. W., 1976, in *Proc. of the 4th Symp. on Reservoir Simulation*, 149
- Vitásek, E., 1987, *Numerické metody*, SNTL, Praha
- Wiese, W. L., Smith, M. W., Glennon, B. M., 1966, *Atomic transition probabilities*, US Department of Commerce, National Buereau of Standards, Washington, D.C
- Werner, K., 1986, *A&A* **161**, 177