

ÚLOHY Z ASTROFYZIKY

Vladimír Štefl, Daniela Korčáková, Jiří Krtička

Brno 2002



Předmluva

Bez řešení úloh nelze astrofyziku studovat a porozumět jí. K tomu má napomoci předkládaná sbírka, která je určena především studentům učitelských kombinací s fyzikou pro povinnou přednášku „Astrofyzika“. Sbíрка úloh doplňuje výkladový text skript Štefl, V.: Vybrané kapitoly z astrofyziky, UJEP, Brno 1985, v širším slova smyslu některé kapitoly vysokoškolské učebnice Vanýsek, V.: Základy astronomie a astrofyziky, Academia, Praha 1980.

Současná vědecká astrofyzika vychází důsledně z fyziky, což se odráží v obsahu a pojetí úloh zařazených do sbírky. Jejich studium a osvojení umožňuje hlubší pochopení fyzikální podstaty stavby kosmických těles a jevů na nich probíhajících. Řešení se proto logicky opírá o znalosti z experimentální a teoretické fyziky, v naší sbírce na úrovni učitelského studia. Jako optimální postup doporučujeme řešit nejprve úlohy samostatně, na základě vlastních vědomostí a dovedností, teprve následně je vhodné se přesvědčit o správnosti postupu i dosažených numerických hodnot. Stručně naznačené řešení jistě poslouží při sebevzdělávání studentů. Některé náročnější úlohy vyžadují samostatný přístup, slouží k prohloubení znalostí a jsou určeny i pro studenty odborného magisterského astrofyzikálního studia.

Sbíрка obsahuje na 250 úloh různého stupně obtížnosti. Přibližně polovina z nich byla převzata z literatury, především z [2], [3], [7], [11], [12], [13], [14], druhá polovina je však původních. První úlohovou část kapitoly 1–9 připravil Vladimír Štefl, kapitolu 10 se zdrojovými kódy Jiří Krtička.

Autoři budou vděční všem uživatelům sbírky za připomínky. Náměty a připomínky lze zaslat na adresu `stefl@astro.sci.muni.cz`, `krticka@physics.muni.cz`.

S ohledem na omezený rozsah sbírky byl výběr témat úloh zvolen tak, aby doplňoval osvědčenou vysokoškolskou učebnici Široký, J., Široká, M.: Základy astronomie v příkladech, která však vyšla naposledy v SPN, Praha 1973.

Autoři děkují oběma recenzentům, RNDr. Pavlu Kotrčovi, CSc., z AsÚ AV ČR v Ondřejově a doc. RNDr. Miroslavě Široké, CSc., z Olomouce, kteří svými připomínkami podstatně přispěli ke zkvalitnění úrovně i obsahu sbírky.

Brno, prosinec 2002

Vladimír Štefl, Daniela Korčáková, Jiří Krtička

A. S. Eddington (1882–1944)

„Není nic jednoduššího, než jsou hvězdy“

Obsah

1	Záření hvězd	7
2	Základy hvězdné spektroskopie	11
3	Nitro hvězd	18
4	Hvězdné atmosféry	26
5	Dvojhvězdy	36
6	Pozdní stadia vývoje hvězd, novy, supernovy	42
7	Závěrečná stadia vývoje hvězd	47
8	Hvězdy a mezihvězdná látka	52
9	Extragalaktická astronomie	58
10	Počítačové úlohy	63
11	Astronomické a fyzikální konstanty, převody a zákony	79
	Literatura	82

1 Záření hvězd

Úloha 1.1 Pomocí bolometrů umístěných na družicích byla zjištěna přesná hodnota solární konstanty K . Určete efektivní povrchovou teplotu Slunce, známe-li dále hodnoty poloměru R_{\odot} a střední vzdálenosti Země od Slunce r .

Řešení: Efektivní povrchovou teplotu určíme ze vztahu $T_{\text{ef}} = \left(\frac{Kr^2}{\sigma R_{\odot}^2}\right)^{1/4} = 5780 \text{ K}$.

Úloha 1.2 Známe absolutní bolometrickou hvězdnou velikost a zářivý výkon Slunce. Stanovte vzájemné vztahy mezi absolutní bolometrickou hvězdnou velikostí hvězdy M_{bol} v mag, jejím zářivým výkonem L ve W, pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí m_{bol} v mag, vzdáleností hvězdy r v pc a hustotou zářivého toku F_{bol} ve $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Řešení: Vyjdeme z upravené Pogsonovy rovnice: $2,5 \log \frac{L}{L_{\odot}} = 4,75 - M_{\text{bol}}$; obdržíme $\log L = 28,49 - 0,4M_{\text{bol}}$, $M_{\text{bol}} = 71,23 - 2,5 \log L$, $m_{\text{bol}} - M_{\text{bol}} = 5 \log r - 5$, $m_{\text{bol}} = -19,01 - 2,5 \log F_{\text{bol}}$.

Úloha 1.3 Stanovte změnu zářivého výkonu hvězdy, jejíž poloměr se zmenší o 2% a efektivní povrchová teplota se zvětší o 2%.

Řešení: Ze Stefanova-Boltzmannova zákona vyplývá $\frac{dL}{L} = 2\frac{dR}{R} + 4\frac{dT_{\text{ef}}}{T_{\text{ef}}}$. Pro malé změny poloměru a teploty obdržíme přibližně $\frac{\Delta L}{L} = 2\frac{\Delta R}{R} + 4\frac{\Delta T_{\text{ef}}}{T_{\text{ef}}}$. Podle zadání úlohy dosadíme $\frac{\Delta R}{R} = -\epsilon$ a $\frac{\Delta T_{\text{ef}}}{T_{\text{ef}}} = +\epsilon$ a získáme $\frac{\Delta L}{L} = 2\epsilon$. Při $\epsilon = 0,02$ se zářivý výkon hvězdy zvětší o 4%.

Úloha 1.4 Hvězda má efektivní povrchovou teplotu 10 000 K. Jak se zvýší zářivý výkon hvězdy, jestliže teplota naroste o 500 K?

Řešení: Ze Stefanova-Boltzmannova zákona vyplývá $L_0 \sim T_{\text{ef}}^4$, při nárůstu teploty platí $L \sim \left[\left(1 + \frac{1}{20}\right) T_{\text{ef}}\right]^4 \sim 1,22 L_0$.

Úloha 1.5 Určete rozdíl absolutních bolometrických hvězdných velikostí dvou hvězd stejných poloměrů, jejichž efektivní povrchové teploty se liší o 10%.

Řešení: Při stejném poloměru obou hvězd platí $M_1 - M_2 = -2,5 \log \frac{L_1}{L_2} = -10 \log \frac{T_1}{T_2}$. Při $\frac{T_1}{T_2} = 1,1$ je $M_{\text{bol}1} - M_{\text{bol}2} = -0,414 \text{ mag}$.

Úloha 1.6 U hvězdy α Tau Aldebarana K5 III byl zjištěn úhlový průměr $2\alpha = 0,021''$. Naměřená hodnota hustoty zářivého toku dopadajícího na vnější část atmosféry Země od této hvězdy je $F_{\text{bol}} = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Roční paralaxa $\pi = 0,050''$. Stanovte poloměr a efektivní povrchovou teplotu hvězdy.

Řešení: Určíme vzdálenost hvězdy $r = \frac{1}{\pi} = 20 \text{ pc}$, úhlový poloměr $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$. Skutečný poloměr $R = \alpha r = 3,09 \cdot 10^{10} \text{ m} = 44 R_{\odot}$. Efektivní povrchová teplota je $T_{\text{ef}} = \left(\frac{F_{\text{bol}} r^2}{\sigma R^2}\right)^{1/4} = 3900 \text{ K}$.

Úloha 1.7 Úhlový průměr hvězdy α CMi Procyona F5 IV-V je $2\alpha = 0,005''$ a roční paralaxa

$\pi = 0,292''$. Naměřená hodnota hustoty zářivého toku $F_{\text{bol}} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Určete poloměr a efektivní povrchovou teplotu hvězdy.

Řešení: Obdobným postupem jako u předcházejících úloh stanovíme $R = 1,7 R_{\odot}$, $T_{\text{ef}} = 6\,550 \text{ K}$.

Úloha 1.8 U hvězdy α Cas Schedar K0 III s efektivní povrchovou teplotou $4\,500 \text{ K}$, nacházející se ve vzdálenosti 70 pc byla zjištěna hustota zářivého toku $F_{\text{bol}} = 1,65 \cdot 10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Určete R , L , M_{bol} , m_{bol} , modul vzdálenosti a λ_{max} .

Řešení: Zářivý výkon určíme ze vztahu $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 = 9,67 \cdot 10^{28} \text{ W} = 251 L_{\odot}$. Poloměr hvězdy stanovíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi \sigma T_{\text{ef}}^4} \right)^{1/2}$. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost stanovíme ze vztahu $\log L = 0,4(4,75 - M_{\text{bol}})$, odkud $M_{\text{bol}} = -1,24 \text{ mag}$. Pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikost získáme z upravené Pogsonovy rovnice $m_{\text{bol}} = M_{\text{bol}} + 5 \log r - 5 = 2,99 \text{ mag}$. Modul vzdálenosti je $m_{\text{bol}} - M_{\text{bol}} = 4,23 \text{ mag}$. Vlnová délka hodnoty maximální intenzity záření zjištěná z Wienova posunovacího zákona je $\lambda_{\text{max}} = 644 \text{ nm}$.

Úloha 1.9 Pro hvězdu nacházející se ve vzdálenosti $r = 10,4 \text{ pc}$ byla zjištěna hustota zářivého toku $F_{\text{bol}} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ a efektivní povrchová teplota $T = 4\,800 \text{ K}$. Určete úhlový průměr hvězdy a zvažte, zda ho lze současnými interferometrickými metodami změřit. Odhadněte bolometrickou korekci, jestliže absolutní vizuální hvězdná velikost je $M_V = 1,03 \text{ mag}$. Údaje odpovídají hvězdě β Gem Pollux K0 III.

Řešení: Nejprve určíme zářivý výkon hvězdy $L = 4\pi r^2 F_{\text{bol}} = 1,5 \cdot 10^{28} \text{ W}$, tedy $L = 39 L_{\odot}$. Dále stanovíme poloměr hvězdy $R = \left(\frac{L}{4\pi \sigma T_{\text{ef}}^4} \right)^{1/2}$ vyjádřeno v jednotkách poloměru Slunce $R = 9 R_{\odot}$. Úhlový průměr $2\alpha = 2 \frac{R}{r} = 3,9 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$, tedy $0,008''$. Hodnota je měřitelná současnými prostředky. Ze vztahu $\log L = 0,4(4,75 - M_{\text{bol}})$ nalezneme $M_{\text{bol}} = 0,77 \text{ mag}$, $BC = M_{\text{bol}} - M_V = -0,26 \text{ mag}$, což odpovídá tabulkovým hodnotám.

Úloha 1.10 U Vegy byl zjištěn úhlový průměr $2\alpha = 0,00324''$ a hustota zářivého toku $F_{\text{bol}} = 2,84 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Její vzdálenost je $r = 7,8 \text{ pc}$. Stanovte poloměr, efektivní povrchovou teplotu, zářivý výkon a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost. Absolutní bolometrickou hvězdnou velikost stanovíme ze vztahu $\log L = 0,4(4,75 - M_{\text{bol}})$, $M_{\text{bol}} = 0,42 \text{ mag}$.

Řešení: $\alpha = \frac{R}{r}$, skutečný poloměr $R = \alpha r = 1,89 \cdot 10^9 \text{ m}$, tedy $2,7 R_{\odot}$. Efektivní povrchovou teplotu získáme ze vztahu $T_{\text{ef}} = \left(\frac{F_{\text{bol}} r^2}{\sigma R^2} \right)^{1/4} = 9\,500 \text{ K}$. Zářivý výkon stanovíme ze vzorce $L = 4\pi r^2 F_{\text{bol}} = 2,07 \cdot 10^{28} \text{ W} = 54 L_{\odot}$.

Úloha 1.11 Efektivní povrchová teplota Vegy je $9\,500 \text{ K}$, její poloměr $2,7 R_{\odot}$. Vypočtete zářivý výkon hvězdy a její absolutní bolometrickou hvězdnou velikost.

Řešení: Využijeme řešení předchozích úloh, $L = 54 L_{\odot}$, $M_{\text{bol}} = 0,44 \text{ mag}$.

Úloha 1.12 Interferometrickou metodou byl určen úhlový průměr u hvězdy α Boo Arktura K1 III na $0,021''$. Zjištěná hodnota roční paralaxy je $\pi = 0,089''$ a hustota zářivého toku $F_{\text{bol}} = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Stanovte poloměr a efektivní povrchovou teplotu Arktura.

Řešení: $R = 25 R_{\odot}$, $T_{\text{ef}} = 4\,300\text{ K}$.

Úloha 1.13 U Siria B byla zjištěna pozorovaná bolometrická hvězdná velikost $m_{\text{bol}} = 6,0\text{ mag}$. Z výsledků měření družice Hipparcos byla stanovena roční paralaxa $\pi = 0,379''$. Určete absolutní bolometrickou hvězdnou velikost hvězdy.

Řešení: Dosadíme do vztahu $M_{\text{bol}} = m_{\text{bol}} + 5 + 5 \log \pi$, $M_{\text{bol}} = 8,9\text{ mag}$.

Úloha 1.14 Červený trpaslík spektrální třídy M5 Ve má efektivní povrchovou teplotu 3200 K a absolutní vizuální hvězdnou velikost $M_V = 13,4\text{ mag}$. Pomocí v tabulkách nalezené bolometrické korekce $BC = -2,3\text{ mag}$ nalezněte zářivý výkon a poloměr hvězdy.

Řešení: $M_{\text{bol}} = BC + M_V = 11,1\text{ mag}$. Zářivý výkon v jednotkách zářivého výkonu Slunce stanovíme podle vztahu $\log L = 0,4(4,75 - 11,1) = -2,54$, tedy $L = 0,003 L_{\odot}$, $L = 1,2 \cdot 10^{24}\text{ W}$. Poloměr určíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}\right)^{1/2} = 1,2 \cdot 10^8\text{ m}$, tedy $0,17 R_{\odot}$. Údaje v podstatě odpovídají Barnardově hvězdě, která má největší známý vlastní pohyb $10,34''$ za rok. Byla objevena E. E. Barnardem roku 1916.

Úloha 1.15 Rozdělení energie ve spojitém spektru Slunce G2 V je blízké rozložení intenzity záření černého tělesa s teplotou 5 800 K. Proč rozložení intenzity záření ve spojitém spektru Vegy A0 V příliš neodpovídá rozložení intenzity záření černého tělesa s teplotou 9 500 K?

Řešení: Fotosféru Slunce můžeme považovat v prvním přiblížení za šedou (šedý zářič). Zdrojem neprůzračnosti je H^- absorbující procházející záření u všech vlnových délek téměř stejně, neselektivně. Proto lze zjednodušeně pokládat spojitě záření Slunce za téměř odpovídající zákonům záření černého tělesa (ZZČT). U Vegy je základním zdrojem absorpce v atmosféře neutrální vodík, jehož absorpce je výrazně selektivní. Spojitě záření tak přichází z odlišných hloubek o různé teplotě, intenzita záření spojitěho spektra se tudíž odlišuje od planckovské intenzity. Ta je dále narušena balmerovským skokem, jehož velikost roste s teplotou od spektrální třídy G k A, u Vegy je mnohem větší než u Slunce.

Úloha 1.16 Pod rozdělením energie ve spektru obvykle rozumíme rozdělení intenzity podle vlnových délek. Na jaké vlnové délce se však nachází maximum v rozdělení intenzity podle frekvence? Jako příklad použijeme Slunce, předpokládejme, že vyzařuje jako absolutní černé těleso s teplotou 5 780 K.

Řešení: V prvním případě, rozdělení podle vlnových délek I_{λ} , má Wienův posunovací zákon tvar $\lambda_{\text{max}} T = 0,0029$. Křivka, zachycující intenzitu jako funkci vlnové délky, dosahuje maxima při $\lambda_{\text{max}} = 500\text{ nm}$. Méně častější je vyjádření rozdělení intenzity podle frekvence $I_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$. Z podmínky $\frac{dI_{\nu}}{d\nu}$ dostaneme $\nu = \frac{2,83kT}{h}$, odkud po úpravě obdržíme $\lambda_{\text{max}} T = 0,0051$, což dává polohu maxima $\lambda_{\text{max}} = 800\text{ nm}$. Tedy obě vlnové délky se výrazně odlišují.

Úloha 1.17 Určete úbytek hmotnosti Slunce prostřednictvím slunečního větru. Předpokládejte sféricky symetrické šíření slunečního větru meziplanetárním prostorem a výpočet proveďte za předpokladu, že veškerá hmotnost ze Slunce prochází sférou ve vzdálenosti 1 AU. Je zadáno $v = 500\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $r = 1\text{ AU}$, $n = 7\text{ protonů}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Řešení: Sférickou vrstvou o poloměru r projde $dM = \rho dV = (nm_{\text{H}})(4\pi r^2 v dt)$. Zmenšení hmotnosti lze vyjádřit $\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 n m_{\text{H}} = 4\pi r^2 \rho v$. Numerickým dosazením obdržíme úbytek hmotnosti Slunce $3.10^{-14} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$.

Úloha 1.18 Vztah hmotnost - zářivý výkon pro hvězdy hlavní posloupnosti s velkou hmotností lze přibližně vyjádřit vztahem $\log \frac{L}{L_{\odot}} \cong 0,781 + 2,760 \log \frac{M}{M_{\odot}}$, kde M je počáteční hmotnost. Úbytek hmotnosti hvězd v jednotkách $M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$ lze zachytit vztahem $\log \frac{dM}{dt} \cong -12,76 + 1,3 \log \frac{L}{L_{\odot}}$. Doba pobytu na hlavní posloupnosti je dána vztahem $\log \tau_{\text{HP}} \cong 7,719 - 0,655 \log \frac{M}{M_{\odot}}$. Určete úbytek hmotnosti hvězdy na hlavní posloupnosti, jestliže počáteční hmotnosti hvězd byly $25 M_{\odot}$, $60 M_{\odot}$, $120 M_{\odot}$.

Řešení: Nejprve určíme dobu pobytu τ_{HP} hvězd na hlavní posloupnosti; postupně je tato doba pro jednotlivé hvězdy $6,4 \cdot 10^6$ roků, $3,9 \cdot 10^6$ roků a $2,3 \cdot 10^6$ roků. Dále stanovíme $\log \frac{L}{L_{\odot}} - 4,639$, $5,689$, $6,520$. Následuje výpočet úbytku hmotnosti vyjádřený v jednotkách $M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1} - 1,9 \cdot 10^{-7}$, $4,3 \cdot 10^{-6}$, $5,2 \cdot 10^{-5}$, což dává celkové úbytky hmotnosti $1,18 M_{\odot}$, $17 M_{\odot}$ a $119 M_{\odot}$, v procentech 5%, 28% a 99% původní hmotnosti.

Úloha 1.19 V jaké vzdálenosti od Slunce se nachází fokusační bod F gravitační čočky? Mohou Slunce respektive Proxima Centauri sloužit jako gravitační čočky?

Řešení: Z obrázku je zřejmé, že $\tan \theta = \frac{b}{F}$, $\Rightarrow F = \frac{b}{\tan \theta}$. V přiblížení slabého gravitačního pole s ohledem na malý úhel θ obdržíme $F \approx \frac{b}{\theta} \approx \frac{b^2}{R_{\text{g}}} \approx \frac{b^2 c^2}{2GM}$ při $\theta = \frac{2R_{\text{g}}}{b}$. Dále při $b \approx R \Rightarrow F \approx \frac{c^2 R^2}{2GM}$. Příkladně pro Slunce $F \approx 1,7 \cdot 10^{14}$ m. Protože $ZS \approx l = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, potom $F \gg l$. Tudíž ze Země nemůžeme pozorovat efekt gravitační čočky v gravitačním poli Slunce. Nejbližší hvězda Proxima Centauri se od Země nachází ve vzdálenosti $l \approx 4 \cdot 10^{16}$ m $\gg F$. Libovolná z hvězd tak může sloužit jako gravitační čočka. Je však nutné, aby zdroj záření hvězda – čočka a pozorovatel se nacházeli na jedné přímce. V rámci OTR, silném gravitačním poli, je ohnisková vzdálenost určována z Einsteinova vztahu $F \approx \frac{b^2}{2R_{\text{g}}} \approx \frac{b^2 c^2}{4GM}$. Pro Slunce $b \approx R$ obdržíme $F \approx 8,3 \cdot 10^{13}$ m. Proto zůstávají v platnosti předchozí závěry pro slabé gravitační pole.

2 Základy hvězdné spektroskopie

Úloha 2.1 Vyjádřete energii fotonů [eV] charakterizujících

- Lymanovu hranu o $\lambda = 91,2$ nm
- nebulární čáru O III $\lambda = 500,7$ nm
- čáru H_α Balmerovy série vodíku $\lambda = 656,3$ nm
- emisní čáru NH_3 $\lambda = 1,3$ cm.
- čáru neutrálního vodíku $\lambda = 21$ cm.

Řešení: $2,17 \cdot 10^{-18}$ J = 13,55 eV, 2,46 eV, 1,88 eV, $9,49 \cdot 10^{-5}$ eV, $5,87 \cdot 10^{-6}$ eV.

Úloha 2.2 Vypočítejte pět nejnižších energetických hladin atomu vodíku. Ve spektrech kvasarů je zpravidla dominantní spektrální čára L_α , vznikající při přechodu z energetické hladiny $n = 2$ na hladinu $n = 1$. Určete její vlnovou délku.

Řešení: $-13,583$ eV, $-3,390$ eV, $-1,511$ eV, $-0,849$ eV, $-0,543$ eV; 121,6 nm.

Úloha 2.3 Stanovte vlnovou délku světla vyzářeného atomem vodíku při přechodu z energetické hladiny $n = 6$ na hladinu $n = 2$. O jakou sérii a barvu jde?

Řešení: Balmerova série, čtvrtá čára H_δ s $\lambda = 410,2$ nm, fialová barva.

Úloha 2.4 Lze z povrchu Země pozorovat čáry mezihvězdného vodíku vznikající při přechodu z desáté na devátou energetickou hladinu?

Řešení: Dosadíme do vztahu $\lambda = \frac{hc}{E_{10} - E_9} = 4 \cdot 10^{-5}$ m, čáry leží v submilimetrovém pásmu v infračervené oblasti spektra a nemůžeme je z povrchu Země pozorovat.

Úloha 2.5 Jakou spektrální čáru můžeme očekávat ve viditelné části spektra protuberance při excitaci vodíkových atomů elektrony o energii 2,0 eV?

Řešení: $\lambda \geq \frac{hc}{E} = 621,5$ nm, podmínku splňuje čára Balmerovy série H_α o vlnové délce $\lambda = 656,28$ nm, pro kterou platí $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$.

Úloha 2.6 Vypočítejte minimální energii elektronů, které jsou schopny excitovat kyslíkové ionty O III na první $B - {}^1D_2$ a druhou $C - {}^1S_0$ metastabilní energetickou hladinu, na které mohou atomy v astrofyzikálních podmínkách setrvávat sekundy až minuty. Víme, že zakázaná čára vznikající při přechodu $C \rightarrow B$ má vlnovou délku [O III] $\lambda = 436,3$ nm a při přechodu z $B \rightarrow A$ [O III] $\lambda = 500,7$ nm. Jaká je potřebná kinetická teplota T_k k tomu, aby se atomy dostaly na energetické metastabilní hladiny B a C?

Řešení: $E = h\frac{c}{\lambda}$, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT_k$, přechod $A \rightarrow B$, $E = 3,9 \cdot 10^{-19}$ J, $T_k \cong 19\,000$ K, přechod $A \rightarrow C$, $E = 8,5 \cdot 10^{-19}$ J, $T_k \cong 40\,000$ K.

Úloha 2.7 Prvek helium byl poprvé pozorován francouzským astronomem P. J. C. Jansenem 18. srpna 1868 v Indii ve spektru protuberance v průběhu úplného zatmění Slunce. Žlutá spektrální čára, tehdy označená D_3 , o vlnové délce 587,6 nm, se nacházela v blízkosti čar sodíku D_1 a D_2 . Ve skutečnosti je tripletem čar 587,562 nm, 587,565 nm a 587,599 nm, rozlišitelným

pouze vysokodisperzními spektrografy. Stanovte energii vyšší energetické hladiny, z níž při přechodu na nižší hladinu 20,88 eV čára vzniká.

Řešení: 22,98 eV.

Úloha 2.8 Užitím výrazu pro energii elektronu v základním stavu vodíku $E = \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2}$ zjistěte, zda kmitočty spektrálních čar rozdílných iontů, např. H I a He II se mohou shodovat.

Řešení: Kmitočet čáry ν z horní energetické hladiny k na spodní hladinu n je dán vztahem $h\nu = \frac{E}{n^2} - \frac{E}{k^2}$. Podmínku pro stejné kmitočty zapíšeme ve tvaru $m_1 Z_1^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) = m_2 Z_2^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{k_2^2} \right)$, kde indexy 1,2 odlišují rozdílné ionty. Při zanedbání rozdílnosti redukovaných hmotností $m_{1,2}$ elektronu v rozdílných iontech, rovnice vyhovuje všem celým číslům $Z_{1,2}$, $n_{1,2}$, $k_{1,2}$, pro která platí některá z podmínek $Z_1 n_2 = Z_2 n_1$ a $Z_1 k_2 = Z_2 k_1$. To znamená, že každá vodíková čára $n_1 \leftrightarrow k_1$ přibližně koinciduje s čarou He II $n_2 = 2n_1 \leftrightarrow k_2 = 2k_1$. Rozdílnost redukovaných hmotností způsobuje malý posuv kmitočtů daný vztahem $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Úloha 2.9 Vypočítejte nejpravděpodobnější rychlost atomů vodíku a železa ve sluneční koróně při teplotě 10^6 K. Porovnejte tuto rychlost s parabolickou rychlostí u Slunce.

Řešení: $v_m = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$, 128 km.s⁻¹, 17 km.s⁻¹, $v_p = \left(2G \frac{M_\odot}{R_\odot} \right)^{1/2} = 617$ km.s⁻¹. Hodnoty rychlostí atomů vodíku a železa jsou nižší než hodnota únikové rychlosti Slunce, proto zůstávají v koróně.

Úloha 2.10 Dokažte, že gravitační pole Slunce nemůže udržet elektrony ve sluneční koróně, která má teplotu 10^6 K. Zdůvodněte, proč však přesto zůstávají v koróně Slunce.

Řešení: $v_m = \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{1/2} = 5500$ km.s⁻¹, $v_p = \left(2G \frac{M_\odot}{R_\odot} \right)^{1/2} = 617$ km.s⁻¹, coulombovská přitažlivá síla elektronů k protonům způsobuje, že zůstávají v koróně Slunce.

Úloha 2.11 Na difrakční mřížku se 100 vrypů na mm dopadá kolmo rovnoběžný svazek bílého světla. Pomocí spojky s ohniskovou vzdáleností $f = 0,3$ m umístěné těsně za mřížkou, se vytvoří na stínítku spektrum. Vypočítejte, v jaké vzdálenosti od sebe se na stínítku nachází:

- červená a fialová barva ve spektru II. řádu
- konec spektra I. řádu a začátek spektra II. řádu.

Předpokládejme vlnovou délku fialové barvy $\lambda_f = 400$ nm, červené barvy $\lambda_c = 760$ nm.

Řešení: Pro červenou barvu ve spektru II. řádu platí $\sin \alpha_c = 2 \frac{\lambda_c}{d}$, pro fialovou analogicky $\sin \alpha_f = 2 \frac{\lambda_f}{d}$. Dosazením hodnoty mřížkové konstanty obdržíme $\alpha_c = 8^\circ 45'$, $\alpha_f = 4^\circ 35'$. Vzdálenost obou barev ve spektru II. řádu je $\Delta x = x_c - x_f = f(\text{tg} \alpha_c - \text{tg} \alpha_f) = 22,2$ nm. Začátek spektra II. řádu (fialová barva) je vzdálen od konce spektra I. řádu (červená barva) o $\Delta x' = x_f - x'_c = 1,0$ mm.

Úloha 2.12 Kolik vrypů na mm musí mít difrakční mřížka, aby ve spektru II. řádu bylo možné rozlišit čáry sodíkového dubletu, u kterých jsou vlnové délky 589,0 nm a 589,6 nm? Stanovte lineární vzdálenost mezi uvedenými čarami na spektrogramu ve spektru I. řádu získaného mřížkou s 600 vrypů na mm, jestliže ohnisková vzdálenost kamery je $f = 0,8$ m?

Řešení: $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 589,3 \text{ nm}$, $N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda} = 491$. Hledaná vzdálenost je $\Delta x = x_2 - x_1$, $x_1 = f \operatorname{tg} \alpha_1$, $x_2 = f \operatorname{tg} \alpha_2$, úhly určíme $\sin \alpha_1 = \frac{\lambda_1}{d}$, $\sin \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{d}$. Dosazením dostaneme $\Delta x = 0,36 \text{ mm}$.

Úloha 2.13 Ve spektrech některých obrů spektrální třídy K pozorujeme výrazné čáry lithia s vlnovými délkami 670,776 nm a 670,791 nm. Patří přechodům $2^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, $2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$. Kolik vrypů na 1 mm musí mít difrakční mřížka s šířkou $D = 4 \text{ cm}$, aby umožňovala v prvním řádu rozlišit uvedené vlnové délky?

Řešení: Počet vrypů určíme dosazením do vztahu $\frac{1}{d} = \frac{\lambda}{Dm\Delta\lambda} = 1120 \text{ mm}^{-1}$.

Úloha 2.14 Určete minimální rychlost v , kterou se musí kosmická sonda se spektrometrem s difrakční mřížkou na palubě vzdalovat od Slunce, aby bylo možné pozorovat pohyb sondy vzhledem ke Slunci v optické části spektra vodíku v II. řádu. Jaký počet vrypů N musí mít difrakční mřížka? Povrchovou teplotu Slunce pokládejte za 5780 K. V úloze předpokládáme klidné Slunce, modelově zjednodušeně budeme předpokládat teplotní rozšíření vodíkových čar. Rozšíření křídel čar srážkami budeme zanedbávat.

Řešení: Pro průkaznost pozorování pohybu sondy z dopplerovského posuvu je nezbytné, aby posuv spektrální čáry byl větší než její šířka, podmíněná tepelným pohybem atomů vodíku. Tudíž rychlost sondy musí převyšovat střední kvadratickou rychlost vodíkových atomů při teplotě 5780 K. Jde o podmínku $v > v_k \cong 10 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Minimální počet vrypů je určován vztahem $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, dále platí $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c}{v}$. Při $m = 2$ obdržíme $N \geq 1,5 \cdot 10^4$. Odhad nezahrnuje dopplerovský posuv podmíněný rotací Slunce.

Úloha 2.15 Určete, který z posuvů spektrálních čar, gravitační či dopplerovský vyvolaný rotací u Slunce převládá. Rovníková rychlost převracející vrstvy Slunce je $1,93 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, k zjištění posuvů použijte čáru H_β o vlnové délce $\lambda = 486,1 \text{ nm}$.

Řešení: Velikost gravitačního rudého posuvu $\Delta\lambda = \frac{GM}{c^2 R} \lambda = 10^{-3} \text{ nm}$ porovnáme s velikostí dopplerovského posuvu $\Delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda = 3 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$.

Úloha 2.16 Při zvláště přesných měřeních radiálních rychlostí je třeba provádět rovněž opravu na pohyb Země kolem hmotného středu soustavy Země – Měsíc, tzv. barycentra. Střední rychlost tohoto pohybu je $12,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Porovnejte velikost této opravy s relativistickou korekcí na příčný kvadratický Dopplerův jev při změnách rychlosti o

- $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
- $300 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Řešení: Pro příčný Dopplerův jev, při zanedbání členů s vyššími mocninami, platí vztah $\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}$, předpokládáme platnost vztahu $\nu = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

- $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = 0,5 \cdot 10^{-8}$, $\nu = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,
- $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,5 \cdot 10^{-6}$, $\nu = 150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

V prvním případě příčný Dopplerův jev nemusíme uvažovat, v druhém ano.

Úloha 2.17 V detailním spektru Slunce u vodíkové čáry H_β o vlnové délce $\lambda = 486,133 \text{ nm}$

byla nalezena další čára o vlnové délce $\lambda = 485,998$ nm. Předpokládejme, že tato čára patří izotopu vodíku. Určete o jaký izotop jde.

Řešení: Z atomové fyziky je znám vztah $\lambda_{\text{H}} R_{\text{H}} = \lambda_{\text{D}} R_{\text{D}}$, $R = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{M}}$. Při zanedbání malých veličin dostaneme $1 - \frac{\lambda_{\text{H}}}{\lambda_{\text{D}}} = \frac{m_e}{M_{\text{D}}} - \frac{m_e}{M_{\text{H}}}$. Dosadíme $\frac{m_e}{M_{\text{H}}} = \frac{1}{1835}$ a obdržíme $\frac{m_e}{M_{\text{D}}} = \frac{1}{3727}$, tedy $\frac{M_{\text{D}}}{M_{\text{H}}} \cong 2$, izotopem je deuterium.

Úloha 2.18 V blízkosti čáry H_{α} s vlnovou délkou $\lambda = 656,282$ nm byla v podrobném spektru Slunce nalezena rovněž čára s vlnovou délkou $\lambda = 656,103$ nm. Za předpokladu, že tato čára patří izotopu vodíku, určete izotop.

Řešení: Postupujeme stejně jako v předchozí úloze, izotopem je deuterium.

Úloha 2.19 Nalezněte šířku spektrální čáry Fe XIV o vlnové délce $\lambda = 530,3$ nm pocházející ze sluneční emisní koróny o teplotě 10^6 K.

Řešení: $\Delta\lambda \cong 0,08$ nm.

Úloha 2.20 Stanovte šířku $\Delta\lambda$ pro teplotní rozšíření čáry K Ca II o vlnové délce $\lambda = 393,4$ nm pro atmosféry červených obrů s teplotami 3 000 K, 5 000 K. Diskutujte výsledek s ohledem na význam teploty pro rozšíření této čáry. Jak ovlivňuje velikost šířky spektrálních čar rozdílná hmotnost jednotlivých atomů např. u vodíku, helia, vápníku a železa?

Řešení: $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, jednotlivé hodnoty šířek $\Delta\lambda$ se liší členem $T^{1/2}$. Pro čáru K CaII a jednotlivé teploty dostaneme $\Delta\lambda_1 = 0,0029$ nm, $\Delta\lambda_2 = 0,0037$ nm. Při fyzikální podmínkách ve fotosférách je teplotní rozšíření zpravidla dominantní. S rostoucí hmotností atomů klesá šířka čar.

Úloha 2.21 Určete šířku spektrální čáry kyslíku O III s vlnovou délkou $\lambda = 500,7$ nm, kterou můžeme identifikovat ve spektru plynné emisní mlhoviny o teplotě 10 000 K.

Řešení: $\Delta\lambda = 0,01$ nm.

Úloha 2.22 Vypočítejte šířku čáry H_{α} , znáte-li že pro rozšíření spektrálních čar srážkami platí $\Delta\lambda \cong \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{\pi \Delta t_0} \cong \frac{\lambda^2}{c} \frac{n\sigma}{\pi} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$. Předpokládáme vodíkové atomy ve sluneční fotosféře při teplotě 5 780 K a hustotě atomů $1,5 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $\sigma = 3,6 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$.

Řešení: Pro vodíkovou čáru H_{α} je $\Delta\lambda \cong 2,4 \cdot 10^{-5}$ nm, což je hodnota velmi malá, srovnatelná s přirozeným rozšířením spektrální čáry. Při narůstání hustoty atomů ve fotosféře se srážkové rozšíření zvyšuje.

Úloha 2.23 Dokažte, že celková intenzita čáry určovaná dopplerovským profilem je rovna $I = \frac{1}{c} \lambda_0 \nu_m \sqrt{\pi} I(\lambda_0)$, kde λ_0 je vlnová délka středu čáry, ν_m je nejpravděpodobnější rychlost částic, $I(\lambda_0)$ je intenzita ve středu čáry. Při integraci využijte $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Úloha 2.24 Ekvivalentní šířkou čáry W_{λ} rozumíme šířku obdélníka, udávanou zpravidla v nm, jehož plocha je číselně rovna ploše vymezené spektrální čarou, přičemž výška je rovna

intenzitě spojitého spektra I_0 . Určete ekvivalentní šířku čáry za předpokladu, že má

- a) trojúhelníkový profil se základnou $\Delta\lambda$
 b) parabolický profil s šířkou u základny $\Delta\lambda$.

Řešení: $W_\lambda = \left(1 - \frac{I}{I_0}\right) \frac{\Delta\lambda}{2}$, $W_\lambda = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{I}{I_0}\right) \Delta\lambda$.

Úloha 2.25 Odhadněte pomocí výpočtu minimální šířku Fraunhoferových čar vodíku ve spektru Slunce. Porovnejte vypočtené šířky spektrálních čar s tabelovanými údaji o ekvivalentních šířkách nejmohutnějších čar v následující tabulce. Přitom mějte na paměti definici ekvivalentní šířky.

λ [nm]	ekvivalentní šířka [nm]	prvek, iont
393,3682	2,0253	Ca II
396,8492	1,5467	Ca II
656,2808	0,4020	H $_\alpha$
486,1342	0,3680	H $_\beta$
410,1748	0,3133	H $_\delta$
434,0475	0,2855	H $_\gamma$
518,3619	0,1584	Mg I
385,9922	0,1554	Fe I
422,6740	0,1476	Ca I
517,2698	0,1259	Mg I
404,5825	0,1174	Fe I
438,3557	0,1008	Fe I
516,7327	0,0935	Mg I
388,6294	0,0920	Fe I
440,4761	0,0898	Fe I
390,5532	0,0816	Si I
406,3605	0,0787	Fe I
588,9973	0,0752	Na I
407,1749	0,0723	Fe I
589,5940	0,0564	Na I

Řešení: Vedle jiných příčin je rozhodující rozšíření čar vyvolané tepelným pohybem atomů. Při teplotě 5 780 K je rychlost vodíkových atomů asi 12 km.s⁻¹. Vlnová délka 500 nm viditelného světla se při takové rychlosti posouvá o $\Delta\lambda = \lambda \frac{v}{c} \cong 0,02$ nm. Šířka čáry je tak $2\Delta\lambda \cong 0,04$ nm. Ve skutečnosti jsou však balmerovské čáry mnohem širší než činí tento hrubý odhad, důležité je rozšíření křídel čar srážkami. Jednotlivé části zejména mohutných spektrálních čar vznikají v různých vrstvách atmosfér.

Úloha 2.26 Doba existence elektronu v prvním a druhém excitovaném stavu u atomu vodíku je přibližně $\Delta t = 10^{-8}$ s. Určete velikost přirozené šířky čáry H $_\alpha$ o vlnové délce $\lambda = 656,3$ nm.

Řešení: Dosazením obdržíme $\Delta\lambda \cong \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right) \cong 4,6 \cdot 10^{-5}$ nm.

Úloha 2.27 Spektrální čára o vlnové délce $\lambda = 532,0$ nm vzniká jako výsledek přechodu mezi

dvěma nabuzenými stavy atomu, jejichž střední doba života je rovna 12 ns a 20 ns. Určete přirozenou šířku čáry $\Delta\lambda$.

Řešení: $\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ nm.

Úloha 2.28 Určete přirozenou šířku spektrální čáry pro $\lambda = 500$ nm a konstantu útlumu $\gamma = 10^8$ s⁻¹.

Řešení: $\Delta\nu = \frac{\gamma}{2}$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu = \frac{\lambda^2 \gamma}{2c} = 10^{-5}$ nm.

Úloha 2.29 Nechť teoreticky uvažovaná hvězda spektrální třídy B0 V má periodu vlastní rotace $P = 2$ dny. Nalezněte charakteristickou šířku čáry ve spektru této hvězdy ve vizuální oblasti spektra pro čáru H β , $\lambda = 486,1$ nm, předpokládáme-li, že osa rotace je kolmá k zornému paprsku. Uvedená hvězda má poloměr $7,5 R_{\odot}$.

Řešení: Rotační obvodová rovníková rychlost je rovna $v_r = \frac{2\pi R}{P} = 200$ km.s⁻¹. Rozšíření čáry podmíněné rotací je dáno vztahem $\Delta\lambda_r = \lambda \frac{v_r}{c}$, po dosazení obdržíme $\Delta\lambda_r = 0,3$ nm.

Úloha 2.30 Velmi široké čáry způsobené rotačním rozšířením pozorujeme u hvězd spektrální třídy A. Jestliže pro čáru H γ o vlnové délce 434,0 nm jedné hvězdy byla zjištěna šířka čáry $\Delta\lambda_r = 0,08$ nm, jakých hodnot dosahuje $v_{\text{rot}} \sin i$?

Řešení: $\Delta\lambda_r = \lambda \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c}$, $v_{\text{rot}} \sin i = 55$ km.s⁻¹.

Úloha 2.31 U hvězdy ν Persei F5 II byla spektroskopicky zjištěna hodnota $v_{\text{rot}} \sin i = 46$ km.s⁻¹. Určete hodnotu $\Delta\lambda_r$ pro čáru Fe II 450,8 nm.

Řešení: $\Delta\lambda_r = 0,07$ nm.

Úloha 2.32 Jaký vliv má ztemnění na okraji disku hvězdy na rozšíření spektrálních čar vyvolaném rotací hvězdy?

Řešení: Okrajové ztemnění zmenšuje rozšíření čar spojené s rotací hvězdy.

Úloha 2.33 Spektrograf může rozlišit posun vlnových délek 0,001 nm. Jaká je minimální velikost magnetické indukce, kterou lze zjistit u hvězdy na vlnové délce 450 nm.

Řešení: Využijeme vztah pro Zeemanův jev $\Delta\lambda = 47\lambda^2 B$, odkud $B \cong 0,1$ T.

Úloha 2.34 Odhadněte očekávanou velikost magnetické indukce hvězdy stejného typu jako Slunce s dobou rotace 10^6 s, $R = 10^8$ m, $T = 6 \cdot 10^3$ K, kterou lze na základě měření Zeemanova jevu zjistit v optické oblasti spektra prostřednictvím čáry Fe I o vlnové délce 630,25 nm.

Řešení: Pro spektroskopickou zjistitelnost musí platit $\Delta\lambda_z > \Delta\lambda_{\text{rot}} + \Delta\lambda_{\text{tep}}$, tedy $47\lambda^2 B > \frac{\lambda v_r}{c} + \frac{2\lambda}{c} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$, dosazením obdržíme $B > 0,4$ T.

Úloha 2.35 U hvězdy HD 215 441 o povrchové teplotě 15 000 K a rotační rovníkové rychlosti v radiálním směru 5 km.s⁻¹ bylo zjištěno rozštěpení spektrální čáry Cr II o vlnové délce 455,8 nm v důsledku Zeemanova jevu $\Delta\lambda = 0,03$ nm. Určete velikost magnetické indukce B . Je rozštěpení reálně zjistitelné při fotosférických podmínkách této hvězdy?

Řešení: Pro rozšíření vyvolané Zeemanovým jevem vyjádřeným v SI platí: $\Delta\lambda_Z = 47\lambda^2 B$, odtud $B = 3,4 \text{ T}$. Jev bude spektroskopicky zjistitelný, při $\Delta\lambda_Z > \Delta\lambda_{\text{rot}} + \Delta\lambda_{\text{tep}}$, tedy $\Delta\lambda_Z > \frac{\lambda v_r}{c} + \frac{2\lambda}{c} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$, po dosazení obdržíme: $0,03 \text{ nm} > 0,021 \text{ nm}$.

Úloha 2.36 Zeemanovské rozštěpení můžeme rovněž pozorovat u velkých slunečních skvrn, kde se vyskytují silná magnetická pole směřující radiálně k povrchu Slunce. Určete velikost magnetické indukce skvrny, jestliže rozštěpení zelené spektrální čáry železa o vlnové délce $\lambda = 525,0216 \text{ nm}$ činí $\Delta\lambda = 0,004 \text{ nm}$. Jaké rychlosti by odpovídal tento posuv, jestliže by byl vyvolán dopplerovským posuvem v důsledku radiálního pohybu.

Řešení: Ze vztahu $\Delta\lambda_Z = 47\lambda^2 B$ stanovíme $B = 0,3 \text{ T}$. Různost vlnových délek rozštěpených čar odpovídá rychlosti $v_r = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Úloha 2.37 Rotační osa hvězdy je kolmá ke směru k Zemi, její rotační rovníková rychlost je $100 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Lze při této hodnotě rychlosti pozorovat zeemanovské rozštěpení čáry o vlnové délce $\lambda = 430 \text{ nm}$, předpokládáme-li velikost magnetické indukce $0,1 \text{ T}$?

Řešení: $\Delta\lambda_{\text{rot}} = 2\lambda\frac{v_{\text{rot}}}{c} = 0,28 \text{ nm}$, $\Delta\lambda_Z = 47\lambda^2 B = 8,7\cdot 10^{-4} \text{ nm}$. Nelze tedy spektroskopicky rozšíření čar zjistit.

Úloha 2.38 Ve spektru lithia první dvě čáry hlavní série patří přechodům $2^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, $2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$. Vlnové délky těchto čar jsou rovny $670,776 \text{ nm}$ a $670,791 \text{ nm}$. Určete velikost indukce magnetického pole, která vytváří orbitální pohyb elektronu v atomu lithia ve stavu $2P$. Lambův posuv neuvažujeme.

Řešení: Rozdíl energií je spojen s převrácením spinu elektronu v magnetickém poli, vytvořeným jeho orbitálním pohybem. Platí $B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{\hbar\Delta\omega}{4\pi\mu_B} = \frac{\hbar c\Delta\lambda}{2\lambda^2\mu_B} = 0,36 \text{ T}$.

3 Nitro hvězd

Úloha 3.1 Určete množství uvolněné energie při vzniku 1 jádra atomu helia ze čtyř jader atomů vodíku. Porovnejte s množstvím energie uvolňovaným při 3α procesu.

Řešení: pp řetězec: $\Delta m = 4\frac{1}{1}\text{H} - \frac{4}{2}\text{He} = 4,76 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 4,29 \cdot 10^{-12} \text{ J}$, tedy 26,8 MeV. Pro 3α proces: $\Delta m = 3\frac{4}{2}\text{He} - \frac{12}{6}\text{C} = 1,29 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 1,16 \cdot 10^{-12} \text{ J}$, tudíž 7,2 MeV.

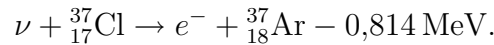
Úloha 3.2 Najděte vazebnou energii jádra atomu lithia ${}^7_3\text{Li}$, jestliže hmotnost atomu $M_{\text{Li}} = 7,01601 \text{ u}$, hmotnost protonu je 1,00783 u, hmotnost neutronu je 1,00867 u.

Řešení: Obdobným postupem jako u první úlohy určíme $\Delta E = 39,3 \text{ MeV}$.

Úloha 3.3 Určete minimální hmotnost hvězdy, aby centrální teplota umožňovala průběh termonukleárních reakcí. Předpokládáme rozložení hustoty $\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$, chemické složení shodné se Sluncem, $\mu = 0,61$, hvězdná látka je nedegenerována. Pro pp řetězec je nezbytná minimální teplota $4 \cdot 10^6 \text{ K}$, pro CNO cyklus $15 \cdot 10^6 \text{ K}$, 3α reakce 10^8 K .

Řešení: Užijeme vztahy $\rho_c = \frac{15M}{8\pi R^3}$, $P_c = \frac{15GM^2}{16\pi R^4}$ a dosadíme do stavové rovnice pro ideální plyn $P = \frac{A}{\mu} \rho T \Rightarrow T_c = \frac{1}{2} \frac{\mu G}{A} \frac{M}{R}$. Odtud obdržíme $M = \frac{2T_c R A}{\mu G}$.

Úloha 3.4 Termonukleární reakce probíhající ve Slunci byly v šedesátých letech minulého století ověřovány R. Davisem při sledování toku neutrin ze Slunce pomocí chlór-argonové reakce



Při ní jádro izotopu chlóru zachytí neutrino a přemění se na jádro izotopu argónu, má-li energii větší než 0,814 MeV. Střední účinný průřez reakce je $\sigma = 2 \cdot 10^{-46} \text{ m}^2$. Předpokládáme, že Slunce vyzařuje za sekundu $N = 3 \cdot 10^{33}$ vysoce energetických neutrin s energií 6,7 MeV, vznikajících při reakci ${}^8_5\text{B} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + e^+ + \nu$. Určete nezbytné množství perchloretylénu C_2Cl_4 , aby v něm vzniklo za rok 100 atomů ${}^{37}_{18}\text{Ar}$. V přírodní směsi izotopů chlóru je obsaženo podle hmotnosti $\eta = 25\%$ jader ${}^{37}_{17}\text{Cl}$, střední poloměr dráhy Země kolem Slunce volte $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Řešení: Počet atomů ${}^{37}_{18}\text{Ar}$ je $n = \phi \sigma t N_{\text{Cl}}$, kde $t = 1 \text{ rok} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$, N_{Cl} je počet atomů chlóru, $\phi = \frac{N}{4\pi r^2}$ je tok neutrin na Zemi. Odtud obdržíme $N_{\text{Cl}} = \frac{4\pi r^2 n}{\sigma t}$. Při experimentu je nezbytné použít C_2Cl_4 o hmotnosti $M = \frac{\mu N_{\text{Cl}}}{4\eta} = \mu N_{\text{Cl}}$, $M \cong 560 \text{ tun}$. V této úloze je μ molekulární hmotnost.

Úloha 3.5 Centrální teploty dvou hvězd jsou $T_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ K}$ a $T_2 = 1,8 \cdot 10^8 \text{ K}$. Stanovte poměr množství uvolňované energie v nitrech obou hvězd.

Řešení: Z uvedených hodnot centrálních teplot vyplývá, že jde o hvězdy s velkými hmotnostmi, kde probíhá CNO cyklus, u něhož množství uvolňované energie $\sim T^{18}$. Hledaný poměr je $\left(\frac{20}{18}\right)^{18}$, k jehož výpočtu využijeme vztah $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, tedy $\left(\frac{20}{18}\right)^{18} = \left(1 + \frac{2}{18}\right)^{18} \cong e^2 \cong 7$.

Úloha 3.6 Porovnejte vlastnosti elektromagnetického záření ve středu Slunce a na jeho povrchu, předpokládáme-li $T_C = 1,5 \cdot 10^7$ K a $T_P = 5,8 \cdot 10^3$ K.

Řešení: Vyjdeme z vlastností fotonového plynu. Počet fotonů v objemové jednotce je $n = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2,404 \frac{8\pi k^3}{h^3 c^3} T^3 = 2,03 \cdot 10^7 T^3$, hustotu energie fotonů vyjádříme $u = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 kT \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 7,57 \cdot 10^{-16} T^4$. Pro střední energii připadající na jeden foton lze odvodit $E_f = 2,70kT = 3,73 \cdot 10^{-23} T$. Pro tlak záření platí $P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4$, intenzitu záření vyjádříme $I = \sigma T^4$. Propočítané výsledky shrneme v tabulce:

Vlastnosti	Povrch Slunce $5,8 \cdot 10^3$ K	Střed Slunce $1,5 \cdot 10^7$ K
Střední energie fotonu [eV]	1,3	$3,5 \cdot 10^3$
Hustota fotonů n [m^{-3}]	$4 \cdot 10^{18}$	$7 \cdot 10^{28}$
Hustota energie u [$J \cdot m^{-3}$]	0,9	$4 \cdot 10^{13}$
Tlak záření P_r [Pa]	0,1	$5 \cdot 10^{12}$
Intenzita záření I [$W \cdot m^{-3}$]	$6,4 \cdot 10^7$	$29 \cdot 10^{20}$

Úloha 3.7 Odhadněte poměr počtu fotonů a neutrin vyzařovaných Sluncem za 1 sekundu. Při termonukleární syntéze prostřednictvím pp řetězce se uvolňuje energie 26,8 MeV, přičemž neutrina odnáší asi 2–5% této energie.

Řešení: Počet fotonů vyzářených Sluncem za 1 sekundu je dán vztahem $\frac{\sigma T^4}{2,7kT} 4\pi R_\odot^2 \cong 1,8 \cdot 10^{45}$. Počet neutrin se střední energií lze odhadnout takto. V první úloze jsme vypočetli energii $4,29 \cdot 10^{-12}$ J uvolňovanou při syntéze vodík \rightarrow helium. Slunce za jednu sekundu vyzáří $3,8 \cdot 10^{26}$ J. Tedy za jednu sekundu vznikne přibližně 10^{38} heliových jader. Při vzniku jednoho heliového jádra vzniknou dvě neutrina, proto za každou sekundu vznikne $2 \cdot 10^{38}$ elektronových neutrin. Poměr počtu fotonů a neutrin je přibližně 10^7 .

Úloha 3.8 Odhadněte hodnotu centrálního tlaku v nitru Slunce.

Řešení: V zjednodušeném přiblížení platí pro tlakovou sílu na jednotkovou plochu tedy tlak $P_c = 4G \frac{\rho M}{R}$, po dosazením číselných hodnot hmotnosti a poloměru Slunce a průměrné hustoty $\rho = 1,4 \cdot 10^3$ kg·m⁻³ dostaneme pro tlak $P_c \cong 10^{15}$ Pa. Podle standardních modelů Bahcalla je ve skutečnosti centrální tlak o řád vyšší.

Úloha 3.9 Předpokládejme v nitru Slunce jednoatomový plyn, pro adiabatickou rychlost zvuku platí vztah $v_z = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}$. Za jak dlouho zvukové vlny projdou poloměrem Slunce?

Řešení: Při $\gamma = \frac{5}{3}$ lze zjednodušeně předpokládat $v_z \cong \left(\frac{5}{3} \frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$, kde $P = \frac{P_c}{2}$. Po dosazení obdržíme $v_z \cong 8 \cdot 10^5$ m·s⁻¹. Poloměrem Slunce projdou zvukové vlny za $t = \frac{R_\odot}{v_z} \cong 17$ min.

Úloha 3.10 Odhadněte centrální tlak a teplotu ve hvězdě hlavní posloupnosti s poloměrem $1,3 R_\odot$ a hmotností $1,8 M_\odot$. Pro zjednodušení předpokládáme stejnou stavbu a chemické složení jako má Slunce.

Řešení: $\frac{P_c}{P_{c\odot}} \cong \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \cong 1,1$, $\frac{T_c}{T_{c\odot}} \cong \frac{R_\odot}{R} \frac{M}{M_\odot} \cong 1,4$.

Úloha 3.11 Podle standardního modelu nitra má hvězdná látka v centrální části Slunce hustotu $1,48 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a teplotu $1,56 \cdot 10^7 \text{ K}$, hmotnostní zastoupení vodíku $X = 0,73$ a helia $Y = 0,27$, příspěvek těžších prvků lze v prvním přiblížení zanedbat. Vypočítejte tlak, který zde působí za předpokladu, že vodík a helium jsou plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočítejte rovněž tlak záření a oba tlaky porovnejte. Střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi označíme μ_r

Řešení: $P_g = \frac{\mathcal{R}}{\mu_r} \rho T = 3,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$, $P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ Pa}$. Podstatný je tlak plynu, tlak záření je zanedbatelný.

Úloha 3.12 Posuďte, zda může existovat degenerace v nitru Slunce ($T_c = 1,5 \cdot 10^7 \text{ K}$, $\rho_c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

Řešení: Dosazením do podmínky degenerace $\rho > \left(\frac{T}{75000}\right)^{3/2} 10^3$ zjistíme, že není splňována. V současné fázi vývoje Slunce je v jeho nitru degenerace nepodstatná.

Úloha 3.13 Odvoďte vztah pro rovnováhu gravitační a tlakové síly v nitru hvězd při předpokládané polytropní závislosti tlaku na hustotě.

Řešení: Úvahy lze zjednodušit následujícím způsobem. Pro gravitační sílu platí $F_{\text{grav}} \sim -\frac{1}{R^2}$. Tlaková síla je dána součinem tlaku $p \sim \rho^\gamma$ a povrchu $S \sim R^2$, tudíž $F_{\text{tlak}} \sim \rho^\gamma R^2 \sim R^{-3\gamma} R^2 \sim \frac{1}{R^{3\gamma-2}}$. Obě síly za normálních podmínek klesají s rozměry hvězdy, při jejich rovnosti nastane rovnovážný stav. Obě síly klesají stejně při koeficientu $\gamma = \frac{4}{3}$.

Diskutujeme dvě možnosti, nejprve nechť $\gamma > \frac{4}{3}$. V tomto případě je tlaková křivka strmější než gravitační. Jestliže hvězda náhodně zvětší své rozměry, převládne gravitační síla a hvězda se smrští. Zmenší-li hvězda své rozměry, převládne tlaková síla a hvězda zvětší svůj rozměr. Shrnutí změny objemu hvězdy nemají za následek její rozpad.

V případě $\gamma < \frac{4}{3}$ je situace odlišná. Jestliže hvězda náhodně zvětší své rozměry, převládne tlaková síla a dojde ke zvětšování objemu. Hvězda se stane nestabilní, například může odhodit vnější vrstvy. Zmenší-li své rozměry dojde ke gravitačnímu kolapsu.

Hvězdná látka bílých trpaslíků se vyznačuje polytropním indexem blízkým $\frac{4}{3}$, ten se však mění s hmotností bílého trpaslíka. Při kritické Chandrasekharově hmotnosti přibližně $1,44 M_\odot$ má hodnotu právě $\gamma = \frac{4}{3}$ a bílý trpaslík se stává nestabilní.

Úloha 3.14 Určete centrální tlak ve hvězdě spektrální třídy B0 o poloměru $8 R_\odot$, hmotnosti $15 M_\odot$, centrální teplota je odhadována na $3,4 \cdot 10^7 \text{ K}$, $\mu_r = 0,7$.

Řešení: Po dosazení $P_g = \frac{\mathcal{R}}{\mu_r} \rho T = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Pa}$, $P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = 3,2 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$.

Úloha 3.15 Ve hvězdě o hmotnosti M hustota klesá od středu k povrchu jako funkce radiální vzdálenosti r podle vztahu $\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$, kde ρ_c je daná konstanta a R je poloměr hvězdy. Nalezněte:

- $m(r)$,
- odvoďte závislost mezi M a R ,
- ukážete, že průměrná hustota hvězdy je $0,4 \rho_c$.

Řešení: a) Dosadíme do rovnice kontinuity

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \rho_c \left[\int_0^r r^2 dr - \frac{1}{R^2} \int_0^r r^4 dr \right] = 4\pi \rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right).$$

- b) $M = m(R) = \frac{8\pi\rho_c R^3}{15}$
 c) $\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{8\pi\rho_c R^3}{15}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0,4\rho_c$.

Úloha 3.16 Pro hvězdu o hmotnosti M a poloměru R nalezněte centrální tlak a proveďte platnost nerovnice $p_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$ pro případy

- a) stejné, konstantní hustoty ve hvězdě
 b) pro hustotu platí závislost $\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$.

Řešení: a) Při konstantní hustotě platí $\rho = \bar{\rho}$, $m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = \frac{4\pi r^3}{3} \bar{\rho} = M \left(\frac{r}{R}\right)^3$. Dosadíme $m(r)$ do rovnice hydrostatické rovnováhy $\frac{dP}{dr} = -G\rho\frac{m}{r^2}$ a integrujeme od středu $P = P_c$ k povrchu $P = 0$. Obdržíme $P_c = G\bar{\rho} \int_0^R \frac{m(r)}{r^2} dr = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$; $\frac{3GM^2}{8\pi R^4} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$.

b) Užijeme výrazy $\rho(r)$, $m(r)$ a $M(R)$ z předchozích úloh, budeme integrovat rovnici hydrostatické rovnováhy

$$P_c = G \int_0^R \rho \frac{m}{r^2} dr = 4\pi G \rho_c^2 \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right] dr = \frac{15GM^2}{16\pi R^4}; \frac{15GM^2}{16\pi R^4} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}.$$

Úloha 3.17 Hvězda spektrální třídy B0 V má hmotnost $\sim 15 M_\odot$. S využitím vztahu hmotnost – zářivý výkon $L \sim M^4$ odhadněte střední hustotu hvězdy.

Řešení: Pro hmotnost $15 M_\odot$ obdržíme $L \cong 5 \cdot 10^4 L_\odot$. Efektivní teplotu B0 V lze odhadnout na přibližně 30 000 K. Poloměr hvězdy je $8 R_\odot$, tudíž střední hustota $\rho \cong 40 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Úloha 3.18 Nejdůležitější charakteristikou hvězd hlavní posloupnosti je hmotnost M . V intervalu spektrálních tříd B0 až M5 platí, že poloměr $R \sim M^{3/4}$, zářivý výkon $L \sim M^{7/2}$. Nalezněte jak na hmotnosti závisí

- a) efektivní povrchová teplota
 b) střední hustota
 c) gravitační zrychlení na povrchu
 d) centrální teplota
 e) centrální tlak.

Řešení: Dosazením dostaneme $T_{\text{ef}} \sim M^{1/2}$, $\rho \sim M^{-5/4}$, $g \sim M^{-1/2}$, $T_c \sim M^{1/4}$, $P_c \sim M^{-1}$.

Úloha 3.19 Jsou zadány dvě hvězdy se spektrálními třídami K0 V a K0 I.

- a) určete poměr zrychlení na povrchu obou hvězd
 b) stanovte poměr středních hustot těchto hvězd

Tabulkové hodnoty charakteristik hvězd jsou pro K0 V: $0,8 M_\odot$; $0,85 R_\odot$; 5 100 K a pro K0 I: $13 M_\odot$; $200 R_\odot$; 4 100 K.

Řešení: Pro gravitační zrychlení platí $g = G\frac{M}{R^2}$, pro $g_V = 3 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $g_I = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, poměr zrychlení je roven $\frac{g_V}{g_I} \cong 3400$. Střední hustoty určíme ze vztahu $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, poměr hustot je roven $\frac{\rho_V}{\rho_I} = 8 \cdot 10^5$.

Úloha 3.20 Efektivní povrchová teplota Siria A je 9 400 K, poloměr $1,8 R_\odot$ a hmotnost $2,2 M_\odot$. Určete zářivý výkon v jednotkách zářivého výkonu Slunce, absolutní bolometrickou hvězdnou velikost, průměrnou hustotu a odhadněte centrální teplotu.

Řešení: $22,7 L_\odot$, 1,35 mag, $530 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $1,7 \cdot 10^7 \text{ K}$.

Úloha 3.21 Dokažte, že střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi plně ionizovaných atomů v nitru hvězd je rovna $\mu_r = \frac{2}{1+3X+0,5Y}$, kde X , Y , Z označuje relativní množství vodíku, helia a ostatních prvků.

$$\text{Řešení: } \mu_H = \frac{1}{2}, \mu_{\text{He}} = \frac{4}{3}, \mu_{\text{kovy}} = 2, \mu_r = \frac{1}{\frac{X}{\mu_H} + \frac{Y}{\mu_{\text{He}}} + \frac{Z}{\mu_{\text{kovy}}}} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \text{ Protože}$$

platí $X + Y + Z = 1$ dostaneme $\mu_r = \frac{2}{1 + 3X + 0,5Y}$.

Úloha 3.22 Jak se bude měnit střední relativní hmotnost μ_r částic sluneční látky, při předpokladu $X = 0,70$, $Y = 0,30$ budeme-li hypoteticky postupovat od středu k povrchu Slunce. Rozlišujte případy:

- helium a vodík jsou plně ionizovány
- helium a vodík jsou $1 \times$ ionizovány
- helium je neutrální a vodík je zcela ionizován
- oba plyny jsou neutrální.

Řešení: Postupným dosazováním podle jednotlivých případů do vztahu z předcházející úlohy obdržíme 0,615, 0,645, 0,678, 1,29.

Úloha 3.23 Předpokládáme-li, že Slunce je složeno podle hmotnostního zastoupení ze 70% z vodíku a 30% z helia a jde o plně ionizovaný plyn, vypočtete celkový počet

- volných elektronů
- protonů
- α částic.

Vypočtete nezbytnou energii pro úplnou ionizaci hvězdné látky. Porovnejte s kinetickou energií příslušející teplotě $T \cong 10^7$ K. Jednotlivé ionizační potenciály jsou $E_{\text{ion}}(\text{H}) = 13,6$ eV, $E_{\text{ion}}(\text{He I}) = 24,6$ eV, $E_{\text{ion}}(\text{He II}) = 54,4$ eV.

Řešení: Podle zadání je ve Slunci $1,4 \cdot 10^{30}$ kg vodíku a $0,6 \cdot 10^{30}$ kg helia. Vodík – 1 proton a 1 elektron, helium – α částice a 2 elektrony. Za těchto předpokladů obdržíme, že počet volných elektronů je $1,2 \cdot 10^{57}$, protonů $8,4 \cdot 10^{56}$ a α částic $9,0 \cdot 10^{55}$. V případě vodíku je ionizační energie $1,8 \cdot 10^{39}$ J, helia $1,1 \cdot 10^{39}$ J. Při počtu částic $2,13 \cdot 10^{57}$ je jejich celková kinetická energie $\frac{3}{2}NkT \cong 4,4 \cdot 10^{41}$ J.

Úloha 3.24 O kolik metrů za rok by se musel zmenšovat poloměr Slunce, aby úbytek gravitační potenciální energie pokrýval pozorovaný výkon Slunce? Předpokládáme platnost viriálové věty $2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$.

Řešení: $L_\odot = 3,86 \cdot 10^{26}$ W, $E_p = -\frac{3}{5}GM^2/R$, $2\frac{\Delta E_k}{\Delta t} + \frac{\Delta E_p}{\Delta t} = 0$, $L_\odot = \frac{\Delta E_k}{\Delta t}$, $-2L_\odot \Delta t = \Delta E_p$, $\Delta E_p = \frac{3}{5}G\frac{M^2}{R^2}\Delta R$. Celkově pro změnu poloměru Slunce dostaneme $\Delta R_\odot = -\frac{10L_\odot R_\odot^2 \Delta t}{3GM_\odot^2} = 70 \text{ m.rok}^{-1}$.

Úloha 3.25 Odvoďte vztah hmotnost – zářivý výkon pro hvězdy na hlavní posloupnosti (HP) za předpokladu, že koeficient střední opacit κ je konst. v celém průřezu hvězdy, tedy opacita nezávisí na teplotě a je stejná u hvězd různých hmotností. Jde o Thomsonův rozptyl na volných elektronech.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } T_c &= \frac{\mu_r GM}{\mathcal{R}R}, P_c = 4G\rho \frac{M}{R}, \sigma T_c^4 = \sigma \left(\frac{\mu_r GM}{\mathcal{R}R} \right)^4, \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{\sigma T_c^4}{3\kappa\rho R} = \frac{\sigma}{3\kappa\rho R} \left(\frac{\mu_r GM}{\mathcal{R}R} \right)^4 \\ \Rightarrow L &= \frac{16\pi^2 \sigma G^4}{9\mathcal{R}^4} \frac{\mu_r^4}{\kappa} M^3. \end{aligned}$$

Úloha 3.26 Odvoďte vztah pro Eddingtonovu limitu maximálního zářivého výkonu hvězdy. Při odvození předpokládáme platnost rovnice hydrostatické rovnováhy, rovnost gravitační síly a síly tlaku záření, v chemickém složení uvažujeme pouze vodík.

Řešení: Gradient tlaku je dán vztahem $\frac{dP_z}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} \frac{L}{4\pi r^2}$, kde κ je střední hodnota opacity. Rovnice hydrostatické rovnováhy $\frac{dP}{dr} = -G\frac{M\rho}{r^2}$ je uvažovaná na povrchu hvězdy, tedy pro $r = R$. Dosadíme a upravíme: $L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{\kappa} M$, což je hodnota maximálního zářivého výkonu, při kterém je hvězda ještě ve stavu zářivé rovnováhy. Užívají se rovněž i tyto vztahy: $L_{\text{Ed}} \cong 1,5 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_\odot} \cong 3,9 \cdot 10^4 L_\odot \frac{M}{M_\odot}$.

Úloha 3.27 Stanovte Eddingtonovu limitu zářivého výkonu hvězdy s hmotností $0,085 M_\odot$ za předpokladu, že pro opacitu v blízkosti povrchu hvězdy je dominantní elektronový rozptyl, jehož hodnota je dána vztahem $\kappa \cong (1 + X) 0,02 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$. Při $X = 0,7$ dostáváme $\kappa \cong 0,034 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$. Je tlak záření podstatný pro stabilitu hvězd nízké hmotnosti na hlavní posloupnosti?

Řešení: Dosadíme do vztahu pro Eddingtonův limitní zářivý výkon $L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{\kappa} M = 1,3 \cdot 10^{30} \text{ W}$. U hvězd nízké hmotnosti na hlavní posloupnosti, viz řešení úlohy č. 10, lze tlak záření zanedbávat.

Úloha 3.28 Užitím podmínky $L \leq L_{\text{Ed}}$, kde L_{Ed} je dán rovnicí $L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{k} M$ odvoďte horní limitu pro hmotnost a zářivý výkon hvězd hlavní posloupnosti za zjednodušujícího předpokladu vztahu hmotnost – zářivý výkon $\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3$.

Řešení: Podmínku $L < \frac{4\pi Gc}{k} M$ můžeme přepsat $\frac{L}{L_\odot} < \frac{4\pi Gc}{k} \frac{M_\odot}{L_\odot} \frac{M}{M_\odot}$. Odtud při využití vztahu hmotnost – zářivý výkon obdržíme $\frac{M}{M_\odot} < \left(\frac{4\pi Gc}{k} \frac{M_\odot}{L_\odot} \right)^{1/2}$. Dosazením $\frac{M}{M_\odot} = 180$.

Úloha 3.29 Prostřednictvím rovnice hydrostatické rovnováhy určete, za jak dlouho se zmenší poloměr Slunce o 2%, jestliže by 10% gravitačních sil nebylo vyrovnáváno tlakovými silami.

Řešení: Rovnice hydrostatické rovnováhy má v zadaném případě tvar $\frac{dP}{dr} = -g\rho + 0,1g\rho$. Pro zjednušení budeme předpokládat konstantnost dodatečného povrchového gravitačního zrychlení na povrchu Slunce v průběhu smršťování $g = 27,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, očekávaná změna poloměru je přibližně 14000 km. Ze vztahu $s = \frac{g}{2} t^2$ stanovíme čas $t \cong 1000 \text{ s}$, tedy asi 17 minut. Změna poloměru by byla pozorovatelná ze Země.

Úloha 3.30 Za předpokladu přenosu energie v nitru hvězdy zářením dokažte, že teplotní gradient je určen výrazem $\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa L_r}{64\pi\sigma r^2 T^3} \rho$.

Řešení: Předpokládáme ze zadání platnost zářivé rovnováhy ve hvězdě. Tok zářivé energie jednotkovou plochou sféry o poloměru r je dán vztahem $F = \frac{L_r}{4\pi r^2}$. Energie absorbovaná ve zvoleném objemovém elementu je $\frac{L_r}{4\pi r^2} \kappa \rho dr$. Tlakový gradient je $\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} \frac{L_r}{4\pi r^2}$, kde $dP_r = \frac{16\sigma}{3c} T^3 dT$. Dosazením obdržíme rovnici pro teplotní gradient.

Úloha 3.31 Určete, zda v místě $r = 0,9 R_{\odot}$ od středu Slunce probíhá přenos energie konvekcí nebo zářením. Parametry zvoleného místa jsou následující: $\rho = 1,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\kappa = 10 \text{ m}^2\cdot\text{kg}^{-1}$, $T = 4\cdot 10^5 \text{ K}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$, $P = 8,7\cdot 10^9 \text{ Pa}$.

Řešení: Konvekce je dominantní při splnění podmínky $\frac{dT}{dr} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$, což lze zapsat $\frac{3\rho\kappa}{16\sigma T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{GM(r)}{r^2} \rho$. Po dosazení obdržíme $0,06 > 0,009$, tedy podmínka nastolení konvekce je splňována.

Úloha 3.32 Dokažte, že v centrální oblasti Slunce není přenášena energie konvekcí. Množství energie uvolňované na jednotku hmotnosti je odhadováno na $1,35\cdot 10^{-3} \text{ W}\cdot\text{kg}^{-1}$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $P = 3,20\cdot 10^{16} \text{ Pa}$, $T = 1,56\cdot 10^7 \text{ K}$, $\kappa = 0,138 \text{ m}^2\cdot\text{kg}^{-1}$.

Řešení: Minimální kritická hodnota energie na jednotku hmotnosti přenášena konvekcí je dána vztahem $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{16\pi Gc}{\kappa} \frac{aT^4}{3} \frac{1}{P}$, kde $a = \frac{4\sigma}{c}$. Po dosazení číselných hodnot obdržíme pro energii $1,36\cdot 10^{-3} \text{ W}\cdot\text{kg}^{-1}$. Protože propočítaná hodnota je větší než skutečná přenášena energie, přenos konvekcí nenastává.

Úloha 3.33 Předpokládejme střední hustotu Slunce $1,4\cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a střední opacitu v nitru Slunce pro ionizovaný vodík $\kappa = 0,1 \text{ m}^2\cdot\text{kg}^{-1}$. Určete střední volnou dráhu fotonu ve středu Slunce a střední teplotní gradient. Za zjednodušujícího předpokladu, že střední volná dráha fotonu směrem k povrchu je stále stejná, odhadněte charakteristický čas, za který foton dospěje z nitra k povrchu Slunce.

Řešení: Střední volná dráha fotonu je $l = \frac{1}{\kappa\rho} = 7\cdot 10^{-3} \text{ m}$. Při centrální teplotě Slunce $T_c = 1,4\cdot 10^7 \text{ K}$ a přibližné povrchové teplotě $T_p = 6\cdot 10^3 \text{ K}$ je střední teplotní gradient roven $\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{T_c - T_p}{R_{\odot}} \cong 2\cdot 10^{-2} \text{ K}\cdot\text{m}^{-1}$. Pro šíření fotonu nitrem Slunce k povrchu platí $R_{\odot} = \sqrt{z}l$, kde z udává počet absorpcí a emisí. Dosazením dostaneme $z = 10^{22}$. Každá emise respektive reemise proběhne průměrně za 10^{-8} s , tedy za $10^{22}10^{-8} = 10^{14} \text{ s} \cong 3\cdot 10^6$ roků dospěje foton k povrchu.

Úloha 3.34 Odvoďte vztah pro periodu radiálních pulsací cefeid s využitím rovnice hydrostatické rovnováhy. Oscilace pulsujících hvězd jsou důsledkem rezonance zvukových vln rezonujících ve hvězdném nitru.

Řešení: Adiabatická rychlost zvuku je dána vztahem $v_z = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}$, tlak vyjádříme z rovnice hydrostatické rovnováhy za předpokladu konstantní hustoty $\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r$, pro tlak obdržíme $P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r^2)$. Pulsační perioda je dána vztahem $\Pi \cong 2 \int_0^R \frac{dr}{v_z} \cong 2 \int_0^R \left[\frac{2}{3}\gamma\pi G\rho (R^2 - r^2)\right]^{-1/2} dr \Rightarrow \Pi \sim \left(\frac{3\pi}{2\gamma G\rho}\right)^{1/2}$.

Úloha 3.35 Propočtete rovnováhu pro chemické složení poměru $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ a $^{14}\text{N}/^{12}\text{C}$ ve středu současného Slunce. Reakční časy použijte z rovnic CNO cyklu. Velmi malá část asi 2 % z celkové vyprodukované energie pochází od CNO cyklu ve středové části Slunce.

Řešení: Podle první a třetí rovnice CNO cyklu, platí $\frac{C^{13}}{3 \cdot 10^5} = \frac{C^{12}}{10^6} = 3 \cdot 10^{-1}$. Tedy v centrálních částech Slunce při $T = 1,4 \cdot 10^7$ K, za předpokladu, že CNO cyklus probíhá po dobu alespoň 10^6 roků, dosahuje poměr hodnoty 0,3. Dále postupně vypočteme poměr $\frac{{}^{14}_7\text{N}}{{}^{12}_6\text{C}} = \frac{{}^{14}_7\text{N}}{{}^{13}_6\text{C}} \frac{{}^{13}_6\text{C}}{{}^{12}_6\text{C}}$. Nejprve $\frac{{}^{14}_7\text{N}}{{}^{13}_6\text{C}} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 10^3$ a při znalosti $\frac{{}^{13}_6\text{C}}{{}^{12}_6\text{C}} = 3 \cdot 10^{-1}$ dostaneme $\frac{{}^{14}_7\text{N}}{{}^{12}_6\text{C}} = 3 \cdot 10^2$. Připomínáme, že ve sluneční atmosféře je však poměr $\frac{{}^{13}_6\text{C}}{{}^{12}_6\text{C}} = 10^{-2}$.

4 Hvězdné atmosféry

Úloha 4.1 Vyjádřete Boltzmannovu a Sahovu rovnici v logaritmickém tvaru vhodném pro výpočty.

Řešení: Nejčastěji uváděný tvar pro Boltzmannovu rovnici je $\log \frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{T} \chi_{AB} + \log \frac{g_B}{g_A}$ respektive pro Sahovu rovnici $\log \frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2} \log T - \frac{5040}{T} \chi_i - \log P_e + \log \frac{2B_{r+1}(T)}{B_r(T)} - 1,48$, kde χ_{AB} je excitační potenciál v eV, χ_i je ionizační potenciál v eV, teplota v K a elektronový tlak v Pa.

Úloha 4.2 Jaká část atomů vodíku bude excitována na druhou energetickou hladinu ve fotosféře Slunce, předpokládáme-li její teplotu 5 780 K? Nechť A je základní první energetická hladina, B je druhá hladina, dále je zadáno $\chi_{AB} = 10,16$ eV, $g_B = 4$, $g_A = 1$.

Řešení: Dosadíme do Boltzmannovy rovnice $\log \frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{5780} 10,16 + 0,6 = -8,26$. Odtud dostaneme $N_B = 5,5 \cdot 10^{-9} N_A$, přibližně na jednu miliardu vodíkových atomů ve fotosféře připadá jeden, který má obsazenu druhou energetickou hladinu. Při pouze řádových výpočtech lze výraz $\log \frac{g_B}{g_A}$ zanedbat, zpravidla g_B a g_A jsou nevelká čísla stejného řádu.

Úloha 4.3 Vypočítejte podíl atomů vodíku excitovaných na druhou energetickou hladinu u hvězd s hodnotami teplot fotosfér (zaokrouhlo) 5 780 K – Slunce, 9 500 K – Vega a 15 000 K – Rigel. Jaký závěr odtud vyplývá pro intenzitu spektrálních čar atomu vodíku?

Řešení: Pro Slunce platí $N_B = 5,5 \cdot 10^{-9} N_A$, u Vegy $N_B = 1,6 \cdot 10^{-5} N_A$ a pro Rigel $N_B = 1,5 \cdot 10^{-3} N_A$. S rostoucí teplotou narůstá počet atomů na druhé energetické hladině, odkud při přechodech vznikají absorpční čáry vodíku. Jestliže záměrně modelově neuvažujeme vliv ionizace, s rostoucí teplotou se zvětšuje intenzita vodíkových čar.

Úloha 4.4 Nechť A je základní první energetická hladina iontu O III (ve skutečnosti se skládá ze tří velmi blízkých hladin $^3P_{0,1,2}$). Excitační potenciál $\chi_{AB} = 2,48$ eV, $g_A = 9$, $g_B = 5$. Určete počet atomů nacházejících se na druhé energetické hladině B (přesnější označení je 1D_2) při teplotě 10 000 K?

Řešení: Dosazením obdržíme $N_B = 3,2 \cdot 10^{-2} N_A$. Při přechodu $B \rightarrow A$ vznikají „zelené“ nebulární čáry N_2 a N_1 .

Úloha 4.5 Užitím Sahovy rovnice vypočítejte poměr počtu H^- iontů a neutrálních vodíkových atomů ve fotosféře Slunce. Za teplotu zvolte 5 780 K, tedy efektivní povrchovou teplotu, elektronový tlak předpokládejte $\log P_e = 0,2$ Pa, $\chi_i = 0,75$ eV. Pauliho vylučovací princip vyžaduje existenci jednoho stavu pro iont, tudíž oba elektrony musí mít opačné spiny. V atmosféře Slunce pouze jeden z 10^7 vodíkových atomů vytváří podle reakce $H + e^- \rightarrow H^- + \gamma$ iont H^- .

Řešení: Dosazením do Sahovy rovnice při volbě korekčního členu $\log \frac{2B(\text{HI})}{B(\text{H}^-)} = \log 2 \frac{2}{1} = 0,602$, $\log \frac{N(\text{HI})}{N(\text{H}^-)} = 7,88 \Rightarrow N(\text{HI}) = 7,6 \cdot 10^7 N(\text{H}^-)$. Pouze jeden z 10^8 vodíkových atomů je ve formě H^- , tedy převážná část fotosféry je složena z neutrálních vodíkových atomů s hustotou asi 10^{17} cm^{-3} . Pouze ionty H^- však přispívají podstatně ke spojitě absorpci. Volné elektrony

poskytují kovy s nízkým ionizačním potenciálem 4,34 eV draslík, 5,14 eV sodík a 6,11 eV vápník.

Úloha 4.6 Stanovte poměr počtu atomů N_1 ionizovaného a N_0 neutrálního sodíku ve fotosféře Slunce při teplotě $T = 5780$ K a elektronovém tlaku $\log P_e = 0,2$ Pa, ionizační potenciál Na II je $\chi_1 = 5,14$ eV, korekční člen $\log \frac{2B_1(T)}{B_0(T)} = -0,08$.

Řešení: Do Sahovy rovnice dosadíme $\log \frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2} \log 5780 - \frac{5040}{5780} 5,14 - 0,2 - 0,08 - 1,48$, obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,24$, tedy $\frac{N_1}{N_0} = 1,7 \cdot 10^3$. Stupeň ionizace je $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,9994$, tedy 99,94% atomů sodíku ve fotosféře Slunce je v ionizovaném stavu.

Úloha 4.7 Určete relativní množství Fe II ve fotosféře Siria A, kde předpokládáme přibližně $T = 10000$ K, $\log P_e = 1,48$ Pa. První ionizační potenciál je $\chi_1 = 7,87$ eV, korekční člen $\log \frac{2B_1(T)}{B_0(T)} = 0,36$. Do jaké míry je železo ionizováno 2×, jestliže druhý ionizační potenciál je $\chi_2 = 16,18$ eV a $\log \frac{2B_2(T)}{B_1(T)} = -0,08$

Řešení: Dosazením obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,44 \Rightarrow N_1 = 2,7 \cdot 10^3 N_0$. Celkově $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,9996$, tudíž 99,96% atomů je Fe II. Při výpočtu počtu atomů Fe III opět použijeme Sahovu rovnici $\log \frac{N_2}{N_1} = -1,18 \Rightarrow N_2 = 6,6 \cdot 10^{-2} N_1$. Celkově $\frac{N_2}{N_2+N_1} = 0,062$, takže přibližně 6% atomů železa je ve stavu Fe III.

Úloha 4.8 Teplota fotosféry bílého trpaslíka DF Procyonu B je rovna $T = 8400$ K při elektronovém tlaku $\log P_e = 1,36$ Pa. Jaká musí být teplota obra, aby prvky s ionizačními potenciály $\chi_i = 4$ eV a $\chi_i = 8$ eV se vyznačovaly stejným stupněm ionizace. Předpokládejme elektronový tlak v atmosféře obra $\log P_e = 1,00$ Pa.

Řešení: Dosazením do Sahovy rovnice vypočteme stupeň ionizace u bílého trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 5,05$ při ionizačním potenciálu $\chi_i = 4$ eV. Dále řešíme Sahovu rovnici pro obra se zadaným stupněm ionizace, hledaná teplota obra je $T = 7600$ K. Obdobně pro ionizační potenciál $\chi_i = 8$ eV dostaneme stupeň ionizace $\log \frac{N_1}{N_0} = 2,65$, hledaná teplota je $T = 7900$ K.

Úloha 4.9 V kterém typu hvězdy, u červeného obra nebo trpaslíka hlavní posloupnosti bude probíhat výrazněji ionizace; u trpaslíka předpokládáme teplotu fotosféry $T = 5200$ K a elektronový tlak $\log P_e = -0,50$ Pa u obra $T = 4500$ K a $\log P_e = -1,80$ Pa. Ionizační potenciály nechť jsou $\chi_i = 5,14$ eV pro Na a $\chi_i = 7,87$ eV pro Fe.

Řešení: Na základě propočtu stupně ionizace ze Sahovy rovnice pro Na dostaneme u obra $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,69$, u trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,32$, dospějeme k závěru, že při ionizačním potenciálu 5,14 eV je ionizace větší ve fotosféře obra. Obdobně obdržíme u obra $\log \frac{N_1}{N_0} = 1,14$, ve fotosféře trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 1,18$, při ionizačním potenciálu 7,87 eV železa. Ve fotosféře trpaslíka je ionizace mírně vyšší.

Úloha 4.10 V kterém typu hvězdy u obra nebo bílého trpaslíka bude probíhat příznivěji ionizace, jestliže u bílého trpaslíka je teplota fotosféry $T = 8400$ K a elektronový tlak $\log P_e = 1,36$ Pa, u obra $T = 7600$ K a $\log P_e = 0,80$ Pa. Ionizační potenciály nechť jsou $\chi_i = 4$ eV, 8 eV a 12 eV. Předpokládáme přibližně stejné hodnoty korekčního členu $\log \frac{2B_1(T)}{B_0(T)}$ pro obě hvězdy.

Řešení: Na základě propočtu stupně ionizace $\log \frac{N_1}{N_0}$ ze Sahovy rovnice dospějeme k závěru, že při ionizačním potenciálu 4 eV je ionizace větší v atmosféře obra, u zbývajících ionizačních potenciálů 8 eV a 12 eV naopak v atmosféře bílého trpaslíka.

Úloha 4.11 Výpočtem doložte závěry spektroskopických pozorování, že čáry neutrálního vápníku Ca I mají větší intenzitu u trpaslíků než obrů pozdních spektrálních tříd. Předpokládáme stejnou teplotu obou hvězd 3 150 K, ionizační potenciál vápníku je $\chi_i = 6,11$ eV. Hodnota elektronového tlaku u obra $\log P_e = -2,7$ Pa, v případě trpaslíka $\log P_e = -1,2$ Pa. Korekční člen pro vápník má při zadané teplotě hodnotu 0,59.

Řešení: Dosazením do Sahovy rovnice pro obra obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 0,78 \Rightarrow N_1 = 6,03 N_0$, takže počet neutrálních atomů je $\frac{N_0}{N_0+N_1} = 0,143$, tudíž pouze 14% atomů je neutrálních. U trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = -0,72 \Rightarrow N_1 = 0,19 N_0$, počet neutrálních atomů je $\frac{N_0}{N_0+N_1} = 0,840$, takže 84% atomů vápníku je u trpaslíka neutrálních.

Úloha 4.12 Dokažte, že železo Fe I s ionizačním potenciálem $\chi_i = 7,87$ eV je ve fotosférách obra a trpaslíka přibližně stejně ionizováno. U obra je teplota 5 200 K, elektronový tlak $\log P_e = -0,3$ Pa, u trpaslíka teplota $T = 5 700$ K a elektronový tlak $\log P_e = 0,5$ Pa. Korekční člen má pro obě hvězdy stejnou hodnotu 0,50.

Řešení: Dosadíme do Sahovy rovnice pro obra, obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 0,98$, stupeň ionizace je $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,906$, tedy je ionizováno 90,6% atomů. U trpaslíka je stupeň ionizace $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,899$, tudíž je ionizováno 89,9% atomů, přibližně stejně jako u obra.

Úloha 4.13 Porovnání intenzit čáry Sr II $\lambda = 407,7$ nm se sousední čarou železa Fe I $\lambda = 406,3$ nm dovoluje odlišit obra, jehož fotosféra se vyznačuje nízkým elektronovým tlakem od trpaslíka s vysokým elektronovým tlakem, neboť stroncium s ionizačním potenciálem 5,67 eV je výrazněji ionizováno ve fotosféře obrů. Prověřte tuto skutečnost pro obra o teplotě 4 500 K, $\log P_e = -1,6$ Pa, korekční člen 0,57 a trpaslíka o teplotě 4 900 K, $\log P_e = -0,5$ Pa a korekční člen 0,55, obě hvězdy mají spektrální třídu K0.

Řešení: Pro obra dostaneme ze Sahovy rovnice $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,45 \Rightarrow N_1 = 2818 N_0$, takže stupeň ionizace je $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,9996$ neboli 99,96%. U trpaslíka obdobným dosazením získáme $\log \frac{N_1}{N_0} = 2,94 \Rightarrow N_1 = 871 N_0$, stupeň ionizace je $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,9988$, tedy 99,88% ionizace. Nižší elektronový tlak u obra je překryt sníženou teplotou, rozdíl teplot činí 400 K. Přesto je již stupeň ionizace mírně vyšší u obra.

Úloha 4.14 Ve viditelné části spektra Slunce jsou nejintenzivnějšími čáry H a K Ca II, nikoliv čáry balmerovské série vodíku. Objasněte, proč tomu tak je, závěry doložte výpočtem!

Řešení: Zavedeme označení celkového počtu atomů vodíku N_C , počet atomů v základním stavu N_A , v prvním excitovaném stavu N_B , N_0 počet neutrálních atomů a N_1 počet ionizovaných atomů. K určení počtu ionizovaných atomů použijeme Sahovu rovnici a k stanovení rozložení atomů mezi základní první energetickou hladinou a druhou excitovanou hladinou použijeme Boltzmannovu rovnici. Předpokládáme elektronový tlak v atmosféře Slunce 1,6 Pa. Pro vodík ze Sahovy rovnice obdržíme $N_1 = 7,5 \cdot 10^{-5} N_0$. Jeden vodíkový iont H II připadá na každých 13 000 neutrálních vodíkových atomů H I v atmosféře Slunce. Dosazením do Boltzmannovy rovnice dostaneme $N_B = 5,0 \cdot 10^{-9} N_A$. Pouze jeden z 200 miliónů vodíkových

atomů se nachází na druhé energetické hladině a může vyvolat vznik absorpčních čar Balmerovy série. Celkově $\frac{N_B}{N_C} = \frac{N_B}{N_B+N_A} \frac{N_0}{N_C} = 5 \cdot 10^{-9}$. Vápník Ca I má ionizační potenciál pouze 6,1 eV, tedy poloviční vzhledem k ionizačnímu potenciálu vodíku 13,6 eV. To má podstatný vliv na počet ionizovaných atomů, neboť Sahova rovnice je velmi citlivá k hodnotě ionizačního potenciálu, protože $\frac{\chi_i}{kT}$ je v exponentu a $kT \cong 0,5 \text{ eV} \ll \chi_i$. Ze Sahovy rovnice dostáváme $\frac{N_1}{N_0} = 9 \cdot 10^2$. Pouze jeden z 900 atomů vápníku je Ca I, prakticky téměř všechny atomy vápníku jsou ve stavu Ca II. Z Boltzmannovy rovnice pro obsazení excitovaných hladin obdržíme $N_A = 2,6 \cdot 10^2 N_B$. Většina atomů se nachází na základní energetické hladině. Shrnuto převážná většina atomů vápníku je ve stavu Ca II a je na základní energetické hladině, tudíž existují vhodné podmínky pro vznik čar K a H Ca II.

$$\frac{N_A}{N_C} \cong \frac{N_A}{N_A + N_B} \frac{N_1}{N_C} \cong \frac{1}{1 + \frac{N_B}{N_A}} \frac{\frac{N_1}{N_0}}{1 + \frac{N_1}{N_0}} \cong 0,995.$$

V atmosféře na $5 \cdot 10^5$ vodíkových atomů připadá pouze 1 atom vápníku, ale pouze $5 \cdot 10^{-9}$ z vodíkových atomů je neionizováno a nachází se na druhé energetické hladině. Celkově $5 \cdot 10^5 \times 5 \cdot 10^{-9} = 2,5 \cdot 10^{-3}$. Shrnuto ve fotosféře Slunce existuje $400 \times$ více vápníkových iontů Ca II na základní energetické hladině umožňujícím vznik spektrálních čar K a H čar než neutrálních vodíkových atomů na druhé energetické hladině, odkud při přechodech mohou vznikat čary Balmerovy série. Intenzita čar K a H Ca II je způsobena citlivější teplotní závislostí jeho stavů excitace a ionizace, nikoliv celkově větším množstvím vápníku ve fotosféře Slunce. Modelově zjednodušeně neuvažujeme faktor pravděpodobnosti přechodu.

Úloha 4.15 Pro fotosféru hvězdy bylo stanoveno z intenzity čar Balmerovy série, že logaritmus počtu atomů vodíku, nacházejících se na druhé energetické hladině je roven 15,80. Naleznete počet iontů vodíku N_1 , jestliže $T = 29\,600 \text{ K}$ a $\log P_e = 1,8 \text{ Pa}$. Dále je zadáno $\chi_i = 13,60 \text{ eV}$, $\chi_2 = 10,15 \text{ eV}$, $g_2 = 8$, $B_1 = 1$.

Řešení: Dosadíme do kombinované Boltzmannovy - Sahovy rovnice, která má tvar:

$$\frac{N_1}{N_{0,r}} P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} \frac{2B_1(T)}{g_{0,r}} e^{-\frac{\chi_i - \chi_r}{kT}},$$

udávající poměr počtu N_1 jedenkrát ionizovaných atomů k počtu $N_{0,r}$ neutrálních atomů nacházejících se na r -té energetické hladině, χ_i je ionizační potenciál, χ_r je excitační potenciál. Kombinovaná Boltzmannova-Sahova rovnice má logaritmický tvar

$$\log \frac{N_1}{N_{0,r}} = -\frac{5040}{T} (\chi_i - \chi_r) + 2,5 \log T - 1,48 + \log \frac{2B_1(T)}{g_{0,r}} - \log P_e.$$

Dosazením dostaneme $\log \frac{N_1}{N_{0,2}} = 6,72$ a při $\log N_{0,2} = 15,18$ obdržíme $\log N_1 = 22,52 \Rightarrow N_1 = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Tedy pouze velmi malá část atomů vodíku zůstane neutrální.

Úloha 4.16 Odhadněte pomocí výpočtu možný počet pozorovaných oddělených spektrálních čar Balmerovy série vodíku. Zjednodušeně předpokládáme, že šířka čar závisí na elektronové hustotě podle Starkova lineárního rozšíření. Využijte Inglisova - Tellerova vztahu $\log N_e = 23,2 - 7,5 \log n_{B\check{c}}$.

Řešení: Dosazením do Inglisova - Tellerova vztahu určíme $n_{B\check{c}}$.

hvězda	spektrální třída	$\log N_e$	$\log n_{B\check{e}}$
α Cyg	A2 I	12,2	29
Sirius A	A2 V	13,8	18
τ Sco	B0 V	14,6	14
bílý trpaslík	DA	16,4	8

Úloha 4.17 Proč ve spektru sluneční chromosféry pozorujeme více čar Balmerovy série vodíku než ve spektrech bílých trpaslíků?

Řešení: V atmosférách bílých trpaslíků je mnohem vyšší hustota než v chromosféře Slunce, proto je střední vzdálenost atomů v chromosféře mnohem větší. Vzdálenosti elektronů od jader atomů nemohou být větší než střední vzdálenost mezi atomy. Proto čím je vyšší hustota, tím menší počet energetických hladin je a tudíž tím menší počet balmerovských čar může vzniknout.

Úloha 4.18 Vysvětlete, proč Balmerovy čáry vodíku jsou pozorovatelné přibližně

- do 5. čáry u bílých trpaslíků - např. Sirius B
- do 15. čáry u hvězd hlavní posloupnosti - např. Sirius A
- do 25. čáry u veleobrů - např. Betelgeuze.

Spektrální čáry Balmerovy série jsou rozšířeny srážkami. Jejich vzdálenost se s rostoucím číslem čáry zmenšuje.

Řešení: Rozhodující pro pozorovatelnost spektrálních čar je hustota atmosfér.

Úloha 4.19 Uvažujme čáry podobných excitačních potenciálů ve spektru Slunce, Fe I 414,39 nm a Fe II 417,35 nm. Objasněte s ohledem na Boltzmannovu a Sahovu rovnici, proč čára Fe I je mohutnější ve fotosféře, zatímco čára Fe II je výraznější v chromosféře.

Řešení: Chromosféra ležící asi 2000 km nad fotosférou o teplotě řádově 6 000 K, se vyznačuje nárůstem teploty na asi 25 000 K ale poklesem hustoty zhruba 10^4 krát. Proto v prostředí chromosféry se stávají výraznými čáry ionizovaných prvků, tedy i čára Fe II.

Úloha 4.20 Objasněte vznik spektrálních čar u podtrpaslíků třídy svítivosti VI.

Řešení: Ve spektrech těchto podtrpaslíků byl pozorován nedostatečný výskyt kovů. Protože ionizované kovy jsou důležitým zdrojem elektronů ve hvězdných atmosférách, je elektronová hustota velmi malá a nízká je rovněž opacita, neboť volné elektrony mohou být rekombinovány především iontem H^- , hlavním zdrojem opacity ve spojitém spektru. Můžeme proto pozorovat do větších hloubek, než je obvyklá optická hloubka $\tau \cong 2/3$. Čáry kovů se objevují slabší na jasném kontinuu, spektrum trpaslíka se jeví jako ranějšího spektrálního typu, s méně výraznými čarami kovů. Obrazy hvězd se přesouvají vlevo od hlavní posloupnosti, směrem k vyšším teplotám, o jednu magnitudu níže pod hlavní posloupnost.

Úloha 4.21 Jaká by byla teplota Slunce, kdyby neexistovaly spektrální čáry?

Řešení: Platí: $\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)T_{ef}'^4$, kde f je zlomek celkového toku záření, které je blokováno, v případě Slunce $f = 0,14$. Úpravou vztahu dostaneme $T_{ef} = (1 - f)^{-1/4} T_{ef}' \approx \left(1 + \frac{f}{4}\right) T_{ef}'$. Po

dosazení $T'_{\text{ef}} = 5780 \text{ K}$ dostaneme $T_{\text{ef}} = 5997 \text{ K}$, efektivní teplota by byla vyšší o 3,5 % tedy asi o 200 K.

Úloha 4.22 Hvězdný obr spektrální třídy K má efektivní teplotu 4300 K. Zjištěná hodnota mikroturbulentní rychlosti je $v_{\text{mt}} = 2 \text{ km.s}^{-1}$. Stanovte šířku čáry Fe I o vlnové délce $\lambda = 553,93 \text{ nm}$.

Řešení: Pro rychlost tepelného pohybu platí $v_{\text{nejpr}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 1,13 \text{ km.s}^{-1}$. Šířku čáry určíme ze vztahu $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} (v_{\text{mt}}^2 + v_{\text{nejpr}}^2)^{1/2} \cong 10^{-2} \text{ nm}$.

Úloha 4.23 Široké a jasné emisní čáry vznikají v radiálně se zvětšující obálce u převážně většiny Wolfových-Rayetových hvězd. Jaký bude profil čáry, jestliže předpokládáme, že rychlost toku hvězdné látky je konstantní? Určete její hodnotu jestliže ze spektroskopických měření vodíkové čáry H_β o vlnové délce $\lambda = 486,1 \text{ nm}$ byla zjištěna šířka $\Delta\lambda = 4,0 \text{ nm}$.

Řešení: V případě toku atmosférické látky konstantní rychlostí mají čáry pravoúhlý profil, což bylo u některých W-R hvězd zjištěno. Rychlost výtoku, při zanedbání tepelných rychlostí, určíme ze vztahu $v = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 1200 \text{ km.s}^{-1}$.

Úloha 4.24 Proveďte diskusi, na čem závisí hloubka opticky tenkých vodíkových spektrálních čar u hvězd spektrální třídy B.

Řešení: V případě opticky tenkých čar je hloubka dána vztahem $R_\lambda = \frac{2}{3} \frac{\kappa_c}{\kappa_k} \frac{d \ln B_\lambda}{d \tau_k}$. U hvězd spektrální třídy B je koeficient spojitě absorpce v optické části spektra nejvíce ovlivňován paschenovským kontinuem, tedy absorpcí ze třetí energetické hladiny vodíkového atomu, $\kappa_k \sim N_{\text{H}} (n=3)$. Čárový absorpční koeficient pro balmerovské čáry, mající původ v absorpci atomů vodíku z druhé energetické hladiny, je úměrný počtu atomů vodíku na druhé energetické hladině $\kappa_c \sim N_{\text{H}} (n=2)$. Křídla balmerovských čar jsou rozšířena v důsledku Starkova jevu, který závisí na počtu volných elektronů $\kappa_c \sim n_e$. Celkově shrnuto $R_\lambda \sim \frac{n_e N_{\text{H}}(n=2)}{N_{\text{H}}(n=3)}$.

Úloha 4.25 Dokažte, že rovnici hydrostatické rovnováhy lze napsat ve tvaru používaném například u modelů hvězdných atmosfér $\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}$.

Řešení: Vyjdeme ze vztahů $g = G \frac{M}{r^2}$ a $d\tau = -\kappa \rho dr$ a dosadíme do rovnice $\frac{dP}{dr} = -\rho g$.

Úloha 4.26 Předpokládejme, že provádíme pozorování skrz plazmu o konst. hustotě a teplotě, příkladně $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$ a 5780 K , což odpovídá dolním fotosférickým vrstvám Slunce. Nechť opacita plynu na vlnové délce λ_1 je $\kappa_{\lambda_1} = 0,026 \text{ m}^2.\text{kg}^{-1}$ a na vlnové délce λ_2 je $\kappa_{\lambda_2} = 0,03 \text{ m}^2.\text{kg}^{-1}$. Určete vzdálenost, ve které je optická hloubka rovna 2/3 pro každou vlnovou délku.

Řešení: Zjednodušeně dosadíme do vztahu pro optickou hloubku $\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_{\lambda_1} \rho ds$. Řešením dostaneme $s_1 = \frac{\tau_{\lambda_1}}{\kappa_{\lambda_1} \rho} = 103 \text{ km}$, obdobně pro $s_2 = \frac{\tau_{\lambda_2}}{\kappa_{\lambda_2} \rho} = 89 \text{ km}$.

Úloha 4.27 Dokažte, že ve fotosféře Slunce předpoklad lokální termodynamické rovnováhy (LTE) není naplňován. Nechť teplota ve zvolené vrstvě fotosféry se mění v intervalu 5890 K – 5650 K v průběhu vzdálenosti 28 km.

Řešení: Teplotní škálová výška je rovna $H_T = \frac{T}{|dT/dr|} = 674$ km. Střední volná dráha fotonů je $l = \frac{1}{\kappa\rho}$. Při volbě $\kappa = 0,026 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ a $\rho = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ dostaneme $l = 150$ km, což je řádově srovnatelné s H_T . Vzhledem k velikosti střední volné dráhy fotony vycházejí bez interakce z fotosféry, „nezachycují“ teplotu. Předpoklad LTE není splňován.

Úloha 4.28 Fotosféru Slunce lze pokládat v prvním přiblížení za šedou. Znamená to, že záření všech vlnových délek ve viditelné části spektra je zeslabováno stejně. Proč tedy okrajové ztemnění slunečního disku narůstá se zmenšováním vlnové délky?

Řešení: Z blízkosti okraje disku přichází záření z chladnějších vrstev o teplotě T_0 , ve středu disku z vrstev o teplotě T_1 , platí $T_1 > T_0$, tedy $B_\nu(T_1) > B_\nu(T_0)$. Proto je střed disku jasnější než okraj. V šedé atmosféře záření všech vlnových délek je zeslabováno stejně, avšak poměr $B_\nu(T_0)/B_\nu(T_1)$ udávající velikost okrajového ztemnění závisí na ν . Protože T_1 se příliš neodlišuje od T_0 uijeme vztahu $\frac{B_\nu(T_1)}{B_\nu(T_0)} \approx \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^\alpha$, kde $\alpha = \alpha(\nu) = \frac{h\nu}{kT_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_0}\right)\right]^{-1}$. Odtud vyplývá, že velikost okrajového ztemnění je určována gradientem teploty v atmosféře. Čím rychleji roste teplota s hloubkou, tím větší je rozdíl T_1 a T_0 a důsledkem je větší okrajové ztemnění. Při konstantním gradientu teploty, t.j. při konstantním poměru T_1/T_0 je ztemnění odlišné na různých vlnových délkách v důsledku rozdílnosti hodnot členu $\frac{h\nu}{kT_0}$. Z analýzy výše uvedených vztahů vyplývá, že v dlouhovlnné oblasti spektra $\frac{h\nu}{kT_0} \ll 1$ je poměr Planckových funkcí roven T_1/T_0 , v krátkovlnné oblasti spektra $\alpha \cong \frac{h\nu}{kT_0} \gg 1$ tedy okrajové ztemnění je podstatně větší a narůstá při přechodu ke kratším vlnovým délkám.

Úloha 4.29 Dominantním detailem ve spojitých spektrech hvězd spektrální třídy A0 v optické části spektra je balmerovský skok při $\lambda = 364,6$ nm. Jak velké je okrajové ztemnění na discích těchto hvězd na vlnových délkách $\lambda_1 = 360,6$ nm a $\lambda_2 = 368,6$ nm?

Řešení: Balmerovský skok při $\lambda = 364,6$ nm ve spojitém spektru je způsoben tím, že v krátkovlnné části spektra od této vlnové délky je záření schopné ionizovat atomy vodíku počínaje z druhé energetické hladiny. V dlouhovlnné části spektra od tohoto skoku je možná ionizace pouze z třetí a vyšších energetických hladin. Fotosféra je v důsledku toho na vlnové délce $\lambda_2 = 368,6$ nm více průzračná a lze ji pozorovat do větší hloubky, tedy vrstvy s vyšší teplotou, záření má vyšší intenzitu. Neprůzračnost fotosféry je velká v krátkovlnné části od skoku, např. na vlnové délce $\lambda_1 = 360,6$ nm, záření přichází téměř ze stejných vrstev položených v blízkosti povrchu. Proto je okrajové ztemnění malé. V dlouhovlnné části spektra od skoku přichází záření ve středu disku z relativně větších hloubek, z fotosférických vrstev o vyšší teplotě. Na okraji disku přichází záření z vrstev blízko povrchu. Shrnuto je okrajové ztemnění na delších vlnových délkách výraznější, což platí pouze v optickém oboru.

Úloha 4.30 Proč při pozorování Slunce pod libovolným úhlem vidíme vždy přibližně do optické hloubky $\tau_\lambda \cong 2/3$ měřeno podél zorného paprsku? Při zdůvodnění vyjděte z planparalelního modelu šedé atmosféry za předpokladu LTE a platnosti Eddingtonovy aproximace. K prověření použijte okrajové ztemnění Slunce.

Řešení: Rovnice šedé atmosféry předpokládá, že střední intenzita je rovna zdrojové funkci $\langle I \rangle = S$. Předpoklad Eddingtonovské aproximace a LTE dává rovnice $\langle I \rangle = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ a $T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{ef}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3}\right)$. Tedy $T = T_{\text{ef}}$ při $\tau = \frac{2}{3}$ nikoliv $\tau = 0$. Povrch hvězdy definovaný jako vrstva s efektivní teplotou podle Stefanova – Boltzmannova zákona se nachází v hloubce, pro kterou

platí $\tau = \frac{2}{3}$. Proto při pozorování hvězdy vidíme do optické hloubky $\tau \cong \frac{2}{3}$ měřeno podél zorného paprsku.

Úloha 4.31 Základními složkami fotosféry Slunce jsou vodík a helium. Počet atomů všech dalších prvků, tzv. kovů, dohromady vzatých tvoří 10^{-3} z počtu atomů vodíku. Jak se změní hmotnost sluneční fotosféry, t.j. těch atmosférických vrstev, ze kterých k nám přichází bezprostředně záření, jestliže obsah kovů se zmenší 10 krát?

Řešení: Základní zdrojem opacit je ve fotosféře Slunce iont H^- , který vzniká vazbou dalšího elektronu k jádru atomu vodíku. Volné elektrony vznikají při ionizaci atomů kovů. Jestliže o řád zmenšíme počet „zdrojů“ volných elektronů, přibližně stejně se zmenší obsah iontů vodíku H^- . V důsledku toho poklesne i opacita o řád a můžeme pozorovat mnohem hlubší vrstvy fotosféry, jejíž hmotnost se zvětší přibližně o řád.

Úloha 4.32 Nalezněte výšku stejnorodé vodíkové fotosféry u

a) Slunce, $T_{\odot} = 6\,000\text{ K}$

b) bílého trpaslíka, $T = 30\,000\text{ K}$, $M = M_{\odot}$, $R = 10^{-2} R_{\odot}$.

Řešení: Výšku stejnorodé fotosféry určíme ze vztahu $H = \frac{kT}{g\mu_r m_p}$. Fotosféra Slunce je složena především z neionizovaného vodíku. Při volbě $T = 6\,000\text{ K}$, $\mu_r \cong 1$ dostaneme $H \cong 200\text{ km}$. U bílého trpaslíka předpokládáme fotosféru složenou z ionizovaného vodíku, $\mu_r = 0,5$, pro její výšku obdržíme $H \cong 200\text{ m}$.

Úloha 4.33 Odhadněte počet částic v 1 m^3 sluneční fotosféry předpokládáme-li teplotu $5\,780\text{ K}$ a tlak 10^4 Pa v optické hloubce $\tau = 0,5$. Porovnejte s koncentrací molekul v atmosféře u povrchu Země.

Řešení: V hlubších fotosférických vrstvách je při hustotě asi $10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je počet částic přibližně 10^{22} m^{-3} . Při normálních podmínkách se v atmosféře Země nachází v 1 m^3 asi 10^{25} částic. Tedy koncentrace v uvažované vrstvě fotosféry je zhruba 10^3 krát menší než v zemské atmosféře. Zatímco ve fotosféře Slunce jde především o atomy neionizovaného vodíku, v atmosféře Země jde o molekuly N_2 a O_2 .

Úloha 4.34 Předpokládejme, že Slunce bude vyzařovat konstantním zářivým výkonem pouze na úkor energie uložené ve fotosféře o tloušťce 300 km a hustotě asi 10^{23} částic m^{-3} . Za jaký čas bychom pozorovali změny v slunečním záření, jestliže by energie fotosféry nebyla neustále doplňována z nitra Slunce. Zářivý výkon 1 m^2 povrchu Slunce je $6\cdot 10^7\text{ W}$.

Řešení: Počet částic v sloupci o výšce 300 km a průřezu 1 m^2 je $3\cdot 10^5 10^{23} = 3\cdot 10^{28}$ částic. Při průměrné teplotě fotosféry $6\,000\text{ K}$ je energie jedné částice $\frac{3}{2}kT \cong 10^{-19}\text{ J}$. Celková energie ve vytčeném sloupci je $E \cong 10^{-19} 3\cdot 10^{28} \cong 3\cdot 10^9\text{ J}$. Tedy za čas $t \cong \frac{E}{F} \cong 50\text{ s}$ by došlo k vyčerpání zásob energie a nutně bychom pozorovali změny ve vyzařování a teplotě povrchu Slunce.

Úloha 4.35 Dokažte, že ve fotosféře Slunce je předpoklad o přenosu energie zářením oprávněný.

Řešení: Konvekce ve fotosféře nastane za podmínky $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{ad}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_z$. Po dosazení $\frac{dp}{dr} = -\frac{g\mu p}{RT}$ a úpravě obdržíme $\left(\frac{d\ln T}{d\ln d}\right)_{\text{ad}} < \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_z$. Za předpokladu adiabatických změn $p^{1-\gamma}T^{\gamma} =$

konst. při $\gamma = \frac{5}{3}$ dostaneme $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{\text{ad}} = \frac{2}{5}$. Z rovnice zářivé rovnováhy při $\kappa = \text{konst.}$ nalezneme $\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_z = \frac{1}{4}$. Tedy úvodní nerovnice není splněna a konvekce nenastává.

Úloha 4.36 Vypočítejte konvektivní tok ve fotosféře Slunce, předpokládáme $\Delta T \cong 300 \text{ K}$, $\rho \cong 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$, $v \cong 5 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$, pro vodík $c_p \cong \frac{5}{2} \frac{R}{m} \cong 10^4 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Dále určete tok záření při $T \cong 5800 \text{ K}$, $\kappa \cong 0,026 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, $r \cong 3 \cdot 10^5 \text{ m}$. Výsledky porovnejte a diskutujte.

Řešení: Konvektivní tok energie je roven $F_k \cong c_p \rho v \Delta T \cong 10^5 \text{ J.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$. Tok energie přenášené zářením je $F_r \cong \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \cong 2,3 \cdot 10^7 \text{ J.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$. Výrazně převládá přenos energie zářením. Konvektivní přenos může narůstat při změně κ či při nárůstu stupně ionizace s hloubkou.

Úloha 4.37 Charakter rozdělení magnetického pole ve skvrně a nad ní je určován poměrem tlaku plynu a magnetického tlaku. V homogenním magnetickém poli platí pro magnetický tlak vztah $P_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$. Určete při jaké velikosti intenzity magnetického pole je magnetický tlak větší než tlak plynu ve fotosféře Slunce $P_g \cong 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Mohou hrát magnetické síly významnější roli v hvězdných nitrech?

Řešení: Musí platit $P_m > P_g$, po dosazení $H > 1,8 \cdot 10^5 \text{ A.m}^{-1}$, což odpovídá intenzitě magnetického pole na horní úrovni skvrn. Obecně platí, že ve vnějších částech atmosféry Slunce je dominující magnetický tlak. Naopak v nitrech hvězd tlak plynu P_g výrazně převládá nad magnetickým tlakem P_m .

Úloha 4.38 Odhadněte teplotu ve sluneční skvrně při znalosti magnetického tlaku ve skvrně, koncentraci části a teploty okolí.

Řešení: Celkový tlak vně a uvnitř skvrny musí být stejný. Ve skvrně je tlak součtem tlaku částic v látce a magnetického tlaku. Platí $p_{\text{vnit}} + p_{\text{mag}} = p_{\text{vně}}$, po dosazení $nkT_{\text{vnit}} + \frac{B^2}{2\mu_0} = nkT_{\text{vně}} \Rightarrow T_{\text{vnit}} = T_{\text{vně}} - \frac{B^2}{2\mu_0 nk}$. Odtud vyplývá, že teplota ve skvrně je nižší než teplota v jejím okolí, což lze dokázat při dosazení konkrétních hodnot $T_{\text{vně}} = 5780 \text{ K}$, $B = 0,07 \text{ T}$, $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$, $T_{\text{vnit}} = 4200 \text{ K}$.

Úloha 4.39 Může magnetické pole o intenzitě $H = 800 \text{ A.m}^{-1}$ udržovat v protuberanci turbulentní pohyb o rychlosti $v_t = 15 \text{ km.s}^{-1}$? Hustota plazmy v protuberanci je $2 \cdot 10^{-11} \text{ kg.m}^{-3}$.

Řešení: Tlak magnetického pole výrazně převyšuje dynamický tlak turbulentních pohybů za podmínky nerovnice $\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \gg \rho v_t^2$, která je splněna. Po dosazení obdržíme $0,4 \gg 4,5 \cdot 10^{-3}$.

Úloha 4.40 Vyjádřete poměr tlaku záření a gravitačního zrychlení působícího na hmotnostní element ve hvězdné fotosféře. Její složení je z čistého ionizovaného vodíku, hlavním zdrojem opacity je rozptyl na volných elektronech. Určete poměr skutečného a limitního Eddingtonova zářivého výkonu (pro přiloženou tabulku základních charakteristik jednotlivých spektrálních tříd hlavní posloupnosti, obrů a veleobrů, tedy pro různé oblasti H–R diagramu (T_{ef} , L). Předpokládáme zadání všech nezbytných konstant.

Spektrální typ	$\log(M/M_\odot)$	$\log(R/R_\odot)$	$\log(L/L_\odot)$
O5 V	1,6	1,25	5,7
G0 V	0,04	0,02	0,1
M0 V	-0,33	-0,20	-1,2
B0 III	1,25	1,20	4,3
G0 III	0,4	0,8	1,5
K5 III	0,7	1,40	2,3
B0 I	1,7	1,30	5,4
G0 I	1,0	2,0	3,8
M2 I	1,3	2,90	4,7

Řešení: Vyjádříme gravitační zrychlení v atmosféře $g = \frac{GM}{R^2}$. Tlak záření na jednotkovou hmotnost je $g_r = \frac{\kappa}{c}F = \frac{\kappa L}{4\pi c R^2}$, kde $\kappa = \sigma_T/m_H$ je opacita. Hledaný poměr je dán vztahem $\frac{g_r}{g} = \frac{\kappa L}{4\pi c R^2} = \frac{L}{L_E} = \frac{\sigma_T L}{4\pi c G m_H M} \cong 3 \cdot 10^{-5} \frac{M_\odot L}{M L_\odot}$. Výsledky jsou obsaženy v tabulce:

spektrální třída	g_r/g	spektrální třída	g_r/g	spektrální třída	g_r/g
O5 V	0,38	B0 III	$3,4 \cdot 10^{-2}$	B0 I	0,15
G0 V	$3,0 \cdot 10^{-5}$	G0 III	$3,8 \cdot 10^{-4}$	G0 I	$1,9 \cdot 10^{-2}$
M0 V	$2,7 \cdot 10^{-6}$	K5 III	$1,2 \cdot 10^{-3}$	M2 I	$7,6 \cdot 10^{-2}$

5 Dvojhvězdy

Úloha 5.1 Určete vzdálenost dvojhvězdy, známe-li její oběžnou dobu $T = 27$ roků, hmotnosti jednotlivých složek $3 M_{\odot}$, $5 M_{\odot}$ a velikost hlavní poloosy $a'' = 0,45''$.

Řešení: Podle III. Keplerova zákona platí $M_1 + M_2 = \left(\frac{a''}{\pi}\right)^3 T^{-2}$. Určíme π a stanovíme vzdálenost $r = \frac{1}{\pi} = 40$ pc.

Úloha 5.2 Sirius je vizuální dvojhvězda s oběžnou dobou 49,94 roků a roční paralaxou $\pi = 0,379''$. Zjednodušeně předpokládejme, že dráhová rovina je kolmá k zornému paprsku. Velikost velké poloosy je $a'' = 7,62''$. Poměr vzdáleností složek A a B od středu hmotnosti je $\frac{r_A}{r_B} = 0,466$. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek. Určete jejich zářivé výkony, jestliže Sirius A má $M_{\text{bol}} = 1,36$ mag a Sirius B $M_{\text{bol}} = 8,9$ mag.

Řešení: Dosazením do III. Keplerova zákona stanovíme součet hmotností obou složek $(M_A + M_B) = \frac{a^3}{T^2} \frac{4\pi^2}{G} = 3,3 M_{\odot}$, kde $a = \frac{a''}{\pi}$. Pomocí vztahu $\frac{r_A}{r_B} = \frac{M_B}{M_A}$ nalezneme $M_A = 2,2 M_{\odot}$ a $M_B = 1,1 M_{\odot}$. Zářivé výkony nalezneme ze vztahu $\log L = 0,4 (4,75 - M_{\text{bol}})$, $L_A = 22,7 L_{\odot}$, $L_B = 0,022 L_{\odot}$.

Úloha 5.3 Uvažovaná modelová fyzická dvojhvězda se skládá ze dvou složek–obru o přibližně stejné hmotnosti, obíhajících kolem společného hmotného středu s oběžnou dobou $T = 12$ dní. Velikost velké poloosy dvojhvězdy je $a = 2 \cdot 10^7$ km. Určete celkový počet vrypů difrakční mřížky N nezbytných pro pozorování ve viditelném oboru spektra vodíku tak, aby ve spektru II. řádu bylo možné pozorovat vzájemný oběh obou složek. Dále zjednodušeně předpokládáme, že teplota atmosfér obou hvězd je stejná a činí 6 000 K.

Řešení: Pro měřitelnost rozštěpení spektrálních čar $\Delta\lambda$ podmíněného dopplerovským posuvem je třeba, aby rychlost hvězd převyšovala střední kvadratickou rychlost pohybu atomů vodíku ve fotosférách hvězd. Dostaneme již známou podmínku $R = mN = \lambda/\Delta\lambda$, kde v případě pohybu dvojhvězd platí $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{c}{2v}$. Rychlost vypočteme ze vztahu $v = \frac{\pi a}{T}$. Po dosazení obdržíme podmínku $N > 1,25 \cdot 10^3$.

Úloha 5.4 Ze studia čárového spektra spektroskopické zákrytové dvojhvězdy byla zjištěna oběžná doba 8,6 roků. Maximální hodnota Dopplerova posuvu čáry H_{α} o vlnové délce $\lambda = 656,273$ nm pro první složku je $\Delta_1 = 0,026$ nm, pro druhou složku $\Delta_2 = 0,052$ nm. Ze sinusového charakteru křivky radiálních rychlostí vyplývá, že dráhy jsou blízké kruhovým. Předpokládáme sklon dráhy 90° . Určete hmotnosti jednotlivých složek dvojhvězdy.

Řešení: Pro poměr hmotností obou složek platí $\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1} = 2$. Z dopplerovského posuvu určíme radiální rychlosti $v_1 = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} c = 1,2 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 12 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 24 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Poloměry drah jsou $a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 3,5 \text{ AU}$, $a_2 = 6,9 \text{ AU}$. Velká poloosa $a = a_1 + a_2 = 10,4 \text{ AU}$. Pro celkovou hmotnost soustavy platí $M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2} = 15,3 M_{\odot}$. Jednotlivé hmotnosti složek jsou $M_1 = 10,2 M_{\odot}$ a $M_2 = 5,1 M_{\odot}$.

Úloha 5.5 Ve spektru zákrytové dvojhvězdy, jejíž jasnost se mění s periodou 3,953 dne, se spektrální čáry posouvají na opačné strany o hodnoty $(\Delta\lambda/\lambda)_1 = 1,9 \cdot 10^{-4}$ a $(\Delta\lambda/\lambda)_2 = 2,9 \cdot 10^{-4}$ od normální vlnové délky. Určete hmotnosti jednotlivých složek dvojhvězdy.

Řešení: Obdobně jako u předcházejících úloh určíme rychlosti obou složek $v_1 = c \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 57 \text{ km.s}^{-1}$, $v_2 = c \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 87 \text{ km.s}^{-1}$. Dále určíme velikosti jednotlivých poloos $a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 3,1 \cdot 10^9 \text{ m}$, $a_2 = 4,7 \cdot 10^9 \text{ m}$. Velká poloosa $a = a_1 + a_2 = 7,8 \cdot 10^9 \text{ m}$. Při výpočtu celkové hmotnosti soustavy dosadíme do III. Keplerova zákona $M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2} = 2,4 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, hmotnost jednotlivých složek určíme ze vztahu $\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow M_1 = 1,4 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,7 M_\odot$, $M_2 = 1,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,5 M_\odot$

Úloha 5.6 U zákrytové proměnné dvojhvězdy s oběžnou dobou $T = 50$ dní byl pozorován zákryt $t_4 - t_1$ trvající 8 hodin. Minimum $t_3 - t_2$ pozorované v dráhové rovině trvalo 1 hodinu 18 minut. Radiální rychlost první složky je $v_1 = 30 \text{ km.s}^{-1}$ a druhé složky $v_2 = 40 \text{ km.s}^{-1}$. Pro rovinu oběžné dráhy $i = 90^\circ$. Určete poloměry obou hvězd a hmotnosti složek.

Řešení: Velikosti velkých poloos jsou $a_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ m}$ a $a_2 = \frac{v_2 T}{2\pi} = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ m}$. Velká poloosa $a = a_1 + a_2 = 4,8 \cdot 10^{10} \text{ m}$. Celkovou hmotnost soustavy určíme z III. Keplerova zákona $M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2} = 3,5 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Dále dosadíme do vztahů pro zákrytové proměnné $\frac{t_4 - t_1}{T} = \frac{2(R_1 + R_2)}{2\pi a}$ a $\frac{t_3 - t_2}{T} = \frac{2(R_1 - R_2)}{2\pi a}$, kde R_1 a R_2 jsou poloměry složek. Poloměr první složky $R_1 = 5,9 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,85 R_\odot$ a druhé složky $R_2 = 4,2 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,6 R_\odot$. Hmotnosti jednotlivých složek určíme ze vztahu $\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow M_1 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1 M_\odot$, $M_2 = 1,5 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,75 M_\odot$.

Úloha 5.7 Spektroskopická dvojhvězda má oběžnou dobu $T = 1,67$ dne. U první složky byla zjištěna poloviční amplituda rychlosti $K_A = 131,0 \text{ km.s}^{-1}$ a u druhé složky $K_B = 201,8 \text{ km.s}^{-1}$. Excentricita dráhy je rovna nule, sklon dráhy nelze určit. Proto při výpočtu statisticky volíme $\sin^3 i = \frac{2}{3}$. Odhadněte hmotnosti jednotlivých složek.

Řešení: Součet hmotností obou složek vyjádřený v jednotkách hmotnosti Slunce určíme za vztahu $(M_A + M_B) \sin^3 i = 1,036 \cdot 10^{-7} (1 - e^2)^{3/2} (K_A + K_B)^3 T$, obdržíme $10,6 M_\odot$. Jednotlivé hmotnosti stanovíme pomocí vztahu $\frac{M_A}{M_B} = \frac{K_B}{K_A}$, $M_A = 6,4 M_\odot$ a $M_B = 4,2 M_\odot$.

Úloha 5.8 Přítomnost extrasolárních planet s hmotností řádově srovnatelnou s hmotností Jupitera zjišťujeme na základě změn radiálních rychlostí hvězd. Vypočtete periodu a amplitudy změn radiální rychlosti vyvolaných hypotetickou planetou o stejné hmotnosti jako Jupiter. Předpokládáme hvězdu o hmotnosti $1 M_\odot$. Posuďte měřitelnost těchto změn současnými astronomickými prostředky.

Řešení: Budeme zjednodušeně předpokládat, že kolem hvězdy obíhá pouze jedna planeta s hmotností Jupitera. Střední oběžná rychlost pohybu extrasolární planety v_J by tudíž byla 13 km.s^{-1} . Protože $\frac{M_h}{M_J} = \frac{v_J}{v_h} \Rightarrow$ že očekávaná rychlost pohybu hvězdy bude $v_h \cong 13 \text{ m.s}^{-1}$ v dráhové rovině exoplanety. Požadovaná přesnost optických metod určování radiálních rychlostí by měla být ještě $2 \times$ větší, v roce 1998 již byla dostatečná, dosahovala zhruba 7 m.s^{-1} .

Úloha 5.9 Těsná dvojhvězda se skládá ze dvou složek, bílého trpaslíka s hmotností $1 M_\odot$ a podobra o hmotnosti $0,5 M_\odot$, který vyplňuje svůj rocheovský prostor. Předpokládáme kruhové

dráhy obou složek, jejichž vzdálenost je $a = 10^9$ m. Naleznete oběžnou dobu, rychlosti obou složek a polohu l_1 prvního Lagrangeova bodu. Kvalitativně odhadněte změny velké poloosy a oběžné doby dvojhvězdy, jestliže předpokládáme přenos hmoty od podobra k bílému trpaslíku.

Řešení: Oběžnou dobu stanovíme z III. Keplerova zákona $T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)} \right)^{1/2} = 1,4 \cdot 10^4 \text{ s} = 3,9 \text{ hod.}$ Rychlost první složky je $v_1 = M_2 \left(\frac{G}{a(M_1 + M_2)} \right)^{1/2} = 149 \text{ km.s}^{-1}$, druhé $v_2 = M_1 \left(\frac{G}{a(M_1 + M_2)} \right)^{1/2} = 298 \text{ km.s}^{-1}$. Hodnota $l_1 = a \left(0,500 - 0,227 \log \frac{M_2}{M_1} \right) = 4,3 \cdot 10^8 \text{ m} = 8,87 \cdot 10^{-3} \text{ AU}$ Při přenosu hmoty od složky s menší hmotností ke složce s větší hmotností narůstá oběžná doba T a zvětšuje se velká poloosa a dvojhvězdy.

Úloha 5.10 Při přenosu hmoty mezi složkami dvojhvězdy předpokládáme platnost zákonů zachování hmotnosti a dráhového momentu hybnosti, tedy $M_1 + M_2 = M_c$, $\frac{dM_c}{dt} = 0$; $L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} [Ga(M_1 + M_2)]^{1/2}$, $\frac{dL}{dt} = 0$. Nechť M_1 je hmotnost složky přijímající hmotu, zavedeme $\mu = \frac{M_1}{M_c}$. Dokažte, že pro relativní změnu poloosy a lze odvodit $\frac{da}{a} = 2 \frac{2\mu - 1}{\mu(1 - \mu)} \frac{dM_1}{M_c}$.

Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro velikost momentu hybnosti $L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} [Ga(M_1 + M_2)]^{1/2}$, odkud vyjádříme $a = \frac{M_c L^2}{GM_c^2 (M_c - M_1)^2}$. Rovnici logaritmuje a derivujeme (logaritmičká derivace) a odvodíme $\frac{da}{a} = 2 \frac{2\mu - 1}{\mu(1 - \mu)} \frac{dM_1}{M_c}$.

Úloha 5.11 Dokažte, že pro relativní změnu oběžné doby dvojhvězdy s přenosem hmoty platí $\frac{dT}{T} = 3 \frac{2\mu - 1}{\mu(1 - \mu)} \frac{dM_1}{M_c}$. Předpokládáme platnost stejných zákonů zachování jako v předcházející úloze.

Řešení. Vyjdeme z III. Keplerova zákona, ze kterého logaritmičkou derivací dostaneme $3 \frac{da}{a} = 2 \frac{dT}{T}$. Dosazením $\frac{da}{a} = 2 \frac{2\mu - 1}{\mu(1 - \mu)} \frac{dM_1}{M_c}$ obdržíme $\frac{dT}{T} = 3 \frac{2\mu - 1}{\mu(1 - \mu)} \frac{dM_1}{M_c}$.

Úloha 5.12 Dokažte, že u těsných dvojhvězd je časová změna oběžné doby způsobená přenosem hmoty dána vztahem $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 3 \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}$.

Řešení: Předpokládáme platnost zákona zachování hmotnosti a dráhového momentu hybnosti při přenosu hmoty, tedy $M_1 + M_2 = M_c$, $\frac{dM_c}{dt} = 0$; $L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} [Ga(M_1 + M_2)]^{1/2}$, $\frac{dL}{dt} = 0$. Z posledně uvedeného dostaneme $\frac{d}{dt} \left(\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) \sqrt{a} + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{da}{dt} = 0$, odkud při platnosti vztahu $\frac{1}{2a} \frac{da}{dt} = \frac{1}{3T} \frac{dT}{dt}$ obdržíme $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 3 \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}$.

Úloha 5.13 U dvojhvězdné soustavy U Cephei s oběžnou dobou $T = 2,49$ dne byl zjištěn její nárůst $\frac{dT}{dt} = 2,3 \cdot 10^{-9}$. Za předpokladu, že tato změna je vyvolána přenosem hmoty, určete rychlost tohoto přenosu. Hmotnosti složek jsou $M_1 = 4,2 M_\odot$ a $M_2 = 2,8 M_\odot$. Která z hvězd přijímá hmotu?

Řešení: Při nárůstu oběžné doby je hmota přenášena od druhé složky M_2 k první M_1 . Ze vztahu $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 3 \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}$ určíme $\frac{dM_1}{dt} = 6 \cdot 10^{16} \text{ kg.s}^{-1} \cong 10^{-6} M_\odot \cdot \text{rok}^{-1}$.

Úloha 5.14 U dvojhvězdné soustavy s hmotnostmi jednotlivých složek $M_1 = 4,9 M_\odot$ a $M_2 = 4,1 M_\odot$ byla zjištěna rychlost přenosu hmoty $\frac{dM_1}{dt} = 10^{-5} M_\odot \cdot \text{rok}^{-1}$. Je-li oběžná doba $T = 1,94$ dne, určete její nárůst.

Řešení: Dosadíme do vztahu $\frac{dT}{dt} = 3T \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} = 6,3 \cdot 10^{-9}$.

Úloha 5.15 Jakou část hmoty může ztratit jedna složka dvojhvězdného systému, aby fyzikální dvojhvězdný systém vázaný gravitací ještě zůstal zachován? Vyjděte ze zjednodušujícího předpokladu, že dráhy složek jsou kruhové, ztráta hmoty probíhá sféricko-symetricky a prakticky okamžitě, t.j. za čas mnohem menší, než je velikost oběžné doby dvojhvězdy. V případě, že se soustava nerozpadne po ztrátě hmoty, zůstane dráha kruhovou? Získá střed hmotnosti dvojhvězdy doplňkovou rychlost?

Řešení: Celková mechanická energie fyzikálního dvojhvězdného systému o hmotnostech jednotlivých složek M_1, M_2 je E_c , vzdálenost složek je a . Jde o gravitačně vázanou soustavu, platí $E_c = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - G \frac{M_1 M_2}{a} = -G \frac{M_1 M_2}{2a} < 0$. Pro rychlosti platí: $M_1 v_1 = M_2 v_2$. Předpokládejme, že u první hvězdy proběhla sférickosymetrická exploze, při níž nedošlo ke změně rychlosti v_1 a necht' pozůstatek první složky po výbuchu má hmotnost M_z . Platí $M_1 - \Delta M = M_z$. Celková mechanická energie systému po explozi je $E_{ce} = \frac{1}{2} M_z v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - G \frac{M_z M_2}{a}$. Pro gravitačně vázanou soustavu platí $E_{ce} < 0$. Dále platí $v_1 = \frac{M_2}{M_z + M_2} \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{a} \right)^{1/2}$ a $v_2 = -\frac{M_z}{M_z + M_2} \left(\frac{G(M_1 + M_2)}{a} \right)^{1/2}$. Dosazením obdržíme pro $E_{ce} = \frac{GM_z M_2}{2a(M_z + M_2)} [M_1 + M_2 - 2(M_z + M_2)]$. Podmínka pro zachování dvojhvězdného systému je $M_1 - M_2 < 2M_z$.

Úloha 5.16 Zkoumejme fyzický dvojhvězdný systém HZ Her + Her X 1 s celkovou hmotností soustavy přibližně $4 M_\odot$. Hmotnost první složky HZ Her je odhadována na $2,5 M_\odot$. Předpokládáme, že při dalším vývoji se z této hvězdy po explozi obálky o hmotnosti asi $1 M_\odot$ stane neutronová hvězda s hmotností $1,5 M_\odot$. Druhou složkou soustavy je neutronová hvězda Her X 1 o hmotnosti $1,5 M_\odot$. Zůstane dvojhvězdný systém zachován?

Řešení: Dosadíme do závěrečné nerovnice předchozí úlohy, $M_1 = 2,5 M_\odot$, $M_2 = 1,5 M_\odot$, $M_z = 1,5 M_\odot$. Tudíž je splněna podmínka $M_1 - M_2 < 2M_z$.

Úloha 5.17 Hvězda o hmotnosti $20 M_\odot$ exploduje jako supernova I typu, jejím pozůstatkem je neutronová hvězda o hmotnosti $1,4 M_\odot$. Zůstane dvojhvězdný systém zachován, jestliže hmotnost druhé hvězdy je $6 M_\odot$?

Řešení: Dosadíme $M_1 = 20 M_\odot$, $M_2 = 6 M_\odot$, $M_z = 1,4 M_\odot$, podmínka $M_1 - M_2 < 2M_z$ není splněna, dvojhvězdný systém se rozpadne.

Úloha 5.18 Necht' hmotnosti složek dvojhvězdy jsou M_1 a M_2 . Vyjádřete zákon zachování energie pro zkušební částici pohybující se v gravitačním poli dvojhvězdy v dráhové rovině hvězd. Souřadnou soustavu zvolíme s počátkem v hmotném středu dvojhvězdy kolem kterého rotuje úhlovou rychlostí ω , jde o tzv. korotující soustavu.

Řešení: Pro pohyb v dráhové rovině má integrál energie tvar

$$-\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} - \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} + \frac{v^2}{2} = \text{konst.}$$

Úloha 5.19 Dotyková dvojhvězda se skládá z červeného obra a neutronové hvězdy s hmotností $1 M_{\odot}$ a poloměrem 10 km. Určete množství hmoty za rok přetékající od červeného obra na neutronovou hvězdu, které při tomto přenosu způsobuje vyzařování v rtg. oboru 10^{31} W. Předpokládejte, že změna gravitační potenciální energie částic plynu je přibližně rovna zářivému výkonu, především v rtg. oboru záření. Dále předpokládáme, že vzdálenost obou hvězd je mnohem větší než poloměr neutronové hvězdy.

$$\text{Řešení: } \frac{dE_p}{dt} \cong G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt}, L \cong G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt} \Rightarrow \frac{dM}{dt} \cong \frac{LR}{GM} \cong 1,5 \cdot 10^{15} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cong 2 \cdot 10^{-8} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}.$$

Úloha 5.20 Neutronovou hvězdu – pulsar s hmotností $2 M_{\odot}$ a poloměrem 20 km a periodě 0,15 s obklopuje akreční disk vznikající přetokem hmoty z druhé hvězdy s tempem akrece přibližně $10^{-8} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$. Odhadněte dP/dt pro tento pulsar.

Řešení: Zářivý výkon, především v rtg. oblasti záření, je přibližně roven rychlosti ztráty gravitační potenciální energie plynu při akreci, $L \cong G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt}$ a $\frac{dE_p}{dt} \cong G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt}$. Dosazením získáme zářivý výkon $L \cong 8 \cdot 10^{30}$ W. Pro zářivý výkon pulsaru platí $L = \frac{8}{5} \pi^2 M R^2 P^{-3} \frac{dP}{dt}$, odtud určíme $\frac{dP}{dt} \cong 10^{-12}$.

Úloha 5.21 Rtg. pulsar s periodou $P = 100$ s je jednou ze složek fyzické dvojhvězdy. Dopplerův posuv vyvolaný vyvolaný dráhovým pohybem pulsaru vede k periodické změně času příchodu pulsů, což dovoluje proměřit křivku radiálních rychlostí pulsaru. Jak se změní pozorovaná perioda pulsaru, jestliže druhou složkou je hvězda o hmotnosti $20 M_{\odot}$, oběžná doba soustavy je 20 dnů. Hmotnost pulsaru přijmete $1,5 M_{\odot}$, excentricita dráhy je nulová, sklon dráhy dosahuje 90° .

Řešení: Z III. Keplerova zákona $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2)$ určíme velikost velké poloosy $a = 5,9 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0,4 \text{ AU}$. Oběžná dráha pulsaru je kruhová, $v = \frac{2\pi a}{T} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 21 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dopplerovský posuv způsobený radiálním pohybem je $v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, $\Delta\lambda = c\Delta T$. Úplná amplituda změny periody je $2\Delta T = 0,15$ s.

Úloha 5.22 Dvojhvězda s oběžnou dobou 10 dnů má složky o hmotnostech $10 M_{\odot}$ a $2 M_{\odot}$. Složka s menší hmotností je rtg. pulsarem s periodou 0,1 s. Naleznete, v jakém intervalu se mění pozorovaná perioda pulsací. Předpokládáme kruhovou dráhu se sklonem 90° , pozorovací paprsek leží v dráhové rovině.

Řešení: Z III. Keplerova zákona stanovíme velikost velké poloosy $a = (M_1 + M_2)^{1/3} T^{2/3} \cong 0,2 \text{ AU}$. Vzdálenost pulsaru od hmotného středu je $r = \frac{M_1}{M_1 + M_2} a \cong 0,17 \text{ AU}$. Rychlost oběžného pohybu pulsaru je $v = \frac{2\pi r}{T} \cong 190 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. V důsledku Dopplerova jevu se mění perioda pulsací, její relativní změna je $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta v}{v} = \frac{v}{c} \cong 6 \cdot 10^{-4}$. Jev pozorujeme jako zpoždování příchodu pulsů. Na dráze $2r = 0,34 \text{ AU}$ je maximální hodnota zpoždování $0,34 \times 500 = 170$ s.

Úloha 5.23 Binární pulsar PSR 1913 + 16 v souhvězdí Orla, objevený na rádiovém teleskopu u v Arecibu roku 1974 R. Hulsem a J. Taylorem, představuje systém dvou neutronových hvězd o hmotnostech $1,44 M_{\odot}$ a $1,39 M_{\odot}$. Velká poloosa soustavy $a = 8,6 \cdot 10^8 \text{ m}$, excentricita dráhy je $\epsilon = 0,617$ a oběžná doba je $T = 27\,907 \text{ s}$. Podle výkladu objevitelů – nositelů Nobelovy ceny za fyziku z roku 1993, v souladu s OTR tento systém ztrácí svoji energii vyzařováním gravitačních vln, úbytek gravitační energie je vyjádřen vzorcem

$\frac{dE}{dt} = -\frac{35G}{5c^2} \frac{M_1^2 M_2^2}{(M_1 + M_2)^2} a^4 \omega^6 f(\epsilon)$, kde $f(\epsilon) = \left(1 + \frac{72}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4\right) (1 - \epsilon^2)^{-7/2}$. Stanovte gravitační zářivý výkon tohoto podvojného pulsaru a určete rovněž změnu oběžné doby pulsaru podle vzorce $\frac{dT}{dt} = -\frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} M_1 M_2 (M_1 + M_2) \left[\frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}\right]^{4/3} \frac{f(\epsilon)}{T^{5/3}}$.

Řešení: Dosazením do uvedených vztahů dostaneme pro gravitační zářivý výkon soustavy $\frac{dE}{dt} \cong 3 \cdot 10^{23}$ W, což je numericky hodnota nesrovnatelně menší než gravitační vazebná energie soustavy $E_c = -\frac{GM_1 M_2}{2a} = -3 \cdot 10^{41}$ J. Pro změnu oběžné doby obdržíme $\frac{dT}{dt} = -2,4 \cdot 10^{-12}$, tedy hodnotu odpovídající téměř přesně naměřené.

6 Pozdní stadia vývoje hvězd, novy, supernovy

Úloha 6.1 Červený obr o poloměru $10^2 R_\odot$ se nachází ve vývojovém stadiu, kdy vodík v centrální části již vyhořel na helium, ale hoření samotného helia ještě nezačalo. Hlavním zdrojem energie je hoření vodíku v slupce obklopující heliové jádro. Vodíková slupka ve vzdálenosti $(1,8 - 2,0) \cdot 10^7 \text{m}$ se vyznačuje hustotou $5 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a teplotou $5 \cdot 10^7 \text{K}$. Určete zářivý výkon a efektivní povrchovou teplotu červeného obra. Při výpočtu uvolňované energie volte $X \cong 0,5$, $X_{\text{CN}} \cong 0,005$.

Řešení: Energie, uvolňovaná za časovou jednotku v jednotkové hmotnosti hvězdné látky $[\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}]$ při CNO cyklu, který je dominantní při zadané teplotě je dána vztahem

$$\epsilon_{\text{CNO}} = 3,4 \cdot 10^{29} \rho X X_{\text{CNO}} \left(\frac{10^6}{T} \right)^{2/3} \exp \left[-152,3 \left(\frac{10^6}{T} \right)^{1/3} \right].$$

Ve slupkovém zdroji o objemu 10^{22}m^3 je uvolňovaná energie za sekundu v jednotkovém objemu $4 \cdot 10^7 \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$, zářivý výkon červeného obra je $4 \cdot 10^{29} \text{W} \cong 10^3 L_\odot$. Při zadaném poloměru $7 \cdot 10^{10} \text{m}$ je efektivní povrchová teplota obra 3300K .

Úloha 6.2 Dokažte, že pro úbytek hmotnosti hvězd v pozdních stadiích vývoje platí $\frac{dM}{dt} \sim \frac{L}{gR}$, respektive $\frac{dM}{dt} \sim \frac{LR}{M}$. Při přesnějších kvantitativních výpočtech používáme Reimersův vztah $\frac{dM}{dt} \cong -4 \cdot 10^{-13} \frac{L}{gR}$, kde L, g, R dosazujeme v patřičných jednotkách Slunce, úbytek hmotnosti je v $M_\odot \cdot \text{rok}^{-1}$. Odhadněte úbytek hmotnosti hvězdy asymptotické větve obrů o hmotnosti $1 M_\odot$, zářivém výkonu $7 \cdot 10^3 L_\odot$ a teplotě 3000K .

Řešení: Platí $E_p \sim \frac{M^2}{R}$, $L \sim \frac{d}{dt} \left(\frac{M^2}{R} \right) \Rightarrow \frac{dM}{dt} \sim \frac{LR}{M}$. Ze Stefanova-Boltzmannova zákona určíme poloměr $310 R_\odot$, dále stanovíme $g = 10^{-5} g_\odot$ a dosazením obdržíme $\frac{dM}{dt} \cong 10^{-6} M_\odot \cdot \text{rok}^{-1}$.

Úloha 6.3 Zářivý výkon hvězdného větru je dán jeho kinetickou energií $L_\nu = \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2$ za sekundu. Odhadněte zářivé výkony hvězdného větru o rychlosti $v \cong 25 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ u veleobra Betelgeuze $15 M_\odot$, $1160 R_\odot$, $2 \cdot 10^5 L_\odot$.

Řešení: Pro hvězdný vítr platí $\frac{dM}{dt} = -4 \cdot 10^{-13} \frac{LR}{M} \cong 6 \cdot 10^{-6} M_\odot \cdot \text{rok}^{-1}$. Zářivý výkon větru při zadané rychlosti je roven $L_\nu \cong 10^{26} \text{W}$, zatímco samotné hvězdy $L_B \cong 10^{32} \text{W}$.

Úloha 6.4 Podle Kraftova výkladu z r. 1963 je jev novy výsledkem termonukleární exploze obálky na povrchu bílého trpaslíka, která na něj byla přenesena ze sousední hvězdy bohaté na vodík. Určete hmotnost látky vstupující do reakce, jestliže budeme předpokládat, že při explozi se uvolňuje energie 10^{39}J .

Řešení: Při explozivním spalování vodíku je koeficient účinnosti uvolňování energie přibližně 1%, množství určíme ze vztahu $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \cong \frac{10^{41}}{10^{17}} \cong 10^{24} \text{kg}$.

Úloha 6.5 Uvažujme vrstvu vodíku o hmotnosti $10^{-6} M_\odot$ na povrchu bílého trpaslíka. Vodík se při termonukleárních reakcích přemění na helium. Jak dlouhou dobu bude nova zářit,

jestliže předpokládáme, že její zářivý výkon je roven eddingtonovskému? V chemickém složení uvažujeme pouze vodík, pro opacitu platí $\kappa \cong (1 + X) 0,02 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, při $X = 1$ dostaneme $\kappa \cong 0,04 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Řešení: Při reakcích přeměny vodíku na helium, Kdy ze čtyř protonů vzniká jádro helia, je množství energie uvolňované při vzniku jednoho jádra helia $4,3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Ve vrstvě vodíku o hmotnosti $2 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je zhruba $\frac{2 \cdot 10^{24}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \cong 10^{51}$ protonů. Celková uvolněná energie je $\frac{1}{4} 4,3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{51} \text{ J} \cong 10^{39} \text{ J}$. Pro Eddingtonovu limitu zářivého výkonu platí $L_{\text{Ed}} \cong \frac{4\pi GcM}{\kappa} \cong 10^{31} \text{ W}$. Nova stejným výkonem může zářit $\frac{10^{39}}{10^{31}} \cong 10^8 \text{ s} \cong 3 \text{ roky}$.

Úloha 6.6 Explosivní hoření na dně tenké vodíkem bohaté vrstvy na povrchu bílého trpaslíka může eventuálně vrcholit expanzí této vrstvy. Pro bílého trpaslíka o hmotnosti $M = M_{\odot}$ a s poloměrem $R \approx 0,01 R_{\odot}$ vypočítejte zlomek f hmotnosti vrstvy, která bude přeměněna na helium a dodá energii nezbytnou na expanzi, předpokládejme, že vrstva má sluneční chemické složení. Odvoďte závislost f na M pro $M < M_{\text{Ch}}$.

Řešení: Nechť $\Delta M \ll M$. Energie uvolňovaná z této vrstvy je rovna gravitační vazebné energii $G \frac{M \Delta M}{R(M)}$. Jestliže Q je energie uvolňovaná v jednotkové hmotnosti při vodíkovém hoření, $Q \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, $X_{\odot} \approx 0,7$. Velikost hořící vodíkové látky je $f \Delta M X_{\odot}$, platí $G \frac{M \Delta M}{R(M)} = f \Delta M X_{\odot} Q$. Vztah $R(M)$ pro bílé trpaslíky, použitý pro nerelativistickou stavovou rovnici, při $M < M_{\text{Ch}}$, může být kalibrován $\frac{R}{0,01 R_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1/3}$. Kombinací uvedených vztahů dostaneme $f = \frac{GM_{\odot}}{0,01 R_{\odot} X_{\odot} Q} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{4/3} \approx 0,045 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{4/3}$. Pro typické bílé trpaslíky je zlomek velmi malý, proti působí výrazné gravitační síly.

Úloha 6.7 Na povrchu bílého trpaslíka o hmotnosti $1 M_{\odot}$ a poloměru $2 \cdot 10^{-2} R_{\odot}$ se nachází vrstva vodíku o hmotnosti $10^{-4} M_{\odot}$. Porovnejte gravitační potenciální energii trpaslíka před výbuchem novy s kinetickou energií expandujících vrstev po výbuchu, jestliže předpokládáme, že se tyto vrstvy vzdalují rychlostí $1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ od povrchu bílého trpaslíka, přičemž expanduje pouze 10% hmoty vodíkové vrstvy.

Řešení: Gravitační potenciální energie $E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -1,1 \cdot 10^{43} \text{ J}$ v absolutní hodnotě výrazně převyšuje kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2} M_{\text{ex}} v^2 = 10^{37} \text{ J}$ expandujících vnějších vrstev. Bílý trpaslík zůstává zachován, exploze se může vícekrát opakovat jako u rekurentních nov.

Úloha 6.8 Při výbuchu novy platí zákon zachování hybnosti pro expandující obálku ve tvaru $\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho + M_0\right) v = M_0 v_0$, kde r je vzdálenost obálky od hvězdy, ρ je hustota mezihvězdného prostředí, M_0 je hmotnost obálky, v je rychlost obálky ve vzdálenosti r a v_0 počáteční rychlost expanze obálky. Dosazením $v = \frac{dr}{dt}$ a následnou integrací obdržíme $\frac{1}{3}\pi r^4 \rho + M_0 r = M_0 v_0 t$, což je vztah určující poloměr obálky v závislosti na čase. Určete, za jaký čas se rychlost expandující obálky zmenší na polovinu. Jsou zadány $\rho = 3 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $v_0 = 1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $M_0 = 10^{-4} M_{\odot}$.

Řešení: Ze zákona zachování hybnosti plyne $v = \frac{1}{2} v_0$ jestliže $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = M_0$. Dosadíme dále a obdržíme $t = \frac{5}{4v_0} \left(\frac{3M_0}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \cong 100 \text{ roků}$, což nastane ve vzdálenosti $r \cong 0,08 \text{ pc}$.

Úloha 6.9 Určete velikost gravitační potenciální energie, která se uvolní při výbuchu supernovy.

Řešení: $E_{\text{sup}} = E_{\text{nh}} - E_{\text{poc}} = \frac{3GM^2}{5R_{\text{nh}}} - \frac{3GM^2}{5R_{\text{poc}}} \cong \frac{3GM^2}{5R_{\text{nh}}}$. Po dosazení $M = 2,8 \cdot 10^{30} \text{kg}$, $R = 10^4 \text{m}$ obdržíme $E_{\text{sup}} = 3 \cdot 10^{46} \text{J}$. Uvolněná energie se přeměňuje na záření, na formování neutronové hvězdy, na kinetickou energii neutrin a expandující obálky. Převážnou část energie odnáší neutrina.

Úloha 6.10 U supernov I typu je pravděpodobným zdrojem energie v maximu jasnosti rozpad ${}^{56}_{28}\text{Ni} \rightarrow {}^{56}_{27}\text{Co} + e^+ + \nu_e + \gamma$ probíhající při explozi radioaktivního izotopu ${}^{56}_{28}\text{Ni}$. Jak velká hmotnost látky obsahující izotop ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ je nezbytná pro objasnění zářivých výkonů $\cong 3 \cdot 10^{36} \text{W}$ supernov v maximu? Poločas rozpadu ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ je $\tau_{1/2} = 6,1$ dne a energie uvolňovaná při rozpadu je $1,78 \text{MeV}$.

Řešení: V 1 kg niklu v čase $t = 0$ je $N_0 = \frac{1}{58,71} 6,03 \cdot 10^{26}$ atomů. Za 1 sekundu se rozpadne atomů $N_1 = N_0 \lambda = N_0 \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = 1,4 \cdot 10^{19}$. Při rozpadu 1 atomu se uvolní energie $2,9 \cdot 10^{-13} \text{J}$. Celkový počet nezbytných rozpadů atomů za 1 sekundu je $\frac{3 \cdot 10^{36}}{2,9 \cdot 10^{-13}} \cong 10^{49}$, tudíž odpovídající hmotnost je $\frac{10^{49}}{1,4 \cdot 10^{19}} \cong 7,5 \cdot 10^{29} \text{kg} \cong 0,4 M_{\odot}$.

Úloha 6.11 V další fázi vývoje supernov po dosažení maxima jasnosti je možným zdrojem energie rozpad ${}^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} + e^+ + \nu_e + \gamma$ s uvolňovanou energií $3,72 \text{MeV}$. Poločas rozpadu ${}^{56}_{27}\text{Co}$ je $\tau_{1/2} = 77,7$ dne. Určete předpokládané množství látky obsahující tento izotop, které je nezbytné k tomu, aby objasňovalo zářivé výkony supernov po několika stovkách dnů po dosažení maxima jasnosti $\cong 10^{35} \text{W}$. Údaje odpovídají supernově 1987 A.

Řešení: Nechť v čase $t = 0$ je v 1 kg kobaltu $N_0 = 1 \cdot 10^{25}$ atomů, za 1 sekundu se rozpadne $N_1 = N_0 \lambda = 10^{18}$ atomů. Uvolněná energie při rozpadu 1 atomu je $6 \cdot 10^{-13} \text{J}$. Odhadovaný počet rozpadů za 1 sekundu je $\frac{10^{35}}{6 \cdot 10^{-13}} \cong 1,7 \cdot 10^{47}$, čemuž odpovídá hmotnost $\frac{1,7 \cdot 10^{47}}{10^{18}} \cong 1,7 \cdot 10^{29} \text{kg} \cong 0,085 M_{\odot}$.

Úloha 6.12 Celková energie uvolňovaná při výbuchu supernov I typu je odhadována $\cong 10^{44} \text{J}$. Určete rychlost expanze, jestliže budeme modelově předpokládat, že veškerá uvolněná energie se přemění na kinetickou energii obálky o hmotnosti $0,5 M_{\odot}$.

Řešení: $v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} \cong 1,4 \cdot 10^4 \text{km}$.

Úloha 6.13 Mlhovina zbylá po výbuchu supernovy se pohybuje rychlostí přibližně $v = 800 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, její úhlový průměr je zhruba 3° a její vzdálenost je 800pc . Stanovte stáří mlhoviny, uvažujeme-li hypotézu, že výbuch byl adiabatický. Za tohoto předpokladu platí vztah $R = \frac{5}{2} vt$, kde R je vzdálenost od místa exploze supernovy.

Řešení: Lineární průměr mlhoviny $2R \cong 40 \text{pc}$, stáří je odhadováno na $10\,000$ roků.

Úloha 6.14 Z Cha je typem kataklyzmické proměnné zvané trpasličí nova. Skládá se z bílého trpaslíka o hmotnosti $0,85 M_{\odot}$ a poloměru $0,01 R_{\odot}$, druhou složkou je hvězda hlavní posloupnosti pozdní spektrální třídy M o hmotnosti $0,17 M_{\odot}$. Oběžná doba soustavy je $T = 0,0745 \text{d}$. Objasněte astrofyzikální podstatu soustavy, určete maximální teplotu T_{max} a hodnotu zářivého výkonu disku při jeho akreci, jestliže $dM/dt = 1,3 \cdot 10^{-9} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$, přibližně $10^{13} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení : Z III. Keplerova zákona obdržíme pro velikost velké poloosy dvojhvězdy, tedy pro vzdálenost obou složek $a = \left[\frac{1}{4\pi^2} GT^2 (M_1 + M_2) \right]^{1/3} = 5,2 \cdot 10^8 \text{m}$. Vzdálenost mezi primární složkou a vnitřním Lagrangeovým bodem L_1 je dána $l_1 = a \left(0,500 - 0,227 \log \frac{M_2}{M_1} \right) = 3,4 \cdot 10^8 \text{m}$. Z Cha je polodotykový systém, sekundární složka zaplňuje Rocheův prostor, vzdálenost mezi sekundární složkou a vnitřním Lagrangeovým bodem je zároveň velikostí druhé složky. Platí $R_2 = l_2 = a - l_1 = 1,8 \cdot 10^8 \text{m}$. To zhruba souhlasí s poloměry hvězd HP spektrální třídy M6. Poloměr oběžné kruhové dráhy je $r_{\text{kr}} = a \left(\frac{l_1}{a} \right)^4 \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) = 1,2 \cdot 10^8 \text{m}$. Odhad vnějšího poloměru disku je $R_{\text{disk}} \cong 2r_{\text{kr}} = 2,4 \cdot 10^8 \text{m}$. Přenos hmoty je přibližně $\frac{dM}{dt} = 1,3 \cdot 10^{-9} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1} = 7,9 \cdot 10^{13} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Maximální hodnota teploty disku je $T_{\text{max}} = 0,488 \left(\frac{3GM \frac{dM}{dt}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} = 4,4 \cdot 10^4 \text{K}$. Při pohybu směrem k vnějším oblastem disku teplota klesá z 44 000 K na 8 000 K. Podle Wienova posunovacího zákona to odpovídá změně λ_{max} z 66 nm na 363 nm. Celkový zářivý výkon disku, integrovaný přes všechny vlnové délky je $L_{\text{disk}} = G \frac{M \frac{dM}{dt}}{2R} = 6,8 \cdot 10^{26} \text{W}$.

Úloha 6.15 Akrece je nárůst hmoty hvězdy vyvolaný např. přitažlivostí. Jestliže padající hmota při srážce s povrchem hvězdy vyzáří svoji energii získanou v gravitačním poli, můžeme její zářivý výkon zapsat vztahem $L = G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt}$, kde $\frac{dM}{dt}$ je rychlost akrece, množství dopadající hmoty za 1 s na povrch hvězdy, M , R jsou hmotnost a poloměr hvězdy. Určete koeficient uvolňování energie, který je roven poměru uvolňované energie a klidové energie hmoty, která se účastní procesu uvolňování energie. Propočítejte tento koeficient pro

a) neutronovou hvězdu $M = 1,5 M_{\odot}$, $R = 10 \text{ km}$,

b) bílého trpaslíka $M = 1,4 M_{\odot}$, $R = 5000 \text{ km}$.

Porovnejte s efektivitou uvolňování energie v pp řetězci.

Řešení: Efektivita uvolňování energie při akreci je $\eta = \frac{1}{2} \frac{R_g}{R} 100\%$. Konkrétně pro neutronovou hvězdu $\eta \cong 20\%$ a pro bílého trpaslíka $\eta \cong 0,04\%$. V případě pp řetězce je $\eta \cong 0,7\%$, obvykle zaokrouhlujeme $\eta \cong 1\%$.

Úloha 6.16 Porovnejte maximální teploty disku T_{max} a zářivé výkony disku při akreci u bílého trpaslíka a neutronové hvězdy. Je zadáno:

a) bílý trpaslík – $0,85 M_{\odot}$, $0,0095 R_{\odot}$, $dM/dt = 10^{13} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-10} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$,

b) neutronová hvězda – $1,4 M_{\odot}$, $R = 10 \text{ km}$, $dM/dt = 10^{14} \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-9} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$.

Řešení: Pro maximální teplotu disku platí $T_{\text{max}} = 0,488 \left(\frac{3GM \frac{dM}{dt}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4}$. V prvním případě obdržíme $T_{\text{max}} = 2,6 \cdot 10^4 \text{K}$, což odpovídá $\lambda_{\text{max}} = 110 \text{ nm}$. Zářivý výkon disku určíme ze vztahu $L_{\text{disk}} = G \frac{M \frac{dM}{dt}}{2R}$, dostaneme $8,6 \cdot 10^{25} \text{W}$, tedy $0,22 L_{\odot}$. Obdobně pro disk u neutronové hvězdy stanovíme $T_{\text{max}} = 6,9 \cdot 10^6 \text{K}$, což odpovídá $\lambda_{\text{max}} = 0,4 \text{ nm}$, tudíž rtg. části spektra. Zářivý výkon disku je $9,3 \cdot 10^{29} \text{W}$, tedy $2,4 \cdot 10^3 L_{\odot}$.

Úloha 6.17 Planetární mlhovina s úhlovým průměrem $7'$ se nachází ve vzdálenosti $r = 150 \text{ pc}$. Rychlost expanze planetární mlhoviny zjištěná spektroskopicky je $25 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete skutečný průměr planetární mlhoviny a její stáří za předpokladu, že expanze probíhala stále stejnou rychlostí.

Řešení: Skutečný průměr mlhoviny při $\alpha = 0,00204$ rad je $D = r\alpha = 0,3$ pc. Stáří určíme ze vztahu $T = \frac{D}{v} = \frac{0,3 \cdot 3,08 \cdot 10^{16}}{2,5 \cdot 10^4} \cong 4 \cdot 10^{11} \text{s} \cong 10^4$ roků.

Úloha 6.18 U supernovy 1987 A byl zjištěn rozdíl energií mezi první a poslední skupinou neutrin $\Delta E = 10$ MeV, časový rozdíl činil 0,3 s. Při znalosti vzdálenosti r Velkého Magellanova mračna 50 kpc stanovte horní hranici hmotnosti neutrina. Předpokládáme střední rychlost pohybu neutrin v .

Řešení: Rozdíl rychlostí mezi částicemi za předpokladu $v \cong c$ je $\Delta v = \frac{r}{t_1} - \frac{r}{t_2} \cong \frac{c^2 \Delta t}{r}$. Dále platí $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong \sqrt{\frac{2\Delta v}{c}} \cong \sqrt{\frac{2c\Delta t}{r}} \cong 3,5 \cdot 10^{-7}$, tudíž $m_\nu c^2 \cong \Delta E \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong 3,5 \text{eV}$. Horní hranice hmotnosti je $m_\nu \cong 6 \cdot 10^{-36} \text{kg}$.

7 Závěrečná stadia vývoje hvězd

Úloha 7.1 Odvoďte vztah pro gravitační rudý posuv u bílého trpaslíka o hmotnosti M a poloměru R .

Řešení: V přiblížení klasické fyziky platí vztahy: $E = mc^2$, $E = h\nu \Rightarrow m = \frac{h\nu}{c^2}$. Gravitační potenciální energie na povrchu hvězdy je $E_p = -G\frac{Mh\nu}{Rc^2}$. Celková energie je $E_c = h\nu(1 - \frac{GM}{c^2R})$. Energie detekovaného fotonu na Zemi je $h\nu' = h\nu(1 - \frac{GM}{c^2R})$, $\Delta\nu = \nu - \nu'$. Úpravou pro hmotnost hvězdy obdržíme $M = \frac{\Delta\nu}{\nu} \frac{c^2R}{G}$, nebo při využití vlnových délek $M = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{c^2R}{G}$, kde jsme volili $|\frac{\Delta\nu}{\nu}| = |\frac{\Delta\lambda}{\lambda}|$. V rámci OTR lze změnu vlnové délky záření vyjádřit přibližně $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = (1 - \frac{2GM}{c^2R})^{-1/2} - 1 \cong \frac{GM}{c^2R}$.

Úloha 7.2 K ověření gravitačního rudého posuvu, relativistické dilatace času uvažujme následující zadání: Mějme dvoje hodiny, první ukazují čas T_1 ve vzdálenosti R_1 od středu níže uvedených kosmických těles o hmotnosti M . Druhé hodiny ukazují čas T_2 ve vzdálenosti R_2 .

Pro poměr časů platí $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2R_2}}{1 - \frac{2GM}{c^2R_1}} \right)^{1/2}$. Jaký poměr obou časů ukazují hodiny v případech, jestliže:

- Jedny hodiny jsou umístěny na povrchu bílého trpaslíka, druhé ve velké vzdálenosti.
- Jedny hodiny jsou umístěny na povrchu neutronové hvězdy, druhé ve velké vzdálenosti.
- Jedny hodiny jsou umístěny ve vzdálenosti Schwarzschildova poloměru u tělesa o hmotnosti $3M_\odot$, druhé ve velké vzdálenosti.

Řešení: Dosadíme do uvedeného vztahu: a) $T_2/T_1 = 1,000212$, b) $T_2/T_1 = 1,191828$, c) $T_2/T_1 \rightarrow \infty$.

Úloha 7.3 Diskutujte platnost viriálové věty u bílých trpaslíků.

Řešení: Kinetickou energii interpretujeme jako vnitřní energii, která je rozdělena mezi částice elektrony E_e a ionty E_i . Platí obecný tvar viriálové věty ve tvaru $3(\gamma - 1)\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$. V případě, že elektrony jsou nerelativisticky degenerovány a ionty ve formě ideálního plynu, platí $\gamma = \frac{5}{3}$, tedy klasická viriálová věta $2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$. Při relativistické degeneraci $\gamma = \frac{4}{3}$ a tudíž dostáváme $\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$.

Úloha 7.4 Odhadněte tepelnou a gravitační energii bílého trpaslíka s teplotou nitra 10^7 K, hmotností $1M_\odot$, poloměru $0,01R_\odot$, zářivém výkonu $0,01L_\odot$ a celkovým počtem částic 10^{57} ve hvězdě. Proveďte diskusi výsledku s ohledem na viriálovou větu. Určete předpokládanou dobu existence bílého trpaslíka.

Řešení: Vyjádříme gravitační potenciální energii $E_p = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = -2,3 \cdot 10^{42}$ J, kinetickou energii $E_k = \frac{3}{2}NkT = 2,1 \cdot 10^{41}$ J. Tedy $\langle E_k \rangle < \langle E_p \rangle$. Hydrostatická rovnováha u bílých trpaslíků je udržována tlakem degenerovaného elektronového plynu, nikoliv tlakem plynu vyvolaným tepelným pohybem, viriálovou větu nelze použít. Předpokládanou dobu existence stanovíme $T = \frac{E_k}{L} = 5,4 \cdot 10^{16}$ s $\cong 10^9$ roků.

Úloha 7.5 Odvoďte závislost poloměru bílého trpaslíka na hmotnosti za předpokladu nereativistické degenerace $p \sim \rho^{\frac{5}{3}}$.

Řešení: Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy: $\frac{dP}{dr} = -\frac{M}{r^2}\rho$, $\frac{d}{dr} \rightarrow \frac{1}{R}$. Platí $\frac{P}{R} \sim \frac{M}{R^2}\rho$, $\rho^{\frac{5}{3}} \sim \frac{M}{R} \Rightarrow R \sim M^{-\frac{1}{3}}$. S rostoucí hmotností bílého trpaslíka se zmenšuje poloměr a hustota především v centrální, části do 1/4 poloměru se zvětšuje.

Úloha 7.6 Radiální rychlosti hvězd, jak známo, určujeme pomocí Dopplerova jevu. Skupinové určování radiálních rychlostí bílých trpaslíků ukázalo na jejich systematické vzdalování střední rychlostí $38 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Co můžeme konstatovat o průměrné hmotnosti bílých trpaslíků, jestliže přijmeme jejich průměrný poloměr 7700 km ?

Řešení: Z uvedených údajů lze odhadovat střední hmotnost bílých trpaslíků za předpokladu platnosti vztahu pro gravitační rudý posuv na $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R}$, $M = 1,3 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,65 M_{\odot}$.

Úloha 7.7 Určete teplotu nitra bílého trpaslíka se zářivým výkonem $L = 0,03 L_{\odot}$ o hmotnosti M_{\odot} , $X = 0$, $Y = 0,9$, $\mu = 1,4$.

Řešení: Pro teplotu nitra platí $T_i = \left[\frac{LZ(1+X)M_{\odot}}{7,3 \cdot 10^4 \mu M} \right]^{2/7} = 2,8 \cdot 10^7 \text{ K}$

Úloha 7.8 Odhadněte hustotu, při které nastává proces neutronizace, tedy slučování elektronů a protonů na neutrony podle reakce $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

Řešení: V limitním případě, jestliže neutrino neodnáší energii, užijeme relativistické vyjádření kinetické energie pro elektron $m_e c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - 1 \right] = (m_n - m_p - m_e) c^2$. Pro nerelativistické elektrony je rychlost $v \cong \frac{h}{2\pi m_e} n_e^{1/3} \cong \frac{h}{2\pi m_e} \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{1/3}$, odtud $\left(\frac{m_e}{m_n - m_p}\right)^2 \cong 1 - \frac{h^2}{4\pi^2 m_e^2 c^2} \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3}$. Pro hustotu obdržíme $\rho \cong \frac{Am_H}{Z} \left(\frac{2\pi m_e c}{h}\right)^3 \left[1 - \left(\frac{m_e}{m_n - m_p}\right)^2 \right]^{3/2} \cong 2,3 \cdot 10^{10} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ při předpokladu $\frac{A}{Z} = 1$ pro vodík.

Úloha 7.9 Zářivý výkon Siria B je $0,022 L_{\odot}$, efektivní povrchová teplota dosahuje 24800 K , naměřená hodnota gravitačního rudého posuvu je $z = 3 \cdot 10^{-4}$. Určete hmotnost Siria B a jeho průměrnou hustotu. Stanovte teplotu nitra a dokažte, že elektrony se nacházejí ve stavu degenerace.

Řešení: $R_B = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}\right)^{1/2} = 5,6 \cdot 10^6 \text{ m}$ tudíž $0,008 R_{\odot}$. Úpravou vztahu pro gravitační rudý posuv dostaneme $M_B = \frac{c^2 R_B \Delta\lambda}{\lambda} = 2,1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, tedy $1,03 M_{\odot}$. Průměrná hustota $\rho = 2,86 \cdot 10^9 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Teplotu nitra stanovíme ze vztahu $T_i \cong 7,10^7 \left(\frac{L_B M_{\odot}}{L_{\odot} M_B}\right)^{2/7} = 2,3 \cdot 10^7 \text{ K}$. Podmínka degenerace stanovuje $K_1 \rho^{\frac{5}{3}} \geq \frac{\mathcal{R} \rho T}{\mu}$, odkud po částečném dosazení obdržíme $\rho \geq \left(\frac{T}{7,5 \cdot 10^4}\right)^{3/2} 10^3$. Nerovnice dává pro $\rho \geq 5,4 \cdot 10^6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, tudíž podmínka degenerace elektronů je splněna.

Úloha 7.10 Zářivý výkon hvězdy 40 Eri B je $0,017 L_{\odot}$, efektivní teplota $17\,000\text{ K}$. Naměřená hodnota gravitačního rudého posuvu $z = 6 \cdot 10^{-5}$. Určete hmotnost tohoto bílého trpaslíka.

Řešení: Poloměr určíme $R_B = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}\right)^{1/2} = 10^7\text{ m}$ tedy $0,015 R_{\odot}$. Hmotnost $M_B = \frac{c^2}{G} R_B \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 8 \cdot 10^{29}\text{ kg}$, přibližně $0,43 M_{\odot}$.

Úloha 7.11 Stanovte horní hranici poloměru pulsaru – neutronové hvězdy o hmotnosti $1,4 M_{\odot}$, s periodou rotace $1,5 \cdot 10^{-3}\text{ s}$. Řešte v newtonovském přiblížení.

Řešení: Pro hmotný bod na rovníku rotující neutronové hvězdy musí platit $F_p > F_d$. Dosazením obdržíme $R < \left(\frac{GM^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$, $R < 20\text{ km}$.

Úloha 7.12 Jeden z prvních objevených bílých trpaslíků 40 Eri B má efektivní povrchovou teplotu $17\,000\text{ K}$ a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost $9,2\text{ mag}$. Nalezněte jeho poloměr.

Řešení: Zářivý výkon stanovíme ze vztahu $L = 10^{0,4(4,75 - M_{\text{bol}})} \cong 0,017 L_{\odot}$. Poloměr určíme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T_{\text{ef}}^4}\right)^{1/2} \cong 10^7\text{ m} \cong 0,015 R_{\odot}$.

Úloha 7.13 Stanovte Schwarzschildův poloměr $R_g = \frac{2GM}{c^2}$ pro Slunce, kulovou hvězdokupu o hmotnosti $10^5 M_{\odot}$ a jádro galaxie o hmotnosti $10^6 M_{\odot}$.

Řešení: Dosadíme pro jednotlivé případy: Slunce $R_g \cong 3\text{ km}$, kulová hvězdokupa $R_g \cong 3 \cdot 10^5\text{ km}$, jádro galaxie $R_g \cong 3 \cdot 10^6\text{ km} \cong 0,02\text{ AU}$. Velikost $R_g \sim M$.

Úloha 7.14 Neutronová hvězda vzniklá po výbuchu supernovy má v průběhu prvních 100 roků po vzniku povrchovou teplotu T větší než $2 \cdot 10^6\text{ K}$. Na jaké vlnové délce leží maximum intenzity vyzařování předpokládáme-li, že vyzařuje jako černé těleso s výše uvedenou teplotou. Určete zářivý výkon, jestliže poloměr neutronové hvězdy je 10 km .

Řešení: Z Wienova posunovacího zákona určíme $\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T} = 1,44\text{ nm}$, zářivý výkon stanovíme ze Stefanova-Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 = 1,14 \cdot 10^{27}\text{ W}$.

Úloha 7.15 S využitím vztahu $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R}$ dokažte, že maximální hodnota rudého posuvu z pro záření z povrchu neutronové hvězdy je $0,14$.

Řešení: Dosadíme charakteristiky typických neutronových hvězd $M = 2,8 \cdot 10^{30}\text{ kg} = 1,4 M_{\odot}$, $R = 1,5 \cdot 10^4\text{ m} = 15\text{ km}$.

Úloha 7.16 Zjištěný časový rozdíl příchodu signálů z pulsaru v Krabí mlhovině PSR 0531+21 na frekvencích $f_2 = 430\text{ MHz}$ a $f_1 = 196\text{ MHz}$ má hodnotu $4,796\text{ s}$. Určete vzdálenost pulsaru, jestliže hustota elektronů v mezihvězdném prostoru ve směru Krabí mlhoviny je $n_e = 2,8 \cdot 10^4\text{ m}^{-3}$.

Řešení: Pulsar je zdrojem elektromagnetického záření v širokém intervalu frekvencí. Na Zemi je nejprve přijímáno záření o vyšších kmitočtech, následně teprve záření o nižších kmitočtech. Velikost tohoto časového posuvu, tzv. disperzní míra, závisí na koncentraci volných elektronů v mezihvězdném prostředí ve směru pulsaru a na vzdálenosti pulsaru. Při řešení využijeme již upravený vzorec, ve kterém je časový rozdíl vyjádřen v sekundách, hustota elektronů n_e je dána jejich počtem v cm^3 , vzdálenost d je v pc a frekvence f_1 a f_2 jsou v MHz .

Platí vztah $\Delta t = 4,15 \cdot 10^{-3} n_e d \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$, odkud pro vzdálenost dostaneme $d = 2000$ pc. Tzv. disperzní míra $DM = \int_0^d n_e dl = 5,6 \cdot 10^7$ pc·m⁻³.

Úloha 7.17 Určete hustotu elektronů v mezihvězdném prostoru ve směru pulsaru PSR 0901 – 63, jestliže na frekvencích $f_2 = 405$ MHz a $f_1 = 234$ MHz byl zjištěn časový rozdíl příchodu signálů 3,797 s. Vzdálenost pulsaru $d = 3000$ pc.

Řešení: Ze vztahu $\Delta t = 4,15 \cdot 10^{-3} n_e d \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$ určíme $n_e = 2,5 \cdot 10^4$ m⁻³.

Úloha 7.18 Určete energii, kterou ztrácí pulsar – neutronová hvězda o hmotnosti $1,4 M_\odot$ a poloměru $R = 10$ km v Krabí mlhovině každou sekundu při zmenšování úhlové rychlosti rotace prostřednictvím změny rotační energie. Je zadáno $P = 0,033$ s a $\frac{dP}{dt} = 4 \cdot 10^{-13}$.

Řešení: $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3} \frac{dP}{dt} = 5 \cdot 10^{31}$ W což odpovídá zářivému výkonu Krabí mlhoviny. Lze také vyjádřit změnu rotační kinetické energie za sekundu, tedy $\Delta E_{\text{rot}} = \frac{4\pi^2 MR^2}{5P^2} - \frac{4\pi^2 MR^2}{5(P+\Delta P)^2} = \frac{4}{5}\pi^2 MR^2 \left[\left(\frac{1}{P^2} \right) - \left(\frac{1}{P^2} - \frac{2\Delta P}{P^3} \right) \right] = 10^{32}$ J. Samotná Krabí mlhovina má zářivý výkon asi $5 \cdot 10^{31}$ W.

Úloha 7.19 Pulsar v Krabí mlhovině má zářivý výkon $5 \cdot 10^{31}$ W, jeho perioda rotace $P = 0,033$ s, hmotnost $1,4 M_\odot$, $R = 10$ km. Určete nárůst periody rotace a odhadněte stáří pulsaru.

Řešení: Rotační kinetická energie je dána vztahem $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$, $I = \frac{2}{5}MR^2$. Předpokládejme, že veškerá energie se přeměňuje na záření, platí zákon zachování energie: $\frac{dE_{\text{zar}}}{dt} + \frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = 0$. Dále platí $L = \frac{dE_{\text{zar}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = \frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3} \frac{dP}{dt}$. Odtud dostaneme $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{8\pi^2} \frac{LP^3}{MR^2}$, po dosazení obdržíme pro nárůst periody rotace $\frac{dP}{dt} = 4 \cdot 10^{-13}$. Přibližný odhad stáří pulsaru dává $t \cong \frac{0,033}{4 \cdot 10^{-13}} \cong 10^{11} \cong 3 \cdot 10^3$ roků. Ve skutečnosti je stáří pulsaru asi 10^3 roků.

Úloha 7.20 Určete velikost magnetické indukce magnetického pole pulsaru v Krabí mlhovině. Perioda rotace $P = 0,033$ s, časová změna $dP/dt = 4 \cdot 10^{-13}$, $\theta = 90^\circ$.

Řešení: Zářivý výkon rotujícího magnetického dipólu je $L = -\frac{64\pi^5 B^2 R^6 \sin^2 \theta}{6c^3 P^4 \mu_0}$. Předpokládáme, že $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3} \frac{dP}{dt}$. Za předpokladu, že rotační kinetická energie se plně přeměňuje na záření platí $-\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3} \frac{dP}{dt} = -4\pi^2 IP^{-3} \frac{dP}{dt} = \frac{64\pi^5 B^2 R^6 \sin^2 \theta}{6c^3 P^4 \mu_0}$. Pro hodnotu magnetické indukce dostáváme $B = \frac{1}{R^3 \sin \theta} \left(\frac{3c^2}{8\pi^3} IP \frac{dP}{dt} \right)^{1/2}$. Dosazením obdržíme hodnotu $B \cong 8 \cdot 10^8$ T, což je řádově srovnatelné s hodnotou zjištěnou z pozorování $B = 4 \cdot 10^8$ T.

Úloha 7.21 Stanovte charakteristickou energii relativistických elektronů v Krabí mlhovině vyvolávajících v optickém oboru záření o vlnové délce $\lambda = 600$ nm. Velikost magnetické indukce je $1 \cdot 10^{-8}$ T. Střední energie vyzářených fotonů synchrotronovým mechanismem je $\epsilon = 2,0 \cdot 10^{-16}$ T⁻¹·eV.

Řešení: $\epsilon = h\frac{c}{\lambda} = 2$ eV, $E_e^2 = \frac{\epsilon}{B} \Rightarrow E_e = 10^{12}$ eV.

Úloha 7.22 Pulsar o zářivém výkonu $7,8 \cdot 10^{29}$ W, hmotnosti $1,4 M_\odot$ a poloměru $R = 10$ km má periodu rotace $P = 0,089$ s. Určete nárůst periody rotace a jeho přibližné stáří.

Řešení: Postup obdobný jako v předcházejících úlohách, $dP/dt = 1,2 \cdot 10^{-13}$, $t \cong 5 \cdot 10^4$ roků.

Úloha 7.23 Zdroje rtg. záření v Galaxii se vyznačují zářivými výkony v intervalu ($10^{26} - 10^{31}$) W. Odhadněte lineární velikost zdrojů, jestliže vlnová délka maximální intenzity ve spojitém spektru je $\lambda_m = 0,3$ nm, tudíž teplota dosahuje asi 10^7 K. Jakou akreční rychlostí musí hmota padat na objekt, aby produkovala pozorovaný zářivý výkon?

Řešení: Pro náš výpočet zvolme zářivý výkon 10^{30} W. Poloměr vypočteme ze vztahu $R = \left(\frac{L}{4\pi\sigma T^4}\right)^{1/2}$. Numerická velikost akrečního disku kolem černé díry $2R \cong 20$ km. Nechť na objekt o poloměru R a hmotnosti M dopadá hmota tempem dM/dt za s. Produkovaná gravitační potenciální energie je $\frac{dE_{\text{grav}}}{dt} = G\frac{M}{R}\frac{dM}{dt}$. Jestliže energie se přeměňuje na záření se 100% účinností, dostaneme ze vztahu $L = G\frac{M}{R}\frac{dM}{dt}$, $\frac{dM}{dt} = \frac{RL}{GM} = 7,5 \cdot 10^{13}$ kg.s⁻¹. Reálnější předpoklad účinnosti je asi 50%.

Úloha 7.24 Určete velikost energie, kterou Krabí mlhovina vyzařuje a částečně spotřebuje na svoji expanzi, víte-li, že ztrátu E_{rot} v důsledku zbrzdňování rotující neutronové hvězdy způsobené interakcí magnetického pole s plazmatickou obálkou můžeme vyjádřit vztahem $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt}$. Fyzikální charakteristiky neutronové hvězdy jsou $1,4 M_{\odot}$, $R = 10$ km, $\omega = 190,3$ s⁻¹, $\frac{d\omega}{dt} = -2,4 \cdot 10^{-9}$ s⁻².

Řešení: Po dosazení hodnot obdržíme $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} \cong -5 \cdot 10^{31}$ W.

Úloha 7.25 Rtg. pulsary ve dvojhvězdách představují neutronové hvězdy, na které dopadá hmota. K takovým objektům patří rtg. pulsar Her X 1 s periodou $P = 1,24$ s, jehož zářivý výkon je $L \cong 8 \cdot 10^{30}$ W. Odhadněte rychlost akrece u tohoto pulsaru v $M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$. Údaje pro $R = 1,5 \cdot 10^4$ m, $M = 3 \cdot 10^{30}$ kg.

Řešení: Akreční zářivý výkon je dán vztahem $L \cong G\frac{M}{R}\frac{dM}{dt}$, odtud určíme $\frac{dM}{dt} = \frac{RL}{GM} = 6 \cdot 10^{14}$ kg.s⁻¹ $\cong 10^{-8} M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$.

Úloha 7.26 Rtg. pulsar má periodu $P = 3,61$ s a zářivý výkon $L_x = 3,8 \cdot 10^{29}$ W. Předpokládejme, že jde o neutronovou hvězdu o hmotnosti $1,4 M_{\odot}$ a poloměru 10 km, s magnetickou indukcí na povrchu 10^8 T. Naleznete dP/dt a hodnotu $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$. Můžeme rtg. pulsar vysvětlit jako rádiový?

Řešení: Ze vztahu $L = -\frac{8}{5}\pi^2 MR^2 P^{-3}\frac{dP}{dt}$ určíme $\frac{dP}{dt} = -\frac{5L}{8\pi^2} M^{-1} R^{-2} P^3 = 4 \cdot 10^{-9}$. Odtud $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = 1 \cdot 10^{-9}$ s⁻¹. Pulsar by se rychle zastavil.

Úloha 7.27 Porovnejte velikost maximálního úhlového momentu hybnosti černé díry o hmotnosti $1,4 M_{\odot}$ s velikostí úhlového momentu hybnosti následně uvedeného pulsaru. Z dosud nám známých pulsarů je nejrychleji rotujícím pulsar s periodou $P = 0,00156$ s, hmotností $1,4 M_{\odot}$ a poloměrem 10 km.

Řešení: Pro černou díru je velikost úhlového momentu hybnosti $L_{\text{max}} = \frac{GM^2}{c} = 1,7 \cdot 10^{42}$ kg.m.s⁻², pro pulsar $L = m\omega r^2 = 1,1 \cdot 10^{42}$ kg.m.s⁻². Úhlové momenty hybnosti jsou u obou těles srovnatelné.

8 Hvězdy a mezihvězdná látka

Úloha 8.1 V typickém mezihvězdném mračně při $T = 50 \text{ K}$ je $n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-3}$. Budeme předpokládat, že mračno je složeno z vodíku H I, $\rho_0 = m_{\text{H}}n_{\text{H}} = 8,4 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete kritickou Jeansovu hmotnost.

Řešení: Zvolíme molekulární hmotnost $\mu = 1$ a dosadíme do vztahu $M_J \cong \left(\frac{5kT}{G\mu m_{\text{H}}} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{1/2}$. Po dosazení obdržíme $M_J \cong 1500 M_{\odot}$.

Úloha 8.2 Stanovte teoretickou hodnotu Jeansovy hmotnosti mezihvězdných mračen, pro tři možné případy:

- chladné oblasti s $T = 10^2 \text{ K}$, $\rho_0 = 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 - oblasti H II, kde $T = 10^4 \text{ K}$, $\rho_0 = 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 - horké oblasti, ve kterých $T = 10^6 \text{ K}$, $\rho_0 = 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Molekulární hmotnost μ přijměte rovnu 1.

Řešení: $M_J \cong 1,2 \cdot 10^4 M_{\odot}$, $M_J \cong 1,2 \cdot 10^8 M_{\odot}$, $M_J \cong 1,2 \cdot 10^{12} M_{\odot}$

Úloha 8.3 Určete střední dobu mezi dvěma srážkami atomů neionizovaného vodíku při teplotě mezihvězdného mračna 80 K , jestliže účinný srážkový průřez atomů je přibližně $\sigma \cong 10^{-19} \text{ m}^2$, předpokládaná hustota atomů je $n_{\text{H}} \cong 10^{-6} \text{ m}^{-3}$.

Řešení: Pro střední dobu platí $\tau \cong \frac{1}{\sigma n_{\text{H}}} \left(\frac{2kT}{3m_{\text{H}}} \right)^{-1/2} \cong 1,5 \cdot 10^{10} \text{ s} \cong 500 \text{ roků}$.

Úloha 8.4 Určete dobu pobytu atomu vodíku v ionizovaném stavu v planetární mlhovině, je-li zadána koncentrace volných elektronů $n_{\text{e}} = 10^{10} \text{ m}^{-3}$, teplota mlhoviny $T = 10^4 \text{ K}$.

Řešení: Doba pobytu je $t_p \cong \frac{2,5 \cdot 10^{18}}{n_{\text{e}}} \sqrt{\frac{T}{10^4}} \cong 2,5 \cdot 10^8 \text{ s} \cong 8 \text{ roků}$ při uvedených podmínkách.

Úloha 8.5 V mezihvězdném prostředí, jehož vlastnosti se blíží vlastnostem ideálního jednoatomového plynu, je teplota určována pomocí vztahu $\frac{3}{2}kT = \frac{9}{32}m_{\text{H}}v^2$. Určete teplotu je-li rychlost rozšiřování vláknových struktur mlhoviny rovna $v \cong 10^2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení: Dosazením obdržíme $T = 230\,000 \text{ K}$.

Úloha 8.6 Jak se mění poloha hvězdy na diagramu barva – pozorovaná hvězdná velikost pro kulové hvězdokupy, jestliže

- vzdálenost hvězdokupy se zvětší $10 \times$
- mezi hvězdokupou a pozorovatelem leží mračno prachu pro které $A = 5 \text{ mag}$.

Řešení: Vyjdeme ze vztahu $m - M = 5 \log r - 5$. Při zvětšení vzdálenosti $10 \times$ se zvětší pozorovaná hvězdná velikost o 5 mag , tedy poloha hvězdy se posune směrem dolů. V případě mezihvězdného mračna prachu se zvětší pozorovaná hvězdná velikost rovněž o 5 mag , tudíž poloha hvězdy se posune dolů na H – R diagramu.

Úloha 8.7 Odhadněte teplotu prachové částice nacházející se ve vzdálenosti $r_v = 100$ AU od nově vzniklé hvězdy hlavní posloupnosti spektrální třídy F0. Předpokládejme, že rotující částice je ve stavu termodynamické rovnováhy, to znamená, že množství energie absorbované částicí v daném časovém intervalu je přesně rovno množství vyzařené energie touto částicí. Dále předpokládáme, že částice je sféricky symetrická a absorbuje záření jako černé těleso. Uvažovaná hvězda hlavní posloupnosti má povrchovou teplotu 8 200 K a poloměr $1,8 R_\odot$.

Řešení: Dosazením do Stefanova–Boltzmannova zákona určíme zářivý výkon hvězdy $L = 5,1 \cdot 10^{34}$ W. Za podmínek zadání přibližně platí $\frac{L}{4\pi r_v^2} \frac{4}{3}\pi r_c^3 = \frac{4}{3}\pi r_c^3 \sigma T_{\text{cef}}^4$, odkud $T_{\text{cef}} = \left(\frac{L}{4\pi r_v^2} \frac{1}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{R_h^2}{r_v^2} T_{\text{hef}}^4\right)^{1/4} \cong 75$ K.

Úloha 8.8 Ve středu planetární mlhoviny Helix se nachází horká hvězda – bílý trpaslík s povrchovou teplotou $T = 100\,000$ K. Velká část záření centrální hvězdy je pohlcována mlhovinou. Objasněte proč můžeme skrze ni pozorovat vzdálenější galaxie.

Řešení: Při tak vysoké povrchové teplotě hvězdy připadá velká část záření na lymanovské kontinuum $\lambda < 91,2$ nm, které je absorbováno mlhovinou a ionizuje přitom vodík. Ve viditelném oboru spektra je mlhovina průzračná pro záření jak centrální hvězdy tak i objektů umístěných v radiálním směru za ní.

Úloha 8.9 Odvoďte vztah pro geometrickou délku zorného paprsku uvnitř prstencové mlhoviny, skládající se z obálky o tloušťce d a vnějším poloměru r . Bude mlhovina vypadat jako planetární, jestliže hustota uvnitř obálky se zmenší o jeden řád a $d/r = 0,1$?

Řešení: Geometrická délka zorného paprsku je $l = 2 \left\{ [r^2 - x^2]^{1/2} - [(r - d)^2 - x^2]^{1/2} \right\}$, kde x je vzdálenost záměrného paprsku do středu mlhoviny. Při zadaných podmínkách bude mlhovina vypadat jako planetární.

Úloha 8.10 Uprostřed emisní mlhoviny Růžice se nachází hvězda spektrální třídy O5 s povrchovou teplotou asi 50 000 K a odhadovaným poloměrem $18 R_\odot$. Kolik mezihvězdných atomů vodíku dokáže tato hvězda ionizovat za 1 sekundu? Jak by se změnil počet fotonů, jestliže by se teplota hvězdy zvýšila na 100 000 K?

Řešení: Při zadané povrchové teplotě a poloměru je zářivý výkon hvězdy $L = 5,6 \cdot 10^{32}$ W, tedy $1,5 \cdot 10^6 L_\odot$. Z Wienova posunovacího zákona obdržíme $\lambda_m = \frac{0,29}{50000} = 58$ nm, což je podstatně méně než 91,2 nm nezbytných pro ionizaci vodíku za základního stavu. Většina fotonů je schopna vyvolat ionizaci, pro zjednodušení předpokládejme, že všechny emitované fotony mají λ_m stejné. Jejich střední energie je $E = \frac{hc}{\lambda} = 3,4 \cdot 10^{-18}$ J. Celkový počet fotonů je $N_f \cong \frac{L}{E} \cong 10^{50}$. Počet fotonů vyzařovaných z 1 m^2 za 1 sekundu lze vyjádřit $\frac{\sigma T^4}{2,7kT} = \frac{\sigma}{2,7k} T^3$. Při zadaných povrchových teplotách téměř každý foton může ionizovat atom, tedy počet ionizací je roven počtu fotonů vyzařovaných za 1 sekundu. Celkový počet fotonů vyzařovaných hvězdou je $\frac{\sigma}{2,7k} T^3 4\pi R^2 \cong 10^{50}$, což odpovídá výsledkům získávaným jinými způsoby. Jestliže dojde ke zvýšení teploty na 100 000 K, tedy na dvojnásobek, počet fotonů se zvýší osminásobně.

Úloha 8.11 Doložte výpočtem vznik oblasti H II ionizujícím zářením v prostoru kolem hvězdy spektrální třídy O6, $T_{\text{ef}} \cong 45\,000\text{ K}$, $L \cong 1,3 \cdot 10^5 L_{\odot}$.

Řešení: Podle Wienova posunovacího zákona $\lambda_{\text{max}} = 64\text{ nm}$, tedy existují podmínky pro ionizaci vodíku ze základního stavu. Nezbytná energii je rovna $E = \frac{hc}{\lambda} = 3,1 \cdot 10^{-18}\text{ J}$. Při zjednodušujících předpokladech, že všechny emitované fotony mají stejnou vlnovou délku, je celkový počet fotonů produkovaných hvězdou za sekundu $N_f \cong \frac{L}{E} \cong 1,6 \cdot 10^{49}$. Při znalosti rekombinačního koeficientu $\alpha = 3,1 \cdot 10^{-19}\text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a hodnotě hustoty mračna vodíku $n_{\text{H}} \cong 5 \cdot 10^9\text{ m}^{-3}$ dostaneme dosazením pro poloměr Strömgrenovy oblasti $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_{\text{H}}^{-2/3} \cong 7,9 \cdot 10^{15}\text{ m} \cong 0,25\text{ pc}$.

Úloha 8.12 Které jsou dva hlavní faktory určující velikost oblasti H II? Objasněte astrofyzikální podstatu své odpovědi, odvoďte velikost Strömgrenovy sféry.

Řešení: Velikost H II oblasti je určována poloměrem a teplotou ionizující hvězdy a hustotou látky v Strömgrenově oblasti. Platí vztah $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_{\text{H}}^{-2/3}$.

Úloha 8.13 Dokažte, že Strömgrenův poloměr zóny H II závisí na koncentraci atomů vodíku v závislosti $r_S \sim n^{-2/3}$.

Řešení: Základní složkou mezihvězdné látky je vodík, který je v oblastech H II prakticky plně ionizován. V stacionárním stavu počet ionizací je roven počtu rekombinací, které probíhají při srážkách protonů a elektronů. Jejich počet v objemové jednotce je proto $\sim n_e n_p$ nebo n^2 , $n = n_p + n_e$. Celkový počet rekombinací v oblasti H II je $\sim n^2 r_S^3 = \text{konst.}$, kde r_S je poloměr oblasti H II. Z druhé strany počet rekombinací je roven počtu ionizací, které jsou určeny parametry vyzařující hvězdy. Shrnuto z výše uvedeného platí $r_S \sim n^{-2/3}$.

Pro číselnou představu uvádíme tabulku poloměrů oblastí vodíku H II u hvězd hlavní posloupnosti různých spektrálních tříd při $n_{\text{H}} = 10^6\text{ m}^{-3}$.

Spektrální třída	r [pc]	Spektrální třída	r [pc]
O5	140	B1	17
O6	110	B2	11
O7	87	B3	7,2
O8	66	B4	5,2
O9	46	B5	3,7
B0	26	A0	0,5

Úloha 8.14 Nalezněte poloměr Strömgrenovy oblasti kolem hvězdy Spicy, B2V, $T = 24\,000\text{ K}$, $R = 5 R_{\odot}$. Předpokládaná hustota $n_{\text{H}} = 10^6\text{ m}^{-3}$, koeficient rekombinace na všechny energetické hladiny vyjma první základní je $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-19}\text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení: Nejprve určíme počet kvant záření – fotonů uvolňovaných z 1 m^2 povrchu hvězdy za 1 s , $N = \frac{2\pi kT}{hc^2} \nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$, kde $\nu = \frac{c}{\lambda} = 3,29 \cdot 10^{15}\text{ s}^{-1}$. Dosazením obdržíme počet kvant lymanovského kontinua $N \cong 10^{26}\text{ fotonů} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Při poloměru hvězdy $R = 3,5 \cdot 10^9\text{ m}$ dostaneme celkový počet fotonů uvolňovaných hvězdou $N_f = 4\pi R^2 N \cong 10^{46}\text{ fotonů} \cdot \text{s}^{-1}$. Poloměr Strömgrenovy oblasti určíme $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_{\text{H}}^{-2/3} \cong 2,2 \cdot 10^{17}\text{ m} \cong 7\text{ pc}$.

Úloha 8.15 Hvězda s povrchovou teplotou 16 000 K je pohroužena do mezihvězdného mračna. Odhadněte, jaká část její vyzařované energie připadá na ionizaci mezihvězdného vodíku. Předpokládejme, že hvězda vyzařuje jako černé těleso.

Řešení: Ionizovat vodík je schopné záření s vlnovou délkou $\lambda < 91,2$ nm, tedy s frekvencí $\nu > \nu_1$, kde $\nu_1 = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Hledaná část energie záření je $\delta = \left(\int_{\nu_1}^{\infty} B_{\nu} d\nu \right) \left(\int_0^{\infty} B_{\nu} d\nu \right)^{-1}$, kde $B_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} \cong \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$. Pro vodík $x_1 = \frac{h\nu_1}{kT} \cong \frac{160000}{T}$, při $T = 16000$ K $x_1 = 10$, tudíž $\delta = \left(\int_{10}^{\infty} x^3 e^{-x} dx \right) \left(\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx \right)^{-1}$. Při $x \gg 1$ platí $\int_{10}^{\infty} x^3 e^{-x} dx \cong 10^3 \int_{10}^{\infty} e^{-x} dx = 10^3 e^{-10}$. Dále $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = 3! = 6$. Celkově $\delta \cong \frac{1}{6} 10^3 e^{-10} \cong 10^{-2}$ připadá na ionizaci vodíku, hvězda má příliš nízkou teplotu pro výraznější ionizaci.

Úloha 8.16 Boltzmannův člen $\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ umožňuje určení relativního obsazení energetických hladin. Užijte tento člen k výpočtu teploty nezbytné pro atomy vodíku, aby proton a elektrony přešly z antiparalelního do paralelního spinu. Jsou teploty mračen H I dostatečné k produkování této nízké energie?

Řešení: Stupeň excitace atomů vyjadřujeme z Boltzmannovy rovnice $\frac{N_B}{N_A} = \frac{g_B}{g_A} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$, kde $\frac{g_B}{g_A} = 3$, při $\nu = 1420,4 \text{ MHz} \Rightarrow \frac{h\nu}{k} = 0,07 \text{ K}$. Boltzmannova rovnice má tvar $\frac{N_B}{N_A} = 3 \exp\left(-\frac{0,07}{T}\right)$. Kinetická teplota mezihvězdného vodíku je vždy větší než 0,07 K, tedy $\exp\left(-\frac{0,07}{T}\right) \cong 1$, poměr $\frac{N_B}{N_A} = 3$ se nepatrně mění s teplotou mezihvězdného plynu. Ve vyšším stavu s antiparalelním spinem (přesněji v důsledku rozdílnosti orientací magnetických momentů protonu a elektronu) se bude nacházet 75% atomů vodíku.

Úloha 8.17 Ze spektroskopických pozorování planetární mlhoviny NGC 7027 byla zjištěna její teplota $1,1 \cdot 10^4$ K. Vyzařovací schopnost plynu mlhoviny, jak ve spektrálních čarách tak ve spojitém spektru, charakterizujeme veličinou nazývanou emisní míra, je zavedena obecně $EM = \int_0^l n_e^2 dl$. V celém rozsahu vlnových délek je povrchová jasnost mlhoviny prakticky úměrná EM . V naší úloze je střední emisní míra $EM = 5,4 \cdot 10^7 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-6}$. Nalezněte koncentraci elektronů n_e v mlhovině a stanovte její hmotnost. Předpokládáme $n_e = \text{konst.}$ a sférický tvar mlhoviny o průměru $D \cong 0,1 \text{ pc}$

Řešení: Ze zadání úlohy dostaneme $EM = n_e^2 D \Rightarrow n_e = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$. Hmotnost elektronů v mlhovině odhadneme $M \cong \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 n_e m_e \cong 10^{25} \text{ kg}$. Tento odhad se zvýší na $M \cong 10^{29} \text{ kg}$ při započtení hmotnosti protonů a dále atomů helia, kterých je v mlhovině přibližně 16% počtu atomů vodíku a započtením hmotnosti i těžších prvků.

Úloha 8.18 Zjištěné šířky čar H_{α} s $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ a $N \text{ II}$ s $\lambda = 658,4 \text{ nm}$ jsou $\Delta\lambda_1 = 0,05 \text{ nm}$ a $\Delta\lambda_2 = 0,04 \text{ nm}$. Nalezněte teplotu a rychlost pohybu oblastí plynu v mlhovině.

Řešení: Využijeme vztah $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \left(\frac{2kT}{m} + v_t^2\right)^{1/2}$ pro šířky obou čar, řešíme dvě rovnice, obdržíme kinetickou teplotu $T \cong 3100 \text{ K}$ a $v_t \cong 9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Úloha 8.19 Ve spektrech plynných mlhovin pozorujeme pozorujeme rádiové čáry vznikající přechody mezi vysoce položenými energetickými hladinami. Určete vlnovou délku rekombinační čáry vodíku Hn_{α} , $n \gg 1$.

Řešení: Vlnová délka fotonu vyzařovaného při přechodu z energetické hladiny m na n je dána vztahem $\lambda_{nm} = \lambda_1 \frac{n^2 m^2}{m^2 - n^2}$, kde $\lambda_1 = 91,2 \text{ nm}$. Položíme $m = n + 1$ a předpokládáme, že $n \gg 1$. Dosazením obdržíme $\lambda_{n,n+1} = \lambda_1 \left(\frac{n^3}{2} + n^2 \right)$. Podle tohoto vztahu spektrální čára $H 100_\alpha$ má vlnovou délku přibližně 5 cm.

Úloha 8.20 Dokažte, že rekombinační čáry vodíku $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta$ jsou ekvidistantní podle frekvence.

Řešení: Řešení: Vyjdeme ze vztahu pro frekvenci fotonu vyzařovaného při přechodu atomu vodíku z energetické hladiny m na n $\nu_{nm} = \nu_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$, kde $\nu_1 = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$. Položíme $m = n + \Delta n$ a předpokládáme, že $n \gg 1$ a $\Delta n \ll 1$. Obdržíme $\nu_{n,n+\Delta n} = \nu_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+\Delta n)^2} \right) \cong \frac{2\nu_1}{n^3} \Delta n$. Odtud je zřejmé, že při zvětšení Δn o jednotku narůstá frekvence odpovídajícího přechodu o stejnou velikost $\frac{2\nu_1}{n^3}$, která je frekvencí čáry Hn_α .

Úloha 8.21

Navrhněte přístroj, kterým lze detekovat přicházející záření, které vzniká v atomech vodíku při přechodu z paralelní na antiparalelní orientaci spinů protonu a elektronu. Teoreticky propočítaný rozdíl mezi oběma energetickými hladinami je $8,86 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$.

Řešení: Vlnovou délku záření stanovíme ze vztahu $\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 21 \text{ cm}$. Za detekční přístroj zvolíme rádiový teleskop pracující na cm vlnách.

Úloha 8.22 Nechť mračno mezihvězdného plynu má hmotnost M a jeho úhlový poloměr je φ . Dokažte, že pro vzdálenost mračna platí $r \sim \frac{M^{2/5}}{\varphi F^{1/5}}$, kde F je tok záření z mračna detekovaný na Zemi. Tento vztah odvodil Šklovskij pro určení vzdálenosti mlhovin za předpokladu, že pro jejich hmotnost platí $M \sim \sqrt{LV}$.

Řešení: Pro objem mlhoviny platí $V \sim R^3 \sim r^3 \varphi^3$, pro zářivý výkon platí $L \sim R^2 \sim r^2 \varphi^2 F$. Úpravou dostaneme $r \sim \frac{M^{2/5}}{\varphi F^{1/5}}$.

Úloha 8.23 Odhadněte hustotu neutrálního vodíku podél zorného paprsku procházejícího přes mračno, při 10% absorpci ve středu čáry L_α . Koeficient absorpce ve středu čáry v přepočtu na 1 atom je $\kappa_C \cong 10^{-16} \text{ m}^2$, při předpokládané teplotě plynu přibližně 100 K.

Řešení: Při průchodu záření přes mračno plynu se zeslabuje e_τ krát, kde τ je optická tloušťka vrstvy plynu. Ve středu čáry L_α je rovna $\kappa_C N$, kde N je celkový počet atomů vodíku podél procházejícího se paprsku. Absorpce se stává podstatnou, jestliže $\kappa_C N = 0,1$. Odpovídající hustota na paprsku je $m_p N = 0,1 \frac{m_p}{\kappa_C} \cong 2 \cdot 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Spektrální analýza je tudíž velmi citlivou metodou.

Úloha 8.24 Mračno H I emituje spektrální čáru o vlnové délce 21 cm s optickou hloubkou v jejím středu $\tau_H = 0,5$, jde o opticky tenkou čáru. Průměrná hustota plynu atomů v mračnu je $n_H = 10 \text{ cm}^{-3}$, teplota plynu je 100 K a šířka čáry, přepočítaná na rychlost je $\Delta v = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Nalezněte tloušťku mračna l .

Řešení: Ze vztahu $\tau_H = 5,2 \cdot 10^{-14} \frac{l}{T} \frac{n_H}{\Delta v}$ určíme $l \cong 10^{18} \text{ m} \cong 32 \text{ pc}$.

Úloha 8.25 Částice kosmického záření jsou udržovány v Galaxii prostřednictvím magnetického pole. Určete poloměr dráhy relativistické částice s nábojem e a energií 10^3 GeV kolem siločar magnetického pole o magnetické indukci $B \cong 5 \cdot 10^{-10}$ T.

Řešení: Platí $E = eBr$, odtud pro poloměr r v pc dostaneme $r = 1,08 \cdot 10^{-16} \frac{E}{B}$, je-li E v [GeV] a B [T]. Dosazením obdržíme $r = 2 \cdot 10^{-4}$ pc = 41 AU.

9 Extragalaktická astronomie

Úloha 9.1 Naše Galaxie s hmotností přibližně $2,5 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ a galaxie v souhvězdí Andromedy M 31 o hmotnosti $3,6 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ jsou dvě největší galaxie v Místní soustavě galaxií. Předpokládejme, že tvoří dvojnou soustavu a obíhají kolem společného hmotného středu po kruhových drahách. Určete velikost oběžné doby, jestliže vzdálenosti mezi nimi je asi 700 kpc.

Řešení:
$$T = \left(\frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{M_1 + M_2} \right)^{1/2} \cong 7 \cdot 10^{10} \text{ roků, tedy asi 70 miliard let.}$$

Úloha 9.2 Maximální zploštění, tzv. míra eliptičnosti, u eliptických galaxií je definována vztahem $\frac{a-b}{a}10 = 7$. Určete největší poměr velké a malé osy elipsoidu eliptických galaxií.

Řešení: Dosazením obdržíme $\frac{a}{b} = 3,3$

Úloha 9.3 Které z emisních čar v následující tabulce můžeme z povrchu Země pozorovat v optickém oboru spektra u kvasaru s následujícím rudým posuvem

- a) $z = 0,1$
- b) $z = 1,0$
- c) $z = 4,0$.

Tabulka hlavních emisních čar u aktivních galaxií a kvasarů:

L_{α}	121,6 nm	H_{β}	486,1 nm
N V	124,0 nm	O III	495,9 nm
C IV	154,9 nm	O III	500,7 nm
C III	190,9 nm	N II	654,8 nm
Mg II	279,8 nm	H_{α}	656,3 nm
O II	372,7 nm	N II	658,4 nm
Ne III	386,8 nm	S II	671,7 nm
H_{δ}	410,2 nm	S II	673,1 nm
H_{γ}	434,1 nm		

Řešení: Při výběru vhodných čar vyjdeme ze vztahu $(z + 1) \lambda_l = \lambda_p$, kde λ_p musí být v optické části spektra. Tedy v případě a) všechny čáry od Ne III, b) čáry C III až po čáru Ne III, c) čáry L_{α} až C IV.

Úloha 9.4 Ve spektru kvasaru byl optickou spektroskopií zjištěn rudý posuv $z = 2,5$. Které emisní čáry byly při tomto zjištění použity? Viz tabulka předcházející úlohy.

Řešení: Využijeme vztah $(z + 1) \lambda_l = \lambda_p$. Nejvhodnější a nejčastěji používanou čarou je L_{α} .

Úloha 9.5 Ve spektru kvasaru 3C 273 je emisní čára vodíku H_{β} o laboratorní vlnové délce 486,1 nm posunuta o 77,8 nm směrem k dlouhovlnnému konci spektra. Určete

- a) vzdálenost kvasaru
- b) lineární rozměry kvasaru, jestliže úhlový průměr činí $2\alpha = 0,24''$

- b) lineární velikost výtrysku l z kvasaru, jehož úhlová velikost je $19,5''$
 c) jeho zářivý výkon, jestliže absolutní bolometrická hvězdná velikost je -25 mag.

Řešení: Vzdálenost kvasaru určíme ze vztahu $r = \frac{c}{H}z = 640$ Mpc. Přibližný skutečný průměr kvasaru je $D = r2\alpha = 2 \cdot 10^{19}$ m = 700 pc. Velikost výtrysku je $l = 2 \cdot 10^{21}$ m = 70 kpc. Zářivý výkon kvasaru je $7,9 \cdot 10^{11} L_{\odot}$.

Úloha 9.6 Zářivý výkon kvasarů dosahuje 10^{40} W. Fyzikální podstata procesů umožňujících tak obrovské uvolňování energie není dosud definitivně objasněna. Vypočítejte množství hmoty v jednotkách M_{\odot} za rok, které se přemění, aby pokrývalo odpovídající zářivý výkon při

- a) termonukleárním hoření s účinností $\eta = 0,01$
 b) akreci na relativistický objekt s účinností $\eta = 0,1 - 0,3$.

Řešení: Úbytek hmoty je roven $\frac{dM}{dt} \cong 1,5\eta^{-1}M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$. Při termonukleárním hoření je úbytek přibližně $150 M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$, při akreci a volbě $\eta = 0,2$ obdržíme $7,5 M_{\odot} \cdot \text{rok}^{-1}$.

Úloha 9.7 Dosud nejvzdálenější klasické cefeidy (s typickými periodami 1 - 50 dnů) byly objeveny za pomoci Hubbleova kosmického dalekohledu v galaxii M 100, která je součástí bohaté kupy galaxií v souhvězdí Panny. Na obr. je znázorněna závislost pozorované vizuální hvězdné velikosti a periody pulsace, tedy závislost perioda - zářivý výkon. Užitím dvou cefeid nejbližše položených k přímkové závislosti, na grafu označených, stanovte jejich vzdálenost a tudíž vzdálenost galaxie M 100.

Řešení: U první cefeidy $m_v = 26,3$ mag, $\log P = 1,39$ dne. Ze závislosti $M_V = -2,80 \log P - 1,43$ stanovíme $M_V = -5,3$ mag. Dosazením do vztahu $\log r = 1 + 0,2(m_v - M_V) = 7,32$, $r \cong 20$ Mpc. U druhé cefeidy analogicky $m_v = 25,6$ mag, $\log P = 1,61$ dne, $M_V = -5,94$ mag. Vzdálenost $\log r = 7,31$ pc, tudíž $r \cong 20$ Mpc.

Úloha 9.8 Model jádra aktivní galaxie předpokládá, že kolem černé díry s velkou hmotností krouží akreční disk, jehož typický poloměr je $r_a = 10^{14}$ m. Určete velikost vyzářeného výkonu při dopadu plynu o hmotnosti $1 M_{\odot}$ za rok z akrečního disku na černou díru o hmotnosti $10^8 M_{\odot}$.

Řešení: Schwarzschildův poloměr černé díry je $r_S = \frac{2GM}{c^2} = 3 \cdot 10^{11}$ m. Předpokládáme tempo pádu látky o hmotnosti $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{rok}^{-1} = 6 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvolněná gravitační potenciální energie je $E_p = GMm \left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_a} \right) = 3 \cdot 10^{39}$ J, což pro zářivý výkon aktivní galaxie dává $\cong 10^{39}$ W.

Úloha 9.9 Šířka čáry H_{β} ve spektru jádra seyfertovské galaxie je zhruba 3 nm. Jaké jsou charakteristické rychlosti pohybu mračen plynu v jádře takové galaxie?

Řešení: V důsledku pohybu mračen dochází k rozšíření čáry. Platí vztah pro Dopplerův jev $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$. Polovina pozorované šířky 1,5 nm odpovídá maximálnímu posuvu čar do červené respektive fialové části optického spektra pro mračna pohybující se největší rychlostí podél zorného paprsku. Pro vlnovou délku $\lambda = 486,1$ nm obdržíme při dosazení $v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Úloha 9.10 Emisní čáry plynu ve středu gigantické eliptické galaxie M 87, NGC 4486 byly zkoumány spektrografem na Hubbleově kosmickém dalekohledu. Ze spektrální diagnostiky

čáry O II 372,7 nm byla určena oběžná rychlost 500 km.s^{-1} plynu při poloměru $0,25''$. Odhadněte hmotnost centrální oblasti uvnitř prstence. Za předpokladu, že se jedná o černou díru určete její Schwarzschildův poloměr. U galaxie M 87 byla zjištěna hodnota $z = 0,004$.

Řešení: Nejprve z Hubbleova zákona stanovíme vzdálenost $r = \frac{v}{H} = \frac{cz}{H} = 16 \text{ Mpc}$. Úhlový poloměr převedeme, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$. Skutečný poloměr prstence je $R = \alpha r = 5,9 \cdot 10^{17} \text{ m}$. Při zanedbání hmotnosti látky vně disku a jejím sféricko-symetrickém rozložení můžeme psát $\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{v^2 R}{G} \cong 2 \cdot 10^{39} \text{ kg} \cong 10^9 M_\odot$. Dosazením do vztahu pro Schwarzschildův poloměr $R_S = \frac{2GM}{c^2} \cong 3 \cdot 10^{12} \text{ m} \cong 10^{-4} \text{ pc}$.

Úloha 9.11 Vnitřní okraj plynného disku aktivního galaktického jádra galaxie M 106, NGC 4258 byl pozorován ve vzdálenosti $0,004''$ od středu. Zjištěná hodnota radiální rychlosti u této galaxie je 580 km.s^{-1} . Stanovte vzdálenost a určete poloměr vnitřního okraje disku v pc, plyn obíhá kolem středu rychlostí 100 km.s^{-1} . Určete hmotnost disku.

Řešení: Z Hubbleova zákona stanovíme vzdálenost $r = 7,7 \text{ Mpc}$. Při známé úhlové velikosti poloměru $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$ obdržíme pro skutečný poloměr $R = \alpha r \cong 4,5 \cdot 10^{15} \text{ m} \cong 0,15 \text{ pc}$. Hmotnost určíme ze vztahu $M = \frac{v^2 R}{G} = 8 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cong 4 \cdot 10^7 M_\odot$.

Úloha 9.12 Rádiový zdroj v jádře aktivní galaxie má úhlovou velikost $0,001''$, kosmologický rudý posuv je $z = 0,5$. Určete lineární rozměry zdroje v pc.

Řešení: Rychlost vzdalování stanovíme ze vztahu $v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = 0,38c$. Vzdálenost určíme z Hubbleova zákona $r = \frac{v}{H} = 1500 \text{ Mpc}$. Skutečná lineární velikost zdroje je $D = 10^{-3} 1,5 \cdot 10^9 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ AU} = 7,5 \text{ pc}$.

Úloha 9.13 U rádiové galaxie Centaurus A, nacházející se ve vzdálenosti 5 Mpc , byl na frekvenci 1400 MHz zjištěn monochromatický tok $F = 10^3 \text{ Jy}$. Určete zářivý výkon v rádiovém oboru ($10^7 \text{ Hz} - 10^{10} \text{ Hz}$) této galaxie, jestliže spektrální index $\alpha = 0,8$.

Řešení: Rádiový výkon galaxie vypočteme $L_r = 4\pi r^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} F_\nu d\nu \cong 10^{34} \text{ W}$.

Úloha 9.14 U kvasaru PC 1247+3406 byly ve spektru identifikovány emisní vodíkové čáry, mimo jiných také čára L_α $\lambda_l = 121,6 \text{ nm}$. Detekována na Zemi má čára vlnovou délku $\lambda_p = 721,4 \text{ nm}$. Určete rychlost vzdalování kvasaru.

Řešení: Při hodnotě $z = \frac{\lambda_p - \lambda_l}{\lambda_l} = 4,93$ je rychlost $v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = 0,95c$.

Úloha 9.15 Druhý nejsilnější rádiový zdroj na obloze po Slunci je rádiová galaxie Cygnus A, vyznačuje se rudým posuvem $z = 0,057$. Na frekvenci $\nu = 2000 \text{ MHz}$ byla zjištěna spektrální hustota toku záření 10^3 Jy , tedy $10^{-23} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Při znalosti spektrálního indexu $\alpha = 0,75$ určete zářivý výkon v rádiovém oboru galaxie Cyg A, předpokládáme kmitočtový rozsah $\nu_1 = 10^7 \text{ Hz}$ a $\nu_2 = 10^{10} \text{ Hz}$.

Řešení: Nejprve určíme vzdálenost $r = \frac{cz}{H} = 230 \text{ Mpc}$. Zářivý výkon v rádiovém oboru je $L_r = 4\pi r^2 \int_{\nu_1}^{\nu_2} F_\nu d\nu \cong 10^{37} \text{ W}$.

Úloha 9.16 Zdůvodněte hypotézu, že široké vodíkové emisní čáry vznikají při pohybech

velkých oblastí látky v kvasarech. Jejich šířky jsou v optické oblasti asi $\Delta z \cong 5 \cdot 10^{-3}$. Teplotu těchto oblastí odhadujeme na 10^4 K.

Řešení: Při $\Delta z \cong \frac{\Delta v}{c} \Rightarrow \Delta v \cong 1,5 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Rychlost tepelného pohybu při zadané teplotě je $v_t \cong \left(\frac{2kT}{m_H}\right)^{1/2} \cong 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, kde předpokládáme hmotnost atomu vodíku $m_H = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Tudíž vznik spektrálních čar v kvasarech bude spojen s pohybem celých oblastí – mračen vyzařujícího plynu, jejich rychlost podstatně převyšuje rychlost tepelného pohybu částic.

Úloha 9.17 Předpokládaným zdrojem aktivity jader galaxií a kvasarů může být akrece látky na černou díru s velkou hmotností. Minimální velikost oblasti vyzařování je v takovém případě řádově rovna gravitačnímu poloměru černé díry $R_g = \frac{2GM}{c^2}$. Maximální zářivý výkon zpravidla klademe $L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{\kappa} M$. Předpokládáme-li akreci jako zdroj energie u kvasaru 3C 273 určete minimální hodnotu hmotnosti černé díry a minimální dobu proměnnosti záření. Zářivý výkon položte $L = 10^{40} \text{ W}$.

Řešení: Minimální hmotnost černé díry je $8 \cdot 10^8 M_\odot$, minimální doba proměnnosti je 2,1 hod.

Úloha 9.18 Určete charakteristickou hmotnost jádra seyfertovské galaxie předpokládáme-li, že pozorované široké emisní čáry vznikají v kvazistacionární obálce plynu kolem jádra o poloměru 0,1 pc. Spektroskopicky určená rychlost plynu je přibližně $930 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení: $M \cong \frac{v^2}{G} R \cong 2 \cdot 10^7 M_\odot$.

Úloha 9.19 Ve vymezené oblasti prostoru o poloměru $R = 5,2 \cdot 10^5 \text{ pc}$ existuje kupa galaxií obsahující 670 pozorovatelných galaxií. Jejich střední rychlost vzhledem k inerciálnímu systému spojenému s hmotným středem kupy činí $1050 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete tzv. viriálovou hmotnost této kupy.

Řešení: Pro gravitačně vázanou kupu platí viriálová věta $\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$, dosazením obdržíme $mv^2 = G \frac{mM}{r}$, odkud $M = \frac{2R}{G} \langle v^2 \rangle \cong 10^{14} M_\odot$.

Úloha 9.20 Pohyb Země (Galaxie) ve směru souhvězdí Lva způsobuje tzv. dipólovou anizotropii reliktního záření vzhledem k jeho střednímu rozložení. Zjištěná rozdílnost teplot ve směru apexu a antiapexu je rovna $\Delta T = 7 \cdot 10^{-3} \text{ K}$, střední teplota reliktního záření je $T_0 = 2,7 \text{ K}$. Tedy v důsledku platnosti Dopplerova jevu se reliktní záření ve směru pohybu jeví jako teplejší, v protilehlém směru chladnější. Určete rychlost pohybu Země v , předpokládáme-li, že úhel ϑ mezi směrem vektoru rychlosti a směrem pozorování je nulový, tedy $\cos \vartheta = 1$.

Řešení: Pro teplotu záření ve směru apexu platí $T = T_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)$, $T - T_0 = \frac{\Delta T}{2}$. Dosazením určíme $v \cong 400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Úloha 9.21 Předpokládejme, že kosmický prostor je rovnoměrně vyplněn galaxiemi se stejnou absolutní hvězdnou velikostí a je dokonale průzračný. Dokažte, že podíl počtu galaxií do $(m+1)$ pozorované hvězdné velikosti a počtu galaxií m -té hvězdné velikosti je roven $\frac{N(m+1)}{N(m)} = 3,98$.

Řešení: Z upravené Pogsonovy rovnice, při zadaných podmínkách, dostaneme pro vzdálenost vztah $r = 10^{1-0,2M} 10^{0,2m}$. Celkový počet galaxií s hvězdnou velikostí m je roven $N(m) \sim r^3 \sim 10^{0,6m} \cdot 10^{3(1-0,2M)}$. Odtud pro poměr dostaneme $\frac{N(m+1)}{N(m)} = \frac{10^{0,6(m+1)}}{10^{0,6m}} = 10^{0,6} = 3,98$.

Úloha 9.22 Kterých částic je v současné době ve vesmíru více, reliktních fotonů nebo protonů? Střední hustota látky ve vesmíru je $10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Teplota reliktních fotonů je 2,7 K.

Řešení: Celkový počet fotonů v 1 m^3 je $N = \int_0^\infty \frac{8\pi}{\lambda} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1} = 2.10^7 T^3$. V každém m^3 je v současné době $2.10^7 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cong 4 \cdot 10^8$ fotonů. Předpokládáme-li, že základní příspěvek pro střední hustotu vesmíru dává vodík, potom počet protonů je roven $\frac{10^{-27}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \cong 0,6 \text{ m}^{-3}$. Při započtení části skryté hmoty, kterou by mohla tvořit např. neutrina s nenulovou klidovou hmotností, by koncentrace protonů byla ještě nižší. Shrnuto ve vesmíru je reliktních fotonů asi 10^9 krát více než protonů. Základní jednotky stavební hierarchie vesmíru – hvězdy však jsou složeny převážně z protonů.

Úloha 9.23 Odvoďte v rámci klasické fyziky vztah mezi kritickou hustotou a Hubbleovou konstantou. Odhadněte stáří vesmíru.

Řešení: Zkoumejme sférickou oblast prostoru o hmotnosti $M = \text{konst.}$, $\rho = \rho(t)$, $R = R(t)$. V ní se pohybují částice – galaxie o hmotnosti m , částice na povrchu koule má rychlost v_R . Platí vztah pro celkovou mechanickou energii $\frac{1}{2}mv_R^2 - G\frac{mM}{R} = W_c$. Odtud pro hustotu energie w dostaneme $\frac{1}{2}v_R^2 - G\frac{M}{R} = w$. V určitém čase $t = t_0$, platí podle Hubbleova zákona $v_R = H R(t)$ a dále $\rho = \rho(t_0)$. Úpravou obdržíme $R^2 \left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}G\pi\rho\right) = w$. V kritickém stavu při $R \rightarrow \infty$ je $\frac{w}{R^2} \rightarrow 0$ platí $\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}G\pi\rho_k = 0$, odtud $\rho_k = \frac{3}{8}\frac{H^2}{\pi G}$. Při střední rychlosti expanze $v_R \cong \frac{R}{t}$, odkud s použitím Hubbleova zákona $v_R = H R$ obdržíme $t \cong \frac{1}{H}$. Přijmeme-li Hubbleovu konstantu $H = 75 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ je $t \cong 10^{10}$ roků.

10 Počítačové úlohy

10.1 Záření hvězd

Úloha 10.1 Nakreslete křivku vyzařování černého tělesa pro teploty 5 000 K a 5 780 K. Čím se liší?

Řešení: Pro spektrální hustotu energie vyzařování černého tělesa platí

$$E(\lambda) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

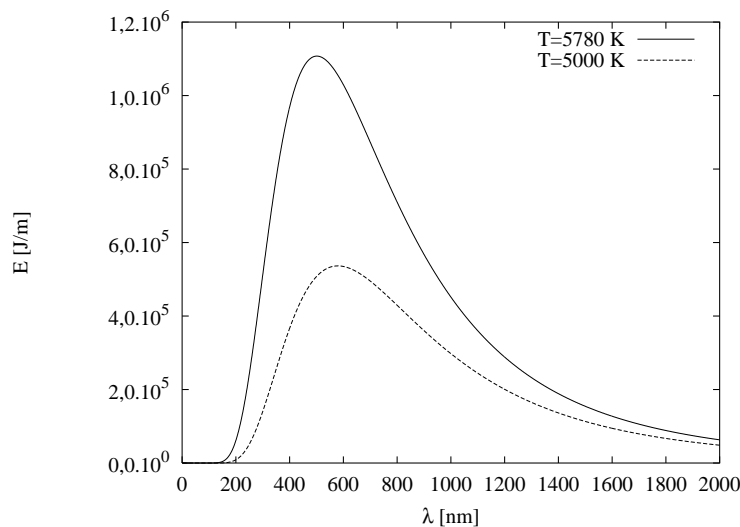
Pro výpočet lze použít například následující funkci:

```
function b(tep,lam:double):double;

const h=6.6256e-34;    {Planckova konstanta}
      c=2.99792e8;     {rychlost svetla}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}

var lam5:double;

begin
  lam5:=lam*lam*lam*lam*lam;
  b:=8.0*pi*h*c/lam5/(exp(h*c/lam/bolk/tep)-1.0);
end;
```



Obrázek 1: Závislost spektrální hustoty vyzařování černého tělesa na vlnové délce.

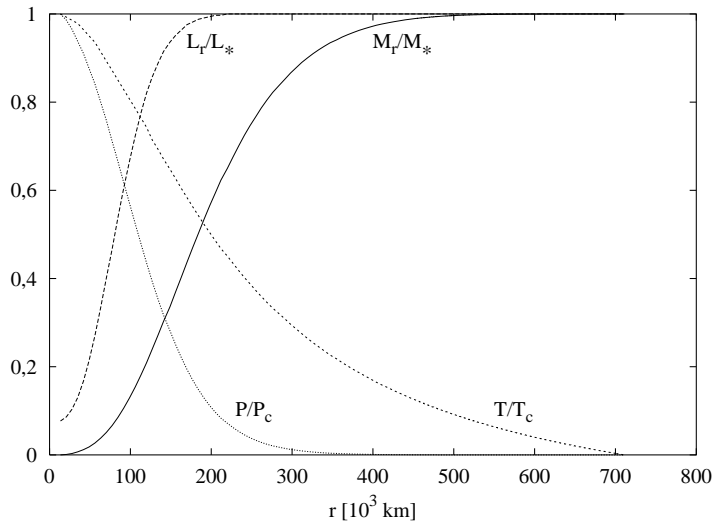
Graf závislosti Planckovy funkce na vlnové délce pro teploty 5 000 K a 5 780 K je na obrázku 1. Jsou patrné dva závěry. V celém intervalu vlnových délek platí, že spektrální hustota vyzařovaná tělesem s vyšší teplotou je větší. Patrný je posuv maxima obou křivek, pro vyšší teploty směrem k nižším vlnovým délkám.

10.2 Nitro hvězd

Úloha 10.2 S použitím programu STATSTAR vypočtete model hvězdy se sluneční hmotností (s parametry¹ hmotnost, zářivý výkon a efektivní teplota rovnými $1,0 M_{\odot}$, $0,86071 L_{\odot}$ a $5\,500,2\text{ K}$, chemické složení odpovídá Slunci, $X = 0,7$, $Y = 0,292$ a $Z = 0,008$).

1. Nakreslete závislost P , M_r , L_r a T na r .
2. Pro jakou teploty a pro jaký poloměr dosahuje L_r 99% a 50% své povrchové hodnoty? Jaká tomu odpovídá hodnota M_r ?

Řešení: Graf jednotlivých závislostí je na obr. 2.



Obrázek 2: Model hvězdy se sluneční hmotností

Úloha 10.3 Pomocí programu STATSTAR vypočtete model hvězdy na hlavní posloupnosti s hmotností $1,0 M_{\odot}$ (pro tuto hvězdu jsou zářivý výkon a efektivní teplota rovny $0,86071 L_{\odot}$ a $5\,500,2\text{ K}$) a porovnejte ho s modelem hvězdy o hmotnosti $0,75 M_{\odot}$ (pro tuto hvězdu jsou zářivý výkon a efektivní teplota rovny $0,1877 L_{\odot}$ a $3\,839,1\text{ K}$). Pro obě hvězdy předpokládejte chemické složení odpovídající Slunci ($X = 0,7$, $Y = 0,292$ a $Z = 0,008$).

Řešení: Centrální tlak a teplota hvězdy se sluneční hmotností ($T_c = 1,4 \cdot 10^7\text{ K}$, $\rho_c = 7,7 \cdot 10^4\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) jsou vyšší než odpovídající hodnoty pro hvězdu s hmotností nižší ($T_c = 1,1 \cdot 10^7\text{ K}$, $\rho_c = 6,8 \cdot 10^4\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$).

Úloha 10.4 Porovnejte parametry hvězd s hmotností $1,0 M_{\odot}$ s různými chemickými složeními $X = 0,7$, $Y = 0,292$, $Z = 0,008$ a $X = 0,7$, $Y = 0,29$, $Z = 0,01$. Vysvětlete případné rozdíly.

¹Přesné hodnoty parametrů hvězd jsou uvedeny pouze pro získání daného modelu stavby hvězdy (jsou vybrány tak, aby byly splněny příslušné okrajové podmínky diferenciálních rovnic popisujících stavbu hvězd) a nemají tedy astrofyzikální smysl.

Řešení: Hvězda s vyšším obsahem kovů má nižší efektivní teplotu ($T_{\text{ef}} = 5\,280\text{ K}$) a zářivý výkon ($L = 0,76104L_{\odot}$) než hvězda s chemickým složením shodným se Sluncem (viz. příklad 10.2). Důvodem je větší opacita látky hvězdy s vyšším obsahem kovů. U hvězdy s menším zářivým výkonem je nižší centrální teplota.

Úloha 10.5 Pomocí programu STATSTAR vypočítejte teoretickou hlavní posloupnost pro hvězdy s hmotnostmi $0,5 M_{\odot} - 13,0 M_{\odot}$. Zvolte sluneční chemické složení ($X = 0,7$, $Y = 0,292$ a $Z = 0,008$).

Řešení: Charakteristiky² hvězd hlavní posloupnosti získané programem STATSTAR jsou uvedeny v tabulce.

$M [M_{\odot}]$	$L [L_{\odot}]$	$T_{\text{ef}} [\text{K}]$
0,50	0,0213005	2321,4
0,70	0,129867	3523,0
1,00	0,86071	5500,2
1,50	6,39	8726,4
2,00	22,5809	11218,4
3,00	116,58	15007,3
4,00	341,1	17904,0
7,00	2260,2	24074,0
10,00	6641,5	28263,6
13,00	13789,5	31493,0

10.3 Hvězdné atmosféry

Úloha 10.6 Nakreslete graf závislosti poměru koncentrace neutrálního vodíku k celkové koncentraci vodíku v závislosti na teplotě za předpokladu termodynamické rovnováhy. Pro zjednodušení předpokládejte, že koncentrace elektronů je $n_e = 10^{17}\text{ m}^{-3}$.

Řešení: Pro Sahovo rozdělení platí

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{2B_1}{n_e B_0} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT},$$

kde N_1 je koncentrace iontu, N_0 neutrálního atomu, B_1 a B_0 jsou příslušné rozdělovací funkce a χ_i ionizační potenciál. Celková koncentrace atomů vodíku $N = N_1 + N_0$. Pro získání hodnot v grafu je možné použít následující program:

```
program sahav;
var tep,nel,x:double;
    i:integer;
function saha(tep,nel:double):double;
```

²Viz poznámka k úloze 10.2.

```

const em=9.10956e-31; {hmotnost elektronu}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      h=6.6256e-34;    {Planckova konstanta}
      exc=13.598;      {excitacni energie H v eV}
      enab=1.6022e-19; {naboj elektronu}

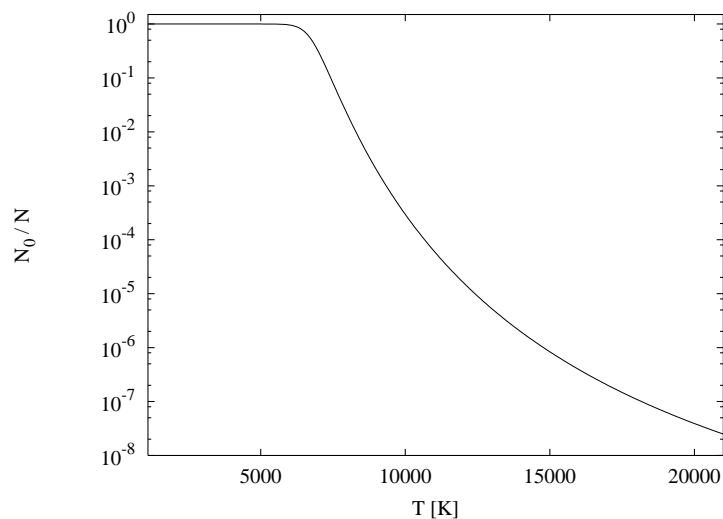
var b1,b2,x:double;

begin
  b1:=2.0;
  b2:=1.0;
  x:=2.0*pi*em*bolk*tep/h/h;
  saha:=2.0*b2*sqrt(x)*x*exp(-exc*enab/bolk/tep)/nel/b1;
end;

begin
  tep:=1000;
  nel:=1.0e17;
  for i:=1 to 200 do
  begin
    tep:=tep+100.0;
    x:=saha(tep,nel);
    writeln(tep,1.0/(1.0+x));
  end;
end.

```

Výsledný graf je na obrázku 3.



Obrázek 3: Graf závislosti relativní koncentrace atomů HI na teplotě.

Úloha 10.7 Nakreslete graf závislosti poměru koncentrace vodíku s elektronem, nacházejícím se na druhé energetické hladině k celkové koncentraci vodíku v závislosti na teplotě za předpokladu termodynamické rovnováhy. Pro zjednodušení předpokládejte, že koncentrace elektronů je $n_e = 10^{20} \text{m}^{-3}$. Vysvětlete tvar získaného grafu. Jaký závěr lze učinit pro čáry Balmerovy série vodíku?

Řešení: Využijeme výsledku předcházejícího příkladu (10.6) pro výpočet relativního zastoupení neutrálního vodíku. Pro výpočet podílu koncentrace vodíku na druhé hladině k celkovému množství neutrálního vodíku využijeme Boltzmannovy rovnice

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{g_B}{g_A} e^{-\chi_{AB}/kT},$$

kde N_B a je koncentrace atomu vodíku na druhé hladině a N_A celková koncentrace neutrálního vodíku, g_B a g_A jejich statistické váhy, χ_{AB} excitační energie.

Pro získání grafu na obrázku 4 je možné použít následující program,

```
program sahav2;
```

```
const em=9.10956e-31; {hmotnost elektronu}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      h=6.6256e-34;    {Planckova konstanta}
      exc=13.598;     {excitacni energie H v~eV}
      enab=1.6022e-19; {naboj elektronu}
```

```
var tep,nel,x,n,gh,g2,x2:double;
    i:integer;
```

```
function saha(tep,nel:double):double;
```

```
const em=9.10956e-31; {hmotnost elektronu}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      h=6.6256e-34;    {Planckova konstanta}
      exc=13.598;     {excitacni energie H v~eV}
      enab=1.6022e-19; {naboj elektronu}
```

```
var g1,g2,x:double;
```

```
begin
  g1:=2.0;
  g2:=1.0;
  x:=2.0*pi*em*bolk*tep/h/h;
  saha:=2.0*g2*sqrt(x)*x*exp(-exc*enab/bolk/tep)/nel/g1;
end;
```

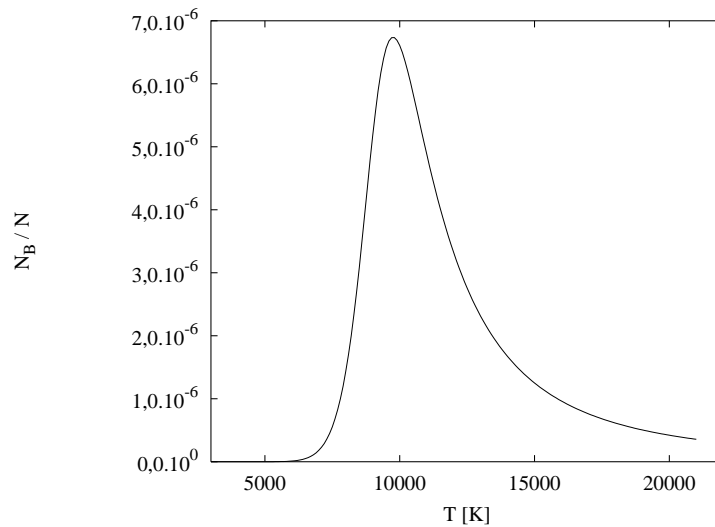
```
begin
  tep:=1000;
```

```

nel:=1.0e20;
gh:=2.0;
n:=2.0;
g2:=2.0*n*n;
for i:=1 to 200 do
begin
  tep:=tep+100.0;
  x:=saha(tep,nel);
  x2:=g2/gh*exp(-exc*enab/bolk/tep*(1.0-1.0/n/n));
  writeln(tep,x2/(1.0+x));
end;
end.

```

ve kterém jsme využili funkci `saha` z předcházejícího příkladu.



Obrázek 4: Graf teplotní závislosti relativní koncentrace atomů vodíku na druhé energetické hladině na teplotě.

Tvar křivky je dán jednak tím, že s rostoucí teplotou roste podíl excitovaných atomů vodíku k atomům v základním stavu. Proto křivka pro nízké teploty zprvu roste. Pro vyšší teploty se začíná vodík ionizovat, ubývá celkového množství atomů vodíku v základním stavu a tedy i podíl atomů vodíku na druhé hladině klesá.

Balmerovy čáry vznikají přechody mezi hladinou s kvantovým číslem 2 a vyššími hladinami. Proto jsou za dané elektronové koncentrace nejvýraznější právě pro teplotu $T \cong 9800\text{K}$.

Úloha 10.8 Intenzita vycházející z izotermické vrstvy nacházející se v lokální termodynamické rovnováze je dána přesným řešením rovnice přenosu záření

$$I_\lambda = I_\lambda(0)e^{-\tau_0} + \int_0^{\tau_0} B_\lambda(T(\tau))e^{-(\tau-\tau_0)}d\tau,$$

kde $I_\lambda(0)$ je dopadající intenzita záření v bodě s nulovou optickou hloubkou $\tau = 0$, τ_0 je optická hloubka vrstvy a $B_\lambda(T(\tau))$ Planckova funkce. V případě zmiňované izotermické vrstvy lze Planckovu funkci vytknout před integrál a provést integraci,

$$I_\lambda = I_\lambda(0)e^{-\tau_0} + B_\lambda(T)(1 - e^{-\tau_0})$$

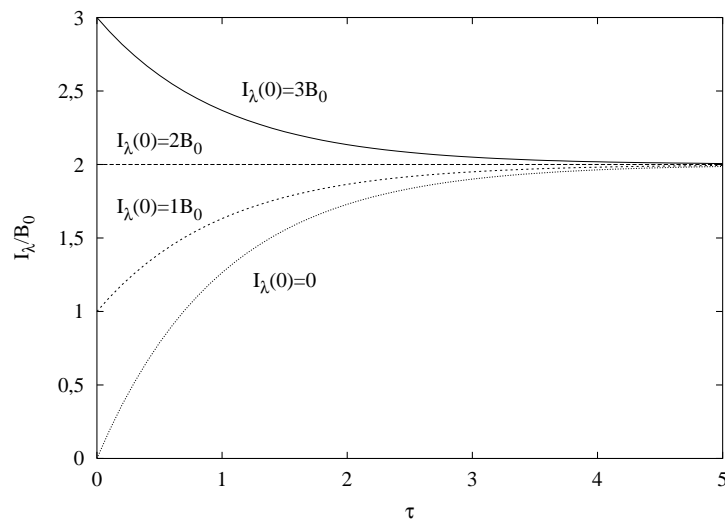
Zvolte $B_\lambda(T) = 2B_0$ a nakreslete závislost vystupující intenzity na optické tloušťce vrstvy pro hodnoty dopadající intenzity záření $I_\lambda(0) = 0, 1B_0, 2B_0, 3B_0$. Diskutujte získané výsledky. Co platí pro opticky tenkou vrstvu ($\tau_0 \ll 1$) a pro opticky tlustou vrstvu ($\tau_0 \gg 1$)?

Řešení: Pro výpočet závislosti vystupující intenzity na tloušťce vrstvy je možné použít následující program:

```
program izotv;

var i: integer;
    b,tau,int,i0: double;

begin
  b:=2.0;
  i0:=3.0;
  for i:=1 to 100 do
  begin
    tau:=(i-1)/10.0;
    int:=i0*exp(-tau)+b*(1.0-exp(-tau));
    writeln(tau,int);
  end;
end.
```



Obrázek 5: Závislost intenzity vyzářené vrstvou na její optické hloubce pro různé hodnoty dopadající intenzity.

Nejprve diskutujeme případ, kdy na vrstvu nedopadá žádné záření ($I_\lambda(0) = 0$, viz. obr. 5). Je patrné, že pro opticky tenké vrstvy je intenzita záření závislá na optické hloubce lineárně, pro rostoucí optické hloubky vrstvy se blíží k Planckově funkci. Obecně, pro libovolnou intenzitu dopadajícího záření platí, že intenzita vystupujícího záření pro případ opticky tenké vrstvy je přibližně rovna intenzitě dopadajícího záření. Příkladem opticky tenkých prostředí mohou být například některé hvězdné větry. Naopak, pro opticky tlustá prostředí intenzita vystupujícího záření se blíží Planckově funkci, nezávisí tedy na intenzitě dopadajícího záření a na optické hloubce vrstvy. Příkladem opticky tlustého prostředí může být sluneční atmosféra v čáře H_α .

Úloha 10.9 Předpokládejte, že nad povrchem hvězdy, který září jako černé těleso o teplotě $T_p = 5780$ K se nachází vrstva s optickou hloubkou $\tau = 1$ ve stavu lokální termodynamické rovnováhy. V pozorované oblasti spektra hvězdy se nachází atomární čára, která má střed na vlnové délce $\lambda_0 = 500$ nm. S využitím výsledku předcházejícího příkladu vypočtěte pozorovanou relativní intenzitu v závislosti na vlnové délce (vyjádřené v násobcích Dopplerovské šířky čáry $\Delta\lambda_D$) v případě, že teplota vrstvy je a) $T_v = 5000$ K, b) $T_v = 7000$ K, c) $T_v = T_p$. Přitom položte zdrojovou funkci $S(\lambda_0, T) = V(a, v)B(\lambda, T_v)$, kde $V(a, v)$ je tzv. Voigtova funkce s parametry $v = (\lambda - \lambda_0)/\Delta\lambda_D$ a parametrem a , charakterizujícím Lorentzovské rozšíření čáry (zvolte např. $a = 1$). Voigtovu funkci aproximujte vztahem $V(a, v) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\exp(-v^2) + \frac{a}{\sqrt{\pi}(v^2 + a^2)} \right)$. Vysvětlete získané výsledky.

Řešení: Pro intenzitu záření černého tělesa je možné odvodit vztah

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Se znalostí předcházejícího příkladu 10.8 je možné napsat následující program, který vypočítá záření emitované vrstvou:

```
program prof;

const a=1.0;
      tau0=1.0;
      ts=5780.0;
      t1=5000.0;
      lam0=5000.0e-10;

var i,j:integer;
     i0,u:double;

function voigt(v,agam:double):double; {Voigtova funkce}
begin
  if(abs(v)>8.0) then
    voigt:=agam/sqrt(pi)/(agam*agam+v*v)/sqrt(pi)
  else
    voigt:=(exp(-v*v)+agam/sqrt(pi)/(agam*agam+v*v))/sqrt(pi);
  end;

function b(tem,lam:double):double;
```

```

const h=6.6256e-34;    {Planckova konstanta}
      c=2.99792e8;     {rychlost svetla}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}

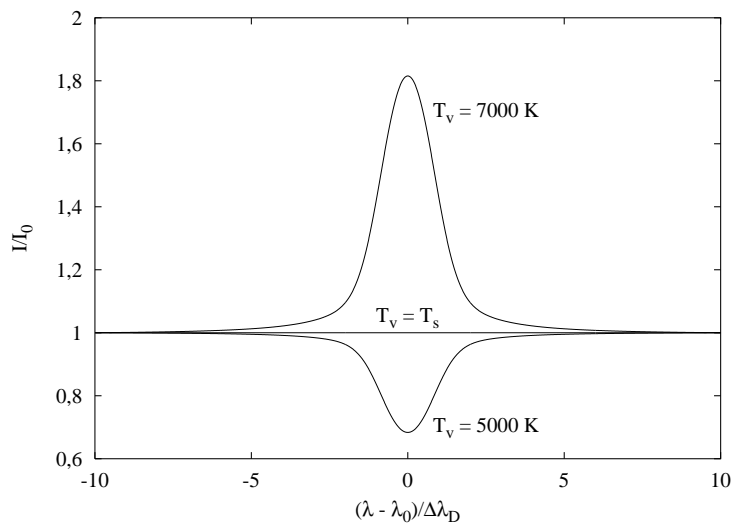
var lam5:double;

begin
  lam5:=lam*lam*lam*lam*lam;
  b:=2.0*h*c*c/lam5/(exp(h*c/lam/bolk/tep)-1.0);
end;

function profil(a,tau0,u:double):double;
var tau: double;
begin
  tau:=tau0*voigt(u,a);
  profil:=b(ts,lam0)*exp(-tau)+b(tl,lam0)*(1.0-exp(-tau));
end;

begin
  u:=-10.0;
  i0:=profil(a,tau0,u);
  for i:=0 to 2000 do
    begin
      u:=u+0.01;
      writeln(u,profil(a,tau0,u)/i0);
    end;
end.

```



Obrázek 6: Profily čar vyzařované vrstvou nacházející se v lokální termodynamické rovnováze pro různé teploty látky.

Na obrázku 6 jsou nakresleny profily čar, získané uvedeným programem. Jednotlivým případům uvedeným v zadání se budeme věnovat podrobněji. Obecně však platí (viz. výsledek předcházejícího příkladu 10.8), že v centru čáry, kde je optická hloubka vrstvy vysoká, se pozorovaná intenzita blíží Planckově funkci s teplotou rovnou teplotě vrstvy. Naopak v křídlech čáry, kde je optická hloubka vrstvy nízká, se pozorovaná intenzita blíží Planckově funkci s teplotou rovnou teplotě dopadajícího záření. Tento poznatek je také klíčem k pochopení jednotlivých případů. V případě a), kdy je teplota vrstvy nižší než teplota dopadajícího záření, je také hodnota Planckovy funkce v centru čáry nižší, než hodnota Planckovy funkce dopadajícího záření a my pozorujeme absorpční čáry. Tento model je možné použít pro vysvětlení vzniku absorpčních čar např. ve viditelném spektru Slunce. Opačný jev nastává v případě b), kdy je teplota vrstvy vyšší než teplota dopadajícího záření. Tento model popisuje vznik emisních čar. V případě c), kdy je teplota vrstvy rovna teplotě dopadajícího záření se vrstva spolu s okolním zářením nachází ve stavu termodynamické rovnováhy a žádné čáry nepozorujeme.

Úloha 10.10 Pro situaci popsanou v předcházejícím příkladě nakreslete závislost ekvivalentní šířky čáry na optické hloubce čáry.

Řešení: Pro výpočet ekvivalentní šířky čáry v závislosti na její optické hloubce, je možné využít následující program:

```
program krivrust;

const taumin=0.5;
      taumax=100.0;
      ntau=300;
      nlam=200;
      u0=-800.0;
      a=1.0;
      ts=5780.0;
      t1=5000.0;
      lam0=5000.0e-10;

var x,gam: double;
    i,j: integer;
    tau0,w,it,i0,u,dltau,dlam:double;

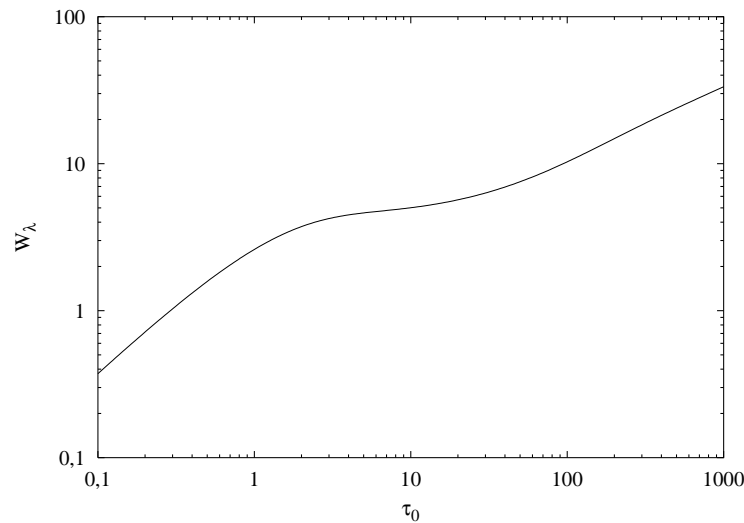
begin
  tau0:=taumin;
  dltau:=exp((ln(taumax)-ln(taumin))/(ntau-1));
  dlam:=2.0*abs(u0)/nlam;
  for j:=0 to ntau do
    begin
      u:=u0;
      i0:=profil(a,tau0,u);
      w:=0;
      for i:=0 to nlam do
        begin
```



```

it:=(i0-profil(a,tau0,u))/i0;
u:=u+dlam;
if(i>0) and (i<nlam) then
  w:=w+it
else
  w:=w+0.5*it;
end;
w:=w*dlam;
writeln(tau0,' ',w);
tau0:=tau0*dltau;
end;
end.

```



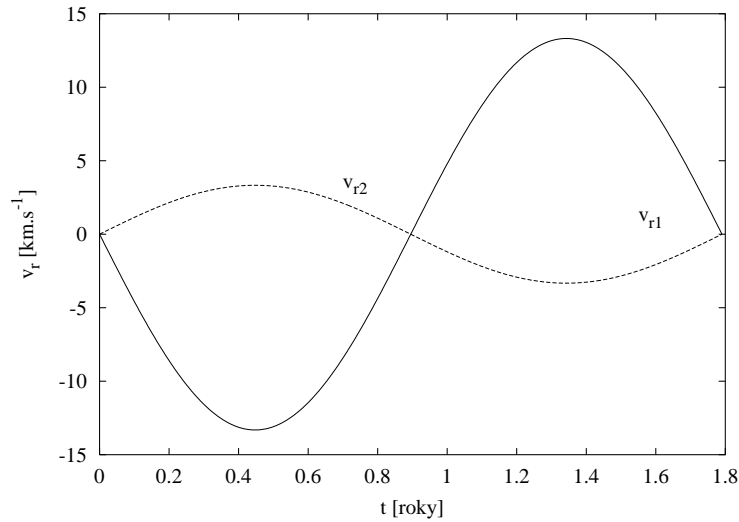
Obrázek 7: Závislost ekvivalentní šířky čáry na optické hloubce čáry.

Funkce `voigt`, `b` a `profil` zde nevyepisujeme, všechny je možné převzít z předcházející úlohy 10.8. Graf, který byl získán uvedeným programem, je na obr. 7.

10.4 Dvojhvězdy

Úloha 10.11 Hvězdy s hmotnostmi $M_1 = 0,5 M_\odot$ a $M_2 = 2,0 M_\odot$ obíhají po kruhových drahách kolem společného hmotného středu. Součet poloos obou drah je $a = 2.0$ AU, inklinací úhel $i = \pi/6$. Nakreslete křivku radiálních rychlostí.

Řešení: Vzájemná rychlost obou hvězd je dána vztahem $v^2 = G(M_1 + M_2)/a$, pro radiální rychlost první hvězdy platí $v_{r1} = -\sin i \sin \theta \mu v / M_1$, kde θ je úhel mezi přímkou spojující hvězdy a směrem k pozorovateli. Pro vykreslení křivky radiálních rychlostí na obr. 8 lze použít následující program:



Obrázek 8: Křivka radiálních rychlostí

```

program radrych;

const au=1.496e11;
      ms=1.989e30;
      a=2.0*au;
      m1=0.5*ms;
      m2=2.0*ms;
      i=pi/6.0;
      ntheta=1000;
      g=6.67e-11;
      rok=60.0*60.0*24.0*365.0;

var si,theta,v,v1,v2,mu,p,t:double;
    j:integer;

begin
  si:=sin(i);
  mu:=m1*m2/(m1+m2);
  p:=2.0*pi*sqrt(a*a*a/g/(m1+m2));
  for j:=0 to ntheta do
  begin
    theta:=2.0*pi*j/ntheta;
    v:=sqrt(g*(m1+m2)/a);
    v1:=-v*mu/m1*sin(theta)*si;
    v2:=v*mu/m2*sin(theta)*si;
    t:=j/ntheta*p/rok;
    writeln(t,' ',v1,' ',v2);
  end;
end.

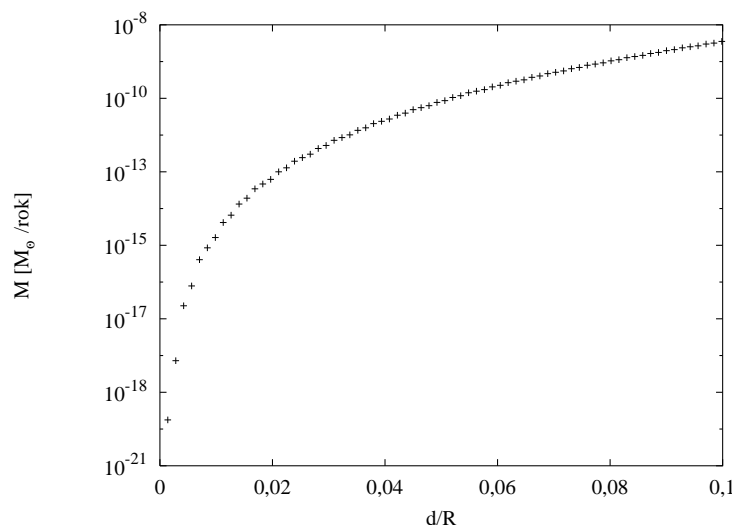
```

Úloha 10.12 V případě, že v dvojhvězdě přetéká hmota, je možné rychlost přenosu odhadnout vztahem $\dot{M} = \rho v A$, kde ρ je hustota látky která přetéká z hvězdy o poloměru R na druhou hvězdu průřezem o ploše A . Odhadneme-li plochu jako $A \cong \pi R d$, kde d je tloušťka vrstvy, která přesahuje Rocheovu plochu a rychlost v položíme rovnu tepelné rychlosti, pak rychlost přenosu hmoty je možné odhadnout

$$\dot{M} \cong \pi R d \rho \left(\frac{3kT}{m_H} \right)^{1/2},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, T je teplota a m_H je hmotnost atomu vodíku. Pomocí programu STATSTAR vypočtete závislost \dot{M} na d pro hvězdu o sluneční hmotnosti (viz. příklad 10.2).

Řešení: Pro výpočet závislosti rychlosti přenosu hmoty \dot{M} na tloušťce vrstvy hvězdy, která přesahuje Rocheovu plochu, je možné použít následující program, který načítá model atmosféry (bez hlavičky) vypočtený programem STATSTAR:



Obrázek 9: Rychlost přenosu hmoty ve dvojhvězdě

```
program phmot;
```

```
const rhv=7.11e8;      {polomer hvezdy}
      rcgs=0.01;      {prepocet CGS}
      rhocgs=1000.0;  {prepocet CGS}
      ms=1.989e30;    {hmotnost Slunce}
      bolk=1.38054e-23; {Boltzmannova konstanta}
      mh=1.6735e-27;  {hmotnost atomu vodiku}
```

```
var dm,r,qm,lr,t,p,rho: double;
    i: integer;
```

```

begin
  for i:=1 to 424 do
    begin
      readln(r,qm,lr,t,p,rho);
      dm:=pi*rhv*(rhv-r*rcgs)*rho*rhocgs*sqrt(3.0*bol*k*t/mh);
      writeln(1.0-r*rcgs/rhv,dm/ms);
    end;
  end.

```

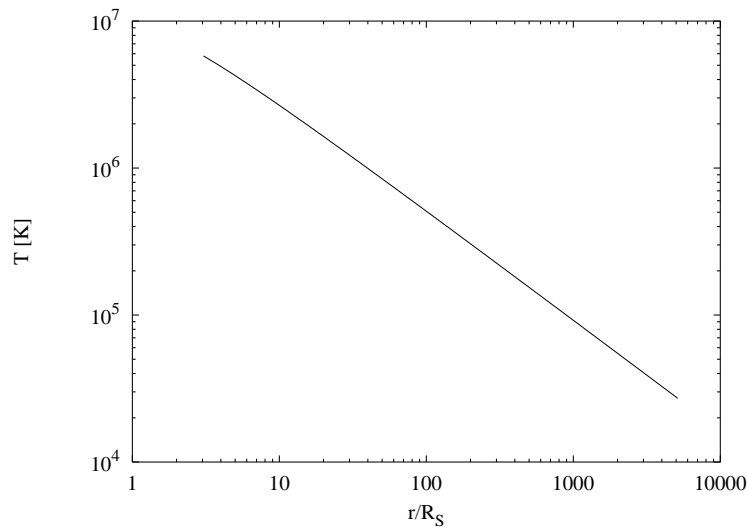
10.5 Pozdní stadia vývoje hvězd, novy, supernovy

Úloha 10.13 Pro teplotu akrečního disku platí vztah

$$T = \left(\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R_S^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R_S}{r} \right)^{3/4} \left[1 - \left(\frac{R_S}{r} \right)^{1/2} \right]^{1/4}.$$

Nakreslete průběh teploty v disku a pomocí Wienova zákona vlnovou délku, na které plyn vyzáří nejvíce energie pro černou díru A0620-00, která je složkou dvojhvězdy, s hmotností $3,82 M_\odot$. Ve vztahu $R_S = 2GM/c^2$ je Schwarzschildův poloměr, σ konstanta Stefanova-Boltzmannova zákona. Graf nakreslete pro poloměr $r > 3R_S$, nad kterým v případě nerotující černé díry existují stabilní dráhy hmotných částic.

Řešení: Pro získání grafů 10 a 11 je možné použít následující program:



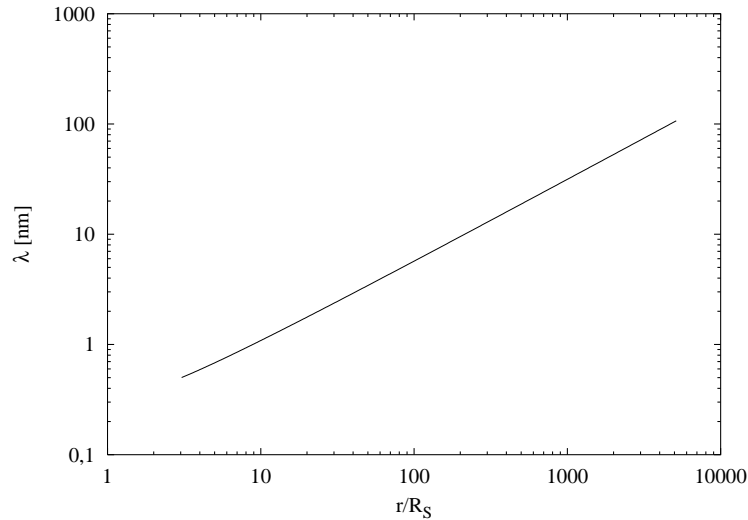
Obrázek 10: Průběh teploty v akrečním disku

```

program disk;

const ms=1.989e30;      {hmotnost Slunce}
      m=3.82*ms;

```



Obrázek 11: Vlnová délka získaná z Wienova posunovacího zákona

```

g=6.67e-11;      {gravitacni konstanta}
dmdt=1.0d14;
sig=5.67051d-8;  {konstanta Stefan-Boltzmannova zakona}
c=2.99792e8;    {rychlost svetla}
b=0.0029;       {konstanta Wienova zakona}

```

```

var rs,tdisk,r,dr,ddr,t,mlam: double;
    i: integer;

begin
  rs:=2.0*g*m/c/c;
  tdisk:=3.0*g*m*dmdt/8.0/pi/sig/rs/rs/rs;
  tdisk:=sqrt(sqrt(tdisk));
  r:=3.0*rs;
  for i:=1 to 500 do
  begin
    r:=1.015*r;
    dr:=sqrt(rs/r);
    ddr:=sqrt(dr);
    t:=tdisk*ddr*ddr*ddr*sqrt(sqrt(1.0-dr));
    mlam:=b/t;
    writeln(r/rs,t,mlam*1.0e9);
  end;
end.

```

10.6 Extragalaktická astronomie

Úloha 10.14 Určete zářivý výkon aktivní galaxie Cygnus A v rádiovém oboru pomocí zářivého toku uvedeného v tabulce, víte-li, že galaxie je vzdálena 250 Mpc.

$\log \nu$ [Hz]	$\log F_\nu$ [J.m ⁻² .Hz ⁻¹]	$\log \nu$ [Hz]	$\log F_\nu$ [J.m ⁻² .Hz ⁻¹]
7,0	-21,88	8,7	-22,38
7,3	-21,55	9,0	-22,63
7,7	-21,67	9,3	-22,96
8,0	-21,66	9,7	-23,43
8,3	-22,09	10,0	-23,79

Řešení: Abychom získali zářivý výkon v radiovém oboru, musíme integrovat zářivý tok přes všechny frekvence a sečíst tok na kouli o poloměru 250 Mpc. S použitím lichoběžníkového pravidla je možné napsat následující program:

```

program agn;

const nf=10;
      d=250.0;
      mpc=3.09e22;

var nu,nus,f,fs,lr,r: double;
      i: integer;

function des(x: double) : double;
begin
  des:=exp(x*ln(10.0));
end;

begin
  lr:=0.0;
  for i:=1 to nf do
  begin
    read(nu,f);
    nu:=des(nu);
    f:=des(f);
    if(i > 0) then lr:=lr+0.5*(fs+f)*(nu-nus);
    fs:=f;
    nus:=nu;
  end;
  r:=d*mpc;
  lr:=4.0*pi*r*r*lr;
  writeln(lr);
end.

```

Zářivý výkon galaxie Cygnus A v radiovém oboru je $9 \cdot 10^{37} \text{ J.s}^{-1}$, což je o šest řádů více, než je zářivý výkon galaxie M31 v radiové oblasti a asi desetkrát více než zářivý výkon naší Galaxie ve *všech* oborech elektromagnetického spektra.

11 Astronomické a fyzikální konstanty, převody a zákony

Většina konstant je zaokrouhlena na 3 platná místa.

Základní charakteristiky Slunce:

Hmotnost M_{\odot}	1,99.10 ³⁰ kg
Poloměr R_{\odot}	6,96.10 ⁸ m
Zářivý výkon L_{\odot}	3,86.10 ²⁶ W
M_{bol}	4,75 mag
m_{bol}	-26,85 mag
Solární konstanta K	1,37.10 ³ W.m ⁻²
Střední vzdálenost od Země AU	1,496.10 ¹¹ m

$$1 \text{ pc} = 3,086.10^{16} \text{ m}$$

$$1 \text{ rad} = 206\,265''$$

$$1 \text{ rok} = 3,156.10^7 \text{ s}$$

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$$

$$\text{Zářivý výkon hvězdy } L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4.$$

$$\text{Vztah hmotnost – zářivý výkon pro hvězdy HP } L \sim \frac{\mu^4}{\kappa} M^3.$$

$$\text{Rovnice hydrostatické rovnováhy } \frac{dP}{dr} = -G \frac{M\rho}{r^2}.$$

$$\text{Teplotní gradient při přenosu zářením } \frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa L_r}{64\pi\sigma r^2 T^3} \rho.$$

$$\text{Podmínka konvekce } \frac{dT}{dr} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}.$$

$$\text{Eddingtonova limita zářivého výkonu } L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi cGM}{\kappa}.$$

$$\text{Optická hloubka } \tau_{\lambda} = \int_0^s \kappa_{\lambda 1} \rho ds.$$

$$\text{III. Keplerův zákon } \frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2).$$

$$\text{Změna oběžné doby při přenosu hmoty u dvojhvězd } \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = 3 \frac{dM_1}{dt} \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}.$$

$$\text{Zářivý výkon kosmického tělesa při akreci hmoty } L \cong G \frac{M}{R} \frac{dM}{dt}.$$

$$\text{Maximální hodnota teploty disku při akreci } T_{\text{max}} = 0,488 \left(\frac{3GM \frac{dM}{dt}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

$$\text{Gravitační rudý posuv } z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R}.$$

$$\text{Podmínka degenerace } K_1 \rho^{\frac{5}{3}} \geq \frac{A\rho T}{\mu}.$$

$$\text{Zářivý výkon pulsaru } L = \frac{8}{5} \pi^2 M R^2 P^{-3} \frac{dP}{dt}.$$

Disperzní míra $DM = \int_0^d n_e dl$.

Jeansova kritická hmotnost $M_J \cong \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Poloměr Strömgrenovy oblasti $r_S \cong \left(\frac{3N_f}{4\pi\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} n_H^{-\frac{2}{3}}$.

Relativistická rychlost vzdalování $v = c \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$.

Kritická hodnota hustoty $\rho_k = \frac{3}{8} \frac{H^2}{\pi G}$.

Hubbleův zákon $v = Hr$.

Fyzikální konstanty a zákony:

Wienův posunovací zákon $\lambda_{\max}T = b$.

Energetické hladiny atomu vodíku $E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2}$.

Spektrální rozlišovací schopnost $R = mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$.

Šířka spektrální čáry při teplotním rozšíření $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Tlak plynu a tlak záření $P_g = \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho T$, $P_r = \frac{4\sigma}{3c}T^4$.

Boltzmannova rovnice $\log \frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{T}\chi_{AB} + \log \frac{g_B}{g_A}$.

Sahova rovnice $\log \frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2} \log T - \frac{5040}{T}\chi_i - \log P_e + \log \frac{2B_{r+1}(T)}{B_r(T)} - 0,48$.

Gravitační potenciální energie sférického tělesa $E_p = -\frac{3}{5}G \frac{M^2}{R}$.

Viriálová věta pro gravitačně vázané soustavy $2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$.

Planckova konst. $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s

Rychlost světla ve vakuu $c = 2,99 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

Gravitační konst. $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m².kg⁻²

Boltzmannova konst. $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹

Stefanova-Boltzmannova konst. $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴

Konstanta Wienova posunovacího zákona $b = 2,89 \cdot 10^{-3}$ m.K

Plynová konstanta $\mathcal{R} = 8,31 \cdot 10^3$ J.kg⁻¹.K⁻¹

Hmotnost elektronu $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg

Hmotnost protonu $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

Hmotnost neutronu $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

Atomová hmotnostní jednotka $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg

Hubbleova konstanta $H = 75$ km.s⁻¹.Mpc⁻¹

1 eV = 1,60.10⁻¹⁹ J

1 eV = 1,60.10⁻¹² erg

1 Pa = 10 dyn.cm⁻²

$m_H = 1,67352 \cdot 10^{-24}$ g

$\sigma_T = 6,6524 \cdot 10^{-25}$ cm⁻²

Literatura

- [1] Böhm – Vitense, E.: Introduction to Stellar Astrophysics. Cambridge University Press 1992.
- [2] Bowers, R., Deeming, T.: Astrophysics I – Stars, II – Interstellar Matter and Galaxies. Jones and Bartlett Publishers. Boston 1984.
- [3] Carroll, B. W., Ostlie, D. A.: An Introduction to Modern Astrophysics. Addison – Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, 1996.
- [4] Cox, A. N.: Allen’s Astrophysical Quantities. Springer Verlag, New York 2000.
- [5] Gray, D. F.: The Observation and Analysis of Stellar Photospheres. John Wiley and Sons, London 1993.
- [6] Harwit, M.: Astrophysical Concepts. Springer, New York 1998.
- [7] Ivanov, V. V, Krivov, A. V., Denisenkov, P. A.: The Paradoxical Universe. Peterburg 1998.
- [8] Kozel, S. M., Rašba, E. I., Slavatinskij, S. A.: Sbornik zadač po fizike. Nauka, Moskva 1987.
- [9] Lang, K. R.: Astrophysical Formulae. Springer Verlag, Berlin 1974.
- [10] Martynov, D. J., Lipunov, V.M.: Sbornik zadač po astrofizike. Nauka, Moskva 1986.
- [11] Mikulášek, Z.: Sbíрка úloh z fyziky hvězd. <http://www.hvezdarna.cz>
- [12] Phillips, A.C.: The Physics of Stars. John Wiley & Sons, New York 1999.
- [13] Prialnik, D.: An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution. Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- [14] Rutten, R. J.: Radiative Transfer in Stellar Atmospheres. Sterrekunding Instituut, Utrecht 1999.
- [15] Schrijver, H.: The Hipparcos and Tycho Catalogues. Volume 5 – 11. ESA Publications Division, Noordwijk 1997.
- [16] Sobolev, V.V.: Kurs teoreticheskoj astrofiziki. Nauka, Moskva 1985.
- [17] Swihart, T. L.: Basic Physics of Stellar Atmospheres. Pachart Publishing House, Tuscon 1971.
- [18] Unsöld, A., Baschek, B.: The New Cosmos, Springer Verlag, Berlin 2001.
- [19] Zeilik, M., Gregory, S. A.: Introductory Astronomy and Astrophysics. Sanders College Publishing, Fort Worth 1998.
- [20] Zombeck, M. V.: Handbook of Space Astronomy and Astrophysics. Cambridge University Press, Cambridge 1990. <http://ads.harvard.edu/books/hsaa/>