M A S A R Y K O V A U N I V E R Z I T A

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Vytvoření katalogu planetkových párů a klastrů

Diplomová práce

ELIŠKA HONSOVÁ

Vedoucí práce: Mgr. Petr Fatka, Ph.D.

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Brno, 2025

M U N I P Ř Í R O D O V Ě D E C K Á F A K U L T A

Bibliografický záznam

Autorka:	Ing. Bc. Eliška Honsová
	Přírodovědecká fakulta
	Masarykova univerzita
	Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Název práce:	Vytvoření katalogu planetkových párů a klastrů
Studijní program:	Fyzika
Studijní plán:	Astrofyzika
Vedoucí práce:	Mgr. Petr Fatka, Ph.D.
Akademický rok:	2024/2025
Počet stran:	xv + 62
Klíčová slova:	planetka, asteroid, planetkový pár, planetkový klastr

Bibliographic record

Author:	Ing. Bc. Eliška Honsová
	Faculty of Science
	Masaryk University
	Department of Theoretical Physics and Astrophysics
Title of Thesis:	Creating a catalogue of asteroid pairs and clusters
Degree Programme:	Physics
Study Plan:	Astrophysics
Supervisor:	Mgr. Petr Fatka, Ph.D.
Academic Year:	2024/2025
Number of Pages:	xv + 62
Keywords:	minor planet, asteroid, asteroid pair, asteroid cluster

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá sestavením katalogu planetkových párů a klastrů. Nejprve jsou v databázi známých planetek identifikovány planetky s podobnými heliocentrickými drahami. Následně jsou pomocí statistických metod rozlišeny skutečné planetkové páry a klastry od náhodných shluků planetek. U vybraného vzorku jsou provedeny zpětné integrace drah a detekována těsná přiblížení klonů planetek. Tím je potvrzována existence planetkového páru či klastru a odhadnuto jeho stáří. Celkem je nalezeno 6 875 statisticky významných planetkových párů. Metodou těsných přiblížení je odhadnuto stáří 96 nových planetkových párů a 5 nových planetkových klastrů. Výsledný katalog je součástí elektronické přílohy této práce. Dostupný je též z https: //www.physics.muni.cz/~ehonsova.

Abstract

This master's thesis focuses on creating a catalogue of asteroid pairs and clusters. First, asteroids with similar heliocentric orbits are identified in a database of known asteroids. Statistical methods are then used to distinguish real asteroid pairs and clusters from random pairings. For a selected sample, backward orbital integrations are performed, and close encounters of asteroid clones are detected. The existence of an asteroid pair or cluster is thus confirmed, and its age is estimated. In total, 6875 statistically significant asteroid pairs are found. Using the close encounters method, the ages of 96 new asteroid pairs and 5 new asteroid clusters are estimated. The resulting catalogue is included as an electronic supplement to this thesis. It is also available from https://www.physics.muni.cz/~ehonsova.

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2024/2025

Ústav:	Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
Studentka:	Ing. Bc. Eliška Honsová
Program:	Fyzika
Specializace:	Astrofyzika

Ředitel ústavu PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

Název práce:	Vytvoření katalogu planetkových párů a klastrů
Název práce anglicky:	Creating a catalogue of asteroid pairs and clusters
Jazyk práce:	čeština

Oficiální zadání:

Planetkové páry a klastry vznikají rotačním štěpením mateřské planetky, které je vyvolané YORP efektem. Jedná se tedy o geneticky spřízněné planetky, které po jistou dobu obíhají Slunce po velmi podobných heliocentrických drahách. Nicméně, tato podobnost se časem vytrácí vlivem planetárních perturbací a Jarkovského efektu. Pro nalezení takto vzniklých planetkových systémů je nutné nejprve vytipovat kandidáty na planetkové páry a klastry, což vzhledem k současné velikosti katalogu orbitálních drah (1.3 milionu drah) vyžaduje použití sofistikovaných statistických metod. Odlišení skutečného geneticky spřízněného páru/klastru od náhodného shluku planetek lze provést zpětnými dráhovými integracemi, při kterých je nutné vzít v úvahu také nejistotu počátečních drah a velikosti Jarkovského jevu. Aplikací tohoto postupu řešitel/řešitelka sestaví katalog nalezených planetkových párů a klastrů, odhadne jejich věk (uplynulou dobu od rozpadu mateřské planetky) a zhodnotí spolehlivost jednotlivých řešení. Tento katalog umožní hledat nové korelace a spojitosti mezi planetkovými páry/klastry na statisticky významném množství vzorků.

Vedoucí práce:	Mgr. Petr Fatka, Ph.D.
Datum zadání práce:	21. 11. 2023
V Brně dne:	6. 12. 2024

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Ing. Bc. Eliška Honsová, 21. 11. 2023 Mgr. Petr Fatka, Ph.D., 21. 11. 2023 Mgr. Dušan Hemzal, Ph.D., 13. 12. 2023

Poděkování

Ráda bych poděkovala Petru Fatkovi za vedení práce, za všechny znalosti, co mi ochotně předal, a za to, že ho neopouští humor, ani když se zrovna úplně nedaří. Velice si vážím celé naší tříleté spolupráce.

Svým vyučujícím děkuji za všechno, co mě naučili, a za velice milou atmosféru během studia. Zejména pak děkuji Filipu Hrochovi za poskytnutí útočiště, za neúnavné objasňování fyzikálních i informatických problémů a za osobitý humor. Jiřímu Chaloupkovi děkuji za přijímání studijních výzev, za všechny pikantnosti a za stvoření jedinečné detektivní hry. Bez vás dvou by bylo mé studium trochu těžší a o hodně smutnější.

Dále děkuji všem svým přátelům a blízkým za podporu a chvilky oddychu. Obzvláště pak děkuji Honzovi za veškerou technickou pomoc, za to, že stojí při mně a že je ochotný mě kdykoliv vyslechnout. Michalovi děkuji za pomoc v největší nouzi. Své mamce děkuji za to, že mě bezmezně podporovala během celého mého studia. Děkuji, že jste mi dodávali sil ve chvílích, kdy mně už docházely.

Děkuji též svým šéfům Nikolovi a Vaškovi za to, že mi umožnili flexibilní pracovní dobu a tolerovali komplikace způsobené studiem. Nebýt vás by pro mě bylo téměř nemožné skloubit studium s prací.

Computational resources were provided by the e-INFRA CZ project (ID:90254), supported by the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic. Děkuji za poskytnuté služby.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 6. 5. 2025

Eliška Honsová

Obsah

Úvo	Úvod		
1	Plane 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5	etky a jejich systémy Základní charakteristika Dráhové elementy a jejich vývoj Jarkovského efekt YORP efekt	3 3 5 7 9 10
2	Hled 2.1 2.2 2.3	ání planetkových párů a klastrů Hledání planetek s podobnými drahami Hledání planetkových párů	15 15 16 21
3	Odha 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5	ad stáří planetkových párů a klastrů Metoda těsných přiblížení – vytvoření simulace Optimalizace simulace a výsledná volba parametrů Konvergence sekulárních úhlů	25 25 29 31 32 48
Záv	Závěr		
Lite	Literatura		
Pří	loha		61

Úvod

Jako planetkové páry a klastry označujeme geneticky spřízněná tělesa, vzniklá rotačním štěpením mateřské planetky, která v důsledku procesu svého vzniku obíhají okolo Sluce po velmi podobných heliocentrických drahách. V této diplomové práci sestavíme katalog planetkových párů a klastrů. U vybraných planetkových systémů za pomoci zpětných dráhových integrací odhadneme jejich věk, tedy dobu, která uplynula od rozpadu mateřského tělesa.

V první kapitole si představíme planetky a jejich systémy. V krátkosti shrneme obecné charakteristiky planetek, jako jsou velikost, složení a oblasti jejich výskytu. Poté se zaměříme na popis jejich drah. Vysvětlíme rozdíl mezi oskulačními, středními a vlastními dráhovými elementy. Dále objasníme, jaký vliv mají termální efekty na vznik a vývoj planetkových systémů. Konkrétně popíšeme mechanismus fungování tzv. Jarkovského a YORP efektu. V závěru kapitoly popíšeme rozdíly mezi binárními planetkami, planetkovými páry, planetkovými klastry a rodinami planetek.

Ve druhé kapitole budeme hledat planetkové páry a klastry. Nejprve vytvoříme databázi všech dvojic planetek, které mají podobné heliocentrické dráhy. Poté vytipujeme kandidáty na planetkové páry. U nich za pomoci statistických metod určíme pravděpodobnost, že prověřovaný planetkový pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami. Poté vytipujeme kandidáty na planetkové klastry a opět odhadneme jejich statistickou významnost.

Ve třetí kapitole odhadneme stáří vybraných planetkových párů a klastrů. Nejprve představíme metodu detekce těsných přiblížení klonů planetek. Popíšeme její výhody i úskalí. Poté popíšeme metodu konvergence sekulárních úhlů, za pomoci které budeme odhadovat věk starších dvojic planetek. V posledních dvou částech této kapitoly uvedeme výsledné odhady stáří planetkových párů a jednotlivých členů planetkových klastrů.

1 Planetky a jejich systémy

V této kapitole nejprve v krátkosti shrneme základní charakteristiky planetek, jako jsou velikost, tvar, složení či oblasti jejich výskytu. Poté se budeme věnovat popisu drah, po kterých se planetky pohybují. Vysvětlíme si, jak se jejich dráhy v čase vyvíjejí v důsledku působení gravitačních efektů a Jarkovského jevu. Popíšeme též mechanismus a důsledky působení YORP¹ efektu. V závěru kapitoly se zaměříme na planetkové systémy, konkrétně tedy na binární planetky, planetkové páry, planetkové klastry a rodiny planetek.

1.1 Základní charakteristika

Pojmem "planetka" označujeme malé kamenné objekty, které obíhají kolem Slunce a nejsou klasifikovány jako planeta ani kometa. Tato definice sice není plně v souladu s aktuálně platným usnesením² Mezinárodní astronomické unie (International Astronomical Union, IAU), nicméně sama IAU ji uvádí na svých stránkách Centra planetek (Minor Planet Center, MPC (2024*a*)) a poskytuje databázi těchto těles. Protože právě z této databáze pocházejí³ data, ze kterých při našich výpočtech vycházíme, držíme se této definice i my.

Rozměry planetek se pohybují od několika metrů⁴ po stovky kilometrů. Vzhledově se jedná o objekty rozličných tvarů. Většina z nich je tvarově nepravidelná, u některých můžeme pozorovat vyboulení v rovníkové oblasti. Zpravidla pouze větší planetky mají kulovitý tvar. (Děje se tak v případě, že planetky mají dostatečnou hmotnost na to, aby se svou vlastní gravitací zakulatily.) (NASA 2024)

Z pohledu struktury planetky často připomínají hromady suti – jedná se o pórovité objekty složené z mnoha menších kusů, které jsou vázány pouze vlastní gravitací. Walsh (2018) uvádí, že tuto podobu můžeme předpokládat u téměř všech planetek s rozměry mezi 200 m až 10 km.⁵

Nejvíce objevených planetek se nachází ve vzdálenosti mezi 2,1–3,3 au od Slunce v tzv. *hlavním pásu planetek*. Databáze NASA (2025*b*) k začátku roku 2025 evidovala 1,4 milionu známých planetek, přičemž objektů náležících do

^{1.} Viz část 1.4.

^{2.} Usnesení IAU (2006) stanovuje, že ve Sluneční soustavě rozlišujeme jen tři druhy těles, a sice planety, trpasličí planetky a malá tělesa Sluneční soustavy.

^{3.} Střední dráhové elementy planetek získáváme z databáze AstDys (2025*b*). Ta při jejich výpočtu vychází z dat MPC (2024*a*).

^{4.} Objekty menší než 1 m označujeme jako meteoroidy. (IAU 2024*a*)

^{5.} V případě planetek menších než zhruba 200 m předpokládáme, že se jedná o jednolitá tělesa. Dále viz kapitolu 1.5.

hlavního pásu planetek bylo 1,3 milionu. Celkovou hmotnost těles nacházejících se v této oblasti odhadli Pitjeva & Pitjev (2015) na $(12,25 \pm 0,19) \cdot 10^{-10} M_{\odot}$.

Ve Sluneční soustavě nalézáme dvě další oblasti, jejichž tělesa mají v součtu větší celkovou hmotnost než hlavní pás planetek. Jedná se o *Kuiperův pás*, který se nachází ve vzdálenosti 30–50 au od Slunce a jehož hmotnost je dle Pitjeva & Pitjev (2018) rovna $(5,92 \pm 0,90) \cdot 10^{-8} M_{\odot}$. Druhou z oblastí je *Oortův oblak*. Jeho existenci očekáváme ve vzdálenostech od 2 000 au po 10 000 au, možná až 100 000 au od Slunce. Odhadovaná hmotnost všech jeho těles se pohybuje v rozmezí $3 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ (Fernández & Brunini 2000) až $1 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ (Weissman 1996). Vzhledem k větší vzdálenosti od Země je však objevování těles velikosti planetek v obou těchto oblastech obtížnější než v případě hlavního pásu planetek.

Při snaze o roztřídění planetek z pohledu chemického složení narazíme na problém existence vícera klasifikačních systémů. Jedná se o důsledek historického vývoje, kdy dochází k postupnému zjemňování dělení a vzniku nových skupin. (Podrobněji viz DeMeo et al. (2009)) Napříč všemi systémy však nalezneme dvě významné skupiny planetek.

Třída C obsahuje uhlíkaté planetky. Ty jsou velmi tmavé – albedo⁶ těchto objektů se pohybuje okolo 0,05. Jejich objemová hustota je dle Vernazza et al. (2021) přibližně 1,7 g/cm³. Tyto planetky nalezneme především ve vnější části hlavního pásu planetek. (Tedesco 2025)

Křemičité planetky řadíme do *třídy S*. Jejich albedo se pohybuje okolo 0,18, objemová hustota je přibližně 3,0 g/cm³. (Vernazza et al. 2021) Tyto planetky se nacházejí spíše ve vnitřní části hlavního pásu planetek. (Tedesco 2025)

V závislosti na tom, jak přesně je určena dráha planetky, jí přidělujeme předběžné či definitivní označení. *Předběžné (provizorní) označení* je přiděleno každé planetce, která byla pozorována alespoň dvě noci a není možné ji ztotožnit s některou z již objevených planetek. V něm je zakódováno datum objevu a pořadí planetky v seznamu planetek objevených v dané části roku. Příkladem takového označení je 1971 UO₁.⁷ (MPC 2024*b*)

Ve chvíli, kdy je dráha planetky dostatečně přesně určena, planetce přidělujeme *definitivní označení*. Tím je pořadové číslo v databázi IAU. Společně s tím může být planetce přiděleno i jméno. Výše zmíněnou planetku proto můžeme najít i pod označením (1841) Masaryk. (IAU 2024*b*)

^{6.} Poměr mezi odraženým a dopadajícím zářením.

^{7.} Předběžné označení planetek by správně mělo být uváděno v podobě, ve které je napsáno v tomto odstavci, tedy s posledním číslem zapsaným jako spodní index. Protože je ale práce s takovýmto tvarem komplikovaná, budeme se v dalším textu držet formátu, který je použit například v Pravec & Vokrouhlický (2009) či Pravec et al. (2019): v textu budeme poslední číslo uvádět na řádku. V databázových výčtech budeme navíc označení planetky uvádět bez mezery.

Obecným charakteristikám planetek se autorka blíže věnovala ve své bakalářské práci. Další informace o jejich výskytu, klasifikaci, systému značení apod. je proto možné nalézt v Honsová (2023).

1.2 Dráhové elementy a jejich vývoj

Pro popis dráhy tělesa (planetky) obíhajícího po elipse kolem Slunce je možno využít tzv. dráhové elementy. Těmi jsou: velká poloosa *a*, excentricita dráhy *e*, inklinace *i*, délka výstupného uzlu Ω , argument šířky pericentra ω a střední anomálie *M*.⁸ Dráhy planetek se ale v čase vyvíjejí. Jedná se o důsledek jak gravitačních vlivů (jako jsou perturbace, rezonance či blízká setkání), tak negravitačních jevů (především Jarkovského efekt, viz sekci 1.3). V závislosti na zkoumaném problému volíme dráhové elementy charakterizované různou mírou přesnosti a stability.

Nejjednodušším způsobem, jak můžeme popsat dráhu planetky, je za pomoci oskulačních dráhových elementů. V tomto případě se omezíme na problém dvou těles, tedy Slunce a planetky, a zajímat nás bude pouze jejich vzájemné gravitační působení. Obě tělesa budeme považovat za hmotné body. Pro tuto soustavu tedy řešíme Keplerovu úlohu, přičemž dráhu planetky získáme ze znalosti polohy a rychlosti planetky v určitém časovém okamžiku. V tomto idealizovaném případě by se výsledná dráha tělesa v čase neměnila.

Ve Sluneční soustavě ale na dráhu planetek gravitačně působí i další tělesa, zejména Jupiter a Saturn, čímž je jejich skutečná dráha pozměňována. Oskulační dráhové elementy se proto liší pro dvě v čase rozdílná pozorování téže planetky. Dle Bertotti et al. (2003) v hlavním pásu planetek vlivem Jupiteru a Saturnu dochází na časových škálách let až stovek tisíců let ke změnám excentricity o přibližně 0,1–0,3 a ke změnám inklinace o zhruba 5°–10°.

Protože se v další práci budeme zabývat vznikem a vývojem drah planetkových párů, jejichž stáří se pohybuje v řádech stovek tisíců let, budeme chtít pro popis jejich drah využít dráhové elementy, které jsou na těchto časových škálách stabilní. Použijeme proto *střední dráhové elementy*. Ty popisují dráhy planetek očištěné o krátkoperiodické perturbace. (Bertotti et al. 2003) Jejich výpočet je možno provést buď analyticky, započtením členů poruchového rozvoje do určitého řádu, nebo numerickým integrováním drah planetek a následným odfiltrováním krátkoperiodických komponent z takto spočtených drah. (Případně i kombinací analytických a numerických metod.) (Knezevic et al. 1988) Střední dráhové elementy používané v této práci jsou vypočteny analyticky autory Milani & Knežević (1998) a započítávají perturbační vlivy Jupiteru a Saturnu.

^{8.} Podrobnější popis jednotlivých veličin je uveden v Honsová (2023).

1. Planetky a jejich systémy



Obrázek 1.1: Planetky hlavního pásu zobrazené v oskulačních dráhových elementech. Vidíme, že planetky nejsou v prostoru rozmístěny rovnoměrně. Zdroj dat: AstDys (2025*a*), zpracování vlastní.

Na obrázku 1.2 jsou vykresleny planetky hlavního pásu ve středních dráhových elementech. Při srovnání s obrázkem 1.1, který zobrazuje tytéž planetky v oskulačních dráhových elementech, jsou patrné jasnější náznaky shluků planetek.



Obrázek 1.2: Planetky hlavního pásu zobrazené ve středních dráhových elementech. Shlukování planetek je jasnější než na obrázku 1.1, nikoliv však tak jasné, jako na obrázku 1.3. Zdroj dat: AstDys (2025*b*), zpracování vlastní.

V některých případech je ale stabilita středních dráhových elementů nedostatečná. Typicky například při studiu rodin planetek (blíže viz kapitolu 1.5), starých miliony až miliardy let. (Bertotti et al. 2003) Z toho důvodu zavádíme *vlastní dráhové elementy*. Ty popisují dráhy těles očištěné o krátkoperiodické i dlouhoperiodické perturbace. Podobně jako v případě středních dráhových elementů, i vlastní dráhové elementy je možno počítat jak analyticky, tak numericky. Knezevic et al. (2002) shrnuje, že nehledě na konkrétní metodu se při jejich výpočtu vychází ze středních dráhových elementů, ze kterých jsou odstraněny poruchy způsobné gravitačním působením dalších hmotných těles. Jejich stabilita je pak na časových škálách jednotek milionů až desítek milionů let. (Bertotti et al. 2003)

Na obrázku 1.3 jsou vykresleny planetky hlavního pásu ve vlastních dráhových elementech. Zřetelně vidíme shluky, představující rodiny planetek.



Obrázek 1.3: Planetky hlavního pásu zobrazené ve vlastních dráhových elementech. Na obrázku zřetelně vidíme shluky, představující rodiny planetek. Zdroj dat: AstDys (2025*b*), zpracování vlastní.

1.3 Jarkovského efekt

Dráha těles může být ovlivňována i jinými než gravitačními efekty. V případě planetek hraje důležitou roli Jarkovského efekt, způsobený časovými rozdíly mezi pohlcováním a vyzařováním tepelného záření z povrchu těchto těles. V důsledku toho dochází především ke změně velké poloosy dráhy planetek, o něco méně je ovlivňována i excentricita. Významný je dle Bottke et al. (2006) především v případě těles s průměry od 0,1 m do 40 km. V závislosti na orientaci osy rotace planetky se uplatňuje buď jeho denní nebo sezónní složka. Působení obou složek Jarkovského jevu je znázorněno na obrázku 1.4.

Denní složka Jarkovského efektu je maximální u planetek, jejichž rotační osa je kolmá na oběžnou rovinu. (Nulová je v případě, kdy rotační osa leží v rovině oběhu.) Na straně planetky, která je přivrácená ke Slunci, dochází k absorpci tepelného záření. Existuje však jistá časová prodleva, než se dané místo zahřeje



Obrázek 1.4: Znázornění vlivu Jarkovského efektu na planetku obíhající kolem Slunce. Denní složka Jarkovského efektu je na obrázku (a). Rotace planetky je v tomto případě prográdní. Tepelné efekty vedou ke zvětšování velké poloosy dráhy planetky. Sezónní složka Jarkovského efektu je na obrázku (b). Termální síla působí nehledě na směr rotace planetky vždy proti směru jejího oběhu kolem Slunce. Velká poloosa se zmenšuje. Písmena N a S označují severní (N) a jižní (S) polokouli planetky. Zdroj: Bottke et al. (2006)

na maximální teplotu.⁹ Nejvíce záření je tak z daného místa povrchu planetky vyzářeno až ve chvíli, kdy v důsledku rotace planetky kolem své osy dojde k jejímu mírnému pootočení. Vyzařované fotony odnášejí část hybnosti, čímž vzniká síla, která planetku posouvá v opačném směru, než proudí sledované fotony.

Výsledná změna velké poloosy dráhy planetky pak záleží na směru rotace planetky. Je-li rotace prográdní, dochází ke zvětšování velké poloosy, retrográdní rotace planetky naopak vyústí ve zmenšení velké poloosy její dráhy. Dalšími faktory, které mají vliv na sílu efektu, jsou například vzdálenost od Slunce, tepelné vlastnosti planetky, její rychlost rotace či velikost.

Sezónní složka Jarkovského efektu je největší u planetek, které mají osu rotace v rovině oběhu. V případě takovéto planetky dopadá nejvíce slunečního záření na jednu z hemisfér ve chvíli, kdy je tato hemisféra přivrácená ke Slunci. (Na obrázku 1.4 se jedná o místa A, C.) Opět ale pozorujeme jistou tepelnou setrvačnost, v důsledku které je daná polokoule nejteplejší až v pozdějším bodě

^{9.} Podobně jako na Zemi neměříme na určitém místě největší teploty v poledne, ale až kolem druhé hodiny odpoledne.

dráhy planetky. (Body B, D.) Tehdy je z dané polokoule vyzařováno nejvíce tepelné energie, což (podobně jako u denní složky Jarkovského efektu) vede ke změně velké poloosy dráhy planetky. Změna natočení planetky ke Slunci je však dána oběhem kolem něj, a proto se sezónní složka typicky projevuje na větších časových škálách než složka denní.

Důsledky vlivu sezónní složky Jarkovského efektu nezáleží na směru rotace planetky. Výsledná síla vždy působí proti směru oběhu planetky kolem Slunce a tím dochází ke zmenšování velké poloosy dráhy planetky. Velikost efektu závisí na vzdálenosti od Slunce, velikosti planetky či natočení její rotační osy. Sezónní složka Jarkovského efektu je nulová v případě, kdy je rotační osa planetky kolmá na její rovinu oběhu. (Bottke et al. 2006)

1.4 YORP efekt

Zásadní význam při vzniku námi zkoumaných planetkových systémů má *YORP*¹⁰ *efekt*. Ten u menších¹¹ planetek způsobuje změnu rychlosti jejich rotace a změnu orientace jejich rotační osy.

YORP efekt, podobně jako Jarkovského efekt, působí v důsledku absorpce a emise tepelného záření planetkou, která má obecně nepravidelný tvar. Rozdíl však spočívá v tom, že zatímco při vysvětlení Jarkovského jevu bylo možno předpokládat sférickou podobu tělesa, u YORP efektu tuto aproximaci použít nemůžeme. V případě YORP efektu je zásadní právě nesymetrický tvar planetky, kvůli kterému na jejím povrchu dochází k nesymetrickému rozptylu slunečního záření.

Rubincam (2000) pro představu působení YORP efektu připodobňuje nesymetrickou planetku ke sférické planetce, která má v úrovni rovníku na opačných stranách připevněné dva klíny, orientované opačnými směry. Dále předpokládá, že se takováto planetka otáčí kolem své osy, která je kolmá na rovinu oběhu planetky kolem Slunce. Situace je znázorněna na obrázku 1.5.

Sférická část planetky nebude nijak přispívat ke změně její rotace. Výslednice termální síly, která vzniká v důsledku absorpce a reemise záření planetkou, v každém bodě působí směrem ke středu sféry. Moment takovéto síly je tedy nulový.

Zaměříme se proto pouze na myšlené klíny. V daném okamžiku je jeden z klínů ozařován na své kolmé stěně, zatímco u druhého z klínů je ozařována jeho zkosená stěna. Tyto pak vyzařují tepelné záření vždy v kolmém směru

^{10.} Akronym je tvořen prvními písmeny z příjmení (v anglickém zápisu) Yarkovsky, O'Keefe, Radzievskii, Paddack.

Rubincam (2000) udává průměr 10 km či méně, Margot et al. (2015) hovoří o průměru
km a méně.



Obrázek 1.5: Znázornění YORP efektu. V důsledku termální síly působící na planetku nepravidelného tvaru dochází ve zobrazeném případě ke zrychlování rotace planetky. Zdroj: Rubincam (2000)

na danou rovinu. I když bude velikost termální energie unikající z obou ploch stejná, točivý moment sil se bude lišit. Větší bude pro klín vyzařující ze stěny orientované kolmo na směr přicházejícího slunečního záření. Tím bude docházet ke zvětšování či zmenšování rychlosti rotace planetky, a sice v závislosti na původním směru rotace planetky. (Na obrázku 1.5 působí moment termální síly ve stejném směru, jako je rotace planetky. Rychlost její rotace tedy narůstá.)

V dalším nás bude zajímat především zvětšení rychlosti rotace planetky, ke kterému vlivem YORP efektu může dojít. Nejedná se ale o jediný důsledek tohoto efektu. Při zvětšení rychlosti rotace planetky může docházet ke změnám jejího tvaru, který pak může vyústit ve zpomalení rychlosti rotace či ve změnu sklonu rotační osy planetky. YORP efekt může též měnit sílu či směr Jarkovského jevu, který, jak již bylo zmíněno v části 1.3, mimo jiné závisí na rotačních parametrech planetky. (Rubincam 2000)

1.5 Vznik planetkových systémů

Při studiu planetek se setkáváme se skupinami planetek, které pocházejí ze stejného mateřského tělesa a vznikly jeho rozpadem. V závislosti na mechanismu vzniku a následném vývoji planetkových systémů rozlišujeme binární planetky, planetkové páry, planetkové klastry a rodiny planetek.

Jako *binární planetky* či *bináry* označujeme skupinu dvou gravitačně vázaných planetek, které obíhají kolem společného těžiště. Větší planetku označujeme jako primár, menší říkáme sekundár. (Někdy můžeme narazit i na systém třech gravitačně vázaných těles. V takovém případě mluvíme o tripletu a nejmenší planetce říkáme terciér.) (Margot et al. 2015) Takovýchto vícenásobných planetkových systémů bylo v dubnu 2025 dle Johnston (2025*b*) známo 576.

Poměr hmotností sekundáru a primáru se v případě binárních planetek typicky pohybuje v rozmezí 0,001–0,1, nicméně se můžeme setkat i s dvojicemi planetek srovnatelných hmotností. Dále pozorujeme, že se primár obvykle velmi rychle otáčí kolem své osy. (Rotační periody bývají v intervalu 2–5 hodin v případě menších primárů. Primáry s průměry většími než zhruba 20 km rotují trochu pomaleji, jejich periody bývají v rozmezí 4–7 hodin). Výstřednost oběžné dráhy sekundáru bývá malá (do 0,05), stejně tak velká poloosa jeho dráhy (méně než desetinásobek poloměru primáru). Rotace sekundáru bývá často synchronizována s dobou oběhu, ale pozorujeme i dvojice bez této charakteristiky, případně naopak i binární planetky, jejichž obě složky mají rotaci synchronizovanou s orbitální periodou.

Mechanismus vzniku binárních planetek se pravděpodobně liší v závislosti na velikosti primáru. U binárních systémů, jejichž primár má průměr větší než zhruba 20 km, předpokládáme, že vznikly po srážce primáru s jinou planetkou. Pozorovaný sekundár pak může být úlomkem primáru, který zůstal gravitačně vázaný k mateřskému tělesu. Druhým možným scénářem spjatým se srážkami planetek je vznik bináru v důsledku vytvoření gravitační vazby mezi dvěma odletujícími kusy.

V případě binárních planetek, jejichž primáry mají průměry přibližně v rozmezí 200 m a 20 km předpokládáme, že vznikly rotačním štěpením vyvolaným YORP efektem. Pro pochopení mechanismu rotačního štěpení je vhodné si zopakovat, že planetky těchto velikostí jsme z pohledu struktury připodobnili k hromadám suti. Zároveň jsme zmiňovali, že jsou velmi náchylné ke změnám rychlosti své rotace v důsledku YORP efektu.

Když tedy na tyto planetky působí YORP efekt, může docházet k postupnému zvyšování rychlosti jejich rotace. Prvotním důsledkem může být přesun materiálu, který bude proudit směrem k rovníkovým oblastem a vytvoří tak vypoukliny, pozorované u některých planetek.

V určitou chvíli může být rychlost rotace tak velká, že odstředivá síla překoná gravitační sílu, která drží planetku pohromadě. (A případně i další soudržné síly.) Pak dojde k odtržení kusu hmoty (sekundáru) a tím i vzniku binární planetky. (Margot et al. 2015)

Kritickou úhlovou rychlost, při které k tomuto dojde, uvádí Scheeres (2007) pro aproximaci¹² mateřského tělesa jako dvou sfér stejné hustoty (ρ), ale odlišných poloměrů, které na sobě spočívají. Při tom celá soustava rotuje kolem svého středu hmotnosti. Uvažujeme, že jedna sféra má nenulový poloměr i hmotnost

^{12.} Vzorce 1.1 a 1.2 jsou pouhou aproximací. Ve skutečnosti okamžik, kdy dojde k rozpadu mateřské planetky, závisí například i na konkrétním tvaru planetky, její struktuře či na soudržných silách mezi jednotlivými komponentami.

a druhá je hmotným bodem. Kritická úhlová rychlost pak bude rovna

$$\omega_{\rm c} = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}\,,\tag{1.1}$$

kde G je gravitační konstanta.

Scheeres (2007) uvádí i zobecnění tohoto vztahu. V závislosti na poměru hmotností sekundáru ku primáru (q) bude kritická úhlová rychlost rovna

$$\omega_{\rm q} = \omega_{\rm c} \sqrt{\frac{1+q}{(1+q^{1/3})^3}} \,. \tag{1.2}$$

V případě planetek menších než přibližně 200 m často pozorujeme, že rotují výrazně rychleji, než je výše zmíněná kritická úhlová rychlost. (Konkrétně se může jednat až o $100 \omega_c$.) O těchto planetkách usuzujeme, že se jedná o monolitická tělesa. Jejich soudržnost tedy nezaručují gravitační vazby, ale vazby elektromagnetické, díky čemuž tato tělesa nepodléhají mechanismu rotačního štěpení. (Bertotti et al. 2003)

Dalším planetkovým systémem, se kterým se seznámíme, budou planetkové páry a planetkové klastry. Jako *planetkový pár* označujeme geneticky spřízněnou dvojici planetek, vzniklou rotačním štěpením mateřského tělesa, která ovšem není gravitačně vázaná.¹³ V důsledku mechanismu vzniku si tyto planetky zachovávají podobné heliocentrické dráhy.¹⁴ Podobně jako v případě binárních planetek, i zde jednotlivé členy nazýváme primár a sekundár. (Margot et al. 2015) Tyto charakteristiky nicméně nemusí splňovat pouze dvě tělesa. Pokud objevíme skupinu třech a více planetek, vymezenou danými znaky, mluvíme o *planetkovém klastru*. (Fatka et al. 2020) V dubnu 2025 obsahovala databáze Johnston (2025*a*) 235 známých planetkových párů a 16 planetkových klastrů.

Za pomoci zpětných integrací drah planetkových párů (či klastrů) je možno odhadnout jejich věk, tedy dobu, která uplynula od rozpadu mateřského tělesa. Tehdy heliocentrické dráhy jednotlivých členů konvergují, přičemž fyzická vzdálenost planetek je mnohem menší než poloměr Hillovy sféry¹⁵. (Margot et al. 2015) U známých párů se jejich stáří typicky pohybuje v intervalu od tisíců let do milionu let.¹⁶

^{13.} Planetky se tedy na rozdíl od binárů nenacházejí fyzicky blízko sebe. Každá obíhá kolem Slunce po vlastní dráze jinou úhlovou rychlostí. Jejich dráhy jsou při tom pozměňovány v dů-sledku efektů popsaných v předchozích částech této kapitoly.

^{14.} Budeme-li dále mluvit o *podobných drahách* planetkových párů a planetkových klastrů, budeme mít vždy na mysli *podobné heliocentrické dráhy*.

^{15.} Jako Hillovu sféru označujeme oblast, kde gravitační působení planetky (primáru) převládá nad gravitačním působením Slunce.

^{16.} Staří aktuálně nejmladšího známého planetkového páru je v řádu desítek let, viz Vokrouhlický et al. (2022).

Zpětné integrace drah jednotlivých členů páru či klastru dále ukazují, že k jejich odloučení dochází pozvolna. Vzájemné rychlosti jednotlivých členů bývají v době vzniku páru/klastru nízké, srovnatelné s únikovými rychlostmi, řádově jednotky m/s. (Pravec et al. 2010)

Příčinou vzniku planetkového páru je rozpad binární planetky, kdy sekundár přestane být gravitačně vázán k primáru. Konkrétní mechanismus se pak liší pro dvojice planetek s různými poměry hmotností sekundáru vůči primáru. V souladu s rovnicí 1.2 platí, že čím větší je poměr hmotností jednotlivých složek, tím menší rychlost rotace stačí pro oddělení těles a vznik binární planetky. Menší kritická úhlová rychlost ale znamená menší volnou energii nově vzniklého systému. (Margot et al. 2015) Pod volnou energií binární planetky myslíme celkovou (kinetickou a potenciální) energii mínus vnitřní potenciály jednotlivých složek. (Pravec et al. 2010)

Je-li $q \leq 0,2$, pak je volná energie binární planetky kladná, což znamená, že může (ale nemusí) dojít k jejímu rozpadu. Po vzniku binární planetky je systém chaotický a jeho další vývoj může sledovat některý z vícera možných scénářů. Důležitou roli při tom mohou hrát slapové jevy či radiační (BYORP¹⁷) efekt. Výsledkem pak může být (dočasně) stabilní binární planetka či planetkový pár. Existuje také možnost, že sekundár spadne zpět na primár. Během vývoje se též může z primáru (ve fázi stabilní binární planetky) či sekundáru (při chaotické fázi vývoje bináru) uvolňovat další materiál, což vede k vytvoření tripletu.

Je-li $q \gtrsim 0,2$, pak je volná energie binární planetky záporná, což znamená, že by k jejímu rozpadu nemělo dojít. I přesto ale pozorujeme planetkové páry, které mají poměr hmotností svých členů větší, než je tato hranice. V jejich případě proto musí existovat proces, který ve fázi binární planetky dodá systému moment hybnosti. Při vývoji tohoto typu binárů předpokládáme, že vlivem slapových jevů dochází nejprve k synchronizaci rotace obou složek s dobou oběhu. Následně pak vlivem BYORP efektu může dojít ke vzniku planetkového páru. (Margot et al. 2015)

Rozlišujeme ještě jeden významný systém planetek, a sice *rodiny planetek*. Jejich definice je obdobná definici planetkových klastrů – i v tomto případě se jedná o skupinu geneticky spřízněných planetek, které obíhají okolo Slunce po podobných drahách. Zásadní rozdíl ovšem spočívá v mechanismu vzniku dané skupiny planetek. Zatímco planetkové páry a klastry vnikají pozvolným rozpadem mateřského tělesa, rodiny planetek vznikají po srážce dvou těles, vedoucí k roztříštění mateřského tělesa.

^{17.} BYORP, neboli binary YORP efekt popisuje mechanismus, kdy vlivem pohlcování a vyzařování tepelného záření může u sychnronně rotujícího sekundáru docházek ke zvětšování či zmenšování jeho oběžné dráhy. Blíže viz Ćuk & Burns (2005).

1. Planetky a jejich systémy

S tím jsou spojené i značně odlišné vzájemné rychlosti planetek v době vzniku systému. Před střetem, který vede k vytvoření rodiny, se vzájemné rychlosti srážejících se planetek pohybují v řádech kilometrů za sekundu.

Kusy roztříštěné mateřské planetky po srážce z místa rozpadu odletují rychlostmi v řádech desítek až stovek metrů za sekundu. (Zappalà et al. 1996) Jedná se tedy o rychlosti řádově menší než orbitální rychlosti, díky čemuž si planetky zachovávají podobné dráhy. (Brož 2013) Ty se ale mohou měnit v důsledku mechanismů popsaných v předchozí části této kapitoly.

Vzhledem k tomu, že věk známých rodin planetek se pohybuje v řádu milionů či miliard let, je pro jejich identifikaci vhodné pracovat v prostoru vlastních dráhových elementů, viz podkapitolu 1.2. (Bertotti et al. 2003)

Ne každá srážka mezi dvěma planetkami vede vždy ke vzniku rodiny. Castěji dochází k pouhému kráterování mateřské planetky či ke změně její rotační osy. (Brož 2013) Aby menší planetka (projektil) roztříštila mateřskou planetku, a tedy došlo ke vzniku rodiny, musí být dle Bottke et al. (2005) minimální velikost projektilu

$$d_{\rm proj} = \left(\frac{2Q}{v^2}\right)^{1/3} D_{\rm mat} \,, \tag{1.3}$$

kde d_{proj} je průměr projektilu, D_{mat} průměr mateřské planetky, Q její pevnost a v dopadová rychlost.

Dle AstDys (2025b) bylo v dubnu 2025 známých 118 rodin planetek.

2 Hledání planetkových párů a klastrů

Při hledání planetkových párů a klastrů jsme v databázi známých planetek pro každou planetku hledali všechny další planetky, které mají podobné heliocentrické dráhy. Následně jsme vytipovali kandidáty na možné planetkové páry. U nich jsme určili pravděpodobnost, že prověřovaný pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami. Poté jsme vytipovali kandidáty na možné planetkové klastry a opět jsme se pokusili určit jejich statistickou významnost. O konkrétních použitých metodách pojednává tato kapitola.

2.1 Hledání planetek s podobnými drahami

Při hledání planetek s podobnými heliocentrickými drahami jsme vycházeli z databáze středních dráhových elementů, dostupné z AstDys (2025*b*). V ní jsou dostupná data pro planetky s přiděleným definitivním označením a pro multiopoziční planetky s předběžným označením. Prvotní výpočty jsme prováděli s daty ze dne 11. září 2024. Protože neustále dochází k objevování nových planetek a zpřesňování drah již známých planetek, zopakovali jsme posléze celý proces ještě jednou, a sice s daty ze 3. března 2025.

Při práci s touto databází jsme si všimli, že pojmenování některých planetek není v danou chvíli aktuální. V databázi se tak duplicitně vyskytují planetky, které jsou nejprve evidovány pod vícero předběžnými označeními, ale následně se zjistí, že se jedná o tutéž planetku. To způsobovalo falešné nálezy možných planetkových párů. Před další prací s touto databází jsme proto provedli kontrolu pojmenování planetek dle seznamu z MPC (2025) a případné duplicity jsme vyřadili.

Do naší databáze jsme si dále ke každé planetce poznačili, zda je či není členem některé z kolizních rodin. Protože planetky patřící do některé z rodin obíhají po podobných drahách, mohlo by v rámci nich docházet k falešným nálezům možných planetkových párů. Tomu jsme chtěli zamezit. Seznam členů rodin jsme čerpali z AstDys (2025*b*).

Poté jsme postupně procházeli seznam všech planetek a pro každou, která nebyla známá jako člen některé z rodin, jsme hledali další planetky mající podobnou dráhu. K vyhodnocení podobnosti drah jsme použili metriku dle Pravec & Vokrouhlický (2009)¹, která určuje vzdálenost *d* dvou drah v pětirozměrném

^{1.} Pravec & Vokrouhlický (2009) původně použili tuto metriku pro oskulační dráhové elementy, nicméně je možné ji použít i pro střední dráhové elementy. Tato úprava je použita například v Pravec et al. (2019).

prostoru dráhových elementů jako

$$\left(\frac{d}{na}\right)^2 = k_a \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + k_e (\delta e)^2 + k_i (\delta \sin i)^2 + k_\Omega (\delta \Omega)^2 + k_\omega (\delta \omega)^2 \,. \tag{2.1}$$

V tomto vztahu vystupují dráhové elementy zmiňované v kapitole 1.2. Dále *n* značí střední pohyb a ω délku pericentra. Ta je definována jako $\omega = \Omega + \omega$.

Veličiny *n* i *a* je možno brát pro libovolnou planetku z dvojice. V našem případě jsme používali hodnoty primáru. Jednotlivé koeficienty jsme stejně jako Pravec & Vokrouhlický (2009) zvolili $k_a = 5/4$, $k_e = k_i = 2$ a $k_{\Omega} = k_{\omega} = 10^{-4}$.

Následně bylo nutné stanovit vhodnou mezní vzdálenost *d*, při které ještě považujeme dráhy dvou planetek za dostatečně podobné. Pravec et al. (2019) konstatuje, že vztah 2.1 udává přibližnou relativní rychlost planetek při těsném přiblížení a pro většinu planetkových párů se typicky pohybuje v řádech desetin až několika desítek m/s. Neexistuje ale žádná ostrá hranice. Pravec et al. (2019) dále ukazuje, že vzdálenost párů *d* v prostoru středních dráhových elementů bude tím větší, čím vyšší bude věk páru.

Pro naše účely jsme se nakonec při prvotním hledání pro každou planetku rozhodli ukládat nálezy všech dalších planetek, jejichž $d \le 111$ m/s. Přihlédli jsme při tom i k požadavkům statistické analýzy významnosti planetkových párů, které budou uvedeny v podkapitole 2.2.

Zpracování dat, které je popsané v celé této kapitole, bylo prováděno za pomoci programovacího jazyku Python, především s využitím knihovny NumPy (Harris et al. 2020). Dále jsme využívali též knihovny SciPy (Virtanen et al. 2020), Astropy (Price-Whelan et al. 2018) a pickle (Van Rossum 2020). Samotné výpočty pak byly realizovány na MetaCetru.

2.2 Hledání planetkových párů

V předpřipravené databázi ze sekce 2.1 jsme následně vytipovali kandidáty na planetkové páry. Abychom planetku zařadili mezi potenciální primáry, požadovali jsme, aby její absolutní hvězdná velikost byla menší nebo rovna absolutní hvězdné velikosti jejího potenciálního sekundáru (tedy planetky, která vůči ní má nejnižší vzdálenost *d*). Dále jsme vyžadovali, aby ani potenciální sekundár nebyl členem žádné z rodin planetek. Posledním kritériem byla vzdálenost *d* obou členů, která musela být ≤ 100 m/s.

Takto jsme v září 2024 v databázi 1 203 341 planetek nalezli 136 198 potenciálních planetkových párů. V březnu 2025 jsme v seznamu 1 231 753 planetek nalezli 143 535 potenciálních planetkových párů.

U těchto kandidátů na planetkové páry jsme pak chtěli rozlišit mezi skutečnými páry a dvojicemi planetek z pozaďové populace, které se pouze náhodou (v důsledku působení jevů popsaných v kapitole 1) dostaly na podobné heliocentrické dráhy. Při tom jsme postupovali obdobně jako Pravec & Vokrouhlický (2009): nejprve jsme analyzovali okolí každého z potenciálních párů a určili jsme, zda rozdělení pozaďové populace odpovídá rovnoměrnému rozdělení v pětirozměrném prostoru dráhových elementů. Poté jsme odhadli pravděpodobnost, že nalezený pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami.

Při analýze pozaďové populace jsme kolem každého z potenciálních primárů v pětirozměrném prostoru středních dráhových elementů vytvořili dva "kvádry". Šířku většího z nich jsme stejně jako Pravec & Vokrouhlický (2009) v jednotlivých elementech volili $\Delta \omega = \Delta \Omega = 2\pi$, $\Delta a = \sqrt{10^{-5}/k_a} a \Delta \Omega$, $\Delta e = \sqrt{10^{-5}/k_e} \Delta \Omega$ a $\Delta \sin i = \sqrt{10^{-5}/k_i} \Delta \Omega$. Šířka menšího z nich byla v každém z elementů poloviční. Objem většího kvádru byl tedy

$$V_1 = \left(10^{-5}\right)^{3/2} k_{\Omega} \left(2\,\Delta\Omega\right)^5 (na)^5 \,. \tag{2.2}$$

Objem menšího kvádru $V_{1/2} \doteq V_1/2^5$.

Poté jsme určili počet drah N_1 a $N_{1/2}$ v každém z kvádrů. Při tom jsme započítali pouze planetky, které jsou jasnější než prověřovaný sekundár. Jinými slovy jsme vyžadovali, aby jejich absolutní hvězdná velikost $H < H_2 + 0.5$, kde H_2 je absolutní hvězdná velikost potenciálního sekundáru.² Zároveň jsme započítávali pouze planetky, které nejsou členy některé z rodin.

Následně jsme testovali hypotézu, že rozdělení drah v okolí páru odpovídá rovnoměrnému rozdělení. Pravděpodobnost $P_{1/2}$, že se v objemu $V_{1/2}$ nachází $N_{1/2}$ či více drah je dána binomickým rozdělením:

$$P_{1/2} = 1 - \sum_{i=0}^{(N_{1/2}-2)-1} {N_1-2 \choose i} p_{\rm v}^i (1-p_{\rm v})^{N_1-2-i}, \qquad (2.3)$$

kde p_v je poměr objemů menšího a většího kvádru, a tedy platí $p_v = (1/2)^5$. Tuto pravděpodobnost můžeme určit díky znalosti lokální číselné hustoty počtu drah, dané počtem drah N_1 v objemu V_1 . Ve výrazech $(N_{1/2} - 2)$ a $(N_1 - 2)$ odčítáme dvojku proto, že nechceme započítávat dráhy testovaného páru.

Zamítnout testovanou hypotézu je možné pro malá $P_{1/2}$. V souladu s autory Pravec & Vokrouhlický (2009) jsme pro vyhodnocení, že rozdělení drah v okolí páru neprošlo testem rovnoměrného rozdělení, používali dvě různá kritéria, která se odvíjela od vzdálenosti *d* potenciálního páru. Páry, jejichž *d* < 10 m/s,

^{2.} Kritérium $H < H_2 + 0.5$ odpovídá kritériu použitému v článku Pravec & Vokrouhlický (2009). Přičtení +0.5 provádíme pro započítání typické chyby při astrometrickém měření absolutních hvězdných velikostí.

neprošly testem, pokud jejich $P_{1/2} < 0,01$. V případě párů, jejichž $d \ge 10$ m/s, jsme tento závěr učinili, pokud jejich $P_{1/2} < 0,05$.

Z testovaných párů tímto testem při prvním hledání prošlo 90 269 potenciálních párů, o půl roku později jich bylo 93 771.

Dalším krokem bylo určení pravděpodobnosti, že nalezený pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami. Tu bylo možné určit pouze u potenciálních párů, které prošly testem, že rozdělení pozaďové populace v jejich okolí odpovídá rovnoměrnému rozdělení. Dvojice planetek, které mají podobné dráhy a výše uvedeným testem neprošly, sice také může být skutečným planetkovým párem, námi používaná metoda však neumí pro takovéto páry poskytovat relevantní výsledky.

Pro odhad pravděpodobnosti, že nalezený pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami, jsme nejprve vyčíslili, jaké je očekávané množství dvojic planetek, jejichž vzdálenosti $d \le d_p$, kde d_p značí vzdálenost dtestovaného páru.

Protože se planetky nevyskytují rovnoměrně napříč celou Sluneční soustavou, rozdělili jsme si je do zón. Zjišťovanou hodnotu jsme pak vždy počítali v rámci zóny, ve které se nachází potenciální primár. Zóny jsme stejně jako Pravec & Vokrouhlický (2009) zvolili následující:

- Hungaria: $1,78 < a \le 2,00$ au, $16^{\circ} \le i \le 34^{\circ}$, $e \le 0,18$,
- vnitřní část hlavního pásu: $2,00 < a \le 2,50$ au,
- střední část část hlavního pásu: 2,50 < $a \le$ 2,82 au,
- vnější část část hlavního pásu: 2,82 < $a \le 3,27$ au,
- Cybele: $3,27 < a \le 3,70$ au, $i \le 25^{\circ}$, $e \le 0,30$,
- Hilda: $3,74 < a \le 4,02$ au.

Některé z planetek se sice nalézají mimo uvedené zóny, ale pro další výpočty jsou relevantní pouze oblasti, v nichž se nachází některý z prověřovaných primárů. Dané členění je proto dostačující.

Jako N_z označíme celkový počet planetek v dané zóně, které nejsou členem žádné z rodin a jejichž absolutní hvězdná velikost $H < H_2 + 0.5$.

Pro poloměr d_p hypersféry o objemu V_1 platí

$$d_{\rm p} = \left(\frac{8}{15}\pi^2 \frac{1}{V_1}\right)^{-1/5}.$$
 (2.4)

Podobně lze určit poloměr *R*⁰ hypersféry o specifickém objemu

$$R_0 = \left(\frac{8}{15}\pi^2 \frac{N_1 - 1}{V_1}\right)^{-1/5} = \left(\frac{8}{15}\pi^2\eta\right)^{-1/5}.$$
 (2.5)

18
V tomto vztahu odčítáme jedničku proto, že nechceme započítávat dráhu primáru testovaného páru. Takto definované R_0 má pak význam charakteristické vzdálenosti těles při pozorované lokální číselné hustotě počtu drah η .

Očekávané množství dvojic planetek v dané zóně, jejichž vzdálenosti $d \le d_p$, odpovídá Poissonově rozdělení a určili jsme jej ze vztahu³

$$P_2(d_p) = \frac{N_z}{2} \left(\frac{d_p}{R_0}\right)^5 e^{-\left(\frac{d_p}{R_0}\right)^5}.$$
 (2.6)

Poměr d_p/R_0 , vyskytující se ve vztahu 2.6 můžeme chápat jako normalizovanou vzdálenost drah.

Následně jsme určili skutečné množství dvojic planetek v dané zóně, jejichž normalizované vzdálenosti $d/R_0 \le d_p/R_0$. To označíme N_p .

Při jeho výpočtu se setkáváme s problémem, že pro malé vzdálenosti se mohou lišit distribuce drah skutečných a náhodných párů, což by vedlo ke zkreslení statistiky. Abychom se tomuto vyhnuli, využili jsme faktu, že objem *V* hypersféry s poloměrem d_p/R_0 se rovná objemu mezi hypersférami s poloměry $f_V^{-1}d_pR_0$ a $f_Vd_pR_0$, kde $f_V = \left[(1 + \sqrt{5})/2\right]^{1/5}$. Počet dvojic planetek N_p jsme tedy spočetli mezi těmito hypersférami.⁴ Při tom jsme opět vyžadovali, aby ani jedna z planetek nebyla členem rodiny a aby absolutní hvězdná velikost každé z nich byla $< H_2 + 0.5$.

Odhad pravděpodobnosti, že nalezený pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami, jsme určili z poměru P_2/N_p . Statisticky významné jsou pak páry, u kterých je tato hodnota nízká. Pravec & Vokrouhlický (2009) jako hraniční udávají hodnotu $P_2/N_p \sim 0,1$. (Pravec & Vokrouhlický 2009)

Počet planetkových párů, které prošly testem rovnoměrného rozdělení pozaďové populace a zároveň pro ně byla hodnota $P_2/N_p < 0.1$, byl v září 2024 roven 6 328. V březnu 2025 jsme takovýchto párů našli 6 875.

Všech 6 875 planetkových párů uvádíme na https://www.physics.muni.cz/ ~ehonsova a v elektronické příloze této práce. Na daných místech je možné nalézt informace o vybraných dráhových elementech primáru, vzájemné vzdálenosti *d* planetek, jejich absolutní hvězdné velikosti a vybrané hodnoty z prováděných statistických testů. (U planetkových párů, u kterých byl odhadován jejich věk, je uvedena i tato informace.)

^{3.} Podrobnější odvození viz Pravec & Vokrouhlický (2009).

^{4.} Tato část našeho postupu je důvodem, proč jsme v podkapitole 2.1 vytvářeli databázi planetek se vzájemnými vzdálenostmi až do d = 111 m/s. Protože $f_V \doteq 1,101$, pro nalezení párů se vzdálenostmi $d \le 100 \text{ m/s}$ potřebujeme znát všechny dvojice planetek, jejichž vzdálenosti $d \le 110,1$. Procedura zjišťování vzájemných vzdáleností d drah planetek je značně výpočetně náročná. V rámci optimalizace proto bylo lepší ji provádět pouze jednou a následně pracovat s již existující databází.

2. Hledání planetkových párů a klastrů

Dále jsme chtěli za pomoci zpětných integrací drah planetek odhadnout věk planetkových párů, které prošly výše zmíněnými testy. Protože by bylo značně výpočetně náročné toto provádět pro tisíce planetkových párů, přidali jsme další omezení na vzdálenost *d* planetkového páru. Konkrétně jsme vybrali pouze planetkové páry, jejichž $d \leq 2$ m/s. Zvažovali jsme i přidání omezení na hodnotu P_2/N_p , ale mezi páry s takto malými vzdálenostmi *d* byla největší hodnota P_2/N_p v řádu 10^{-5} . Reálně proto nehraje roli, jestli oficiálně stanovíme hranici $P_2/N_p < 0,1$, nebo například $P_2/N_p < 0,05$.

V září 2024 jsme takto vybrali 144 planetkových párů, v březnu 2025 jich bylo 155. Při srovnání nalezeného množství planetkových párů by se mohlo zdát, že v březnu 2025 přibylo 11 planetkových párů, ale není tomu tak. Při tomto druhém hledání kritérii neprošly 3 páry původně zařazené k odhadu věku. Ve srovnání s daty ze září 2024 tedy bylo v březnu 2025 nových párů 14.

Jeden pár, konkrétně planetky (206673) a 2018 BM33, při březnovém výpočtu neprošel testem rovnoměrného rozdělení pozaďové populace. V případě dvou párů byla jejich vzdálenost d > 2 m/s. Konkrétně u páru (381760) a 2012 VZ113 byla vzdálenost d = 2,02 m/s. U páru (752485) a 2014 MO62 byla vzdálenost d = 2,18 m/s. Protože jsme ale v březnu 2025 již prováděli zpětné integrace drah planetek, uvádíme jejich výsledek i pro tyto tři planetkové páry.

Pro úplnost srovnání dodejme detaily nově zařazených planetkových párů. V sedmi případech bylo důvodem nového nálezu objevení sekundáru, resp. přesnější určení jeho dráhy, které vedlo k jeho zařazení do databáze. Dva páry nově prošly testem rovnoměrného rozdělení pozaďové populace. U pěti párů se snížila jejich vzdálenost *d* pod hranici 2 m/s.

V březnu jsme nalezli ještě jeden zdánlivě nový planetkový pár, konkrétně planetky (741365) a 2010 TB155. Při prověřování primáru jsme si ale všimli, že je pod svým předběžným označením 2005 WW113 veden jako člen rodiny. Tento planetkový pár jsme proto vyřadili z další analýzy. (Z toho důvodu tento pár ani není započítán mezi březnovými 155 vybranými páry.)

Celkově jsme tedy prováděli odhad věku u 158 planetkových párů. Z toho 120 párů nebylo k dubnu 2025 uvedeno v databázi Johnston (2025*a*).

Odhad věku jsme provedli jak pro nové páry, tak i pro páry, které již známé jsou. V některých případech věk známých párů není uveden, a tedy je možno tuto informaci doplnit. Páry, jejichž stáří známo je, mohou sloužit pro srovnání námi používané metody s metodami jiných výzkumných týmů.

Přehled planetkových párů, u kterých jsme prováděli odhad jejich věku, je uveden v tabulkách 3.1 a 3.2 (str. 42 a 44). Pokud jsme některý planetkový pár později identifikovali jako součást planetkového klastru, uvádíme ho v tabulce 3.3 (str. 51). V těchto tabulkách jsou uvedena pouze vybraná data o daných planetkových párech. Detailnější informace jsou uvedeny v již zmíněných elektronických přílohách práce.

2.3 Hledání planetkových klastrů

Dále jsme hledali planetkové klastry. Jinými slovy jsme chtěli najít primár, ze kterého se někdy oddělila více než jen jedna další planetka.

Seznam potenciálních primárů planetkových klastrů jsme omezili na 158 planetek, které byly identifikovány jako primáry vybraných párů v části 2.2. U těchto jsme zkoumali, zda kromě sekundáru netvoří zdánlivé planetkové páry i s dalšími planetkami, které vůči nim mají malou vzdálenost *d*.

Pro každý z prověřovaných primárů jsme vždy z naší databáze smazali veškeré údaje týkající se jeho sekundáru. V takto upravené databázi jsme se pak podívali, jestli do vzdálenosti $d \leq 100$ m/s existuje nějaká planetka, která má podobnou dráhu jako primár. Zároveň jsme opět vyžadovali, aby nebyla členem žádné z rodin planetek a aby její absolutní hvězdná velikost byla větší nebo rovna absolutní hvězdné velikosti daného primáru. Takovouto planetku jsme našli u 33 ze 158 primárů.

Pokud takováto planetka existovala, pro danou chvíli jsme ji společně s primárem považovali za potenciální pár, u kterého jsme zopakovali postup uvedený v sekci 2.2.

Opět jsme tedy nejprve provedli analýzu okolí každého z potenciálních primárů a určili jsme, zda rozdělení pozaďové populace odpovídá rovnoměrnému rozdělení v pětirozměrném prostoru dráhových elementů. Hraniční hodnoty jsme opět rozlišovali dvě, v závislosti na vzdálenosti *d* prověřované dvojice planetek. Poté jsme odhadli pravděpodobnost, že testovaný zdánlivý planetkový pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami. Zde jsme opět chtěli, aby vypočtený podíl $P_2/N_p < 0,1$. Takto jsme vytipovali 12 planetkových klastrů.

U 12 primárů potenciálních planetkových klastrů jsme následně vždy pro každý primár smazali z naší databáze údaje týkající se jeho prvních dvou nejbližších členů a opět provedli celý postup popsaný výše. Tuto proceduru jsme opakovali tak dlouho, dokud jsme pro nějaký primár nacházeli nové planetky, které s ním zdánlivě tvoří planetkový pár.

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že námi provedený postup není zcela korektní, protože jsme se snažili o statistickou analýzu dat, ve kterých jsme předtím uměle provedli změnu. Výsledné hodnoty je proto nutné brát s jistou rezervou. Účelem ale bylo pouhé vytipování planetkových klastrů, u kterých jejich genetickou spřízněnost dále prověří zpětné integrace drah jejich jednotlivých členů. Ty jsou popsány v kapitole 3.

I přes menší exaktnost metody většina jejích výsledků vypadala poměrně věrohodně. V případě 5 potenciálních klastrů jsme obdrželi skupinu planetek, jejichž vzdálenost d je maximálně 21 m/s od primáru, přičemž se v jeho blízkosti až do prověřované vzdálenosti $d \leq 111$ m/s nevyskytují žádné další planetky.

2. Hledání planetkových párů a klastrů

V případě dalších 3 potenciálních klastrů jsme pozorovali skupinu planetek, jejichž vzdálenosti d od primáru byly do 18 m/s, přičemž další následující planetka byla od primáru ve vzdálenosti d > 71 m/s.

Výsledky u dalších 4 potenciálních planetkových klastrů již tak přesvědčivé nebyly. Prvním případem je potenciální klastr okolo primáru (16815). Ten by obsahoval jako sekundár planetku (436551), která se od primáru nachází ve vzádálenosti d = 0.98 m/s. Třetím členem by byla planetka (511378), jejíž vzdálenost d od primáru je již poměrně velká: 45,50 m/s. Dále jsme ale až do $d \leq 111$ m/s od primáru žádnou další planetku nenašli. Kromě velké vzdálenosti d třetího členu byla podezřelá i větší hodnota P_2/N_p , která v jeho případě byla 0,03. Jak bude uvedeno v kapitole 3.5, spřízněnost všech tří planetek jsme nakonec zpětnými dráhovými integracemi nepotvrdili.

Druhým zajímavým potenciálním planetkovým klastrem byl klastr, jehož primár je (86419). Tam námi provedenou upravenou statistickou analýzou ještě prošla jako člen klastru planetka 2017 WJ35, jejíž vzdálenost *d* od primáru je 9,15 m/s. Další planetka v pořadí, 2015 JF35, je od primáru ve vzdálenosti d = 10,36 m/s. Jako zdánlivý planetkový pár s planetkou (86419) však neprošla testem rovnoměrného rozdělení, protože hodnota P_{1/2} = 0,03.

Kromě již zmíněných planetek jsme do vzdálenosti $d \le 111$ m/s od planetky (86419) našli ještě 5 dalších planetek, jejichž vzdálenosti d od primáru jsou v rozmezí 10–53 m/s. Absolutní hvězdné velikosti všech těchto planetek se pohybují v rozmezí 19-20, zatímco absolutní hvězdná velikost primáru je 15,67. Zpětné integrace drah jsme se proto nakonec rozhodli zkusit provést pro všechny tyto planetky.

Třetím speciálním případem je planetkový klastr, u něhož jsme jako primár nakonec určili planetku (9332). Tento klastr jsme ale původně našli při prohledávání okolí hned dvou planetkových párů. První pár byl tvořen planetkami 2008 CR106 a 2016 DB45, druhý pár tvořily planetky 2016 DB45 a 2016 EQ6. V okolí obou těchto párů jsme našli dalších 7 planetek, jejichž vzdálenosti *d* od každého z prověřovaných primárů byly do 5 m/s, žádné další planetky pak až do vzdálenosti $d \leq 111$ m/s od primáru nenásledovaly. Obě skupiny byly tvořeny týmiž 9 planetkami.

Na základě srovnání absolutních hvězdných velikostí všech těchto planetek jsme jako primár určili právě (9332). Jeho absolutní hvězdná velikost je 13,22, absolutní hvězdné velikosti zbylých planetek se pohybují v rozmezí 17–19. Důvodem, proč planetka (9332) nebyla zařazena mezi potenciální primáry je fakt, že je členem rodiny (15) Eunomia. I v případě tohoto potenciálního planetkového klastru jsme se ale rozhodli učinit výjimku a zkusili jsme provést zpětné dráhové integrace jeho jednotlivých členů.

Informace o jednotlivých členech vytipovaných planetkových klastrů uvádíme na https://www.physics.muni.cz/~ehonsova a v elektronické příloze této práce, a sice opět se stejnými detaily, jako v případě planetkových párů. Základní přehled o nalezených planetkových klastrech poskytuje též tabulka 3.3 (str. 51).

3 Odhad stáří planetkových párů a klastrů

U vytipovaných planetkových párů a klastrů jsme odhadovali jejich stáří, tedy dobu, která uplynula od rozpadu mateřského tělesa. To lze učinit za pomoci zpětných dráhových integrací. Při tom jsme použili dvě různé metody. První z nich hledá těsná přiblížení geometrických klonů každé z planetek. Při tom zohledňuje nejistotu určení počátečních drah planetek a nejistotu síly působícího Jarkovského jevu. Její nevýhodou je však značná výpočetní náročnost. V případě starších planetkových párů a klastrů jsme se se proto spokojili s odhadem jejich věku zjednodušenou metodou, která sleduje konvergenci sekulárních úhlů zkoumané dvojice planetek. Tu vyhodnocuje ve vybraných limitních případech působení Jarkovského efektu. Obě zmíněné metody jsou popsány v této kapitole. V jejím závěru jsou pak prezentovány výsledky jak pro vytipované planetkové páry, tak pro planetkové klastry.

3.1 Metoda těsných přiblížení – vytvoření simulace

Problém, kterému jsme čelili, je zdánlivě jednoduchý. Pro vybranou dvojici planetek¹ z databáze načteme dráhové elementy planetek i s jejich nejistotami a na základě těchto nejistot vytvoříme geometrické klony. Pro každý z nich vybereme sílu Jarkovského efektu, která na něj působí. Poté tyto klony vložíme do simulace, která obsahuje všechna tělesa Sluneční soustavy, jež významně přispívají k jejímu gravitačnímu potenciálu.² Následně simulaci spustíme a budeme sledovat vývoj vzájemných pozic dvojic klonů³. Pro vytváření a práci se simulací při tom využijeme knihovny REBOUND (Rein & Liu 2012) a REBOUNDx (Tamayo et al. 2020). Při realizaci jsme se nicméně setkali s vícero komplikacemi.

Načtení dat jsme provedli z AstDys (2025*a*). Zde jsme vybrali verzi dat "orbital elements, multi line format, epoch near present time"⁴, která obsahuje heliocentrické dráhy planetek v oskulačních dráhových elementech i s jejich nejistotami. Najdeme je tam tedy ve formě kovarianční matice. Při načítání dat jsme provedli několik převodů.

Prvním z nich je formát data. V případě námi používaných dat byly dráhové elementy spočteny pro MJD 60800,0 TDT. Při zakládání simulace za pomoci

^{1.} Zde nezáleží na tom, zda se jedná o planetkový pár, nebo zda se jedná o dvojici planetek, která existuje jako zdánlivý planetkový pár v rámci planetkového klastru.

^{2.} Zajímáme se při tom o průběh potenciálu především v oblasti hlavního pásu planetek.

^{3.} Dvojicí klonů zde i v dalším textu myslíme jeden z klonů jedné planetky a jeden z klonů druhé planetky.

^{4.} Popisek udává, že se jedná o oskulační dráhové elementy, přičemž detaily ke každé planetce jsou uvedeny na vícero řádcích. Epocha je zvolena blízko současnosti.

REBOUND je však nutno vkládat datum v UTC v ISO formátu (v našem případě by se jednalo o 2025-05-04 23:58:50,816) nebo ve formátu Juliánského data (\doteq 2460800,4992).

Jako další jsme provedli převod souřadnic. V databázi jsou udávané v tzv. "equinoctial" elementech, které jsou dle Broucke & Cefola (1972) definovány jako $a = a, h = e \sin \omega, k = e \cos \omega, p = \tan(i/2) \sin \Omega, q = \tan(i/2) \cos \Omega, \lambda = M + \omega.$

Dle dokumentace REBOUND je v rámci této knihovny možné pracovat s obdobnými⁵ elementy. Nevýhodou práce s těmito souřadnicemi je skutečnost, že pojmenování jednotlivých veličin při vkládání těles do simulace neodpovídá jejich značení v dokumentaci.⁶ U veličiny *h* pak hrozí záměna s měrným momentem hybnosti.

Alternativou je použití dráhových elementů definovaných v souladu s kapitolou 1.2. I zde jsme ovšem narazili na mírný nesoulad dokumentace a skutečného fungování knihovny. Ten spočívá ve vypisování hodnot veličiny ω v intervalu [0, 2π] namísto intervalu [$-\pi$, π]. Ověřili jsme, že tato skutečnost není spojena s neočekávanými dopady na chování simulace, a zvolili práci s touto soustavou souřadnic.

Na základě kovarianční matice⁷ Σ jsme pak pro každou planetku vytvořili sadu klonů s různými počátečními hodnotami dráhových elementů, které odpovídají normálnímu rozdělení. K tomu jsme stejně jako Vokrouhlický et al. (2017) využili vztah

$$E = T^{\mathrm{T}} z + E_{\star} \,, \tag{3.1}$$

v němž *E* jsou počáteční dráhové elementy jednotlivých klonů. Dále *z* je šestirozměrný vektor, jehož komponenty jsou náhodné odchylky normálního rozdělení ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$). E_* odpovídá v jednotlivých elementech střední hodnotě výsledné sady klonů, tedy nominálním dráhovým elementům. Matice *T* splňuje $T^TT = \Sigma$ a získáme ji za pomoci metody Cholského rozkladu.

Kód jsme napsali tak, aby při vytvoření celkového počtu n klonů dané planetky bylo dle vztahu 3.1 vytvořeno pouze n - 1 klonů. Jeden klon jsme vytvořili tak, aby hodnoty ve všech elementech odpovídaly nominálním dráhovým elementům.

^{5.} Veličiny *a*, *h*, *k* a λ jsou definovány stejně, místo *p* a *q* jsou definovány veličiny $i_x = 2\sin(i/2)\cos\Omega$ a $i_y = 2\sin(i/2)\sin\Omega$.

^{6.} V dokumentaci jsou definována označení pal_h, pal_k, pal_ix, pal_iy, která fungují při dotazování se na jednotlivé veličiny. Při vkládání těles do simulace je však nutno použít označení h, k, ix, iy.

^{7.} V databázi AstDys (2025*a*) je uvedeno pouze 21 členů kovarianční matice odpovídajících jejímu hornímu trojúhelníku. Díky znalosti, že tato matice je symetrická, je však možno matici vystavět celou.

Následně jsme založili simulaci, do které jsme vložili Slunce, všechny planety Sluneční soustavy a dále Vestu, Ceres, Pallas a Pluto. Jejich pozice jsme načítali k datu, ke kterému máme spočtené oskulační dráhové elementy planetek. Údaje týkající se pozic jednotlivých těles při tom knihovna REBOUND přebrala z databáze NASA JPL Horizons system (NASA 2025*a*). Poté jsme pro každou zkoumanou dvojici planetek vložili jako testovací částice všechny klony obou planetek.

V tomto kroku jsme narazili na nepříjemnost spojenou s používáním různých verzí knihovny REBOUND. Protože databáze Horizons neobsahuje informaci o hmotnosti Vesty, Ceres a Pallas, je nutné dané hodnoty vložit ručně. V různých verzích knihovny REBOUND se však liší logika toho, v jakých jednotkách hodnoty zadáváme. Někdy se očekávají jednotky zvolené po založení simulace (v našem případě to byly hmotnosti Slunce), jindy se očekávají kilogramy. Chybné zadání má samozřejmě značný vliv na další průběh simulace.

Po vložení všech těles jsme každé ze zkoumaných planetek (resp. jejím klonům) přiřadili sílu Jarkovského efektu, která na ni působí. To umožňuje knihovna REBOUNDx. Pokud bychom o zkoumaných planetkách měli dostatečné množství údajů (museli bychom znát například jejich rotační periodu, emisivitu či natočení jejich rotační osy), bylo by možné vliv Jarkovského efektu přesně spočítat. (K tomu bychom v REBOUNDx využili plnou verzi Jarkovského efektu.) Protože ale údaje neznáme, bylo nutné tuto nejistotu do výpočtu zapracovat. I za tímto účelem jsme využili jednotlivé klony.

V REBOUNDx jsme vybrali, že budeme pracovat se zjednodušenou verzí Jarkovského efektu. V rámci ní je nutno zadat pouze hustotu tělesa, jeho poloměr a albedo. Knihovna takto nasimuluje maximální velikost Jarkovského efektu. Výsledný směr závisí na volbě uživatele: příznak –1 znamená, že bude docházet ke zmenšování velké poloosy dráhy tělesa, příznak +1 simuluje zvětšování jeho velké poloosy.

V případě hustoty jsme pro všechny planetky fixně zvolili hodnotu 2,5 g/cm³. Průměr každé planetky D jsme určili za pomoci rovnice, kterou použili napří-klad Harris & Harris (1997):

$$\log D = 3,1236 - 0,5\log \alpha - 0,2H, \qquad (3.2)$$

kde α je albedo a *H* absolutní hvězdná velikost planetky. Albedo jsme při výpočtu průměru planetky nastavili rovno 0,2.

Pro účely simulace jsme sice též předpokládali hodnotu albeda rovnu 0,2, explicitně jsme ji ovšem nenastavili. Právě parametr albeda jsme využili k tomu, abychom zohlednili nejistotu spjatou s velikostí Jarkovského efektu.

Zrychlení tělesa způsobené vlivem Jarkovského efektu je dle Ferich et al. (2022) v REBOUNDx vypočítáno jako

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{3L(1-\alpha)}{64\pi\rho Rcr^2} \mathbb{Y}i\,,\tag{3.3}$$

27

kde *v* je rychlost tělesa, *t* je čas, *c* rychlost světla, *L* je zářivý výkon centrální hvězdy (tedy Slunce). Dále α , ρ a *R* jsou postupně albedo, hustota a poloměr tělesa, *r* je jeho vzdálenost od dané hvězdy. Matice \mathbb{Y} realizuje požadovaný výsledný směr Jarkovského efektu, *i* je relativisticky opravený směr přicházejícího záření.

Při pohledu na rovnici 3.3 je zřejmé, že pokud zvolíme hodnotu $\alpha = 1$, výsledné zrychlení bude nulové. Takto jsme učinili u každé planetky pro klon, kterému jsme ponechali nominální hodnoty jednotlivých dráhových elementů. Pro zbylých n - 1 klonů jsme pak vygenerovali sadu hodnot v intervalu [0,2; 1], odpovídajících rovnoměrnému rozdělení, a každému z klonů jsme jednu z hodnot přidělili jako jeho albedo. Tím jsme naškálovali velikost působícího Jarkovského efektu.

Směr Jarkovského efektu, tedy příznak –1 či +1, skrytý v parametru \mathbb{Y} , jsme pak volili náhodným generováním těchto dvou čísel. To jsme opět provedli pro n - 1 klonů. Klonu s nominální hodnotou dráhových elementů jsme formálně přidělili příznak +1.

Před spuštěním simulace bylo nutno vybrat integrátor, časový krok a zvolit, kolik let do minulosti má simulace probíhat. Volba každého z těchto parametrů měla významný dopad na čas běhu simulace, zvolené parametry jsou proto diskutovány v sekci 3.2.

V průběhu simulace jsme pak vždy po uplynutí určitého časového úseku prováděli kontrolu vzájemných pozic všech klonů jedné planetky vůči všem klonům druhé planetky. Při této kontrole jsme vyhodnocovali, zda u některé dvojice klonů nedošlo k těsnému přiblížení. Abychom prohlásili, že u dvojice klonů došlo k významnému těsnému přiblížení, vyžadovali jsme, aby byla malá nejen jejich vzájemná fyzická vzdálenost, ale též jejich relativní rychlost. Vzájemnou fyzickou vzdálenost jsme vyhodnocovali v násobcích Hillovy sféry, relativní rychlost jsme poměřovali s rychlostí únikovou.

Poloměr Hillovy sféry r_{Hill} jsme spočetli jako

$$r_{\rm Hill} = r \sqrt[3]{\frac{m}{3(M+m)}}$$
, (3.4)

kde *r* je vzdálenost primáru od Slunce, *m* jeho hmotnost a *M* hmotnost Slunce.

Unikovou rychlost $v_{\rm esc}$ jsme spočetli ze vztahu

$$v_{\rm esc} = \sqrt{\frac{2Gm}{R}}, \qquad (3.5)$$

kde *G* je gravitační konstanta, *m* hmotnost primáru a *R* jeho poloměr.

Pokud u některé dvojice klonů došlo k významnému těsnému přiblížení, uložili jsme si označení daných klonů, čas, kdy k těsnému přiblížení došlo,

vzdálenost klonů (v kilometrech a v násobcích Hillovy sféry) a jejich relativní rychlost.

V případě některých dvojic klonů byla kritéria pro významné těsné přiblížení splněna ve vícero okamžicích. Z toho důvodu jsme posuzovali i vývoj vzdálenosti dané dvojice klonů v čase. Pozorovali jsme, že u jedné dvojice klonů může opakovaně docházet k jejich přiblížení a následnému oddálení. Našim cílem pak bylo pro danou dvojici klonů do finálních dat uložit v rámci daného přiblížení pouze hodnoty v tom časovém okamžiku, kdy byla vzdálenost dané dvojice klonů nejmenší.

Abychom toto provedli, nastavili jsme, že dokud se klony přibližovaly, každé jejich lepší (bližší) významné těsné přiblížení vedlo k zapomenutí hodnot jejich předešlého těsného přiblížení. Jakmile se začaly oddalovat, do samostatného parametru jsme si evidovali, jaký je poslední čas, ve kterém daná dvojice klonů ještě splňovala parametry významného těsného přiblížení. Pokud mezi tímto časem a časem dalšího významného těsného přiblížení uplynulo více než 10 dní, považovali jsme ho za nové přiblížení a opět jsme si uložili hodnoty týkající se dané dvojice klonů. Poté jsme opět sledovali, jestli bude docházet k přibližování dané dvojice klonů.

3.2 Optimalizace simulace a výsledná volba parametrů

Abychom mohli simulaci, jejíž strukturu jsme popsali v kapitole 3.1, spustit, bylo nutno zvolit konkrétní hodnoty některých parametrů. Ideálně bychom chtěli zvolit co nejpřesnější integrátor a simulaci provést pro co největší počet klonů (v řádech tisíců). Četnost kontroly vzájemných pozic klonů musíme přizpůsobit podílu poloměru Hillovy sféry (typicky řádově stovky km) a vzájemné rychlosti planetek (u planetkových párů očekáváme řádově m/s). Prakticky to znamená nutnost kontroly vzájemných pozic a rychlostí klonů zhruba jednou denně (v čase simulace). Délka simulace se odvíjí dle věku páru, který může být v řádech stovek tisíc let.

Při zvyšování přesnosti simulace nicméně přirozeně dochází k nárůstu výpočetního času. Ten je rovněž ovlivněn zvoleným programovacím jazykem. V našem případě jsme se rozhodovali mezi jazyky Python a C, pro které je psána dokumentace týkající se knihoven REBOUND a REBOUNDx.

Z důvodu větší uživatelské přívětivosti jsme simulaci nejprve vytvořili v Pythonu. Jeho nevýhodou je oproti C typicky delší čas běhu skriptů. Ten jsme se snažili zkrátit použitím knihoven NumPy a multiprocessing, ale ani pak se nám nepodařilo docílit dostatečného urychlení výpočtu. Odhadovali jsme, že simulace dlouhá 100 000 let by při vytvoření 1 000 klonů od každé planetky

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

a kontrole jejich vzájemných pozic jednou denně (simulovaného času) trvala desítky dní.

Zmíněný čas jsme vyhodnotili jako příliš velký a rozhodli jsme se pro kombinaci využití programovacích jazyků Python a C.⁸ Python jsme využili pro načtení dráhových elementů z databáze a vytvoření klonů planetek. V C jsme simulaci spustili a prováděli detekci těsných přiblížení.

Dále jsme testovali rychlost celé simulace při různé volbě integrátoru, počtu klonů a časového intervalu kontroly pozic klonů.⁹

Při volbě integrátoru jsme vybírali mezi IAS15 (Rein & Spiegel 2015) a WH-Fast (Rein & Tamayo 2015, Wisdom & Holman 1991). IAS15 je integrátor 15. řádu. Při jeho použití je možno nastavit velikost prvního časového kroku, dále je časový krok volen adaptivně. Díky tomu integrátor zvládá spolehlivě vyřešit i těsná přiblížení k hmotným částicím. Jeho výhodou je, že dosahuje strojové přesnosti. Nevýhodou je delší trvání výpočtu.

Výpočet za pomoci WHFast může být rychlejší. Větší rychlost ovšem vykazuje na úkor přesnosti – vše záleží na tom, jaký je zvolen řád korektoru. U tohoto integrátoru je dále nutné zvolit časový krok, který bude po celou dobu simulace fixní. Při těsných přiblížení k hmotným částicím pak v případě tohoto integrátoru dochází k problémům.

Základní nastavení při testování rychlosti simulace bylo: integrace 100 klonů od každé planetky po dobu 100 let s kontrolou pozic klonů jednou za den. V případě WHFast jsme nastavili časový krok též jeden den, korektor jsme nechali nulový. Testování nejprve probíhalo na jednom jádru. Následně jsme zkoušeli jednotlivé parametry měnit a sledovali jsme dopady na rychlosti simulace.

Pozorovali jsme, že při nulovém korektoru byl WHFast zhruba $40 \times$ rychlejší než IAS15. Pro korektor 11 byla rychlost obou integrátorů srovnatelná, pro (nejlepší) korektor 17 byla simulace s integrátorem WHFast zhruba $1,5 \times$ pomalejší než při použití IAS15.

Škálování parametrů množství klonů, délky integrace, intervalu mezi kontrolou pozic klonů a časového kroku bylo přibližně lineární.¹⁰

Posledním prověřovaným parametrem byl počet použitých jader. V případě integrátoru WHFast jsme narazili na neslučitelnost použití nenulového korek-

^{8.} Později jsme provedli srovnání toho, kdy simulaci spustíme celou v Pythonu, s hybridní formou, při které kombinujeme Python a C. Simulace využívající C, která při výpočtu využívala 6 jader, tehdy byla zhruba $4.4 \times$ rychlejší.

^{9.} Toto testování jsme prováděli pro dostatečně vzdálené klony obou planetek. V takovém případě se proces detekce těsných přiblížení přeruší po kontrole vzdáleností klonů v souřadnici *x*. Délka kroku, v němž je prováděna detekce těsných přiblížení, byla proto zanedbatelná.

^{10.} Desetkrát větší množství klonů způsobilo přibližně desetkrát delší čas běhu simulace. Desetkrát delší doba integrace nepřekvapivě znamenala desetkrát delší dobu běhu simulace. Dvakrát častější kontrola pozic klonů či dvakrát menší časový krok v případě WHFast znamenaly zhruba dvojnásobný čas běhu simulace.

toru současně s paralelizací integrace drah klonů. Problémem bylo, že každé z těchto nastavení vyžaduje využití jiných souřadnic. V případě použití IAS15 jsme u samotné integrace nepozorovali významné urychlení výpočtu.

Použití více jader se nicméně ukázalo jako nápomocné ve fázi kontroly vzájemných pozic klonů. Konkrétně tedy ve chvíli, kdy klony obou planetek již byly fyzicky blízko a docházelo k ukládání významných těsných přiblížení. Největší zrychlení (zhruba o 20 %) jsme pozorovali při změně z jednoho jádra na dvě, s každým dalším přidaným jádrem byly změny rychlosti menší. Pro 100 klonů by byla optimální volba 5 jader, poté se proces opět zpomaloval. Pro 1 000 klonů jsme posuzovali situaci při použití až 8 jader, při čemž neustále docházelo ke zlepšování, leč pomalému.

Pro naši simulaci jsme vzhledem ke všem výše uvedeným skutečnostem nakonec zvolili následující parametry: počet klonů každé z planetek byl 1 000, jako integrátor jsme zvolili IAS15, kontrola vzájemných pozic klonů probíhala jednou za 2 dny. Výpočet jsme prováděli na 6 jádrech. Při těchto parametrech jsme očekávali, že integrace 100 000 let do minulosti bude trvat přibližně 8 dní.

Po spuštění simulací na MetaCentru se jako důležitý ukázal být ještě parametr SPECfp2017, který udává rychlost daného stroje. U něj jsme vyžadovali, aby byl alespoň 8,0. Teprve pak byla doba výpočtu s výše zvolenými parametry 8–11 dní.

3.3 Konvergence sekulárních úhlů

Z důvodu velké výpočetní náročnosti odhadu stáří planetkových párů a klastrů metodou popsanou v kapitole 3.1 jsme se u některých¹¹ dvojic planetek rozhodli pro odhad jejich věku za pomoci konvergence sekulárních úhlů Ω a ω .

Podobně jako Nesvorný & Vokrouhlický (2006)¹² jsme hledali minimum funkce

$$\Delta V(t) = na \sqrt{k_1 (\sin i \,\delta \Omega)^2 + k_2 (e \,\delta \varpi)^2}. \tag{3.6}$$

Koeficienty jsme při tom stejně jako Nesvorný & Vokrouhlický (2006) volili $k_1 = 1$ a $k_2 = 1/2$. Veličiny *n*, *a*, *i*, *e* zde mají stejný význam jako v rovnici 2.1. Jejich hodnoty jsme brali jako průměr hodnot daných veličin obou planetek.

Abychom prohlásili, že v daném okamžiku pravděpodobně došlo k rozpadu mateřského tělesa, vyžadujeme, aby hodnota funkce ΔV byla v minimu blízká nule.

Skript, pomocí něhož je možné touto metodou odhadnout stáří dvojice planetek, vytvořila autorka již pro účely své bakalářské práce, viz Honsová (2023).

^{11.} Viz sekce 3.4 a 3.5.

^{12.} Nesvorný & Vokrouhlický (2006) uvádí funkci v obecném tvaru pro více párů planetek, my zde uvádíme pro nás postačující tvar pro jeden pár.

Jeho hlavní výhodou je rychlost odhadu stáří. (Pro níže uvedené parametry trvala integrace 1 000 000 let do minulosti méně než 4 dny.) Nevýhodou je absence kontroly fyzické vzdálenosti planetek v okamžiku minima funkce ΔV a menší množství použitých klonů.

Tato simulace pracuje pouze s maximálními hodnotami velikosti Jarkovského efektu. U každé planetky z testované dvojice sleduje vývoj jejích dráhových elementů ve 3 různých případech: vlivem Jarkovského efektu dochází ke zvětšování velké poloosy dráhy planetky, zmenšování její velké poloosy, případně když Jarkovského efekt dráhu planetky nijak neovlivňuje. Pro dvojici planetek tak celkově získáváme přehled o vývoji funkce ΔV v 9 různých situacích.

Podobně jako v simulaci popsané v sekci 3.1 jsme u každé planetky nastavili fixně hodnotu albeda rovnu 0,2 a hustotu rovnu 2,5 g/cm³. Průměr planetky jsme určili z rovnice 3.2.

Pro vytvoření modelu gravitačního potenciálu jsme opět použili Slunce, všechny planety Sluneční soustavy, Vestu, Ceres, Pallas a Pluto. Použitým integrátorem byl IAS15.

Vývoj drah testovacích částic v podobě námi zkoumaných planetek jsme sledovali 1 000 000 let do minulosti. Hodnoty veličin nezbytné pro výpočet funkce ΔV jsme vypisovali každých 5 let.

Pro práci se simulací jsme použili programovací jazyk Python. Při tom jsme opět využili knihoven NumPy, Astropy, REBOUND a REBOUNDx. Dále jsme využili též knihovny matplotlib (Hunter 2007) a sys (Van Rossum & Drake Jr 1995). Výpočty opět probíhaly na MetaCentru.

3.4 Odhad stáří planetkových párů

Věk všech vybraných planetkových párů jsme se nejprve pokusili odhadnout za pomoci zpětných dráhových integrací popsaných v části 3.1.

Jak již bylo zmíněno, v rámci této metody jsme hledali okamžik, kdy byla u dvojice klonů malá jejich vzájemná fyzická vzdálenost ($r_{\rm rel}$) i relativní rychlost ($v_{\rm rel}$). Ideálně bychom chtěli, aby zároveň platilo $r_{\rm rel} \leq 1 r_{\rm Hill}$ a $v_{\rm rel} \leq 1 v_{\rm esc}$. Takováto podmínka by nicméně byla velmi striktní. Při vyhodnocení jsme chtěli zohlednit, že naše výsledky mohou být ovlivněny nejistotou určení dráhových elementů planetek, síly působícího Jarkovského efektu a dále i diskrétností okamžiků, ve kterých provádíme kontroly vzájemných pozic klonů.

Podobně jako Pravec et al. (2019) jsme proto použili kritérium $r_{\rm rel} \leq$ (5 nebo 10) $r_{\rm Hill}$ a $v_{\rm rel} \leq$ (2 nebo 4) $v_{\rm esc}$. Pro jemnější dělení jsme přidali ještě vlastní limity. Násobky poloměru Hillovy sféry označíme $i_{r \rm Hill}$, násobky únikové rychlosti označíme $j_{v \rm esc}$. Výsledná sada testovaných maximálních násobků $\{i_{r \rm Hill}, j_{v \rm esc}\}$ nakonec byla $\{1, 1\}, \{3, 1\}, \{5, 2\}, \{10, 4\}, \{15, 4\}.$

Při odhadu věku jsme pracovali s množinou časů, ve kterých detekovaná těsná přiblížení jakékoliv dvojice klonů splňovala kritérium $r_{rel} \leq i_{r \text{ Hill}} r_{\text{Hill}}$ a zároveň $v_{rel} \leq j_{v \text{ esc}} v_{\text{esc}}$. Střední hodnotu stáří planetkového páru jsme určili jako medián všech těchto časů. Nejistotu jsme určili jako 5. a 95. percentil.

Dále jsme museli rozhodnout, jaký konečný limit $\{i_{r \text{Hill}}, j_{v \text{ esc}}\}$ zvolit pro určení odhadu stáří daného planetkového páru. Vliv různé volby těchto limitů na výsledný odhad věku páru je ukázán na příkladu páru planetek (356713) a (691571) na obrázku 3.1. Na něm je vyobrazen histogram počtu detekovaných těsných přiblížení v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku planetkového páru pro různé limity je uveden v legendě.



Obrázek 3.1: Planetkový pár (356713) a (691571): histogram počtu detekovaných těsných přiblížení (*n* značí jejich celkový počet) v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku.

Pozorujeme, že volnější limity obecně znamenají spíše nárůst délky intervalu, v němž je odhadnuto stáří tohoto planetkového páru. Společně s tím dochází k mírným změnám v odhadu střední hodnoty stáří planetkového páru. Výjimkou by bylo použití kritérií {1, 1}. To by vedlo k posunu odhadu vzniku planetkového páru více do minulosti. Posunut je nejen celý interval, ale významněji i střední hodnota odhadu stáří.

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

Na základě porovnání histogramů prověřovaných planetkových párů jsme nakonec pro určení věku použili co nejpřísnější limity { $i_{r \text{Hill}}, j_{v \text{ esc}}$ }, u kterých bylo splněno, že počet detekovaných těsných přiblížení splňujících uvedená kritéria je $\geq 10\ 000$. V případě planetkového páru (356713) a (691571) se tedy jednalo o limity $r_{\text{rel}} \leq 3 r_{\text{Hill}}$ a $v_{\text{rel}} \leq 1 v_{\text{esc}}$.

V případě některých párů ani nejvolnější limit {15, 4} nezaručil, že požadovaná kritéria splnilo alespoň 10 000 detekovaných těsných přiblížení. Příkladem takového planetkového páru jsou planetky (464338) a 2016 PB276. Histogram počtu detekovaných těsných přiblížení klonů tohoto planetkového páru je vykreslen na obrázku 3.2



Obrázek 3.2: Planetkový pár (464338) a 2016 PB276: histogram počtu detekovaných těsných přiblížení (*n* značí jejich celkový počet) v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku.

U takovýchto párů jsme vyžadovali, aby počet detekovaných těsných přiblížení, které splní kritérium {15, 4} byl alespoň 1 000. Pokud toto bylo splněno, vyhodnotili jsme věk páru metodou popsanou v podkapitole 3.1. Při nesplnění této podmínky jsme pro odhad stáří planetkového páru použili metodu popsanou v podkapitole 3.3. Ta mohla rychleji odhalit případy, kdy bychom narazili na falešný planetkový pár, stejně jako případy, kdy by stáří páru bylo velké a dané nálezy znamenaly teprve počátek konvergence dráhových elementů daného planetkového páru.

Při vyhodnocování stáří planetkových párů jsme se dále potýkali se specifiky tvaru histogramů. Na obrázcích 3.1 a 3.2 je možné si povšimnout, že množství detekovaných těsných přiblížení typicky nejprve rychle narůstá, následně ale klesá relativně pomalu. (Sledujeme-li vývoj z přítomnosti čím dál více do minulosti.) Takovéto "ocásky" se následně vyskytují i po několik stovek tisíc let, viz též obrázek 3.3. (Na obrázku 3.3 je též dobře vidět nárůst délky intervalu, v němž je odhadnut věk, s uvolňováním limitů $\{i_{r \text{Hill}}, j_{v \text{ esc}}\}$. Tentokrát ovšem nepozorujeme výraznější skok v situaci s méně než 10 000 detekovanými přiblíženími splňujícími kritéria $\{1, 1\}$.)



Obrázek 3.3: Planetkový pár (30243) a 2015 DF67: histogram počtu detekovaných těsných přiblížení (*n* značí jejich celkový počet) v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku.

Vzhledem k výpočetní náročnosti odhadu stáří planetkových párů za pomoci metody těsných přiblížení jsme nejprve prováděli integraci jejich drah typicky¹³ po dobu 100 000 let. Poté bylo nutné rozhodnout, jestli jsou získaná

^{13.} Z důvodu průběžných úprav kódu se v první etapě v případě některých planetek tento interval lišil.

data dostatečná, nebo zda musíme prodloužit integraci drah planetek o dalších 100 000 let. (Poté nás opět čekalo stejné rozhodování.)

Při tomto rozhodování jsme přihlíželi k hornímu odhadu věku planetkového páru. Ideálně jsme chtěli, aby rozdíl mezi horním odhadem věku a koncem poslední etapy integrace byl ve všech kritériích alespoň 50 000 let. Do konečných výsledků jsme však zařadili všechny planetkové páry, u kterých je toto kritérium splněno alespoň pro ty limity $\{i_{r \text{Hill}}, j_{v \text{ esc}}\}$, které jsou použity k odhadu věku planetkového páru.

V případě některých planetkových párů nás netrápily tolik samotné délky "ocásků", jako spíše fakt, že stáří planetkového páru je poměrně velké z podstaty jeho střední hodnoty. Může se jednat o páry, u kterých detekujeme první významná těsná přiblížení až v několikáté etapě integrace. Druhou možností jsou páry, jejichž histogramy jsou podobné histogramu dvojice planetek (16126) a (701496), viz obrázek 3.4. Na něm vidíme, že myšlená křivka, kterou by se dal aproximovat tvar histogramu, by měla poměrně nízké maximum a velkou šířku.



Obrázek 3.4: Dvojice planetek (16126) a (701496): histogram počtu detekovaných těsných přiblížení (*n* značí jejich celkový počet) v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku.

Zpětné integrace drah planetek jsme prováděli pro všechny planetkové páry, u kterých to bylo potřeba, minimálně po dobu 400 000 let. Kratší úsek jsme zvolili jen u těch planetkových párů, u kterých po kratší době bylo splněno kritérium horního odhadu jejich stáří.

Pokud ze získaných dat nebylo možné stáří odhadnout, přistoupili jsme k hrubému odhadu věku planetkového páru za pomoci metody popsané v podkapitole 3.3. Jednalo se tedy o starší planetkové páry, planetkové páry s dlouhými "ocásky", a planetkové páry, u nichž jsme během této doby nalezli méně než 1 000 těsných přiblížení splňujících limit $r_{\rm rel} \leq 15 r_{\rm Hill}$ a $v_{\rm rel} \leq 4 v_{\rm esc}$.

Abychom mohli vyhodnotit odhad stáří planetkových párů za pomoci konvergence sekulárních úhlů, uváděli jsme, že vyžadujeme, aby minimum funkce ΔV bylo blízké nule. Nesvorný & Vokrouhlický (2006) uvádějí, že hraniční hodnotu volili blízkou rychlostem, kterými se pohybují jednotlivé kusy po rozpadu mateřského tělesa. Pro naše účely jsme se proto rozhodli opět pracovat s násobky únikové rychlosti. Přihlédli jsme k tomu, že průběh funkce ΔV v případě mnoha planetkových párů značně osciluje, a jako finální jsme zvolili hranici $\Delta V \leq 4 v_{esc}$.

U každého planetkového páru jsme vyhodnocovali průběh funkce ΔV pro 3 klony¹⁴ od každé planetky, a tedy v 9 různých situacích. Pro odhad věku daného planetkového páru jsme v každé z těchto situací určili minimální a maximální čas, kdy $\Delta V \leq 4 v_{esc}$. Finální hodnotu minima jsme pak určili jako minimum ze všech minimálních hodnot časů. Hodnotu maxima jsme obdobně určili jako maximum ze všech maximálních hodnot časů. Takto získaný odhad věku je pouze velice hrubým odhadem, v tabulkách výsledků ho proto uvádíme v závorkách. Jeho účelem je především prezentovat přibližnou nutnou délku integrace při použití výpočetně náročnější metody těsných přiblížení.

Průběh funkce ΔV pro dvojici planetek (16126) a (701496) je uveden na obrázku 3.5. Výsledek je možné porovnat s histogramem téže dvojice planetek uvedeným na obrázku 3.4.

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že průběh funkce ΔV neměl pokaždé tak jasné minimum, jako je vyobrazeno na obrázku 3.5. V některých případech jsme pozorovali vícero minim s výraznými časovými rozestupy mezi nimi. U některých planetkových párů (a pro některé kombinace směru působení Jarkovského efektu) oscilovala hodnota funkce ΔV okolo nuly po celý sledovaný úsek 1 000 000 let. I z těchto důvodů je proto data získaná touto metodou nutno brát s jistou rezervou.

//Získané hodnoty odhadů věku planetkových párů uvádíme na https:// www.physics.muni.cz/~ehonsova a v elektronické příloze této práce. Kromě již zmíněných detailních informací o planetkových párech je na daných místech

^{14.} Viz kapitolu 3.3.

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů



Obrázek 3.5: Průběh funkce ΔV dvojice planetek (16126) a (701496). Cerveně jsou zobrazeny výsledné limity odhadu doby, kdy došlo k rozpadu mateřského tělesa. (Spodní limit je v t = -0,01 kyr.) Zeleně je vyobrazena hranice 4 v_{esc} . V jednotlivých grafech uvádíme vliv Jarkovského efektu působícího na primár (P) a sekundár (S). Zvětšování velké poloosy planetky v důsledku Jarkovského efektu značíme indexem +, její zmenšování indexem – a situaci, kdy Jarkovského efekt dráhu planetky nijak nepozměňuje, indexem 0.

možno nalézt informaci o únikové rychlosti daného primáru. Dále u planetkových párů, jejichž věk byl odhadnut za pomoci metody těsných přiblížení, uvádíme informaci o použitých limitech $\{i_{r \text{Hill}}, j_{v \text{ esc}}\}$; počtu detekovaných těsných přiblížení, které tyto limity splňují; a minimální a maximální fyzickou vzdálenost dvojic klonů.

Základní přehled prověřovaných planetkových párů a odhad jejich věků poskytujeme též níže. V tabulce 3.1 (str. 42) uvádíme planetkové páry, které jsou uvedeny v seznamu známých planetkových párů na internetové stránce Johnston (2025*a*). Vidíme, že z 36 zkoumaných známých planetkových párů se nám metodou těsných přiblížení podařilo odhadnout jejich věk u 29 párů. Další dva známé planetkové páry jsme později identifikovali jako členy klastru, uvádíme je proto až v tabulce 3.3 (str. 51). V jejich případě se nám též podařilo metodou těsných přiblížení odhadnout jejich věk.

V tabulce 3.2 (str. 44) uvádíme přehled planetkových párů, které nejsou uvedeny v databázi známých planetkových párů Johnston (2025*a*). Vidíme, že ze 113 vybraných plantkových párů se nám podařilo metodou těsných přiblížení klonů planetek odhadnout stáří u 96 párů.

U již objevených planetkových párů, pro které jiní autoři odhadli věk i s jeho nejistotami, jsme provedli srovnání tohoto věku a věku, který jsme získali me-

todou těsných přiblížení. (Planetkové páry, jejichž věk se nám touto metodou odhadnout nepodařilo, jsme ze srovnání vyřadili.) Takovýchto planetkových párů je 24. Výsledek srovnání odhadů jejich stáří je uveden na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Srovnání výsledných odhadů stáří planetkových párů (osa x) s odhady stáří těchto párů určenými jinými autory (Johnston 2025a) (osa y). Pro červenou čáru platí x = y, a tedy se jedná o oblast shodných výsledků.

Na obrázku 3.6 je na ose x uveden odhad věku planetkových párů námi provedenou metodou, na ose y je vynesen odhad věku určený jinými autory. Pro červenou čáru platí x = y, a tedy se jedná o oblast shodných výsledků. Na základě zobrazených dat vidíme, že výsledky naší metody se v rámci nejistot téměř ve všech případech shodují s výsledky odhadů věků planetkových párů, které provedli jiní autoři.

Z 24 srovnávaných planetkových párů interval nejistoty neprotíná červenou čáru jen ve 4 případech. Z toho ve 2 případech¹⁵ by ke shodě došlo, pokud by spodní hranice intervalu námi odhadnutého stáří planetkového páru byla řádově o jednotky tisíc let menší. Významně se odchylují odhady stáří dvou planetkových párů. První z nich je tvořen planetkami (125887) a (197706). Druhý planetkami (107438) a 2009 HL15. Histogramy získané metodou těsných přiblížení jsou pro tyto dva planetkové páry zobrazeny na obrázcích 3.7 a 3.8.

Stáří planetkového páru (125887) a (197706) určili Kyrylenko et al. (2021) jako $11,2^{+03}_{-01}$ kyr. Na obrázku 3.7 vidíme, že obdobný věk by bylo možné určit

^{15.} Jedná se o páry planetek (30243) a 2015 DF67, (16815) a (436551).



Obrázek 3.7: Planetkový pár (125887) a (197706): histogram počtu detekovaných těsných přiblížení (*n* značí jejich celkový počet) v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku.

v případě, že bychom rozšířili limit $v_{rel} \leq 6 v_{esc}$, a ten bychom i použili. Ve vyobrazených datech je společně s tím použit limit $r_{rel} \leq 15 r_{Hill}$.

Stáří planetkového páru (107438) a 2009 HL15 určili Kyrylenko et al. (2024) jako $627,1^{+323}_{-456}$ kyr. Námi získaná data uvádíme na obrázku 3.8 vykreslená i pro případ použití nejvolnějších limitů {15, 6}, které by vedly k úpravě odhadu věku páru (125887) a (197706).

Při srovnání obrázků 3.7 a 3.8 ve snaze upravit náš proces vyhodnocování dat se ocitáme v paradoxní situaci. Vidíme, že oba histogramy jsou si svým tvarem podobné, závěry z nich jsou ale opačné.

V případě planetkového páru (125887) a (197706) bychom se k publikovanému výsledku dostali tak, že bychom se spokojili s prvním významným vrcholem a zbytek dat nebrali v úvahu. Naopak v případě planetkového páru (107438) a 2009 HL15 bychom tento vrchol měli ignorovat a hledat ještě starší blízká přiblížení této dvojice planetek. Tento krok je však za pomoci námi používaných kritérií těžké učinit, neboť planetky (107438) a 2009 HL15 svými relativními blízkostmi a rychlostmi v měřítku { $i_{r Hill}$, $j_{v esc}$ } při prvním vrcholu



Obrázek 3.8: Planetkový pár (107438) a 2009 HL15: histogram počtu detekovaných těsných přiblížení (*n* značí jejich celkový počet) v závislosti na simulovaném čase. Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku.

vykazovaly mnohem lepší hodnoty, než planetky (125887) a (197706) v obdobném okamžiku.

Do grafu 3.9 jsme vynesli námi odhadnuté stáří všech planetkových párů (včetně zdánlivých planetkových párů, které jsou v rámci planetkového klastru tvořeny primárem a jemu nejbližší planetkou z hlediska vzdálenosti *d*), u kterých bylo tuto hodnotu možné získat metodou těsných přiblížení, a jejich vzdálenost *d* v prostoru středních dráhových elementů.

Z obrázku 3.9 je patrná jistá korelace mezi oběma veličinami. Vidíme však, že data mají poměrně velký rozptyl.



Obrázek 3.9: Srovnání věku dvojice planetek a jejich vzdálenosti d v prostoru středních dráhových elementů.

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(469759)	2016 QZ123	0,02	2,4	18,2	20,4	1e-15	3^{+13}_{-2}
(458271)	2010 RN221	0,04	2,6	17,7	19,2	2e-13	22, $2^{+0,4}_{-0,3} \cdot 10^{-3}$
(21436)	(334916)	0,11	2,2	15,4	18,1	9e-12	58^{+99}_{-22}
(195479)	(284765)	0,13	2,6	16,5	17,3	2e-11	94_{-51}^{+179}
(180906)	(217266)	0,18	2,2	17,5	17,6	5e-11	48^{+63}_{-16}
(165389)	(282206)	0,20	2,3	16,7	17,4	8e-11	146^{+98}_{-67}
(404118)	(355258)	0,20	2,2	18,0	18,8	4e-11	17^{+47}_{-8}
(88259)	(337181)	0,28	1,9	15,3	17,3	5e-12	68^{+36}_{-19}
(92652)	(194083)	0,30	2,3	15,6	16,9	3e-10	$108\substack{+204 \\ -45}$
(320025)	(489464)	0,30	2,8	16,2	17,3	6e-09	31^{+71}_{-9}
(30243)	2015 DF67	0,42	2,2	16,1	19,3	1e-09	49^{+148}_{-14}
(14593)	(681846)	0,42	2,3	15,4	18,3	9e-09	36^{+42}_{-14}

Tabulka 3.1: Známé planetkové páry, u kterých jsme odhadovali jejich věk

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(208497)	2019 SG147	0,46	2,2	17,8	19,8	5e-09	99^{+196}_{-34}
(184300)	(422777)	0,47	2,1	17,8	18,7	3e-09	127^{+190}_{-72}
(753144)	(524324)	0,55	2,0	18,0	18,5	6e-10	139^{+110}_{-29}
(487651)	2021 VA24	0,56	2,4	18,1	19,7	3e-08	113^{+182}_{-55}
(57202)	(276353)	0,60	2,3	15,6	17,5	7e-08	161^{+140}_{-50}
(167405)	(747194)	0,67	2,7	16,1	17,9	7e-08	(0-656)
(26416)	(214954)	0,84	2,3	14,4	16,9	2e-08	(0-945)
(156163)	2012 TJ110	0,88	2,3	16,1	18,4	8e-08	115^{+142}_{-30}
(461548)	(612428)	0,94	2,3	18,1	19,1	2e-07	154^{+171}_{-92}
(16815)	(436551)	0,98	2,6	12,8	17,2	5e-08	118^{+291}_{-26}
(333128)	2021 VX9	1,04	2,3	17,3	20,4	2e-07	40^{+76}_{-7}
(8898)	(70287)	1,05	2,4	15,0	16,2	8e-08	148^{+139}_{-31}
(348452)	(418312)	1,05	1,9	18,0	18,7	5e-09	100^{+276}_{-46}
(53576)	(421781)	1,06	2,2	15,8	18,1	3e-07	221^{+211}_{-137}
(111962)	(280008)	1,07	2,3	16,2	17,4	4e-07	41^{+15}_{-2}
(107438)	2009 HL15	1,12	2,4	16,3	18,7	4e-07	15^{+169}_{-2}
(178457)	(531019)	1,25	2,3	15,9	17,9	1e-07	(93-913)
(26420)	(650740)	1,57	2,2	15,8	18,6	1e-06	(0-914)
(106700)	(263114)	1,61	1,9	16,7	17,4	5e-08	(168-942)
(304000)	(649244)	1,72	2,2	17,9	18,9	9e-07	154^{+190}_{-73}
(67982)	(317521)	1,74	2,4	15,2	16,8	6e-07	(0-894)
(189428)	2004 RU235	1,81	2,2	18,1	19,9	3e-07	97^{+175}_{-63}
(44670)	2015 RW129	1,87	2,2	16,5	19,9	3e-07	(0-1000)
(125887)	(197706)	1,97	2,4	15,9	17,0	4e-06	200^{+227}_{-99}

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

• Čtvrtý sloupec a_{prim} udává velkou poloosu dráhy primáru. Sloupce H_{prim} a H_{sek} udávají absolutní hvězdné velikosti primáru a sekundáru. Veličiny *d* a P_2/N_p používáme v souladu s kapitolou 2.

• Planetkové páry (11842) a (436415), (39991) a (428243) jsme později identifikovali jako členy klastrů, v této tabulce je proto neuvádíme.

primár	sekundár	<i>d</i> (m/s)	a _{prim} (au)	<i>H</i> _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(174596)	2017 SG154	0,03	2,3	16,9	18,9	7e-14	11^{+47}_{-5}
(387824)	2021 KT21	0,08	2,2	17,3	19,6	6e-12	7^{+65}_{-3}
(580635)	2015 BC618	0,11	2,3	18,8	18,8	2e-11	31^{+58}_{-10}
(206673)	2018 BM33	0,12	2,8	16,3	18,1	1e-10	11^{+21}_{-7}
(256762)	2015 BN494	0,16	2,3	17,5	19,5	4e-11	6^{+46}_{-2}
(213892)	2024 LR9	0,17	2,4	17,1	19,1	2e-11	107^{+195}_{-61}
(434936)	2015 HB287	0,17	2,2	17,6	19,6	2e-11	24^{+46}_{-22}
(259711)	2017 VQ75	0,17	2,3	17,2	18,9	2e-10	31^{+127}_{-19}
(76000)	2020 YQ9	0,19	2,6	15,2	18,4	4e-10	$7,7^{+119,2}_{-0,3}$
(48514)	2014 QS487	0,20	2,5	15,7	18,8	3e-10	$2,3^{+20,7}_{-0,3}$
(72014)	2018 VL119	0,20	2,4	16,3	18,7	1e-10	12^{+97}_{-2}
2016 DB45	2016 EQ6	0,20	2,6	18,0	18,7	4e-10	7^{+35}_{-3}
(188218)	2015 VZ9	0,21	2,2	17,2	19,5	2e-10	17^{+50}_{-6}
(28646)	2019 SR228	0,22	2,3	15,4	19,2	3e-10	20^{+48}_{-6}
(340076)	2001 SD365	0,22	2,3	17,3	19,1	4e-10	35^{+105}_{-16}
(223031)	2015 KL219	0,24	2,3	17,7	19,6	2e-09	18^{+38}_{-9}
(25435)	2009 SD429	0,26	2,3	15,1	19,6	2e-09	31^{+25}_{-9}
(438938)	2020 HO113	0,26	1,9	17,8	20,3	7e-11	16^{+72}_{-8}
(233771)	(470785)	0,28	2,7	16,3	17,7	7e-09	77^{+129}_{-42}
(151548)	2019 SO54	0,29	2,2	17,1	19,1	1e-09	27^{+67}_{-11}
(393054)	2015 PZ326	0,29	2,4	17,1	18,6	9e-10	46^{+110}_{-20}
(47162)	2008 EA177	0,29	2,2	15,3	18,8	1e-09	11^{+48}_{-1}
(84468)	(712417)	0,32	2,6	15,5	18,0	5e-09	55^{+77}_{-6}
(341874)	2012 TQ236	0,33	2,2	18,2	19,4	1e-09	29^{+42}_{-11}
2017 XP90	2015 EN80	0,35	2,5	17,8	18,0	2e-09	9^{+43}_{-1}

Tabulka 3.2: Planetkové páry, u kterých jsme odhadovali jejich věk a nejsou uvedeny v seznamu známých párů na stránce Johnston (2025a)

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(169451)	2009 BE162	0,35	2,3	16,6	18,9	1e-09	19^{+28}_{-8}
(100691)	2015 TB430	0,36	2,4	16,9	19,1	6e-09	14^{+39}_{-6}
(407772)	2017 OR119	0,37	2,3	18,1	19,4	5e-09	48^{+152}_{-17}
(182385)	2010 SX8	0,40	2,7	15,6	18,1	4e-08	18^{+87}_{-6}
(356713)	(691571)	0,42	2,3	16,7	18,8	8e-09	14^{+80}_{-4}
(346888)	(700456)	0,44	1,9	17,6	18,6	1e-09	81^{+134}_{-23}
(676252)	2016 EQ6	0,50	2,6	18,1	18,7	4e-08	19^{+35}_{-5}
(280849)	2008 SO356	0,51	2,2	17,7	19,6	9e-09	16^{+71}_{-6}
2015 KL65	2011 QL118	0,53	2,4	18,4	19,3	4e-08	83^{+144}_{-35}
(77592)	2013 NN81	0,56	2,3	15,6	19,2	4e-08	(0-661)
2017 FL193	2017 EK36	0,59	2,6	17,8	18,2	8e-08	19^{+34}_{-6}
(747928)	2004 TU42	0,59	2,6	18,4	18,6	8e-08	105^{+124}_{-50}
(704229)	2018 PC84	0,65	2,6	17,8	18,8	5e-08	73^{+157}_{-40}
(450853)	2017 AE11	0,66	2,6	16,9	18,4	5e-08	77^{+85}_{-31}
(239290)	2010 TR68	0,68	2,5	16,6	18,3	1e-07	197^{+229}_{-85}
(70098)	(646717)	0,68	2,2	15,9	18,8	8e-08	$11, 3^{+0,4}_{-0,3}$
(250288)	2016 PT288	0,71	2,3	17,1	19,8	6e-08	86^{+179}_{-39}
(90611)	2020 SM51	0,74	2,3	16,2	19,2	1e-07	97^{+213}_{-37}
2019 GU52	2014 AU77	0,76	2,7	17,5	18,1	2e-07	(4-708)
(298935)	2014 UX147	0,78	2,4	16,7	18,8	8e-09	240^{+206}_{-120}
(125489)	2005 VW93	0,81	2,4	16,3	18,8	1e-07	36^{+166}_{-11}
2020 TO12	2016 LJ77	0,81	2,6	17,9	18,0	5e-07	24^{+307}_{-1}
(690170)	2013 UF64	0,82	2,4	18,0	19,5	2e-07	42^{+91}_{-12}
(145113)	2017 FS47	0,84	2,3	16,9	18,7	4e-08	91^{+165}_{-33}
(85728)	2012 XG160	0,87	2,1	17,9	19,1	1e-08	125_{-66}^{+240}
(28723)	2013 CA121	0,88	2,3	15,2	18,7	1e-07	185^{+181}_{-56}
(95750)	(304873)	0,92	2,4	16,2	17,0	8e-08	107^{+129}_{-11}

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(187414)	2017 VK56	0,94	2,6	15,7	18,4	2e-07	81^{+285}_{-19}
2017 OC125	2022 SZ251	0,94	2,6	18,0	18,9	9e-08	(1-520)
(51746)	2021 JB66	0,95	2,7	15,3	18,3	2e-07	99^{+178}_{-28}
(748805)	2014 AS33	0,96	2,4	17,3	18,9	2e-08	19^{+13}_{-6}
(147577)	2016 CW173	1,01	2,2	16,8	19,2	1e-07	191^{+97}_{-109}
(626539)	2020 RV68	1,03	2,6	17,9	19,5	3e-07	37^{+61}_{-18}
(441762)	(465401)	1,05	1,9	17,6	18,2	2e-08	$194\substack{+185 \\ -120}$
(97868)	2007 WP17	1,09	2,3	16,1	19,1	3e-07	124_{-29}^{+126}
2008 CR106	2016 DB45	1,10	2,6	17,8	18,0	7e-07	18^{+46}_{-3}
(698787)	2005 TX204	1,10	2,2	18,2	19,3	2e-07	100^{+157}_{-34}
(527637)	2017 UZ143	1,13	2,0	18,3	19,5	4e-09	171^{+89}_{-34}
(128959)	2010 TK158	1,15	2,6	16,0	18,1	8e-07	219^{+205}_{-92}
(257546)	(738291)	1,15	2,5	16,8	18,2	4e-07	162^{+164}_{-93}
(114858)	2002 CF322	1,17	2,3	16,0	18,9	2e-07	82^{+190}_{-24}
(180551)	(452585)	1,18	2,5	16,6	17,3	2e-06	36^{+47}_{-7}
2007 RB362	2017 NS12	1,20	2,6	18,3	18,4	1e-06	(67-353)
(371202)	2022 QQ125	1,21	2,6	17,0	19,0	8e-07	202^{+189}_{-89}
(349730)	(428243)	1,22	2,4	17,4	18,3	6e-07	120^{+142}_{-44}
(165370)	(379550)	1,23	2,4	16,3	17,7	7e-07	201^{+195}_{-86}
(235698)	2020 LB24	1,25	2,5	16,3	18,8	3e-07	116^{+137}_{-54}
(62914)	2016 EM339	1,27	3,0	14,4	17,3	1e-05	106^{+96}_{-46}
(53867)	(551633)	1,28	2,6	15,1	17,9	1e-06	(0-998)
(6515)	2016 NU186	1,29	2,3	14,2	19,4	9e-07	53^{+202}_{-50}
(55975)	2008 TZ234	1,29	2,2	15,8	20,2	2e-07	156^{+53}_{-107}
(687894)	2008 AK156	1,31	2,4	18,7	18,9	2e-06	99^{+133}_{-61}
2016 TX92	2015 KG182	1,38	2,4	17,5	18,5	2e-08	43^{+32}_{-4}
2014 DN164	2008 YP191	1,42	2,3	18,5	18,9	9e-07	133^{+165}_{-47}

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(172698)	2017 VF49	1,42	2,6	16,8	19,2	8e-07	60^{+54}_{-17}
(53967)	(601679)	1,44	2,3	16,4	19,2	2e-07	199^{+171}_{-110}
(382167)	(706573)	1,44	2,0	17,8	19,0	6e-08	192^{+38}_{-26}
(251223)	2008 EM188	1,47	2,3	17,6	18,9	1e-06	100^{+154}_{-31}
(631389)	2016 PM225	1,48	2,8	17,4	18,3	1e-05	(2-611)
(395345)	2019 NH35	1,50	2,2	17,8	19,7	2e-07	62_{-40}^{+93}
(136952)	(529847)	1,51	2,5	16,0	18,6	5e-07	91^{+91}_{-36}
(312568)	2010 NY131	1,52	2,6	16,5	18,6	4e-06	(20-720)
(466087)	2016 CS411	1,53	2,3	18,0	19,4	2e-06	(23-392)
(464338)	2016 PB276	1,54	2,3	17,3	19,5	4e-08	104_{-56}^{+243}
(58416)	2001 FH227	1,55	2,2	15,8	20,0	9e-07	68^{+176}_{-12}
(135858)	2010 LC159	1,55	2,7	15,4	18,5	2e-06	(116-1000)
2015 YD31	2014 QS569	1,56	2,8	18,4	18,9	2e-06	76^{+115}_{-35}
(582891)	2014 WO222	1,60	2,2	18,0	19,4	6e-07	70^{+76}_{-16}
(91368)	2022 DK8	1,64	2,6	15,4	18,1	4e-06	169^{+127}_{-64}
(51459)	2013 GJ154	1,67	2,2	15,4	18,9	5e-07	165^{+180}_{-86}
2020 JA24	2014 HS345	1,68	1,9	19,4	19,9	2e-07	(65-159)
(231640)	2020 OQ132	1,68	2,3	17,7	19,8	2e-06	80^{+105}_{-28}
(234718)	(556632)	1,75	2,5	16,0	17,6	2e-06	(2-999)
(51498)	2016 EF349	1,77	2,4	15,1	18,6	2e-07	10^{+8}_{-6}
2020 TZ25	2024 XS23	1,78	2,7	18,3	18,4	1e-05	(94-368)
(344957)	2014 PT72	1,80	2,6	17,8	18,6	3e-06	249^{+177}_{-169}
(147281)	2018 AG59	1,85	2,6	15,3	17,9	3e-06	$115\substack{+168 \\ -50}$
2009 BX118	2017 SD304	1,86	2,5	18,2	19,6	3e-06	68^{+102}_{-24}
(289220)	(492289)	1,87	2,6	16,6	17,9	5e-06	(1-1000)
(471334)	2022 KE3	1,89	1,8	18,4	19,6	2e-08	(0-369)
(79080)	(710900)	1,90	2,2	16,0	19,0	9e-07	243^{+142}_{-95}

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(65416)	(763243)	1,94	2,7	15,1	18,3	1e-06	200^{+169}_{-71}
(87052)	2016 WY71	1,95	2,6	15,0	17,9	3e-06	(0-586)
2002 TK140	2015 VH16	1,95	2,6	18,7	19 <i>,</i> 2	3e-06	40^{+27}_{-14}
(186762)	2021 UD53	1,97	2,4	16,9	18,6	2e-06	(11-559)
(409838)	2017 KS49	1,98	2,4	17,8	18,4	4e-06	185_{-64}^{+86}
(381760)	2012 VZ113	2,02	2,4	17,4	18,8	4e-06	26^{+171}_{-1}
(752485)	2014 MO62	2,18	2,3	18,1	19,1	2e-06	(0-272)

 Čtvrtý sloupec a_{prim} udává velkou poloosu dráhy primáru. Sloupce H_{prim} a H_{sek} udávají absolutní hvězdné velikosti primáru a sekundáru. Veličiny d a P₂/N_p používáme v souladu s kapitolou 2.

 Planetky uvedené jako dvojice 2016 DB45 a 2016 EQ6, 2008 CR106 a 2016 DB45 jsme později identifikovali jako součást planetkového klastru, jehož primárem je (9332).

 Planetkový pár (16815) a (436551) jsme později testovali jako součást klastru, jehož primárem by byl (16815). Protože se nám ale existenci takovéhoto klastru nepodařilo potvrdit, uvádíme dvojici planetek (16815) a (436551) jak v této tabulce, tak v tabulce 3.3 (str. 51).

3.5 Odhad stáří planetkových klastrů

V případě planetkových klastrů jsme chtěli provést zpětné integrace drah některých dvojic plantek, jejichž vzdálenosti *d* byly relativně velké. Očekávali jsme, že toto by mohlo být způsobeno buď jejich velkým stářím, nebo skutečností, že se jedná pouze o náhodný nález planetek s podobnými heliocentrickými drahami. Oba tyto scénáře by znamenaly velké množství spotřebovaného výpočetního času bez získání použitelných výsledných dat.

U těchto¹⁶ dvojic planetek jsme se rozhodli nejprve vykreslit průběh funkce ΔV a teprve poté případně přistoupit k integrování metodou popsanou v sekci 3.1. Pro tento prvotní odhad jsme metodu z kapitoly 3.3 ještě více zjednodušili a vývoj funkce ΔV jsme sledovali pouze pro dvě planetky, jejichž dráhy nejsou nijak pozměňovány vlivem Jarkovského efektu.

Za pomoci stejného zjednodušeného skriptu jsme si vykreslili průběh fuknce ΔV všech potenciálních členů klastrů, jejichž primáry jsou planetky (86419) a (9332). U těchto klastrů jsme si nebyli tolik jistí, že se jedná o skutečné planetkové klastry. Specifika jejich nálezu byla diskutována již v kapitole 2.3.

^{16.} Konkrétně se jednalo o dvojice planetek (16815) a (511378), (54301) a (696171), (39991) a 2016 UT3.

U dvojice planetek (16815) a (511378) se nám touto metodou nepodařilo potvrdit, že se jedná o skutečný planetkový pár. Odhad věku této dvojice planetek jsme proto rovnou zkusili provést metodou popsanou v kapitole 3.3. Ani použití 3 klonů od každé planetky však nevedlo k tomu, že by v některém případě hodnota funkce $\Delta V \leq 4 v_{esc}$.

Klastr okolo planetky (86419) se ukázal být pravděpodobně skutečný, nicméně relativně starý. V jeho případě jsme proto provedli odhad věku též pouze metodou sledující konvergenci sekulárních úhlů dvojice planetek, popsanou v kapitole 3.3.

Z další analýzy jsme též vyřadili některé známé dvojice planetek patřících do klastrů, jejichž primáry jsou planetky (11842) a (39991). Konkrétně se jednalo o dvojice planetek (11842) a (228747), (39991) a (349730), (39991) a (340225), (39991) a (513212). Jejich spřízněnost jako planetkový klastr publikoval již Pravec et al. (2018).

Stáří všech ostatních dvojic planetek jsme se pokusili odhadnout stejně, jako byl popsáno v předchozí podkapitole (3.4). Nejprve jsme tedy k odhadu jejich věku použili metodu těsných přiblížení. Pokud některá dvojice planetek nesplnila limity na počet detekovaných významných těsných přiblížení nebo její stáří bylo tak velké, že se ho touto metodou nedařilo dostatečně rychle určit, odhadli jsme její věk z průběhu funkce ΔV .

V tabulce 3.3 (str. 51) uvádíme seznam všech planetkových klastrů, které jsme nalezli postupem zmíněným v kapitole 2, společně s odhadem jejich stáří, byl-li prováděn. Mezi 11 planetkovými klastry nalézáme 1 známý klastr a 1 klastr, u něhož jsme spřízněnost třetí planetky nepotvrdili. U 5 klastrů se nám podařilo odhadnout stáří všech jejich členů metodou těsných přiblížení. V případě dalších 4 klastrů jsme odhady provedli kombinací obou zmiňovaných metod.

Seznam těchto planetkových klastrů je uveden též na https://www.physics. muni.cz/~ehonsova a v elektronické příloze této práce. Na těchto místech jsou uvedeny i bližší podrobnosti u těch dvojic planetek, jejichž stáří bylo odhadnuto za pomoci metody těsných přiblížení.

Na obrázku 3.10 je zobrazeno rozložení velké poloosy dráhy primárů nalezených planetkových párů a klastrů.¹⁷ Rozložení primárů všech 6 875 planetkových párů, které jsme získali postupem popsaným v kapitolách 2.1 a 2.2, je vykresleno modrou barvou. Počty těchto primárů jsou promítnuty na levou osu *y*. Rozložení primárů vybraných planetkových párů a klastrů, u kterých jsme odhadovali jejich věk, je vykresleno oranžově. Počty těchto primárů jsou promítnuty na pravou osu *y*.

^{17.} U většiny primárů nemusíme rozlišovat, zda jsou součástí planetkového páru či klastru. V případě planetkového klastru okolo primáru (9332) jsme vykreslili velkou poloosu právě této planetky. Velkou poloosu dráhy planetek 2016 DB45 a 2008 CR106 jsme nevykreslovali.

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů



Obrázek 3.10: Histogram velké poloosy dráhy primárů nalezených planetkových párů a klastrů. Přerušovaná čára značí hranici hlavního pásu planetek.

Vidíme, že většina nalezených i dále zkoumaných primárů se nachází v hlavním pásu planetek, o něco méně primárů patří do skupin Hungaria a Cybele.

V rámci hlavního pásu planetek pak pozorujeme odlišné rozložení obou skupin primárů. Skupina primárů všech nalezených planetkových párů je rozprostřena napříč celým hlavním pásem planetek. Naproti tomu planetkové páry, jejichž $d \leq 2$ m/s, nacházíme především ve vnitřní a střední části hlavního pásu planetek. Může se jednat o důsledek výběrového efektu, který způsobuje, že malé potenciální sekundáry je ve vnějších částech hlavního pásu těžší objevit. Důvodem je jak jejich větší vzdálenost, tak typicky menší albedo (tj. jedná se o tmavší objekty).

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(11842)	(436415)	0,79	2,3	14,3	18,3	9e-08	14^{+58}_{-1}
	(228747)	1,16	2,3	14,3	17,0	3e-07	-
(16126)	(701496)	1,02	2,6	13,0	17,7	4e-07	(0-629)
	2017 UB137	1,13	2,6	13,0	18,9	5e-07	60^{+69}_{-13}
	2015 AJ273	3,19	2,6	13,0	18,9	2e-05	79^{+266}_{-27}
	(636882)	3,75	2,6	13,0	16,9	2e-04	(0-669)
	2016 RH68	4,29	2,6	13,0	19,0	1e-04	(73-431)
(16815)	(436551)	0,98	2,6	12,8	17,2	5e-08	118^{+291}_{-26}
	(511378)	45,50	2,6	12,8	17,5	3e-02	Х
(267333)	(657802)	0,34	2,6	17,3	18,4	5e-09	166^{+249}_{-65}
	(571154)	2,78	2,6	17,3	17,8	3e-05	(16-846)
	2024 SY73	5,96	2,6	17,3	19,0	4e-04	(165-999)
(267721)	2019 CV15	0,42	1,9	17,2	19,5	7e-10	26^{+55}_{-9}
	2014 DC113	0,59	1,9	17,2	19,1	3e-09	36^{+175}_{-14}
(37108)	2019 AL63	1,72	2,5	15,1	18,7	1e-06	192^{+168}_{-80}
	2022 AD33	3,28	2,5	15,1	18,4	1e-05	133^{+197}_{-25}
(39991)	(428243)	1,71	2,4	14,6	18,3	3e-06	175^{+202}_{-73}
	(349730)	2,13	2,4	14,6	17,4	1e-05	-
	2016 BG138	4,96	2,4	14,6	19,2	6e-05	(0-1000)
	(340225)	6,82	2,4	14,6	18,1	7e-04	-
	(513212)	11,84	2,4	14,6	18,7	4e-03	-
	2016 UT3	17,66	2,4	14,6	18,7	2e-02	174_{-108}^{+166}
(54301)	2015 KY125	0,47	2,6	14,9	18,2	3e-08	38^{+135}_{-7}
	2020 BW20	2,56	2,6	14,9	18,0	2e-05	143^{+51}_{-29}
	(696171)	20,89	2,6	14,9	18,0	5e-02	171^{+62}_{-28}

Tabulka 3.3: Přehled námi prověřovaných planetkových klastrů

primár	sekundár	d (m/s)	a _{prim} (au)	H _{prim}	H _{sek}	P_2/N_p	stáří (kyr)
(86419)	2018 GW17	1,46	1,9	15,7	19,2	9e-08	(125-510)
	2017 WJ35	9,15	1,9	15,7	19,4	1e-03	(230-492)
	2015 JF35	10,36	1,9	15,7	19,5	3e-03	(27-996)
	2014 UU225	10,65	1,9	15,7	19,4	5e-03	(345-797)
	2011 JJ10	31,49	1,9	15,7	19,9	2e-01	(299-511)
	2014 WR65	36,47	1,9	15,7	19,1	2e-01	(330-520)
	2020 TT42	45,57	1,9	15,7	19,7	3e-01	(320-464)
	2006 VL93	52,92	1,9	15,7	19,8	5e-01	(333-487)
(88880)	2023 VB42	0,50	2,7	14,0	18,7	7e-08	37^{+122}_{-28}
	2011 UB507	3,26	2,7	14,0	18,4	8e-05	60^{+10}_{-10}
(9332)	2017 EK36	0,45	2,6	13,2	18,2	-	$15,4^{+0,8}_{-1,7}$
	2017 FL193	0,81	2,6	13,2	17,8	-	$14, 6^{+0,7}_{-0,5}$
	2008 CR106	2,17	2,6	13,2	17,8	-	$16, 1^{+0,1}_{-1,3}$
	2015 RC364	3,20	2,6	13,2	18,0	-	19, $1^{+0,5}_{-1,3}$
	2016 DB45	3,23	2,6	13,2	18,0	-	$16,0^{+0,4}_{-0,6}$
	2016 EQ6	3,41	2,6	13,2	18,7	-	$16, 2^{+0,2}_{-0,7}$
	(676252)	3,87	2,6	13,2	18,1	-	$16, 1^{+0,2}_{-0,4}$
	2010 DY44	6,62	2,6	13,2	17,8	-	$16, 2^{+0,1}_{-0,2}$

3. Odhad stáří planetkových párů a klastrů

• Čtvrtý sloupec a_{prim} udává velkou poloosu dráhy primáru. Sloupce H_{prim} a H_{sek} udávají absolutní hvězdné velikosti primáru a sekundáru. Veličiny *d* a P_2/N_p používáme v souladu s kapitolou 2.

• Pomlčka značí, že jsme danou hodnotu neurčovali. (Viz kapitoly 2.3 a 3.5.)

 Symbol "X" značí, že se námi používanou metodou nepodařilo potvrdit, že planetka (511378) je součástí klastru. Dvojici planetek (16815) a (436551) z toho důvodu klasifikujeme jako planetkový pár a uvádíme ji i v tabulce 3.2 (str. 44).

• Dvojice planetek (86419) a 2015 JF35 neprošla testem rovnoměrného rozdělení, neboť hodnota $P_{1/2} = 0.03$.

Závěr

V rámci této diplomové práce jsme sestavili katalog planetkových párů a planetkových klastrů. U vybraných planetkových systémů jsme za pomoci zpětných dráhových integrací odhadovali jejich věk.

V první kapitole jsme se seznámili s planetkami a jejich systémy. Konstatovali jsme, že se jedná o malé kamenné objekty, které obíhají okolo Slunce po eliptických drahách. Nejvíce známých planetek se nachází v hlavním pásu planetek.

Poté jsme se zaměřili na popis jejich drah. Objasnili jsme, že řešením Keplerovy úlohy (soustavy Slunce–planetka) získáme sadu oskulačních dráhových elementů. Dráhy planetek se ale v čase vyvíjejí v důsledku působení dalších hmotných těles Sluneční soustavy. Zavádíme proto střední dráhové elementy, které popisují dráhy planetek očištěné o krátkoperiodické perturbace. Odstraníme-li i dlouhoperiodické perturbace, získáme vlastní dráhové elementy.

Dráhy planetek jsou v čase pozměňovány též v důsledku působení Jarkovského efektu. Jedná se o jev, při kterém v důsledku tepelné setrvačnosti planetky dochází ke změně velikosti její velké poloosy.

Následně jsme si vysvětlili mechanismus působení YORP efektu, který způsobuje změnu rychlosti rotace planetek a změnu orientace jejich rotační osy. Děje se tak vlivem rozptylu slunečního záření na povrchu planetky nesymetrického tvaru.

Pokud v důsledku působení YORP efektu začne planetka velmi rychle rotovat, může dojít k oddělení kusu hmoty. Výsledný gravitačně vázaný systém dvou planetek označujeme jako binární planetku. Přestanou-li po čase složky binární planetky být gravitačně vázané, vznikne planetkový pár. Pokud k takovémuto rozpadu mateřského tělesa dojde opakovaně, pozorujeme planetkový klastr. Planetkové páry a klastry si následně zachovávají podobné heliocentrické dráhy, díky čemuž je možné je identifikovat. Jako rodinu planetek označujeme systém, který vznikl rozpadem mateřského tělesa v důsledku srážky dvou planetek. Vzájemné rychlosti těles v době rozpadu mateřské planetky jsou řádově vyšší než v případě planetkových párů a klastrů, díky čemuž od sebe můžeme jednotlivé systémy odlišit.

Ve druhé kapitole jsme hledali planetkové páry a klastry. Nejprve jsme v databázi známých planetek, která obsahovala více než 1,2 milionu záznamů, pro každou planetku identifikovali všechny další planetky, které mají podobné heliocentrické dráhy. Podobnost libovolných dvou drah jsme vyhodnocovali za pomoci metriky, která v pětirozměrném prostoru středních dráhových elementrů měří jejich vzdálenost *d*. Vyřadili jsme všechny členy kolizních rodin a jako potenciální planetkové páry jsme vybrali všechny dvojice planetek, jejichž vzdálenosti $d \leq 100$ m/s a pro které platí, že potenciální primár je větší než sekundár.

Následně jsme testovali, zda námi nalezené dvojice planetek jsou skutečným planetkovým párem/klastrem, nebo zda se jedná o náhodný shluk planetek. Za tímto účelem jsme nejprve analyzovali okolí každého z potenciálních párů a určili jsme, zda rozdělení pozaďové populace odpovídá rovnoměrnému rozdělení. Poté jsme odhadli pravděpodobnost, že nalezený pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami. Jako statistiky významné jsme označili ty planetkové páry, pro které hodnota $P_2/Np < 0,1$. Takovýchto planetkových párů jsme v březnu 2025 našli 6 875. Mezi takto nalezenými planetkovými páry jsme vybrali 158 párů, jejichž $d \leq 2 m/s$, u kterých jsme dále odhadovali jejich věk.

Poté jsme hledali planetkové klastry. Pro vybrané primáry planetkových párů jsme zkoumali, zda neexistuje více než jedna planetka, která má vůči primáru nízkou vzdálenost *d*, a tedy s primárem tvoří zdánlivý planetkový pár. Pro nalezené zdánlivé planetkové páry jsme provedli obdobnou statistickou analýzu, jako bylo popsáno výše. Výsledkem bylo 11 planetkových klastrů, jejichž spřízněnost jsme dále ověřovali za pomoci zpětných dráhových integrací.

Ve třetí kapitole jsme odhadovali stáří vybraných plantkových párů a klastrů, a sice nejprve za pomoci metody těsných přiblížení. V rámci ní jsme na základě nejistoty určení drah zkoumané dvojice planetek vytvořili jejich geometrické klony. Každému z těchto klonů jsme pak přiřadili různou sílu Jarkovského efektu, která na něj působí, čímž jsme modelovali nejistotu spjatou i s tímto parametrem. Poté jsme po dobu až 400 000 let do minulosti sledovali vývoj pozic těchto klonů. Hledali jsme okamžik, kdy jsou jejich fyzické vzdálenosti srovnatelné s poloměrem Hillovy sféry a jejich relativní rychlosti jsou blízké rychlosti únikové.

Nedostatkem této metody je její značná výpočetní náročnost. Odhad věku starších dvojic planetek jsme proto provedli pomocí metody, která sleduje konvergenci jejich sekulárních úhlů. Tu vyhodnocuje ve vybraných limitních případech působení Jarkovského jevu.

Za pomoci metody těsných přiblížení jsme odhadli věk a společně s tím i potvrdili spřízněnost 125 planetkových párů. Z toho 96 planetkových párů jsme objevili nově, 29 párů bylo již známých.

Dále jsme potvrdili spřízněnost jednotlivých členů 5 nových planetkových klastrů. V jejich případě se nám podařilo odhadnout stáří všech jejich členů metodou těsných přiblížení. U dalších 4 klastrů jsme odhady stáří (neznámých členů) úspěšně provedli kombinací metody těsných přiblížení a konvergence sekulárních úhlů.
Literatura

- AstDys (2025*a*), 'Orbital elements'. [cit. 2025-04-05]. Dostupné z: https://newton.spacedys.com/astdys/index.php?pc=4.
- AstDys (2025b), 'Proper elements'. [cit. 2025-04-05]. Dostupné z: https://newton. spacedys.com/astdys/index.php?pc=5.
- Bertotti, B., Farinella, P. & Vokrouhlický, D. (2003), *Physics of the solar system : dynamics and evolution, space physics, and spacetime structure,* Astrophysics and space science library, Kluwer Academic, Dordrecht; Boston.
- Bottke, W. F., Durda, D. D., Nesvorný, D., Jedicke, R., Morbidelli, A., Vokrouhlický, D. & Levison, H. F. (2005), 'Linking the collisional history of the main asteroid belt to its dynamical excitation and depletion', *Icarus* **179**(1), 63–94. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.05.017.
- Bottke, W. F., Vokrouhlický, D., Rubincam, D. P. & Nesvorný, D. (2006), 'The Yarkovsky and Yorp Effects: Implications for Asteroid Dynamics', Annual Review of Earth and Planetary Sciences 34, 157–191. Dostupné z: https://doi. org/10.1146/annurev.earth.34.031405.125154.
- Broucke, R. A. & Cefola, P. J. (1972), 'On the equinoctial orbit elements', *Celestial mechanics* **5**(3), 303–310.
- Brož, M. (2013), Fyzika sluneční soustavy, Matfyzpress, Praha.
- Ćuk, M. & Burns, J. A. (2005), 'Effects of thermal radiation on the dynamics of binary NEAs', *Icarus* **176**(2), 418–431. Dostupné z: https://doi.org/10. 1016/j.icarus.2005.02.001.
- DeMeo, F. E., Binzel, R. P., Slivan, S. M. & Bus, S. J. (2009), 'An extension of the Bus asteroid taxonomy into the near-infrared', *Icarus* 202(1), 160–180. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.02.005.
- Fatka, P., Pravec, P. & Vokrouhlický, D. (2020), 'Cascade disruptions in asteroid clusters', *Icarus* 338, 113554. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.113554.
- Fatka, P., Vokrouhlický, D., Moskovitz, N. A., Micheli, M., Pravec, P., Devogèle, M., Gustafsson, A., Kueny, J., Skiff, B., Kušnirák, P., Christensen, E., Ries, J., Brucker, M., McMillan, R., Larsen, J., Mastaler, R. & Bressi, T. (2023), 'Extremely Young Asteroid Pairs', 2851, 2170. Dostupné z: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2023LPICo2851.2170F.
- Ferich, N., Baronett, S. A., Tamayo, D. & Steffen, J. H. (2022), 'The Yarkovsky Effect in REBOUNDx', *The Astrophysical Journal Supplement Series* **262**(2), 41.

LITERATURA

Dostupné z: https://doi.org/10.3847/1538-4365/ac8d60.

- Fernández, J. A. & Brunini, A. (2000), 'The Buildup of a Tightly Bound Comet Cloud around an Early Sun Immersed in a Dense Galactic Environment: Numerical Experiments', *Icarus* 145(2), 580–590. Dostupné z: https://doi. org/10.1006/icar.2000.6348.
- Harris, A. W. & Harris, A. W. (1997), 'On the Revision of Radiometric Albedos and Diameters of Asteroids', *Icarus* **126**(2), 450–454. Dostupné z: https://doi.org/10.1006/icar.1996.5664.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., del Río, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-Marchant, P., Sheppard, K., Reddy, T., Weckesser, W., Abbasi, H., Gohlke, C. & Oliphant, T. E. (2020), 'Array programming with NumPy', *Nature* 585(7825), 357–362. Dostupné z: https://doi.org/10.1038/ s41586-020-2649-2.
- Honsová, E. (2023), 'Hledání planetkových párů/klastrů a odhad jejich stáří'. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. [cit. 2025-03-08]. Dostupné z: https: //is.muni.cz/th/h8hc9/.
- Hunter, J. D. (2007), 'Matplotlib: A 2d graphics environment', *Computing in Science & Engineering* **9**(3), 90–95. Dostupné z: https://doi.org/10.1109/ MCSE.2007.55.
- IAU (2006), 'IAU 2006 General Assembly: Result of the IAU Resolution votes'. [cit. 2024-12-17]. Dostupné z: https://www.iau.org/news/pressreleases/ detail/iau0603/.
- IAU (2024a), 'Meteors & Meteorites: The IAU Definitions of Meteor Terms'. [cit. 2024-12-17]. Dostupné z: https://www.iau.org/public/themes/meteors_ and_meteorites/.
- IAU (2024*b*), 'Naming of Astronomical Objects'. [cit. 2024-12-17]. Dostupné z: https://www.iau.org/public/themes/naming/minorplanets.
- Johnston, W. R. (2025*a*), 'Asteroid pairs and clusters'. [cit. 2025-04-05]. Dostupné z: https://www.johnstonsarchive.net/astro/asteroidpairs.html.
- Johnston, W. R. (2025*b*), 'Asteroids with Satellites'. [cit. 2025-04-05]. Dostupné z: https://www.johnstonsarchive.net/astro/asteroidmoons.html.
- Knezevic, Z., Carpino, M., Farinella, P., Froeschle, C., Froeschle, C., Gonczi, R., Jovanovic, B., Paolicchi, P. & Zappala, V. (1988), 'Asteroid short-periodic perturbations and the accuracy of mean orbital elements', *Astronomy and Astrophysics* **192**(1-2), 360–369. Dostupné z: https://ui.adsabs.harvard.

edu/abs/1988A&A...192..360K.

- Knezevic, Z., Lemaître, A. & Milani, A. (2002), The Determination of Asteroid Proper Elements, *in* W. F. Bottke, Jr., A. Cellino, P. Paolicchi & R. P. Binzel, eds, 'Asteroids III', pp. 603–612. Dostupné z: https://ui.adsabs.harvard.edu/ abs/2002aste.book..603K.
- Kyrylenko, I., Krugly, Y. N. & Golubov, O. (2021), 'Asteroid pairs: method validation and new candidates', *Astronomy and Astrophysics* **655**, A14. Dostupné z: https://doi.org/10.1051/0004-6361/202140365.
- Kyrylenko, I., Krugly, Y. N. & Golubov, O. (2024), 'Asteroid pairs: Survey of the inner main belt', Astronomy and Astrophysics 689, A291. Dostupné z: https: //doi.org/10.1051/0004-6361/202450725.
- Margot, J. L., Pravec, P., Taylor, P., Carry, B. & Jacobson, S. (2015), Asteroid Systems: Binaries, Triples, and Pairs, *in* 'Asteroids IV', pp. 355–374. Dostupné z: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2015aste.book..355M.
- Milani, A. & Knežević, Z. (1998), 'Asteroid Mean Elements: Higher Order and Iterative Theories', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **71**(1), 55–78. Dostupné z: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1998CeMDA..71...55M.
- MPC (2024*a*), 'Definition of types of objects'. [cit. 2024-12-17]. Dostupné z: https: //www.minorplanetcenter.net/mpcops/documentation/object-types/.
- MPC (2024*b*), 'New- And Old-Style Minor Planet Designations'. [cit. 2024-12-17]. Dostupné z: https://minorplanetcenter.net/iau/info/DesDoc.html.
- MPC (2025), 'Data Available from the Minor Planet Center'. [cit. 2025-03-03]. Dostupné z: https://minorplanetcenter.net/data.
- NASA (2024), 'Asteroids'. [cit. 2024-12-17]. Dostupné z: https://science.nasa. gov/solar-system/asteroids/facts/.
- NASA (2025*a*), '*Horizons System*'. [cit. 2025-03-01]. Dostupné z: https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html.
- NASA (2025b), 'Small-Body Database Query'. [cit. 2025-03-08]. Dostupné z: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_query.html.
- Nesvorný, D. & Vokrouhlický, D. (2006), 'New Candidates for Recent Asteroid Breakups', *Astronomical Journal* **132**(5), 1950–1958. Dostupné z: https://doi. org/10.1086/507989.
- Pitjeva, E. & Pitjev, N. (2015), 'Masses of asteroids and total mass of the main asteroid belt', *Proceedings of the International Astronomical Union* **10**, 212–217. Dostupné z: https://doi.org/10.1017/S1743921315008388.

LITERATURA

- Pitjeva, E. V. & Pitjev, N. P. (2018), 'Masses of the Main Asteroid Belt and the Kuiper Belt from the Motions of Planets and Spacecraft', *Astronomy Letters* 44(8-9), 554–566. Dostupné z: https://doi.org/10.1134/S1063773718090050.
- Pravec, P., Fatka, P., Vokrouhlický, D., Scheeres, D. J., Kušnirák, P., Hornoch, K., Galád, A., Vraštil, J., Pray, D. P., Krugly, Y. N., Gaftonyuk, N. M., Inasaridze, R. Y., Ayvazian, V. R., Kvaratskhelia, O. I., Zhuzhunadze, V. T., Husárik, M., Cooney, W. R., Gross, J., Terrell, D., Világi, J., Kornoš, L., Gajdoš, Š., Burkhonov, O., Ehgamberdiev, S. A., Donchev, Z., Borisov, G., Bonev, T., Rumyantsev, V. V. & Molotov, I. E. (2018), 'Asteroid clusters similar to asteroid pairs', *Icarus* 304, 110–126. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.08.008.
- Pravec, P., Fatka, P., Vokrouhlický, D., Scheirich, P., Ďurech, J., Scheeres, D. J., Kušnirák, P., Hornoch, K., Galád, A., Pray, D. P., Krugly, Y. N., Burkhonov, O., Ehgamberdiev, S. A., Pollock, J., Moskovitz, N., Thirouin, A., Ortiz, J. L., Morales, N., Husárik, M., Inasaridze, R. Y., Oey, J., Polishook, D., Hanuš, J., Kučáková, H., Vraštil, J., Világi, J., Gajdoš, Š., Kornoš, L., Vereš, P., Gaftonyuk, N. M., Hromakina, T., Sergeyev, A. V., Slyusarev, I. G., Ayvazian, V. R., Cooney, W. R., Gross, J., Terrell, D., Colas, F., Vachier, F., Slivan, S., Skiff, B., Marchis, F., Ergashev, K. E., Kim, D. H., Aznar, A., Serra-Ricart, M., Behrend, R., Roy, R., Manzini, F. & Molotov, I. E. (2019), 'Asteroid pairs: A complex picture', *Icarus* 333, 429–463. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019. 05.014.
- Pravec, P. & Vokrouhlický, D. (2009), 'Significance analysis of asteroid pairs', *Icarus* **204**(2), 580–588. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus. 2009.07.004.
- Pravec, P., Vokrouhlický, D., Polishook, D., Scheeres, D. J., Harris, A. W., Galád, A., Vaduvescu, O., Pozo, F., Barr, A., Longa, P., Vachier, F., Colas, F., Pray, D. P., Pollock, J., Reichart, D., Ivarsen, K., Haislip, J., Lacluyze, A., Kušnirák, P., Henych, T., Marchis, F., Macomber, B., Jacobson, S. A., Krugly, Y. N., Sergeev, A. V. & Leroy, A. (2010), 'Formation of asteroid pairs by rotational fission', *Nature* 466(7310), 1085–1088. Dostupné z: https://doi.org/10.1038/nature09315.
- Price-Whelan, A. M., Sipőcz, B., Günther, H., Lim, P., Crawford, S., Conseil, S., Shupe, D., Craig, M., Dencheva, N., Ginsburg, A. et al. (2018), 'The astropy project: Building an open-science project and status of the v2. 0 core package', *The Astronomical Journal* **156**(3), 123.
- Rein, H. & Liu, S. F. (2012), 'REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics', *Astronomy and Astrophysics* **537**, A128. Dostupné z: https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118085.

- Rein, H. & Spiegel, D. S. (2015), 'IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits', *Monthly Notices of the RAS* 446(2), 1424–1437. Dostupné z: https://doi.org/ 10.1093/mnras/stu2164.
- Rein, H. & Tamayo, D. (2015), 'WHFAST: a fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long-term gravitational simulations', *Monthly Notices of the RAS* **452**(1), 376–388. Dostupné z: https://doi.org/10.1093/mnras/stv1257.
- Rubincam, D. P. (2000), 'Radiative Spin-up and Spin-down of Small Asteroids', *Icarus* **148**(1), 2–11. Dostupné z: https://doi.org/10.1006/icar.2000.6485.
- Scheeres, D. J. (2007), 'Rotational fission of contact binary asteroids', Icarus
 189(2), 370-385. Dostupné z: https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.02.
 015.
- Tamayo, D., Rein, H., Shi, P. & Hernandez, D. M. (2020), 'REBOUNDx: a library for adding conservative and dissipative forces to otherwise symplectic Nbody integrations', *Monthly Notices of the RAS* 491(2), 2885–2901. Dostupné z: https://doi.org/10.1093/mnras/stz2870.
- Tedesco, E. F. (2025), 'Asteroid'. [cit. 2025-03-08]. Dostupné z: https://www. britannica.com/science/asteroid.
- Van Rossum, G. (2020), 'The python library reference, release 3.8.2'.
- Van Rossum, G. & Drake Jr, F. L. (1995), 'Python reference manual'.
- Vernazza, P., Ferrais, M., Jorda, L., Hanuš, J., Carry, B., Marsset, M., Brož, M., Fetick, R., Viikinkoski, M., Marchis, F., Vachier, F., Drouard, A., Fusco, T., Birlan, M., Podlewska-Gaca, E., Rambaux, N., Neveu, M., Bartczak, P., Dudziński, G., Jehin, E., Beck, P., Berthier, J., Castillo-Rogez, J., Cipriani, F., Colas, F., Dumas, C., Ďurech, J., Grice, J., Kaasalainen, M., Kryszczynska, A., Lamy, P., Le Coroller, H., Marciniak, A., Michalowski, T., Michel, P., Santana-Ros, T., Tanga, P., Vigan, A., Witasse, O., Yang, B., Antonini, P., Audejean, M., Aurard, P., Behrend, R., Benkhaldoun, Z., Bosch, J. M., Chapman, A., Dalmon, L., Fauvaud, S., Hamanowa, H., Hamanowa, H., His, J., Jones, A., Kim, D. H., Kim, M. J., Krajewski, J., Labrevoir, O., Leroy, A., Livet, F., Molina, D., Montaigut, R., Oey, J., Payre, N., Reddy, V., Sabin, P., Sanchez, A. G. & Socha, L. (2021), 'VLT/SPHERE imaging survey of the largest main-belt asteroids: Final results and synthesis', *Astronomy and Astrophysics* 654, A56. Dostupné z: https://doi.org/10.1051/0004-6361/202141781.
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S. J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K. J., Mayorov, N., Nelson, A. R. J., Jones, E., Kern,

LITERATURA

R., Larson, E., Carey, C. J., Polat, İ., Feng, Y., Moore, E. W., VanderPlas, J., Laxalde, D., Perktold, J., Cimrman, R., Henriksen, I., Quintero, E. A., Harris, C. R., Archibald, A. M., Ribeiro, A. H., Pedregosa, F., van Mulbregt, P. & SciPy 1.0 Contributors (2020), 'SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python', *Nature Methods* **17**, 261–272. Dostupné z: https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2.

- Vokrouhlický, D., Fatka, P., Micheli, M., Pravec, P. & Christensen, E. J. (2022), 'Extremely young asteroid pair (458271) 2010 UM26 and 2010 RN221', Astronomy and Astrophysics 664, L17. Dostupné z: https://doi.org/10.1051/ 0004-6361/202244589.
- Vokrouhlický, D., Pravec, P., Ďurech, J., Hornoch, K., Kušnirák, P., Galád, A., Vraštil, J., Kučáková, H., Pollock, J. T., Ortiz, J. L., Morales, N., Gaftonyuk, N. M., Pray, D. P., Krugly, Y. N., Inasaridze, R. Y., Ayvazian, V. R., Molotov, I. E. & Colazo, C. A. (2017), 'Detailed Analysis of the Asteroid Pair (6070) Rheinland and (54827) 2001 NQ8', *The Astronomical Journal* **153**(6), 270. Dostupné z: https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa72ea.
- Walsh, K. J. (2018), 'Rubble pile asteroids', Annual Review of Astronomy and Astrophysics 56(1), 593–624. Dostupné z: https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-052013.
- Weissman, P. R. (1996), 'The Oort Cloud', **107**, 265–288. Dostupné z: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996ASPC..107..265W.
- Wisdom, J. & Holman, M. (1991), 'Symplectic maps for the N-body problem.', **102**, 1528–1538. Dostupné z: https://doi.org/10.1086/115978.
- Zappalà, V., Cellino, A., Dell'oro, A., Migliorini, F. & Paolicchi, P. (1996), 'Reconstructing the Original Ejection Velocity Fields of Asteroid Families', *Icarus* 124(1), 156–180. Dostupné z: https://doi.org/10.1006/icar.1996.0196.

Příloha

Součástí této práce jsou v podobě elektronické přílohy tři soubory, které poskytují přehled o nalezených planetkových párech a planetkových klastrech. Jedná se o ZIP archiv figures.zip a textové soubory pairs.txt a clusters.txt.

V archivu figures.zip se nachází histogramy počtu detekovaných těsných přiblížení v závislosti na simulovaném čase. Tyto histogramy uvádíme pro všechny dvojice planetek, pro které jsme odhadovali věk metodou těsných přiblížení a detekovali jsme u nich alespoň jedno těsné přiblížení. Zahrnuty jsou tedy i dvojice planetek, jejichž stáří touto metodou nebylo možné určit.

Odhad věku uvedený v legendě je v kyr. Hodnota věk_{max} odpovídá horní hranici odhadu věku, hodnota věk_{min} odpovídá spodní hranici odhadu věku, *n* značí celkový počet detekovaných těsných přiblížení.

Oba textové soubory vycházejí z dat dostupných z AstDys (2025*b*) ze dne 3.3.2025. Z důvodů většího čtenářského dosahu a lepší strojové čitelnosti v případě těchto dvou souborů přecházíme do anglického popisu veličin a do anglického zápisu čísel.

Soubor pairs.txt obsahuje seznam 6 875 planetkových párů, které jsme získali postupem popsaným v kapitolách 2.1 a 2.2. Jedná se tedy o planetkové páry, které prošly testem rovnoměrného rozdělení pozaďové populace a zároveň pro ně byla hodnota $P_2/N_p < 0,1$.

V tomto seznamu jsou zahrnuty i ty planetkové páry, které byly později identifikovány jako primár planetkového klastru a planetka, která má k němu nejmenší vzdálenost *d*. V tomto seznamu naopak není zahrnut pár planetek (206673) a 2018 BM33, u kterého jsme odhadovali věk, ale při březnovém výpočtu neprošel testem rovnoměrného rozdělení pozaďové populace.

Soubor clusters.txt obsahuje seznam všech členů 11 planetkových klastrů, které jsme identifikovali na konci kapitoly 2.3.

Význam jednotlivých sloupců v obou textových souborech je následující:

- ast_1_perm: definitivní označení první planetky (primáru),
- ast_1_prov: předběžné označení první planetky,
- ast_2_perm: definitivní označení druhé planetky (sekundáru),
- ast_2_prov: předběžné označení druhé planetky,
- d_mean: [m/s] vzdálenost d v pětirozměrném prostoru středních dráhových elementů,
- a_1: [au] velká poloosa dráhy první planetky,
- e_1: excentricita dráhy první planetky,

- i_1: [rad] inklinace první planetky,
- H_1: [mag] absolutní hvězdná velikost první planetky,
- H_2: [mag] absolutní hvězdná velikost druhé planetky,
- N_1: počet drah v kvádru o objemu V₁,
- N_1/2: počet drah v kvádru o objemu $V_{1/2}$,
- P_1/2: pravděpodobnost, že se v objemu $V_{1/2}$ nachází $N_{1/2}$ či více drah,
- R_0: poloměr hypersféry o specifickém objemu,
- N_zone: celkový počet planetek v dané zóně, které nejsou členem žádné z rodin a jejichž absolutní hvězdná velikost $H < H_2 + 0.5$,
- P_2: očekávané množství dvojic planetek v dané zóně, jejichž vzdálenosti $d \leq d_{\rm p},$
- N_p: skutečné množství dvojic planetek v dané zóně, jejichž normalizované vzdálenosti $d/R_0 \le d_p/R_0$,
- P_2/N_p: odhad pravděpodobnosti, že nalezený pár je pouze náhodnou dvojicí planetek s podobnými drahami,
- known: příznak, zda se jedná o již známý planetkový pár (True), či nikoliv (False),
- age: [kyr] odhad stáří planetkového páru,
- age+: [kyr] horní hranice nejistoty odhadu stáří planetkového páru,
- age-: [kyr] spodní hranice nejistoty odhadu stáří planetkového páru,
- n_clones: počet detekovaných těsných přiblížení, která splňují finální limity $r_{\rm rel} \leq i_{r\,{\rm Hill}} r_{\rm Hill}$ a zároveň $v_{\rm rel} \leq j_{v\,{\rm esc}} v_{\rm esc}$,
- i_r: limitní násobky poloměru Hillovy sféry,
- j_v: limitní násobky únikové rychlosti,
- r_min: [km] minimální fyzická vzdálenost dvojic klonů splňujících finální limity $r_{\rm rel} \leq i_{r\,{\rm Hill}} r_{\rm Hill}$ a zároveň $v_{\rm rel} \leq j_{v\,{\rm esc}} v_{\rm esc}$,
- r_max: [km] maximální fyzická vzdálenost dvojic klonů splňujících finální limity $r_{\rm rel} \leq i_{r\,{\rm Hill}} r_{\rm Hill}$ a zároveň $v_{\rm rel} \leq j_{v\,{\rm esc}} v_{\rm esc}$,
- v_esc: [m/s] úniková rychlost z první planetky.

Všechny tři zmiňované soubory jsou společně s popisem dostupné též na https://www.physics.muni.cz/~ehonsova.