

**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

# **Diplomová práce**

**BRNO 2019**

**JAN PUCHÝŘ**

**M A S A R Y K O V A**  
**U N I V E R Z I T A**  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

---

# **Proměnnost profilu čar hvězdného větru primární složky rentgenového pulsaru Vela X-1**

Diplomová práce

**Jan Puchýř**

Vedoucí práce: prof. Mgr. Jiří Krtička, Ph.D.

Brno 2019

# Bibliografický záznam

**Autor:** Jan Puchýř  
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

**Název práce:** Proměnnost profilu čar hvězdného větru primární složky rentgenového pulsaru Vela X-1

**Studijní program:** Fyzika

**Studijní obor:** Teoretická fyzika a astrofyzika

**Vedoucí práce:** prof. Mgr. Jiří Krtička, Ph.D.

**Akademický rok:** 2018/2019

**Počet stran:** 47 + 14

**Klíčová slova:** Vela X-1; hvězdný vítr; profil typu P Cyg; model

# Bibliographic Entry

**Author:** Jan Puchýř  
Faculty of Science, Masaryk University  
Department of Theoretical Physics and Astrophysics

**Title of Thesis:** Variability of wind lines of primary component of Vela X-1 pulsar

**Degree Programme:** Physics

**Field of Study:** Theoretical Physics and Astrophysics

**Supervisor:** prof. Mgr. Jiří Krtička, Ph.D.

**Academic Year:** 2018/2019

**Number of Pages:** 47 + 14

**Keywords:** Vela X-1; stellar wind; P Cyg profile; model

# Abstrakt

Vela X-1 je jedním z nejsilnějších zdrojů rentgenového záření na hvězdné obloze. Jedná se o dvojhvězdu tvořenou modrým veleobrem a neutronovou hvězdou. Rentgenová emise, způsobená akrecí hvězdného větru veleobra na neutronovou hvězdu, má ionizační účinky na hvězdný vítr ve svém okolí, čímž výrazně narušuje jeho izotropii. Z tohoto důvodu jsou spektrální profily typu P Cyg čar vznikajících ve hvězdném větru časově proměnné, neboť závisí na úhlu, pod jakým se na soustavu díváme.

V této práci se pokoušíme vytvořit skript v Pythonu určený k modelování profilů vybraných čar v ultrafialovém oboru, který zohledňuje anizotropii hvězdného větru ve dvojhvězdné soustavě.

# Abstract

Vela X-1 is one of the strongest X-ray sources of the night sky. It is a binary star consisting of a blue supergiant and a neutron star. X-ray emission, caused by the accretion of the supergiant's stellar wind onto the neutron star, ionizes its surrounding stellar wind, severely breaking its isotropy. Because of that, P Cyg spectral profiles of the lines originating in the stellar wind are variable in time, because they are dependent on the angle the system is being viewed under.

In this thesis, we try to make a Python script for modelling spectral profiles of certain chosen ultraviolet lines that takes into account the anisotropy of the stellar wind in the binary system.



## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2017/2018

**Ústav:** Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

**Student:** Bc. Jan Puchýř

**Program:** Fyzika

**Obor:** Teoretická fyzika a astrofyzika

**Směr:** Astrofyzika

Ředitel *Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

**Název práce:** Proměnnost profilu čar hvězdného větru primární složky rentgenového pulsaru Vela X-1

**Název práce anglicky:** Variability of wind lines of primary component of Vela X-1 pulsar

### Oficiální zadání:

Rentgenový pulsar Vela X-1 je typickým představitelem rentgenových dvojhvězd s vysokou hmotností, jejichž rentgenové záření vzniká v důsledku akrece látky primární složky na kompaktního souputníka. V případě soustavy Vela X-1 je kompaktní složkou neutronová hvězda. Pozorovaný tok rentgenového záření je periodický, přičemž perioda změn je rovna rotační periodě kompaktní hvězdy. Cílem diplomové práce je modelování proměnnosti ultrafialových čar primární složky pulsaru, vznikajících ve hvězdném větru. Bude vytvořen počítačový program pro výpočet profilů čar hvězdného větru. Jako podklad pro práci budou sloužit modely hvězdného větru spočtené vedoucím práce. Předpokladem úspěšného zvládnutí práce je znalost základů programování.

### Seznam odborné literatury:

- Mikulášek, Z., Krtička, J.: Fyzika horkých hvězd, MU, 2003
- Krtička, J., Kubát, J., Skalický, J. 2012, ApJ 757, 162

**Jazyk závěrečné práce:** čeština

**Vedoucí práce:** prof. Mgr. Jiří Krtička, Ph.D.

**Datum zadání práce:** 27. 9. 2016

**V Brně dne:** 14. 2. 2017

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

# Poděkování

Poděkovat bych chtěl mnoha lidem, kteří mi pomohli k tomu, abych tuto práci aspoň nějak dotáhl do konce. Nejvíce si to ale zaslouží můj vedoucí prof. Mgr. Jiří Krtička, Ph.D., o němž mohu říci, že v rámci svých možností pro mě udělal maximum.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou/diplomovou/rigorózní práci vypracoval(-a) samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 9. 5. 2019

.....  
Jan Puchýř

# Obsah

<b>Přehled použitého značení</b> .....	<b>ix</b>
<b>Úvod</b> .....	<b>1</b>
<b>Kapitola 1. Základní pojmy a poznatky</b> .....	<b>2</b>
1.1 Hvězdný vítr .....	2
1.2 Specifická intenzita .....	3
1.3 Rovnice přenosu záření (RTE) .....	3
1.4 Statistická rovnováha a Einsteinovy koeficienty .....	4
1.4.1 Rovnice statistické rovnováhy .....	4
1.4.2 Absorpce .....	4
1.4.3 Spontánní emise .....	5
1.4.4 Stimulovaná emise .....	5
1.4.5 Rovnovážné vztahy .....	5
1.4.6 Opacita a emisivita .....	6
1.5 Hydrodynamické rovnice .....	6
1.5.1 Rovnice kontinuity .....	6
1.5.2 Pohybová rovnice .....	7
1.5.3 Energiová rovnice .....	7
<b>Kapitola 2. Hvězdné větry horkých hvězd</b> .....	<b>8</b>
2.1 Urychlování částic v atmosféře absorpcí a rozptylem záření .....	8
2.2 Profily čar hvězdného větru .....	10
2.3 Úniková rychlost a terminální rychlost .....	12
2.4 Rychlost ztráty hmoty .....	15
<b>Kapitola 3. Vela X-1</b> .....	<b>19</b>
3.1 Základní informace .....	19
3.2 Rentgenové pulzy .....	19
3.3 Ionizace hvězdného větru RTG zářením .....	21
<b>Kapitola 4. Náš model</b> .....	<b>24</b>
4.1 Předpoklady .....	24
4.2 Data .....	24
4.3 Interpolace dat .....	26



4.4	Spektrální profil v pohybujícím se větru	29
4.5	Koncentrace iontů na dané hladině	30
4.6	Parametry spektrálních čar	31
4.7	Rovnice přenosu záření	31
<b>Kapitola 5.</b>	<b>Výsledky a diskuze</b>	<b>34</b>
<b>Kapitola 6.</b>	<b>Závěr</b>	<b>36</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>37</b>
	<b>Příloha</b>	<b>38</b>

# Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$t$	čas
$\vec{r}$	poloha
$N$	počet
$P$	pravděpodobnost
$S$	plocha
$\vec{n}$	normálový vektor plochy
$\nu$	frekvence
$\lambda$	vlnová délka
$E, \varepsilon$	energie
$m, M$	hmotnost
$T$	termodynamická teplota
$\rho$	hustota
$n$	koncentrace
$R$	poloměr
$v_r$	radiální rychlost
$a_r$	radiální zrychlení
$g$	tíhové zrychlení
$\Omega$	prostorový úhel
$Q$	teplo
$\Theta_*$	úhlová velikost poloměru hvězdného kotouče
$a$	izotermická rychlost zvuku
$c$	rychlost světla
$h$	Planckova konstanta
$k_B$	Boltzmannova konstanta
$g_i$	degenerace $i$ -té energetické hladiny
$r$	četnost
$I$	intenzita elektromagnetického záření
$L$	zářivý výkon

$\dot{M}$	rychlost ztráty hmoty
$v_\infty$	terminální rychlost hvězdného větru
$v_{\text{esc}}$	úniková rychlost
$\chi$	opacita
$\eta$	emisivita
$\phi$	absorpční spektrální profil
$\psi$	emisní spektrální profil
$A, B$	Einsteinovy koeficienty

# Úvod

Vela X-1 je jedním z nejsilnějších rentgenových zdrojů na noční obloze. Jedná se o rentgenovou dvojhvězdu s vysokou hmotností, skládající se z neutronové hvězdy a horké primární složky. Silný hvězdný vítr primární složky z části neustále proudí na kompaktní složku, v jejímž okolí se pak sloupec akreované hmoty zahřívá na velmi vysoké teploty a stává se zdrojem rentgenového záření. Tok rentgenového záření je proměnný, což je zřejmě důsledkem nehomogenity hvězdného větru. Rentgenové záření následně zpětně ovlivňuje hvězdný vítr, čímž vzniká provázaný systém, který je přirozenou laboratoří pro výzkum hvězdného větru horkých hvězd.

Cílem této práce je modelování proměnných profilů ultrafialových čar primární složky vznikajících ve hvězdném větru.

# Kapitola 1

## Základní pojmy a poznatky

### 1.1 Hvězdný vítr

Hvězdným větrem nazýváme proud částic, z větší či menší části elektricky nabitých, které vysokou rychlostí opouštějí atmosféru hvězdy a postupně unikají až do mezihvězdného prostoru. U různých typů hvězd vzniká hvězdný vítr z mnoha různých příčin, a jeho vlastnosti proto bývají také velmi různé. U chladnějších hvězd, jako je např. Slunce, je významnou příčinou aktivita ve formě koronálních výtrysků hmoty, erupcí či protuberancí, při nichž je plazma „vystřeleno“ na únikovou rychlost ze soustavy. U horkých hvězd spektrální třídy O a B jsou ionty těžších prvků ve hvězdné atmosféře silně urychlovány absorpcí a následnou emisí intenzivního záření hvězdy na spektrálních čarách, kdy daná částice ve výsledku získává hybnost v radiálním směru – říkáme, že zde působí „zářivá síla“. Podobný mechanismus funguje u červených veleobrů s tím rozdílem, že zářivá síla zde působí především na prachové částice, které silně absorbují záření v kontinuu.

Vítr urychlovaný v důsledku atmosférické aktivity hvězdy, která je nepravidelná a zatím nejsme příliš schopni ji ani předvídat, je rovněž nepravidelný a obtížně předvídatelný. Naopak vítr hnaný zářením, které je víceméně konstantní z celého povrchu hvězdy a výrazně se nemění v čase, bývá poměrně stálý a v prvním přiblížení homogenní a sféricky symetrický. U horkých hvězd navíc bývá hvězdný vítr tak silný, že jeho prostřednictvím z povrchu hvězd uniká významné množství hmoty – rychlost ztráty hmoty  $\dot{M}$  dosahuje až řádu  $10^{-5} M_{\odot}$ , což během milionů let může snížit hmotnost hvězdy o desítky procent. Z tohoto důvodu je důležité zároveň se studiem atmosfér těchto objektů studovat i jejich hvězdný vítr, neboť se jedná o fenomén, který má zásadní dopad na hvězdný vývoj.

Ke studiu hvězdných atmosfér i větru slouží především spektroskopie. V případě horkých hvězd se jedná především o spektroskopii v oboru ultrafialového a viditelného záření, v nichž tyto hvězdy září velmi silně a jsou pozorovatelné na velkou vzdálenost. V těchto oblastech spektra se také nacházejí silné čáry těžších prvků, které vznikají ve hvězdném větru a z jejichž spektrálních profilů můžeme tedy odvodit některé parametry parametry jako je rychlost ztráty hmoty  $\dot{M}$  nebo terminální rychlost  $v_{\infty}$ .

## 1.2 Specifická intenzita

(Části kapitoly jsou založeny na [1].)

Spektroskopie spočívá ve tvorbě modelových spekter pomocí modelů hvězdné atmosféry (případně hvězdného větru) a jejich srovnání s pozorovanými spektry. Model hvězdné atmosféry modeluje především průběh hustoty, teploty a s tím související šíření elektromagnetického záření v prostoru a v čase na různých frekvencích (resp. vlnových délkách) v různých směrech. Klíčovou veličinou k popisu tohoto procesu je tzv. specifická intenzita  $I(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu)$ . Ta je definována jako „podíl energie elektromagnetického záření v rozpětí frekvencí  $(\nu, \nu + d\nu)$ , které prochází orientovanou plochou  $d\vec{S}$  v místě  $\vec{r}$  a čase  $t$  v prostorovém úhlu  $d\Omega$ , vůči velikosti plochy, časového úseku, frekvenčního úseku a prostorového úhlu“.

$$\delta\varepsilon = I(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu) \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} \cdot d\Omega \cdot d\nu \cdot dt. \quad (1.1)$$

Jedná se tedy o sedmidimenzionální distribuční funkci v prostoru (3 dimenze), čase (1 dimenze), směru (2 dimenze) a frekvenci (1 dimenze).

Specifická intenzita je přímo úměrná koncentraci fotonů.

$$I(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu) = \rho_{\text{fot}}(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu) \cdot c h \nu. \quad (1.2)$$

Jedná se ve své podstatě o hustotu toku energie záření na dané frekvenci procházejícího daným místem v daném směru. Protože pro paprsky kolmé na plochu  $dS$  platí  $\vec{n} \cdot d\vec{S} = dS$ , můžeme rovnici 1.1 přepsat jako

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon &= I(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu) \cdot dS \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu \\ &= h\nu \rho_{\text{fot}}(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu) \cdot dS \cdot c \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu. \\ &= h\nu \rho_{\text{fot}}(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu) \cdot dV \cdot d\Omega \cdot d\nu \end{aligned} \quad (1.3)$$

Jednotkou  $I(\vec{r}, t, \vec{n}, \nu)$  v soustavě SI je  $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{srad}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , používá se ale také  $\text{erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{srad}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 1.3 Rovnice přenosu záření (RTE)

Rovnice přenosu záření je parciální diferenciální rovnice, jejímž řešením (integrací) můžeme zjistit průběh specifické intenzity  $I(x, y, z, t, \vec{n}, \nu)$  v daném místě a čase na dané vlnové délce ve směru  $\vec{n}$  podél daného předem zvoleného paprsku  $s$ . V každém místě paprsku na každé vlnové délce potřebujeme znát opacitu  $\chi$  a emisivitu  $\eta$ , které udávají míru absorpce a emise záření.

Ve stacionárním případě, který předpokládáme, žádná z veličin explicitně nezávisí na čase. Rovnice má pak tvar

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \eta_\nu - \chi_\nu \cdot I_\nu. \quad (1.4)$$

K výpočtu opacity a emisivity v oblasti spektrální čáry je třeba využít Einsteinovy vztahy pro vázaně-vázané přechody, vycházející z rovnic statistické rovnováhy. S jejich využitím můžeme zjistit míru třech klíčových jevů. Těmi jsou absorpce, spontánní emise a stimulovaná emise.

## 1.4 Statistická rovnováha a Einsteinovy koeficienty

Vzorce a jejich odvození jsou převzaty z [1].

### 1.4.1 Rovnice statistické rovnováhy

Je-li látka v termodynamické rovnováze (TE), obsazení energetických hladin všech atomů a iontů se řídí Boltzmannovým-Sahovým rozdělením, které se za předpokladu znalosti koncentrace jednotlivých druhů částic dá plně popsat pouze jedním skalárním parametrem – termodynamickou teplotou  $T$ . Tento předpoklad však pro hvězdnou látku nikdy reálně neplatí. Uvnitř hvězdy se dá předpokládat alespoň tzv. lokální termodynamická rovnováha (LTE), kdy látka v každém bodě splňuje Boltzmannovo-Sahovo rozdělení odpovídající určité teplotě, ale záření je nerovnovážné. Ve hvězdné atmosféře a hvězdném větru už ale ani tato rovnováha neplatí a k jejich popisu je tedy nezbytné použít tzv. NLTE modely, podle nichž může být obsazení hladin podstatně složitější.

Obecným principem, nevyžadujícím termodynamickou rovnováhu, je předpoklad, že obsazení každé hladiny je stacionární – respektive náhodně oscilující kolem dané stacionární hodnoty v důsledku termodynamických zákonů. Tzn., že počet  $N_i$  iontů na  $i$ -té hladině se zvyšuje v důsledku přechodů z jiných hladin na  $i$ -tou hladinu se stejnou četností jako se snižuje v důsledku přechodů z  $i$ -té hladiny na jiné hladiny. Pokud  $P_{ij}$  je četnost přechodů z libovolné  $i$ -té hladiny na  $j$ -tou, potom platí soustava rovnic, které nazýváme rovnice statistické rovnováhy

$$\sum_{j \neq i} N_j P_{ji} - N_i \sum_{j \neq i} P_{ij} = 0. \quad (1.5)$$

Na základě těchto rovnic se Einsteinovi podařilo popsat vázaně-vázané přechody jako kombinaci absorpce, spontánní a stimulované emise. Každý z těchto jevů má vždy pravděpodobnostní charakter z důvodů daných projevy kvantové fyziky. Míru jejich pravděpodobnosti udávají tzv. Einsteinovy koeficienty.

### 1.4.2 Absorpce

Absorpce spočívá v přechodu daného atomu či iontu z nižší hladiny ( $l$ ) na vyšší hladinu ( $u$ ) a zároveň pohlcení fotonu o odpovídající frekvenci  $\nu$ , tedy energii  $h\nu = E_u - E_l$ .

Výsledná četnost<sup>1</sup> absorpce  $r_{lu}$  fotonu v čáře daného přechodu  $l \rightarrow u$  na jednotku objemu v daném místě, daném směru a na dané frekvenci je dána vztahem

$$r_{lu}(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \cdot d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \equiv n_l(\vec{r}) \cdot \phi_{lu}(\nu) \cdot B_{lu} \cdot I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \cdot d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (1.6)$$

kde  $I(\vec{r}, \vec{n}, \nu)$  je specifická intenzita záření na dané frekvenci, v daném místě a směru,  $n_l(\vec{r})$  je prostorová koncentrace iontů na dolní hladině v daném místě,  $\phi_{lu}(\nu)$  je absorpční profil dané spektrální čáry (izotropní ve vztažné soustavě spojené s látkou za předpokladu, že látka je izotropní) a  $B_{lu}$  je Einsteinův koeficient absorpce pro daný přechod.

<sup>1</sup>překlad angl. výrazu „direct rate“

### 1.4.3 Spontánní emise

V jakémkoliv okamžiku může libovolný iont spontánně přejít z vyšší hladiny  $u$  do nižší hladiny  $l$  a vyzářit přitom foton v dané čáře.

Výsledná četnost spontánní emise  $r_{ul}^s$  fotonu v daném přechodu je dána jako

$$r_{ul}^s(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \cdot d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \equiv n_u(\vec{r}) \cdot \psi_{ul}(\nu) \cdot A_{ul} \cdot d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (1.7)$$

kde  $\phi_{lu}(\nu)$  je emisní profil čáry (izotropní v soustavě spojené s látkou),  $n_u(\vec{r})$  je prostorová koncentrace iontů na horní hladině v daném místě a  $A_{ul}$  je Einsteinův koeficient spontánní emise pro daný přechod.

### 1.4.4 Stimulovaná emise

Stimulovaná emise spočívá v tom, že iont nacházející se ve vyšší hladině  $u$  v blízkosti fotonu o energii  $h\nu = E_u - E_l$  přejde do nižší hladiny  $l$  a vyzáří přitom druhý identický foton o stejné frekvenci, ve stejném směru a ve stejné fázi jako foton, který tento proces vyvolal.

Výsledná četnost stimulované emise  $r_{ul}^i$  fotonu v daném přechodu je dána jako

$$r_{ul}^i(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \cdot d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \equiv n_u(\vec{r}) \cdot \psi_{ul}(\nu) \cdot B_{ul} \cdot I(\vec{r}, \vec{n}, \nu) \cdot d\nu \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (1.8)$$

kde  $B_{ul}$  je Einsteinův koeficient stimulované emise pro daný přechod.

### 1.4.5 Rovnovážné vztahy

V termodynamické rovnováze (TE) musí platit rovnováha zvlášť pro každý přechod, na každé frekvenci, v každém místě. Tzn., že četnost emise  $u \rightarrow l$  musí být stejná jako četnost absorpce  $l \rightarrow u$ .

$$r_{lu} \equiv r_{ul}^s + r_{ul}^i. \quad (1.9)$$

Předpokládáme-li, že záření je izotropní ( $I(\vec{n}, \nu) = I(\nu)$ ), dostaneme rovnici

$$n_l B_{lu} \phi_\nu I_\nu \equiv n_u (A_{ul} + B_{ul} I_\nu) \psi_\nu. \quad (1.10)$$

Z ní pak vyjádříme rovnovážnou intenzitu záření

$$I_\nu = \frac{A_{ul}/B_{ul}}{(n_l B_{lu} \phi_\nu / n_u B_{ul} \psi_\nu) - 1}. \quad (1.11)$$

Z této rovnice můžeme odvodit vztahy mezi koeficienty. Protože předpokládáme termodynamickou rovnováhu, intenzita záření na dané frekvenci je dána Planckovou funkcí. Platí tedy  $I_\nu^* = B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$  a  $\left(\frac{n_l}{n_u}\right)^* = \frac{g_l}{g_u} \exp\left(\frac{E_u - E_l}{k_B T}\right)$ , a stejně tak předpokládáme  $\phi_\nu = \psi_\nu$ , plyne z toho

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul}, \quad (1.12)$$



$$A_{ul} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} B_{ul}. \quad (1.13)$$

A protože Einsteinovy koeficienty jsou konstanty určené kvantovými vlastnostmi atomů daného prvku, tyto vztahy mezi nimi platí obecně i mimo TE. Stačí tedy pozorováním daného přechodu zjistit hodnotu jednoho z koeficientů a můžeme pak snadno vypočítat zbývající dva.

### 1.4.6 Opacita a emisivita

Jakmile již známe výslednou četnost absorpce, spontánní i stimulované emise, je třeba z nich vyjádřit opacitu a emisivitu – makroskopické koeficienty absorpce a emise v čarách, které figurují v rovnici přenosu záření.

Koeficient absorpce v čarách v našem případě dáváme do rovnosti s opacitou, která se v RTE násobí specifickou intenzitou  $I$ . Smysl tedy má definovat ho pomocí rozdílu četnosti absorpce a stimulované emise, protože obě tyto veličiny jsou přímo úměrné  $I$ . Ve své podstatě je tak opacita mírou absorpce opravenou o míru stimulované emise.

$$\chi_{lu} = \frac{r_{lu} - r_{ul}^i}{I} \equiv [n_l(\vec{r}) \cdot \phi_{lu}(\nu) \cdot B_{lu} - n_u(\vec{r}) \cdot \psi_{ul}(\nu) \cdot B_{ul}] \cdot (h\nu/4\pi). \quad (1.14)$$

Násobit ji musíme  $(h\nu/4\pi)$ , aby měla rozměr prostorové, frekvenční a směrové hustoty energie.

Koeficient emise v čarách je potom dán jednoduše mírou spontánní emise.

$$\eta_{ul} = r_{ul}^s \equiv n_u(\vec{r}) \cdot \psi_{ul}(\nu) \cdot A_{ul} \cdot (h\nu/4\pi). \quad (1.15)$$

## 1.5 Hydrodynamické rovnice

Látka tvořící hvězdný vítr je plazmatem, což je ionizovaný plyn. To znamená, že při interakci s makroskopickým elektrickým či magnetickým polem je jeho chování zásadně odlišné od běžné hmoty v důsledku elektrického náboje jednotlivých částic. Při absenci těchto polí však můžeme očekávat, že se hvězdný vítr bude alespoň v určitých ohledech chovat jako standardní tekutina. Díky tomu můžeme k jeho popisu využít některé rovnice hydrodynamiky.

### 1.5.1 Rovnice kontinuity

O hvězdném větru, který je poháněn zářením, můžeme s úspěchem předpokládat, že je dlouhodobě stálý. Z tohoto důvodu se k jeho popisu nabízí jako klíčový parametr rychlost ztráty hmoty  $\dot{M}$  – množství hmoty, které opustí atmosféru hvězdy za jednotku času. Pokud je vítr navíc sféricky symetrický, znamená to, že tato hmota opouštějící atmosféru je rozprostřena rovnoměrně po celém povrchu hvězdy. Za tohoto předpokladu jsou hustota  $\rho(r)$  i radiální rychlost  $v_r(r)$  pouze funkcí  $r$  a jejich průběh je v čase neměnný. Pro látku nacházející se v různých vzdálenostech od hvězdy pak platí rovnice kontinuity

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v_r(r) = \text{const.} \quad (1.16)$$

Reálně však hvězdný vítr nikdy není zcela sféricky symetrický. Nachází se v něm určitá struktura, kterou je možné v některých případech nepřímo zkoumat – takovým případem je zřejmě i Vela X-1 a její rentgenová emise. Není-li odchylka od sférické symetrie příliš výrazná, můžeme rovnici 1.16 chápat jako popisující střední hodnotu  $\bar{\rho}(r)$  a  $\bar{v}_r(r)$  na dané sféře.

### 1.5.2 Pohybová rovnice

Hvězdný vítr, který urychlen zářením opustil hvězdnou atmosféru, je i poté zářením nadále urychlován – mluvíme o tzv. zářivé síle. Je tedy třeba vyjádřit zrychlení ve směru  $r$  působící na element větru v důsledku sil na něj působících. Popisem těchto sil získáme pohybovou rovnici

$$a_r = v_r \frac{dv_r}{dr} = g^{\text{rad}} - g - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} (a^2 \rho), \quad (1.17)$$

kde  $g^{\text{rad}}$  je zrychlení vyvolané zářivou silou,  $g$  je tíhové zrychlení a  $a$  je izotermická rychlost zvuku.

### 1.5.3 Energiová rovnice

Na závěr je také potřeba vědět, jak se vyvíjí celková energie jednotlivých elementů hvězdného větru. Ve větru horkých hvězd dochází běžně k výrazným změnám teploty a ionizačního stavu látky, což má za následek změny opacity. Změny energie popisuje diferenciální rovnice

$$\frac{3}{2} v_r \rho \frac{da^2}{dr} + \frac{a^2 \rho}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 v_r) = Q^{\text{rad}}, \quad (1.18)$$

kde  $Q^{\text{rad}}$  je celkové přijaté/vyzářené teplo v důsledku zářivého ohřívání/ochlazování látky.

# Kapitola 2

## Hvězdné větry horkých hvězd

Části kapitoly jsou založeny na [2].

### 2.1 Urychlování částic v atmosféře absorpcí a rozptylem záření

Dominantní silou pro vznik hvězdného větru horkých hvězd je urychlování částic v atmosféře intenzivním zářením hvězdy. Pro hvězdy teplejší než 10—15 kK (podle vývojového stadia) je zářivá síla na povrchu hvězdy schopna překonat tíhovou sílu, což způsobuje, že z celého povrchu hvězdy neustále unikají částice plazmatu a stávají se hvězdným větrem. Podstatou této zářivé síly je absorpce fotonů atomy následovaná emisí, a to především v rezonančních čarách (line driven winds – „čarami hnaný vítr“). Tomuto jevu se běžně říká *rozptyl na rezonančních čarách*<sup>1</sup>.

Mějme atom s hybností, jejíž radiální složka je  $mv_r$ . Ten absorbuje foton přicházející v radiálním směru s frekvencí  $\nu$ , tzn. hybností o velikosti  $\frac{h\nu}{c}$ . Po absorpci má atom radiální složku hybnosti

$$mv'_r = mv_r + \frac{h\nu}{c}. \quad (2.1)$$

Následně atom vyzáří foton s frekvencí  $\nu'$  v náhodném směru svírajícím s radiálním směrem úhel  $\alpha$ . Výsledná radiální složka hybnosti atomu je

$$mv''_r = mv'_r - \frac{h\nu'}{c} \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Předpokládejme, že v soustavě spojené s atomem mají pohlcený i vyzářený foton frekvenci  $\nu_0$  (odpovídající přechodu mezi dvěma energiovými hladinami). V soustavě spojené s hvězdou je ale v důsledku Dopplerova jevu frekvence pohlceného fotonu  $\nu_0(1 + v_r/c)$  a frekvence vyzářeného fotonu  $\nu_0(1 + v'_r/c)$ . Výsledná rychlost atomu v radiálním směru

<sup>1</sup> Ve fyzikální terminologii se tento jev z rozptyl nepovažuje. V astrofyzice se však z praktických důvodů berou jako rozptyl i absorpce následované emisí, protože většina látky, z níž k nám přichází záření, má velmi nízkou hustotu (např. hvězdný vítr), a srážková deexcitace v ní tedy není příliš četná.

tedy je

$$\begin{aligned}
 v_r'' &= v_r + \frac{h\nu_0}{mc} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) - \frac{h\nu_0}{mc} \left(1 + \frac{v_r'}{c}\right) \cos \alpha \\
 &= v_r + \frac{h\nu_0}{mc} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) - \frac{h\nu_0}{mc} \left\{1 + \frac{1}{c} \left[v_r + \frac{h\nu_0}{mc} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)\right]\right\} \cos \alpha \quad (2.3) \\
 &= v_r + \frac{h\nu_0}{mc} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{c} \left(\frac{h\nu_0}{mc}\right)^2 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Protože platí  $v \ll c$  a  $h\nu_0 \ll mc$ , můžeme použít aproximaci  $(1 + \frac{v_r}{c}) \approx 1$  a  $\frac{1}{c} \left(\frac{h\nu_0}{mc}\right)^2 \approx 0$ . Radiální změna rychlosti je tedy

$$v_r'' - v_r \approx \frac{h\nu_0}{mc} (1 - \cos \alpha). \quad (2.4)$$

To znamená, že maximální změna rychlosti (pokud je foton vyzářen v opačném směru,  $\cos \alpha = -1$ ) je  $2\frac{h\nu_0}{mc}$ . Pokud je foton vyzářen opět ve stejném směru ( $\cos \alpha = 1$ ), rychlost atomu se nezmění. Protože směr vyzáření fotonu je náhodný, střední hodnotu změny radiální složky hybnosti v důsledku rozptylu můžeme získat zintegrováním vztahu 2.4 přes celou sféru

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta(mv_r) \rangle &= \frac{h\nu_0}{c} \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (1 - \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha} \\
 &= \frac{h\nu_0}{c} \frac{2\pi (\int_0^\pi \sin \alpha d\alpha - \int_0^\pi \sin \alpha \cos \alpha d\alpha)}{4\pi} \quad (2.5) \\
 &= \frac{h\nu_0}{2c} (2 - 0) = \frac{h\nu_0}{c}.
 \end{aligned}$$

Urychlení atomu při rozptylu je tedy v průměru stejné jako při samotné absorpci fotonu. Nyní předpokládejme, že absorbovaný foton nepřiletí vždy zevnitř hvězdy, ale může přijít se stejnou pravděpodobností z jakéhokoli směru. Úhel mezi radiálním směrem a rychlostí fotonu označme  $\beta$ . Vyšše uvedené vztahy se tím změňí na

$$\begin{aligned}
 mv_r' &= mv_r + \frac{h\nu}{c} \cos \beta \\
 v_r'' - v_r &\approx \frac{h\nu_0}{mc} (\cos \beta - \cos \alpha), \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta(mv_r) \rangle &= \frac{h\nu_0}{c} \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \int_0^\pi (\cos \beta - \cos \alpha) \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^\pi \sin \beta d\beta} \\
 &= \frac{h\nu_0}{c} \frac{1}{8\pi} 2\pi \int_0^\pi \int_0^\pi (\cos \beta - \cos \alpha) \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta \\
 &= \frac{h\nu_0}{4c} \left( \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^\pi \cos \beta \sin \beta d\beta - \int_0^\pi \sin \beta d\beta \int_0^\pi \cos \alpha \sin \alpha d\alpha \right) \\
 &= \frac{h\nu_0}{4c} (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

V případě izotropního záření je tedy výsledná zářivá síla nulová v radiálním směru a analogicky i v ostatních směrech. V hlubokých vrstvách hvězd, kde zářivý přenos energie převažuje nad konvekcí a gradient intenzity záření je poměrně malý, proto nedochází k makroskopickým pohybům látky. V povrchových vrstvách hvězdy, kde ve směru od centra hvězdy přichází intenzivní záření a z opačného směru téměř žádné, už ale rozptyl vyvolává zářivou sílu, jako kdyby atomy ve stejné míře záření absorbovaly.

Jak jsme již zmínili, drtivá většina zářivé síly pochází z rozptylu na rezonančních čarách, zejména v ultrafialové (UV) oblasti. Urychlení atomů na únikovou rychlost, která činí stovky km/s, vyžaduje obrovské množství rozptylů v krátkém sledu. V rezonančních čarách má plyn mnohem větší opacitu, takže jsou pro urychlování atomů výrazně efektivnější než kontinuum a slabší čáry. Ze vztahu 2.5 vyplývá, že velikost zářivé síly je přímo úměrná frekvenci záření. Příspěvek rentgenového a extrémního UV záření je ale pro urychlování hvězdného větru výrazně limitován tím, že do povrchových vrstev hvězdy se záření o takto vysoké frekvenci nedostane v dostatečném množství, takže oblast dalekého UV je ve výsledku neefektivnější.

Zdaleka nejvíce jsou rozptylem záření urychlovány ionty C, N, O, Ne, Si, P, S a prvků skupiny železa, protože mají mnoho rezonančních čar v ultrafialové oblasti a dostatečně velkou abundanci, aby plyn byl v jejich rezonančních čarách opticky tlustý. Vodík výrazně přispět nemůže, protože bývá v horkých hvězdách téměř plně ionizován a samotný proton nemá vázané stavy. Atomy He jsou buď také plně ionizované ( $\text{He}^{2+}$ ), v případě iontu  $\text{He}^+$  pak mají rezonanční čáry až v oblasti extrémního UV, kde ani horké hvězdy příliš nezáří. I když záření urychluje vybrané ionty těžších prvků mnohem více než ostatní atomy, částice plazmatu spolu neustále interagují, a to i mimo srážky, takže příslušné ionty nabranou hybnost a energii sdílejí se všemi okolními částicemi a jsou tím samy bržděny – proces zvaný „Coulomb coupling“ (jako český překlad můžeme použít „tření v důsledku coulombovských srážek“). Tento proces je efektivní, pokud je splněna podmínka

$$\frac{L_* v}{\dot{M}} < 5,9 \cdot 10^{16}, \quad (2.8)$$

kde  $L_*$  je zářivý výkon hvězdy v jednotkách  $L_\odot$ ,  $v$  je rychlost urychlených iontů v  $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$  a  $\dot{M}$  je rychlost ztráty hmoty v jednotkách  $M_\odot/\text{rok}$ .

U hvězd spektrální třídy O a horkých podtříd B tato podmínka bývá splněna. Hvězdný vítr těchto hvězd je proto tvořen plazmatem, které má takřka stejné složení jako hvězdná atmosféra.

## 2.2 Profily čar hvězdného větru

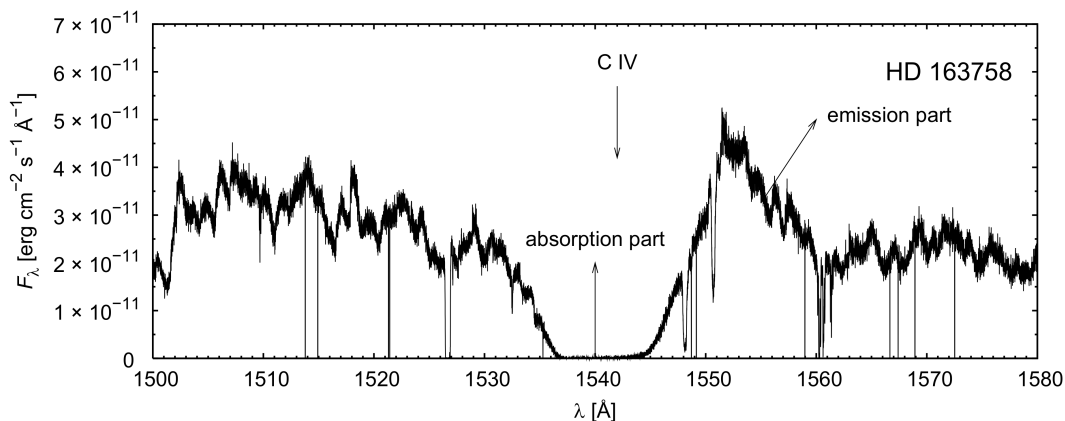
Spektrální čáry vznikající ve hvězdném větru mohou mít absorpční profil, emisní profil nebo kombinaci obojího – tzv. profil typu P Cyg. Podle tohoto profilu, který mají zejména rezonanční čáry, můžeme jednoznačně poznat jejich původ ve hvězdném větru.

Absorpci způsobuje především rozptyl v příslušné čáře – fotony s danou frekvencí přicházející z hvězdy bývají absorbovány a následně emitovány do náhodného směru, v blízkosti povrchu často zpět do hvězdy, čímž se snižuje množství vyzařovaného záření. Absorpční profil proto často mají slabší čáry, jejichž původ ve hvězdném větru se dá poznat podle toho, že jejich profil jeví výrazný modrý posuv vůči čarám hvězdné atmosféry.

Emisi způsobují především dva procesy. Jedním z nich je rekombinace – pokud se k atomu (obvykle ke kladnému iontu) přiblíží volný elektron, může rekombinovat do vázaného stavu atomu a vyzářit foton odpovídající rozdílu energií. Většinou rekombinuje do základního stavu, při čemž vzniká foton kontinua, dochází ale i k rekombinaci do excitovaného stavu a následné kaskádě zářivých deexcitací do základního stavu. Při tom vznikají nové fotony ve spektrálních čarách daného atomu. Nejvýznamnější je tento proces u vodíku, který je zastoupen v největším množství a je převážně ionizován, takže přirozeně dochází k mnoha srážkám protonu s volným elektronem a navíc ve větru ani v atmosféře nemá vodík v čarách výraznou absorpci. Tímto procesem vzniká ve hvězdném větru např. emisní profil čáry  $H\alpha$  nebo infračervených čar.

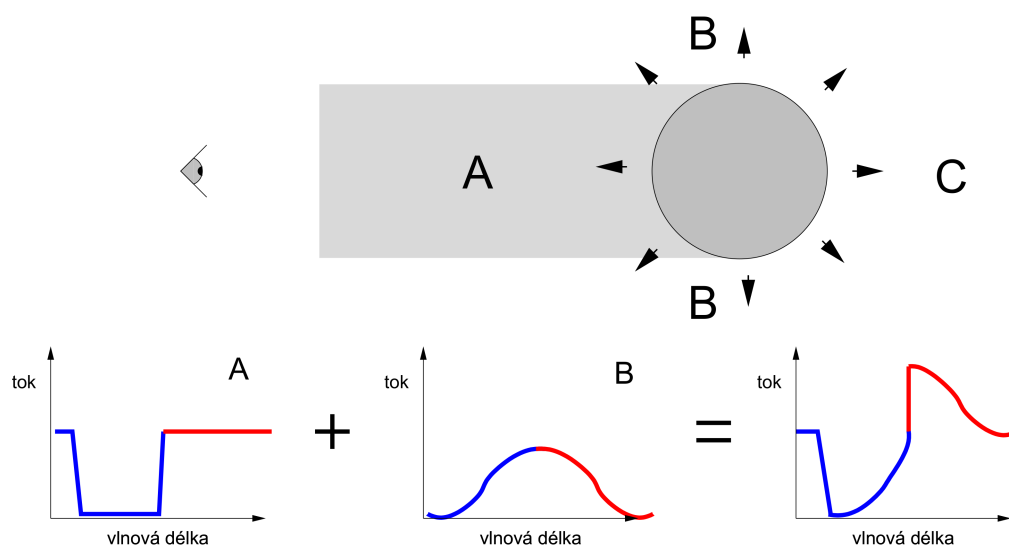
Druhým významným procesem vzniku emisních čar je srážková excitace – při vysokoenergetických srážkách atomů s volnými elektrony, případně mezi atomy, může dojít k excitaci atomu na úkor kinetické energie částic (tzv. nepružná srážka). K tomuto procesu dochází zejména v plazmatu s velmi vysokou teplotou (tzn. vysokou kinetickou energií částic). Typickým příkladem je emise vznikající v chromosféře a koróně hvězd. I ve hvězdném větru však tento proces může k emisi nezanedbatelně přispět.

Nejvýznamnějším pro výzkum hvězdného větru je profil typu P Cyg, který se skládá z modře posunuté absorpce a červeně posunuté emise, viz obrázek 2.2. Jeho vznik je způsoben především rozptylem záření v příslušné čáře stejně jako v případě absorpčního profilu. Aby se měřitelně projevila emisní část a čára tak získala profil typu P Cyg, musí v dané čáře docházet k velkému množství rozptylů – to je splněno pouze v případě rezonančních čar prvků s vysokou abundancí (které jsou zároveň dominantním zdrojem urychlování hvězdného větru). Přítomnost profilů typu P Cyg ve spektru jednoznačně vypovídá o silném hvězdném větru. Analýzou profilu dané čáry je také možné přímo určit rychlost ztráty hmoty  $\dot{M}$  a terminální rychlost  $v_\infty$ , nebo alespoň její dolní limitu.



Obrázek 2.1: Příklad profilu typu P Cyg ve spektru hvězdy HD 163758. Převzato z [8].

Podrobněji je vznik profilu typu P Cyg popsán na obrázcích 2.2 a 2.3. Máme-li elementární slupku hvězdného větru o poloměru  $r$  a tloušťce  $\Delta r$ , jejíž rychlost expanze je mezi  $v$  a  $v + \Delta v$ , tato slupka bude do absorpční části profilu přispívat úzkým pásem pro dopplerovský posuv od  $-v$  do  $-v(1 - \cos \Theta_*)$ , kde  $\Theta_*$  je úhlová velikost poloměru hvězdného kotouče ve vzdálenosti  $r$  (tzn.  $\sin \Theta_* = R_*/r$ ). Do emisní části pak bude přispívat širším pásem od  $-v(1 - \cos \Theta_*)$  do  $+v(1 - \cos \Theta_*)$ .



Obrázek 2.2: Základní popis tvorby profilu typu P Cyg. Převzato z [8].

Sečtením příspěvků jednotlivých slupek dostaneme výsledný tvar profilu typu P Cyg s absorpcí od  $-v_\infty$  do 0 a emisí od 0 téměř k  $+v_\infty$  (ne však úplně), viz obr. 2.4. Reálné profily se ale od tohoto ideálního případu mohou lišit v několika ohledech. Poměr mezi emisní a absorpční částí profilu závisí hlavně na poměru mezi velikostí hvězdy a velikostí oblasti hvězdného větru, v níž dochází k rozptylu – pokud je oblast menší, hvězda zakrývá výraznější část emise. Daná spektrální čára také může mít absorpční profil ve fotosféře, což poměr emise ku absorpci rovněž snižuje. Ve hvězdném větru navíc může docházet k ionizaci vlivem rázových vln, takže některé ionty se vyskytují pouze v oblastech  $v(r) < v_{\text{ion}}$  – potom je profil zúžený a místo k  $v_\infty$  dosahuje pouze k  $v_{\text{ion}}$ , respektive pouze v oblastech  $v(r) > v_{\text{ion}}$  – potom v profilu chybí oblast od  $-v_{\text{ion}}$  do  $+v_{\text{ion}}$ . V neposlední řadě se zde může projevit nehomogenita větru, kdy se daný iont vyskytuje v určitých slupkách  $r_+$  ve zvýšeném množství – potom jsou v profilu patrné „prohlubně“ v oblastech příslušných  $v(r_+)$ .

Tento popis platí za předpokladu, že rozšíření způsobené tepelným pohybem je zanedbatelné a míra absorpce  $\phi(v)$  je v každém místě dána  $\delta$ -funkcí (Sobolevova aproximace).

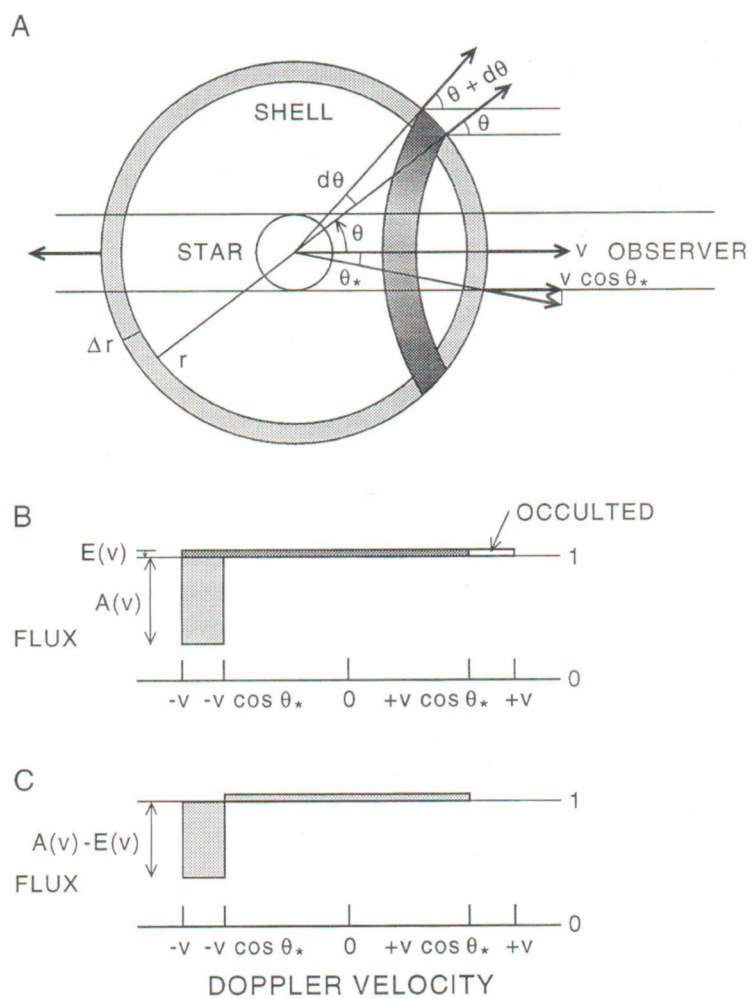
## 2.3 Úniková rychlost a terminální rychlost

Únikovou rychlostí z hvězdy  $v_{\text{esc}}$  nazýváme minimální rychlost v kladném směru  $r$ , kterou musí mít částice na povrchu hvězdy, aby unikla z jejího gravitačního pole. Je-li na povrchu  $v_r = v_{\text{esc}}$ , potom  $v \rightarrow 0$  pro  $r \rightarrow \infty$ . Newtonův vztah pro únikovou rychlost vychází ze zákona zachování energie.

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 + \frac{GmM_*}{R_*} = 0 \quad (2.9)$$

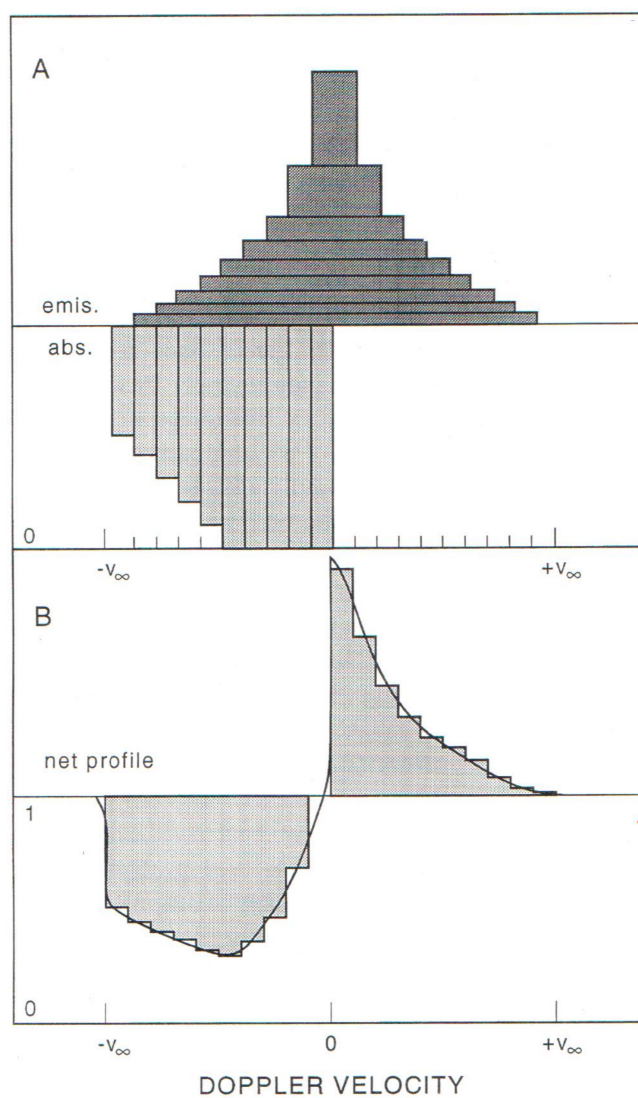
$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM_*/R_*},$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $M_*$  je hmotnost hvězdy,  $R_*$  je poloměr hvězdy a  $m$  je (nepodstatná) hmotnost částice.



Obrázek 2.3: Příspěvek elementární slupky hvězdného větru do profilu typu P Cyg. Převzato z [2].





Obrázek 2.4: Detailnější popis toho, jak vzniká profil typu P Cyg na základě elementárních spektrálních příspěvků v jednotlivých vzdálenostech. Převzato z [2].

Jak vidíme, úniková rychlost souvisí s podstatnými veličinami jako hmotnost a poloměr hvězdy, které je těžké měřit přímo. Z tohoto důvodu je přínosné, pokud jsme schopni alespoň odhadnout přibližnou hodnotu  $v_{\text{esc}}$ . V tom nám právě může napomoci měření terminální rychlosti hvězdného větru  $v_{\infty}$  v kombinaci s teoretickým modelováním hvězdného větru, které nám pomůže určit poměr mezi  $v_{\infty}$  a  $v_{\text{esc}}$ . Ve výpočtu  $v_{\text{esc}}$  je ale oproti vztahu 2.9 drobná komplikace.

V horkých hvězdách spektrální třídy O a B (i některých veleobrech třídy A), jejichž záření je schopno pohánět hvězdný vítr, totiž vlivem tohoto záření dochází zároveň k efektivnímu snížení gravitační síly v důsledku Thomsonova rozptylu na volných elektronech. Vztah pro efektivní únikovou rychlost tedy je

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2(1 - \Gamma_e) GM_*/R_*}, \quad (2.10)$$

kde  $\Gamma_e$  je konstanta udávající poměr velikosti zářivé síly spojené s Thomsonovým rozptylem vůči gravitační síle a je dána vztahem

$$\Gamma_e = \frac{\sigma_e L_*}{4\pi c GM_*}, \quad (2.11)$$

kde  $\sigma_e$  je koeficient udávající četnost Thomsonova rozptylu. Jeho hodnotu v horkých hvězdách odhadujeme  $\sigma_e \simeq 0,30 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$ .

Vztah mezi  $v_{\text{esc}}$  a  $v_{\infty}$  zkoumali Lamers et al. v [9] na základě různých NLTE modelů a analýzy profilů typu P Cyg. Výsledkem jsou data, z nichž Lamers a Cassinelli v [2] sestavili graf na obrázku 2.5. Na tomto grafu je znázorněna závislost  $\frac{v_{\text{esc}}}{v_{\infty}}$  na efektivní teplotě  $T_{\text{eff}}$ . Dají se zde jasně rozlišit tři přibližně lineární závislosti  $v_{\infty} \approx 2,6 v_{\text{esc}}$  pro  $T_{\text{eff}} > 21000 \text{ K}$ ,  $v_{\infty} \approx 1,3 v_{\text{esc}}$  pro  $21000 \text{ K} > T_{\text{eff}} > 10000 \text{ K}$  a  $v_{\infty} \approx 0,7 v_{\text{esc}}$  pro  $T_{\text{eff}} < 10000 \text{ K}$ . Tyto různé závislosti jsou zřejmě důsledkem toho, že v okolí teplot 10000 K a 21000 K dochází k prudké změně ionizačního stavu mnoha těžších prvků a v každém z těchto tří teplotních pásem je hvězdný vítr urychlován zcela jinými spektrálními čarami.

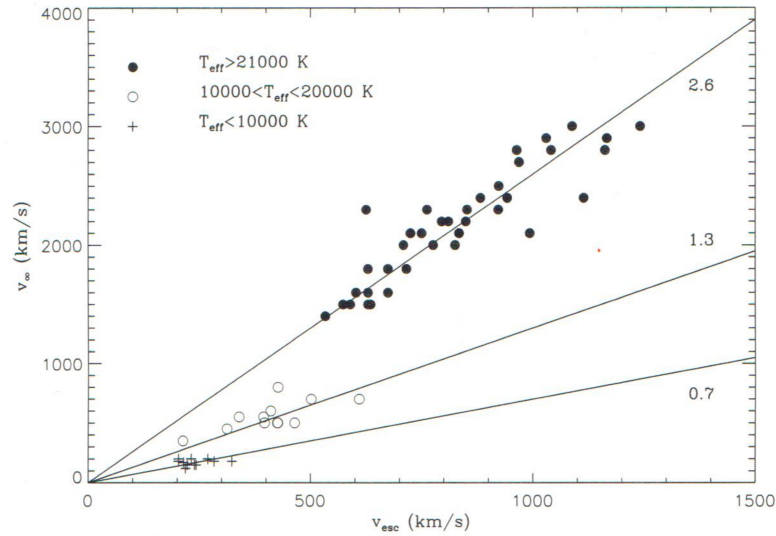
## 2.4 Rychlost ztráty hmoty

Podle dostupných modelů hvězdného větru urychlovaného zářením by rychlost ztráty hmoty  $\dot{M}$  měla záviset na zářivém výkonu  $L_*$  a efektivní hmotnosti hvězdy  $M_{\text{eff}} = M_* \cdot (1 - \Gamma_e)$  způsobem

$$\dot{M} \propto L_*^{1/\alpha} \cdot M_{\text{eff}}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \quad (2.12)$$

kde  $\alpha$  je parametr udávající efektivitu urychlování hmoty zářením. Pro horké hvězdy spektrálních tříd O a B se odhaduje hodnota  $\alpha \approx 0,6$ .

Určení  $\dot{M}$  je možné především analýzou profilů spektrálních čar. Využívají se v tomto ohledu jak ultrafialové čáry, tak čára H $\alpha$ . Zdrojem informací bývá také rádiová emise. Ze stejných zdrojů můžeme často vyčíst i hodnotu terminální rychlosti. Místo  $\dot{M}$  je tedy někdy lepší jako měřenou veličinu používat tzv. *hybnost hvězdného větru*  $\dot{M}v_{\infty}$  (reálně se jedná o složku celkové hybnosti ve směru  $r$  hvězdného větru uvolněného za jednotku času potom, co byl urychlen na terminální rychlost). Jednak tím můžeme snížit závislost dané veličiny



Obrázek 2.5: Graf závislosti terminální rychlosti hvězdného větru na únikové rychlosti pro hvězdy různé teploty. Převzato z [2].

na hmotnosti hvězdy, která se obvykle nedá přímo měřit a bývá tedy zdaleka největším zdrojem nejistoty. Protože  $v_\infty \propto v_{esc} \propto \sqrt{\frac{M_{eff}}{R_*}}$ , platí úměrnost

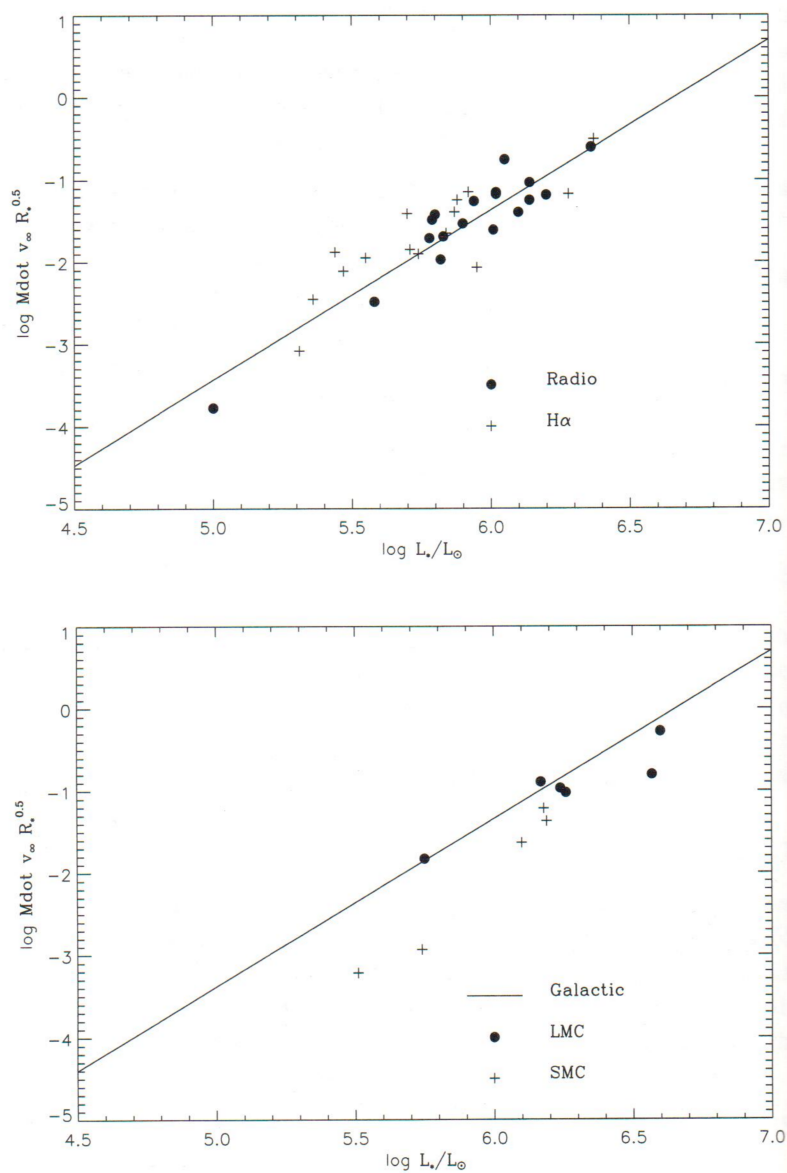
$$\dot{M}v_\infty \propto R_*^{-\frac{1}{2}} \cdot L_*^{1/\alpha} \cdot M_{eff}^{\frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{1}{2}}, \quad (2.13)$$

takže pro  $\alpha = 0,6$  je  $\dot{M}v_\infty \propto M_{eff}^{-\frac{1}{6}}$ . Kromě toho je důležité srovnání  $\dot{M}v_\infty$  s hybností fotonů  $L_*/c$  (v tomto případě se jedná o součet velikostí hybnosti fotonů vyzářených za jednotku času – od určité vzdálenosti od povrchu hvězdy ale můžeme předpokládat, že všechny fotony se pohybují ve směru  $r$ ). V případě, že každý vyzářený foton je právě jednou rozptýlen, platí  $\dot{M}v_\infty = L_*/c$ . To je samozřejmě krajní případ, což znamená, že hybnost fotonů nám udává maximální možnou hodnotu hybnosti hvězdného větru urychleného pozorovaným zářením hvězdy – tzv. *limita jednoho rozptylu*. Podmínka  $\dot{M}v_\infty \leq L_*/c$  podle dosavadních pozorování je spolehlivě splněna u horkých hvězd třídy O a B, bývá však výrazně porušena u Wolfových-Rayetových hvězd – u těch pozorujeme hodnoty  $\frac{\dot{M}v_\infty}{L_*/c}$  v rozpětí od 2 až do 100. Z toho plyne, že jejich extrémně silný hvězdný vítr nemůže být zářením urychlován jen na povrchu hvězdy. Částice hvězdného větru WR hvězd jsou tedy zřejmě urychlovány již v hlubších vrstvách hvězdné atmosféry.

Hybnost hvězdného větru je užitečná k tomu, abychom eliminovali závislost na  $M_*$ . Stále se však jedná o veličinu závislou minimálně na dvou proměnných. Z tohoto důvodu zavádíme tzv. *modifikovanou hybnost hvězdného větru*  $\dot{M}v_\infty R_*^{1/2}$ , u níž můžeme předpokládat, že závisí pouze na  $L_*$ . Její střední hodnotu pro hvězdy v Galaxii odvodili Lamers a Cassinelli jako

$$\log \left( \dot{M}v_\infty R_*^{1/2} \right) = -1,37 + 2,07 \log \left( L_*/10^6 \right), \quad (2.14)$$

kde  $\dot{M}$  je v  $M_\odot \text{rok}^{-1}$ ,  $v_\infty$  je v  $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $R_*$  je v  $R_\odot$  a  $L_*$  je v  $L_\odot$ .



Obrázek 2.6: Nahoře: Graf modifikované hybnosti hvězdného větru v závislosti na zářivém výkonu pro hvězdy v Galaxii s odvozenou závislostí. Dole: Srovnání několika známých hodnot modifikované hybnosti hvězdného větru hvězd v Magellanových mračcích s odvozenou závislostí pro Galaxii. Převzato z [2].

Na obrázku 2.6 je graf  $\log(\dot{M}v_\infty R_*^{1/2})$  v závislosti na  $L_*$  pro hvězdy v Galaxii s vyznačenou lineární závislostí a stejný graf porovnávající několik známých hvězd v Magellanových mračcích se závislostí pro galaktické hvězdy. Teoreticky očekáváme, že

$$\log(\dot{M}v_\infty R_*^{1/2}) \propto Z, \quad (2.15)$$

kde  $Z$  je metalicita. Na dolním grafu je vidět, že modifikovaná hybnost hvězdného větru je nižší u hvězd ve Velkém Magellanově mračnu a ještě nižší v Malém Magellanově mračnu. Uvedené grafy jsou tedy konzistentní s očekávanou zákonitostí.

# Kapitola 3

## Vela X-1

### 3.1 Základní informace

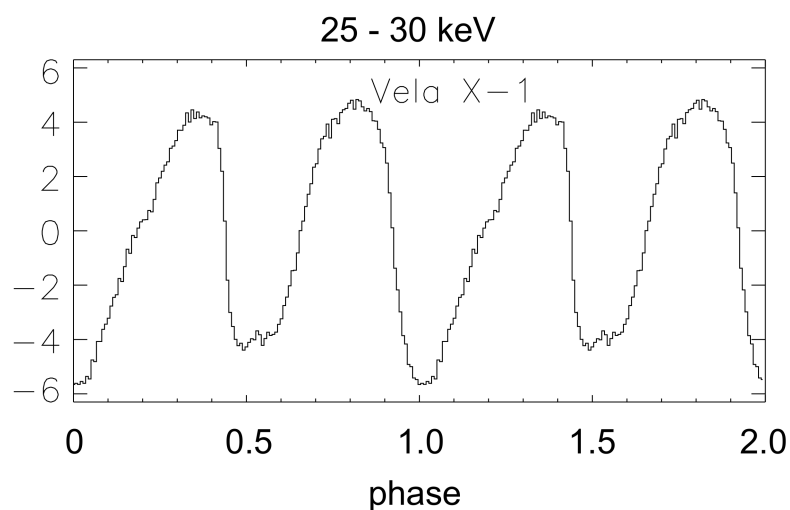
Vela X-1, známá též jako GP Vel a HD 77581, je těsná dvojhvězda skládající se z neutronové hvězdy o hmotnosti  $1,88 M_{\odot}$  a modrého veleobra třídy B0.5Iae o hmotnosti  $23,5 M_{\odot}$  a poloměru  $30 R_{\odot}$  s efektivní povrchovou teplotou  $T_{\text{eff}} = 27000 \text{ K}$  [6]. Jejich oběžná doba je zhruba 8,96 dní se střední vzdáleností  $53,4 R_{\odot}$  [6] – kompaktní souputník je tedy od povrchu primární složky vzdálen méně, než je její vlastní poloměr.

Krtička, Kubát a Skalický v [6] předkládají výsledky svých NLTE modelů hvězdného větru. Podle nich by rychlost ztráty hmoty měla být přibližně  $\dot{M} = 1,5 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ , což je obtížné ověřit pozorováním, ale tento odhad odpovídá odhadům jiných autorů na základě jiných metod (např. Watanabe et al. [5]). Terminální rychlost hvězdného větru by pak měla být  $v_{\infty} = 750 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , což zcela neodpovídá pozorováním profilů typu P Cyg, na jejichž základě Prinja et al. [7] odvodili  $v_{\infty} = 1100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  [7]. Jako možná vysvětlení této nesrovnalosti nabízejí vysokou citlivost modelu na ionizaci ve vzdálenějších oblastech větru, zjednodušující předpoklady modelu, případně nepřesné parametry hvězdy (např. metalicita).

### 3.2 Rentgenové pulzy

Kompaktní složka dvojhvězdy je zdrojem poměrně silných rentgenových pulzů, opakujících se s přibližnou pravidelností s periodou 283 s [6]. Na základě tohoto jevu je Vela X-1 i jiné objekty jí podobné nazývána (podle našeho názoru matoucí) výrazem „rentgenový pulzar“. Průběh těchto pulzů v několika různých frekvenčních pásmech je vidět na obrázku 3.1. Rentgenové záření tohoto systému, které podrobně zkoumali Watanabe et al. [5], vzniká jako důsledek akrece hvězdného větru primární složky z oblasti gravitačního vlivu kompaktní složky. To znamená, že nám právě může o hvězdném větru mnoho napovědět.

Perioda pulzací je zřejmě dána rotační periodou neutronové hvězdy. V akreci hvězdného větru hraje dominantní roli silné magnetické pole v blízkém okolí kompaktní složky. Elektricky nabitě částice plazmatu jsou vedeny po spirále podél magnetických siločar a následně dopadají v drtivé většině na oblasti kolem magnetických pólů, které se tak stávají hlavním zdrojem rentgenového záření. Tím je dána struktura pulzů na obrázku 3.1.



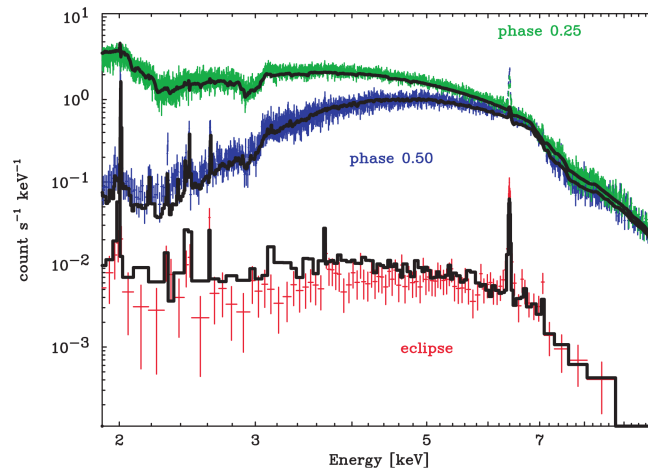
Obrázek 3.1: Fázový diagram intenzity rentgenové emise pro periodu 283 s ve frekvenčním pásmu 25-30 keV. Převzato z [10].

Mimo tuto základní strukturu je ve fázovém diagramu vidět složitější proměnnost, která je pravděpodobně způsobena nehomogenitou hvězdného větru.

### 3.3 Ionizace hvězdného větru RTG zářením

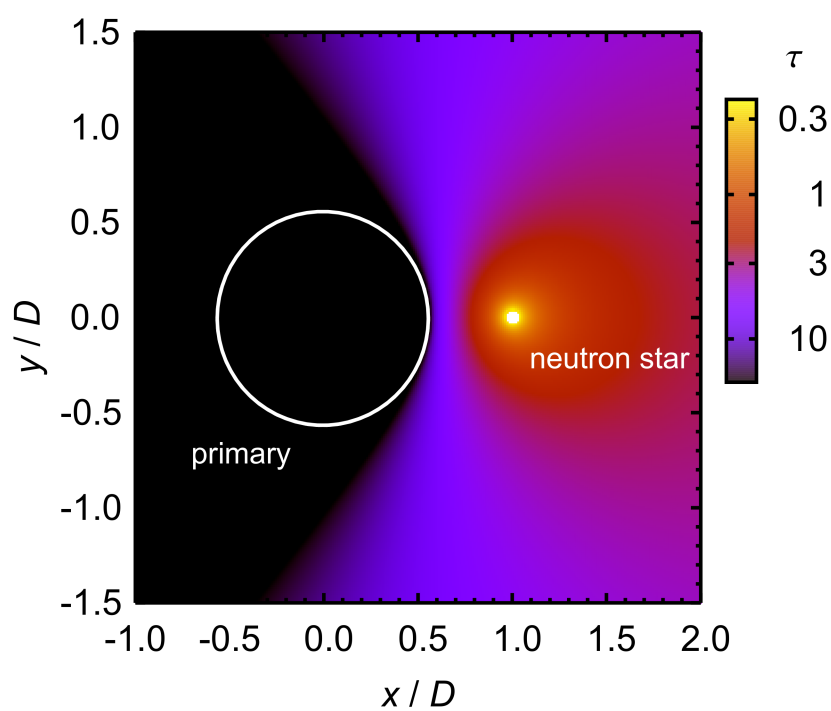
Nejdůležitější pro nás ale je způsob, jakým rentgenové záření zpětně ovlivňuje hvězdný vítr. V okolí neutronové hvězdy totiž dochází k silné ionizaci látky, což má za následek snížení opacity v oblasti ultrafialového a viditelného záření, protože rezonanční čáry prvků podstatných k urychlování hvězdného větru ve vyšším stupni ionizace již nejsou v oblasti UV, ale v oblasti tvrdého rentgenového záření, kterého vyzařuje daleko více neutronová hvězda než primární složka. To vede k tomu, že chování hvězdného větru je obecně anizotropní. Míra anizotropie je ilustrována na obrázku 3.3 na základě optické hloubky záření na energii 830 eV.

Tato anizotropní opacita a s ní související anizotropní velikost zářivé síly má za následek jednak různý průběh  $v_r(r)$  pro různé úhly vůči spojnici složek dvojhvězdy, který je znázorněn na obrázku 3.4, ale také různý průběh  $\rho(r)$  a  $T(r)$ . Náš model hvězdného větru musí zohlednit průběhy těchto veličin ve dvou dimenzích  $r, \theta$ .

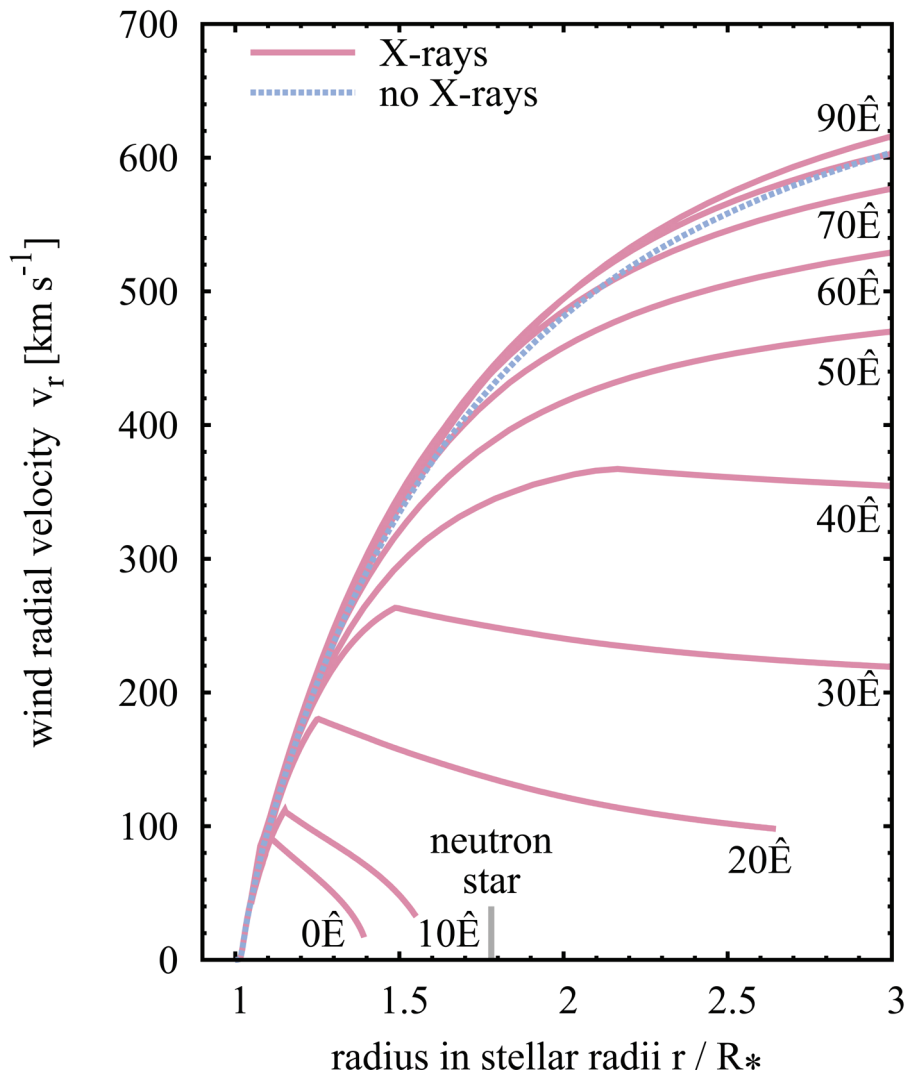


Obrázek 3.2: Spektrum rentgenové emise ve třech různých fázích oběhu složek dvojhvězdy, proložené modelovým spektrem. Převzato z [5].





Obrázek 3.3: Optická hloubka jednotlivých míst vůči rentgenovému záření vycházejícímu z neutronové hvězdy pro frekvenci odpovídající energii fotonu 830 eV. Souřadnice na osách jsou v jednotkách  $D$  – vzdálenosti neutronové hvězdy od primární složky. Převzato z [6].



Obrázek 3.4: Průběh radiální rychlosti hvězdného větru v závislosti na vzdálenosti od primární složky pro jednotlivé úhly vůči spojnici obou složek na základě NLTE modelů Krtičky et al. spolu se simulovaným výchozím průběhem radiální rychlosti bez přítomnosti rentgenového záření. Převzato z [6].

# Kapitola 4

## Náš model

### 4.1 Předpoklady

Pro zjednodušení zavádíme v našem modelu několik předpokladů ohledně zkoumaného systému Vela X-1.

Zprvė předpokládáme, že systém je stacionární. Oběžná doba dvou složek je v řádu dní, zatímco hvězdný vítr se dostane do mezihvězdného prostoru v řádu hodin, takže drobný posun sekundární složky v čase můžeme zanedbat.

Dále předpokládáme, že systém je ve všech ohledech osově symetrický vůči spojnici mezi složkami. Díky tomu můžeme počítat veličiny v polárních souřadnicích a s jedním úhlem natočení systému vůči nám.

### 4.2 Data

Naším úkolem je vymodelovat spektrální profily vybraných rezonančních čar vznikajících ve hvězdném větru primární složky Vela X-1. Jako základ nám posloužila data od Krtičky et al. získaná pomocí modelu METUJE [6]. Tato data obsahují hodnoty  $r$ [cm],  $v_r$ [m · s<sup>-1</sup>],  $\rho$ [kg · m<sup>-3</sup>],  $T$ [K] a obsazení energetických hladin 16 nejvíce zastoupených prvků ve vybraných bodech (kterých jsou dohromady zhruba dva tisíce) a jsou rozdělena do souborů pro jednotlivé hodnoty  $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$  a  $90^\circ$ . Pro každý úhel jsme obdrželi zvlášt' soubor se základními veličinami, který jsme pojmenovali  $\theta_0$ ,  $\theta_5$  atd., a zvlášt' soubor s obsazením energetických hladin. V důsledku složitěho průběhu veličin při nízkých úhlech jsme se rozhodli použít pouze hodnoty od  $\theta = 20^\circ$  (datových bodů tedy zbylo zhruba tisíc).

Ve skriptu nejprve definujeme polární souřadnice – vzdálenost od středu primární složky  $r$  a úhel  $\theta$  vůči ose dvojhvězdy. Kromě nich také budeme potřebovat úhel  $\theta_E$  vůči spojnici se Zemí.

```
def radius(x,y,z): return numpy.sqrt(x**2+y**2+z**2)
def theta(x,y,z): return 180/numpy.pi*numpy.arccos( \
(x/numpy.sin(alfarad) + z/numpy.cos(alfarad)) / (2*radius(x,y,z)))
def thetaE(x,y,z): return 180/numpy.pi*numpy.arccos(z/radius(x,y,z))
```

(alfarad – úhel natočení  $\alpha$  v radiánech)

Protože modelovat můžeme pouze profily těch čar, které ve spektrech mají výrazný profil typu P Cyg, což jsou v našem případě rezonanční dublety C IV, N V a Si IV, přepokopírovali jsme hodnoty obsazení základní a prvních dvou excitovaných hladin těchto tří iontů do nových souborů, které jsme pojmenovali vždy podle iontu, úhlu  $\theta$  a hladiny „CIV20base.csv“, „CIV20exc1.csv“, „CIV20exc2.csv“ apod. U iontu Si IV bylo v souborech uvedeno obsazení excitované hladiny, jako by se jednalo o jednu hladinu, bez ohledu na její reálné rozštěpení na dvě – v tomto případě jsme na základě známe násobnosti hladin  $g_1 = 4$  a  $g_2 = 2$  [E1] a toho, že jsou na takřka stejné energii, odhadli, že  $\frac{2}{3}$  z těchto iontů jsou na první a  $\frac{1}{3}$  na druhé excitované hladině.

K načtení dat ze všech souborů jsme použili strukturu dictionary, z níž jsme následně převedli data do proměnných typu numpy array:

```
dic={}
r_grid= numpy.array([])
theta_grid= numpy.array([])
vr_grid= numpy.array([])
rho_grid= numpy.array([])
T_grid= numpy.array([])
Cbase_grid= numpy.array([])
Cexc1_grid= numpy.array([])
Cexc2_grid= numpy.array([])
Sibase_grid= numpy.array([])
Siexc_grid= numpy.array([])
Nbase_grid= numpy.array([])
Nexc1_grid= numpy.array([])
Nexc2_grid= numpy.array([])

deg= (20,25,30,35,40,50,60,70,80,90)
for i in deg:
dic["r"+str(i)] = numpy.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,1]*1e-12
dic["Npoints"+str(i)]= len(numpy.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,0])
dic["theta"+str(i)]= i*numpy.ones(dic["Npoints"+str(i)])
dic["vr"+str(i)] = numpy.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,2]
dic["rho"+str(i)] = numpy.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,3]*1000
dic["T"+str(i)] = numpy.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,4]
dic["CIVbase"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/CIV"+str(i)+"base.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
dic["CIVexc1"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/CIV"+str(i)+"exc1.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
dic["CIVexc2"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/CIV"+str(i)+"exc2.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
dic["SiIVbase"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/SiIV"+str(i)+"base.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
dic["SiIVexc"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/SiIV"+str(i)+"exc.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
```

```

dic["NVbase"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/NV"+str(i)+"base.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
dic["NVexc1"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/NV"+str(i)+"exc1.csv",\
    delimiter=";")[:,3]
dic["NVexc2"+str(i)]= numpy.loadtxt("data/NV"+str(i)+"exc2.csv",\
    delimiter=";")[:,3]

r_grid= numpy.concatenate((r_grid, dic["r"+str(i)]), axis=0)
theta_grid= numpy.concatenate((theta_grid, dic["theta"+str(i)]), \
    axis=0)
vr_grid= numpy.concatenate((vr_grid, dic["vr"+str(i)]), axis=0)
rho_grid= numpy.concatenate((rho_grid, dic["rho"+str(i)]), axis=0)
T_grid= numpy.concatenate((T_grid, dic["T"+str(i)]), axis=0)
Cbase_grid= numpy.concatenate((Cbase_grid, dic["CIVbase"+str(i)]), \
    axis=0)
Cexc1_grid= numpy.concatenate((Cexc1_grid, dic["CIVexc1"+str(i)]), \
    axis=0)
Cexc2_grid= numpy.concatenate((Cexc2_grid, dic["CIVexc2"+str(i)]), \
    axis=0)
Sibase_grid= numpy.concatenate((Sibase_grid, \
    dic["SiIVbase"+str(i)]), axis=0)
Siexc_grid= numpy.concatenate((Siexc_grid, dic["SiIVexc"+str(i)]), \
    axis=0)
Nbase_grid= numpy.concatenate((Nbase_grid, dic["NVbase"+str(i)]), \
    axis=0)
Nexc1_grid= numpy.concatenate((Nexc1_grid, dic["NVexc1"+str(i)]), \
    axis=0)
Nexc2_grid= numpy.concatenate((Nexc2_grid, dic["NVexc2"+str(i)]), \
    axis=0)

```

( $r$  násobíme  $10^{-12}$  kvůli následujícímu kroku v odstavci 4.3)

Protože data máme pouze pro úhly  $\theta$  do  $90^\circ$ , průběh veličin dodefinujeme předpokladem, že se dále nemění. Pro úhly  $\theta > 90^\circ$  tedy uvažujeme  $\theta = 90^\circ$ .

```

if theta(x,y,z) > 90:
    th= 90
else:
    th= theta(x,y,z)

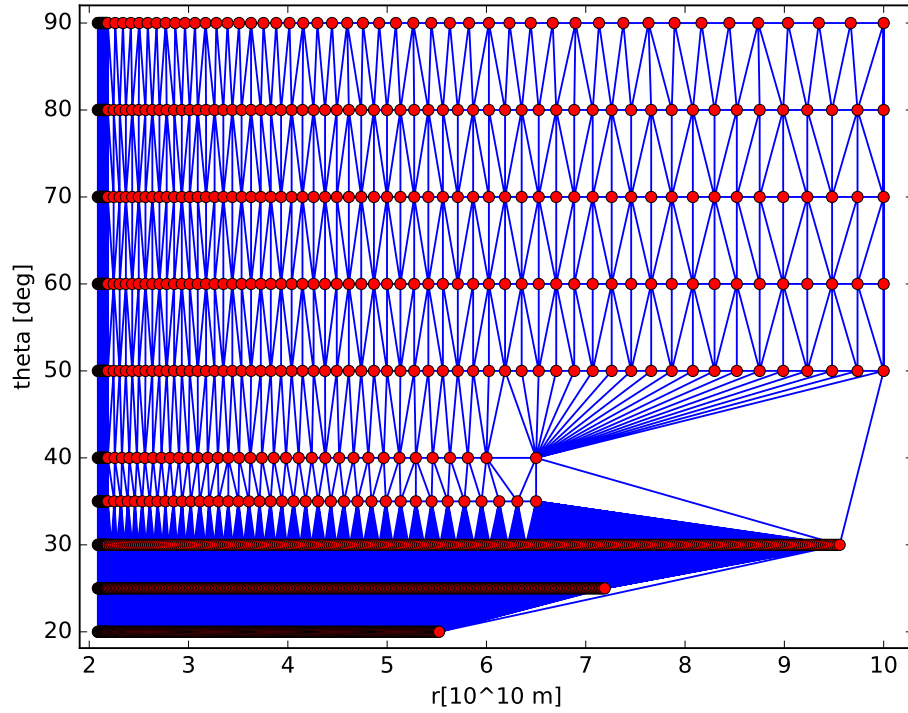
```

### 4.3 Interpolace dat

Abychom aproximovali obecný průběh všech příslušných veličin, provedeme Delaunayovu triangulaci známých bodů v polárních souřadnicích  $r\theta$ . Modul `scipy` obsahuje tuto funkci v podmodulu `scipy.spatial`. Aby tato funkce propojila body správně, musely

však dosazované hodnoty  $r$  být zadány v  $10^{10}$  m, aby byly řádově srovnatelné s hodnotami  $\theta$ .

```
triang= scipy.spatial.Delaunay(numpy.stack((r_grid,theta_grid), \
axis=1))
```



Obrázek 4.1: Triangulace datových bodů v rovině  $r\theta$

Vzniklé trojúhelníky následně vždy proložíme rovinou (v polárních souřadnicích  $r\theta$ ), kterou udávají vrcholy daného trojúhelníku.

Rovnice roviny dané trojúhelníkem  $ABC$  v libovolném prostoru  $\xi\omega\zeta$ , platná zvlášť pro každý z vrcholů má tvar

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \xi_A + k_2 \cdot \omega_A + k_3 \cdot \zeta_A + k_4 &= 0, \\ k_1 \cdot \xi_B + k_2 \cdot \omega_B + k_3 \cdot \zeta_B + k_4 &= 0, \\ k_1 \cdot \xi_C + k_2 \cdot \omega_C + k_3 \cdot \zeta_C + k_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pokud odečteme první rovnici od zbývajících dvou, dostaneme

$$\begin{aligned} \zeta_B - \zeta_A &= -\frac{k_1}{k_3} (\xi_B - \xi_A) - \frac{k_2}{k_3} (\omega_B - \omega_A) \\ &= K_1 (\xi_B - \xi_A) + K_2 (\omega_B - \omega_A), \\ \zeta_C - \zeta_A &= -\frac{k_1}{k_3} (\xi_C - \xi_A) - \frac{k_2}{k_3} (\omega_C - \omega_A) \\ &= K_1 (\xi_C - \xi_A) + K_2 (\omega_C - \omega_A). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Máme tedy soustavu 2 rovnic o 2 neznámých  $K_1$  a  $K_2$ , jejímž řešením dostaneme

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{(\zeta_C - \zeta_A) - (\zeta_B - \zeta_A) \cdot \frac{\omega_C - \omega_A}{\omega_B - \omega_A}}{(\xi_C - \xi_A) - (\xi_B - \xi_A) \cdot \frac{\omega_C - \omega_A}{\omega_B - \omega_A}}, \\ K_2 &= \frac{\zeta_B - \zeta_A}{\omega_B - \omega_A} - \frac{\xi_B - \xi_A}{\omega_B - \omega_A} \cdot K_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

V našem případě nevyjadřujeme rovinu v kartézských, ale v polárních souřadnicích, tzn.  $\xi \rightarrow r$ ,  $\omega \rightarrow \theta$ ,  $\zeta \rightarrow X$ . Hodnota dané veličiny  $X$  v libovolném bodě o kartézských souřadnicích  $x, y, z$  a sférických souřadnicích  $r, \theta, \phi$ , který se nachází v daném polárním trojúhelníku o vrcholech  $ABC$ , potom je dána rovnicí roviny

$$\begin{aligned} X(r, \theta, \phi) &= X_A + K_1 \cdot (r - r_A) + K_2 \cdot (\theta - \theta_A) \\ &= X_A + K_1 \cdot \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_A \right) + \\ &\quad + K_2 \cdot \left( \arccos \frac{1}{2r} \left( \frac{x}{\sin \alpha} + \frac{z}{\cos \alpha} \right) - \theta_A \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde  $\alpha$  je úhel, který osa dvojhvězdy svírá se směrem k Zemi.

Konstanty

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{(X_C - X_A) - (X_B - X_A) \cdot \frac{\theta_C - \theta_A}{\theta_B - \theta_A}}{(r_C - r_A) - (r_B - r_A) \cdot \frac{\theta_C - \theta_A}{\theta_B - \theta_A}}, \\ K_2 &= \frac{X_B - X_A}{\theta_B - \theta_A} - \frac{r_B - r_A}{\theta_B - \theta_A} \cdot K_1. \end{aligned}$$

Pokud  $\theta_B = \theta_A$ , je třeba zaměnit označení bodů B a C, abychom se vyhnuli dělení nulou.

Když známe polární souřadnice bodu, použijeme funkci `find_simplex` k nalezení vrcholů trojúhelníku, v němž se nachází.

```
simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
```

Pokud se bod nachází mimo interpolovanou oblast (reprezentováno simplexem číslo -1), hodnotu všech veličin bereme 0. Stejně tak vynulujeme tři trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou každý v jiném  $\theta$  (jejich indexy jsou 2, 4 a 304).

```
if simplex in (-1,2,4,304):
    return 0
```

S výjimkou těchto případů pak zjistíme hodnotu  $X$  použitím rovnice 4.4.

```
def X(x,y,z):
    if theta(x,y,z) > 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
```

```

if simplex in (-1,2,4,304):
    return 0
else:
    rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
    thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
    XA, XB, XC= vr_grid[triang.simplices[simplex]]
    if thA==thB:
        # záměna bodů B a C
        fn= thB
        thB= thC
        thC= fn
        fn= rB
        rB= rC
        rC= fn
        fn= XB
        XB= XC
        XC= fn
    K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA))\
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
    K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
    result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
    return result

```

Tímto způsobem definujeme  $v_r$  ( $vr$ ),  $\rho$  ( $rho$ ),  $T$  ( $T$ ) a relativní obsazení hladin ( $n1crel$ ,  $nuc1rel$ ,  $nuc2rel$ ,  $nlnrel$ ,  $nun1rel$ ,  $nun2rel$ ,  $nlsirel$ ,  $nusirel$ ). Excitované hladiny Si doplníme jako

```

def nus1rel(x,y,z): return nusirel(x,y,z)*(1/3)
def nus2rel(x,y,z): return nusirel(x,y,z)*(2/3)

```

## 4.4 Spektrální profil v pohybujícím se větru

V daném místě vždy předpokládáme, že absorpční i emisní profil odpovídají Gaussově funkci způsobené Dopplerovým jevem  $\Phi(v, v_0) = \sqrt{\frac{c^2}{\pi v_{tep} v_0^2}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{c}{v_{tep}} \frac{v-v_0}{v_0}\right)^2\right]$ , kde  $v_{tep} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$  je střední velikost průmětu rychlosti tepelného pohybu daných iontů s hmotností  $m$  do libovolného daného směru a  $v_0$  je výchozí vlnová délka daného přechodu.

Vlivem Dopplerovského posuvu dochází k tomu, že  $v_0 \rightarrow v_0 \cdot \left(1 + \frac{v_r}{c} \cdot \cos \theta_E\right)$  v případě emise a  $v_0 \rightarrow v_0 \cdot \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$  v případě absorpce. Obecný vzorec profilu v závislosti na  $v_r$  v daném místě při absorpci potom je

$$\Phi_{abs}(v, x, y, z) \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \frac{c}{v_0} \cdot \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT} \cdot \left[\frac{v - v_0 \cdot \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)}{v_0}\right]^2\right) \quad (4.5)$$



Tabulka 4.1: Abundance prvků vyjádřené logaritmičticky jako  $\epsilon_H = \log\left(\frac{n_{\text{prvek}}}{n_H}\right) + 12$ 

prvek	abundance
C	$8,43 \pm 0,05$
N	$7,83 \pm 0,05$
Si	$7,51 \pm 0,03$

a při emisi

$$\Phi_{\text{em}}(\mathbf{v}, x, y, z) \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \frac{c}{v_0} \cdot \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT} \cdot \left[\frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \cdot \left(1 + \frac{v_r}{c} \cdot \cos \theta_E\right)}{v_0}\right]^2\right). \quad (4.6)$$

Ve skriptu musíme zohlednit také případ mimo interpolovanou oblast, kdy všechny veličiny včetně  $T$  udáváme jako nulové. Nastavením  $\Phi(\mathbf{v}) = 0$  v takovém případě pak docílíme toho, že  $\chi = 0$  a  $\eta = 0$ .

```
def profileEm(freq, freq0, x, y, z):
    if T(x, y, z) == 0: return 0
    else: return np.sqrt(m/(2*np.pi*kB*T(x, y, z))) * c / freq0 * \
        np.exp(-m*c**2*(freq-freq0*(1 + vr(x, y, z) \
        c*cosThetaE(x, y, z)))**2 / \
        (2*kB*T(x, y, z)*freq0**2))

def profileAbs(freq, freq0, x, y, z):
    if T(x, y, z) == 0: return 0
    else: return np.sqrt(m/(2*np.pi*kB*T(x, y, z))) * c / freq0 * \
        np.exp(-m*c**2*(freq-freq0*(1 + vr(x, y, z)/c))**2 / \
        (2*kB*T(x, y, z)*freq0**2))
```

## 4.5 Koncentrace iontů na dané hladině

Ke zjištění opacity a emisivity je nutné vědět, jaká je prostorová koncentrace iontů na konkrétních energetické hladině. Tu můžeme vyjádřit jako

$$n_{\text{hladina}} = \frac{n_{\text{hladina}}}{n_{\text{prvek}}} \cdot \frac{n_{\text{prvek}}}{n_H} \cdot n_H. \quad (4.7)$$

V souborech jsou uvedeny hodnoty  $\frac{n_{\text{hladina}}}{n_{\text{prvek}}}$ .  $\frac{n_{\text{prvek}}}{n_H}$  přibližně určíme za předpokladu, že Vela X-1 má podobné složení jako Slunce. Abundanci prvků ve sluneční fotosféře jsme převzali od Asplunda et al. [4]. Koncentraci vodíku nakonec aproximujeme na základě hustoty podle zjednodušujícího předpokladu, že  $n_H \approx \frac{\rho}{m_H}$ .

## 4.6 Parametry spektrálních čar

K modelování profilu jsme vybrali rezonanční dublety C IV 1548,202 Å + 1550,774 Å, N V 1238,821 Å + 1242,804 Å a Si IV 1393,76 Å + 1402,77 Å.

Tabulka 4.2: Vlnové délky, Einsteinovy koeficienty a degenerace energetických stavů pro vybrané přechody

iont	$\lambda_0$ [Å]	$A_{ul}$ [s <sup>-1</sup> ]	$g_l$	$g_u$
C IV	1548,202	$2,65 \cdot 10^8$	2	4
	1550,774	$2,64 \cdot 10^8$	2	4
N V	1238,821	$3,40 \cdot 10^8$	2	4
	1242,804	$3,37 \cdot 10^8$	2	2
Si IV	1393,76	$8,80 \cdot 10^8$	2	4
	1402,77	$8,63 \cdot 10^8$	2	2

## 4.7 Rovnice přenosu záření

Konečně když máme zjištěny všechny výše zmíněné údaje, můžeme z nich vyjádřit nezbytné veličiny, které potřebujeme pro výpočet spektra. Těmi jsou opacita  $\chi$  a emisivita  $\eta$ , které vystupují v rovnici přenosu záření. Vyjádřit se dají jako

$$\chi(\nu, x, y, z) = n_l(x, y, z) \cdot \Phi(\nu) \cdot B_{lu}, \quad (4.8)$$

$$\eta(\nu, x, y, z) = n_u(x, y, z) \cdot \Phi(\nu) \cdot A_{ul}, \quad (4.9)$$

kde  $n_{l/u}$  je koncentrace iontů na dolní/horní hladině příslušného přechodu,  $\Phi(\nu)$  je spektrální profil přechodu,  $B_{lu}$  je Einsteinův koeficient absorpce pro daný přechod a  $A_{ul}$  je Einsteinův koeficient spontánní emise.

Toto platí pro jednu spektrální čáru. V našem případě ale modelujeme vždy dublet, skládající se ze dvou blízkých čar, jejichž profily se zčásti překrývají. Výsledná opacita a emisivita je potom vždy součtem opacity a emisivity pro oba přechody.

$$\begin{aligned} \chi(\nu, x, y, z) &= \chi_1(\nu, x, y, z) + \chi_2(\nu, x, y, z) \\ &= n_l(x, y, z) \cdot \Phi_1(\nu) \cdot B_{lu1} + n_l(x, y, z) \cdot \Phi_2(\nu) \cdot B_{lu2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \eta(\nu, x, y, z) &= \eta_1(\nu, x, y, z) + \eta_2(\nu, x, y, z) \\ &= n_{u2}(x, y, z) \cdot \Phi_1(\nu) \cdot A_{ul1} + n_{u1}(x, y, z) \cdot \Phi_2(\nu) \cdot A_{ul2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

(Zde je důležité uvědomit si, že energetické hladiny jsou číslovány vzestupně podle energie, zatímco čáry dubletu jsou číslovány vzestupně ne podle frekvence, ale podle vlnové délky. To znamená, že v 1. přechodu figuruje 2. excitovaná hladina a ve 2. přechodu figuruje 1. excitovaná hladina.)

```

def opac(freq,x,y,z):
    return h*freq/4/np.pi *( profileAbs(freq,c/lam01,x,y,z)\
    *(nlcrel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Blu1 -\
    nuc2rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Bul1) + \
    profileAbs(freq,c/lam02,x,y,z)*(nlcrel(x,y,z)*10**(XtoH-12)\
    *rho(x,y,z)/mH*Blu2 -\
    nuc1rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Bul2))
def emis(freq,x,y,z):
    return h*freq/4/np.pi *( profileEm(freq,c/lam01,x,y,z)\
    *nuc2rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Aul1 +\
    profileEm(freq,c/lam02,x,y,z)*\
    nuc1rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Aul2)

```

V našem případě počítáme soustavu paprsků rovnoběžných s osou  $z$ . Tvar rovnice přenosu záření tedy je

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu - \chi_\nu \cdot I_\nu. \quad (4.12)$$

Cílem výpočtu je zjistit průběh  $I_\nu(z)$  pro vybrané hodnoty  $\nu$  ve vybraných bodech  $(x,y)$ , které tvoří pravouhlou mříž. Definujeme tedy krychli o hraně velikosti  $d = 3 \cdot 10^{11}$  m, která pokryje celou interpolovanou oblast. Kolmý průřez této krychle rozdělíme na  $N \times N$  čtverců o ploše  $\Delta S = \left(\frac{d}{N}\right)^2$ , v jejichž střezech jsou jednotlivé paprsky. Ty buď vycházejí z povrchu hvězdy, nebo jdou mimo hvězdu a začínají na  $z = -\frac{d}{2}$ . Pro každý paprsek a každou vlnovou délku pak vyřešíme rovnici přenosu záření pomocí funkce `odeint` z balíčku `scipy.integrate`. Tato funkce integruje obyčejné diferenciální rovnice Runge-Kuttovou metodou 4. či 5. řádu.

Nejprve vytvoříme array pro hodnoty frekvence a vlnové délky a array pro hodnoty výsledného toku záření směrem k nám

```

fPoints= np.linspace(fend, fstart, Nlam+1)
lamPoints= np.zeros(len(fPoints))
Flam= np.zeros(len(fPoints))

```

Počáteční intenzitu  $I_0$  zvolíme nulovou pro paprsky jdoucí mimo hvězdu. Pro paprsky vycházející z povrchu hvězdy předpokládáme, že je dána Planckovou funkcí  $I_0 = B_\nu(\nu, T_{\text{surf}}) =$  při dané povrchové teplotě  $T_{\text{surf}} = 27000$  K.

```

for x in np.linspace(-d/2*(1-1/N), d/2*(1-1/N), N):
    print(x)
    for y in np.linspace(-d/2*(1-1/N), d/2*(1-1/N), N):
        k=0
        if x**2+y**2<=Rstar**2:
            z0= np.sqrt(Rstar**2-x**2-y**2)
            I0= 2*h*c/lam01**3 /(np.exp(h*c/(lam01*kB*Tsurf)) -1)
        else:
            I0= 0
            z0= -d/2

```

```
for freq in fPoints:
    zmax= d/2
    zgrid= np.linspace(z0, zmax, Nz+1)
    def fun(I,z):
        return emis(freq,x,y,z) - opac(freq,x,y,z)*I # dI/dz
    I= scipy.integrate.odeint(fun, I0, zgrid)
    finalIlamA= I[Nz]*freq**2/c *1e-10
    lamPoints[k]= c/freq
    Flam[k]+= finalIlamA *(d/N)**2 /distin**2
    k+=1
```

Na závěr pak výsledné spektrum uložíme do textového souboru, případně ještě zobrazíme jako graf pomocí modulu matplotlib.

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(lamPoints, finalIlam)
plt.show()
```

# Kapitola 5

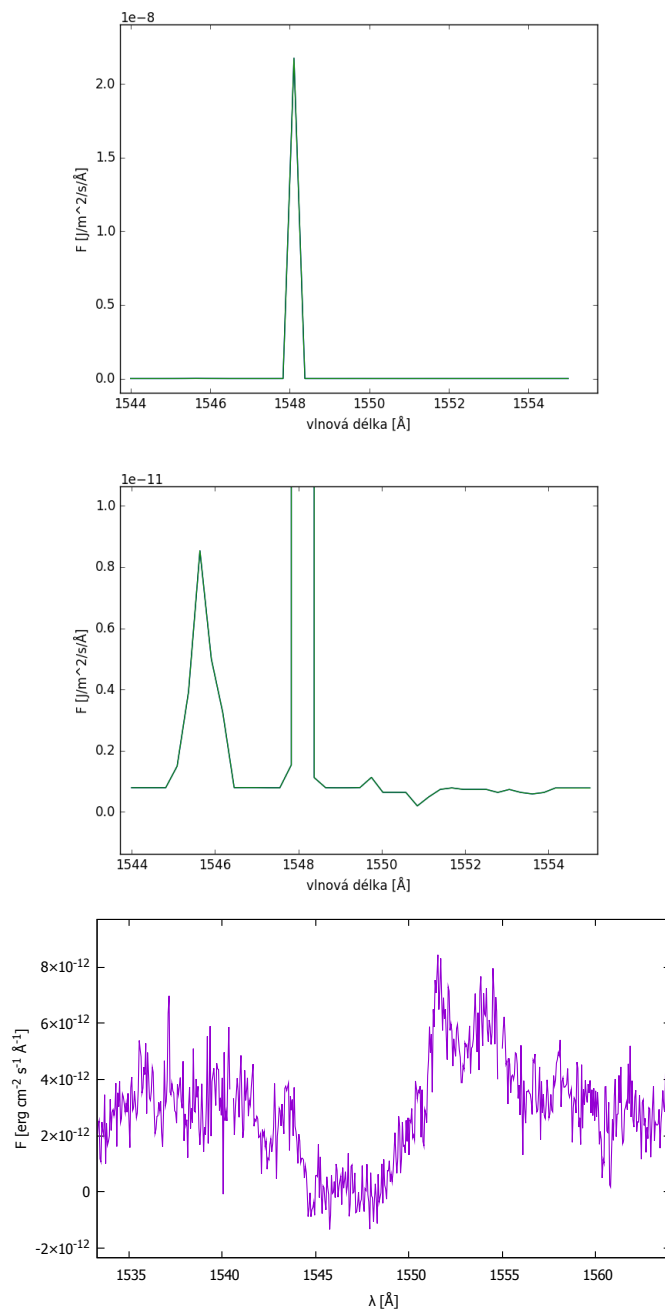
## Výsledky a diskuze

Výsledná spektra, která náš program vypočítal, bohužel ani zdaleka neodpovídají pozorování. V každém z nich je extrémně velká emise v okolí  $\lambda_0$  pro jednu či obě čáry dubletu. Kromě toho v nich zcela chybí absorpce, viz obrázek 5.1. V programu se tedy zřejmě nachází hrubá chyba. Oblastí, kde tato chyba může být, je více.

Nejpravděpodobnější je chyba v samotné integraci rovnice přenosu záření. Paprsky vycházející z povrchu hvězdy by měly vytvářet široký absorpční profil. Celý problém může být způsoben numerickou chybou v průběhu funkce `odeint`, která počítá hodnotu opacity a emisivity ve vybraných bodech paprsku a na jejich základě určuje průběh intenzity. Zdá se, že výpočet v určitých místech překračuje maximální možnou relativní přesnost formátu `float64`, která činí  $2^{-53} \approx 10^{-16}$ . Brát v potaz tuto limitaci by vyžadovalo od základů upravit algoritmus.

Problémem je možná také volba  $I_0$ . Je-li rovna Planckově funkci, potom by pro hodnoty v oblasti dalekého UV záření měla spektrální hustota toku záření být zhruba  $10^{-13} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{\AA}^{-1}$ . Pozorovaný tok v kontinuu je ale kolem  $5 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{\AA}^{-1} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{\AA}^{-1}$ , což je více než o řád méně.

Další problém se může nacházet v tom, že jsme pro absorpční a emisní profil v daném místě počítali pouze s Dopplerovým rozšířením v důsledku tepelného pohybu částic, jehož profil má mnohem užší křídla než reálné profily čar. To může ještě více zhoršovat omezenou přesnost výpočtu, pokud hodnoty blízké nule v křídlech profilu jsou vyhodnoceny jako nulové. Mnohem lepší aproximací rozšíření čar je Voigtův profil, který je ale složitější.



Obrázek 5.1: Nahoře: Vypočtený spektrální profil dubletu C IV 1548,202 Å a 1550,774 Å pro  $\alpha = 20^\circ$ . Uprostřed: Detail vypočteného spektra. Dole: Pozorovaný profil typu P Cyg ve spektru Vela X-1 pořízeném družicí IUE. Převzato z [E2]

# Kapitola 6

## Závěr

Cílem naší práce bylo vytvořit v Pythonu program pro výpočet spektrálního profilu čar, které vznikají v anizotropním hvězdném větru. Studijním případem pro nás byla soustava dvojhvězdy Vela X-1. Podkladem pro náš model byla data od Kubáta et al. získaná pomocí modelu METUJE, simulujícího hvězdnou atmosféru a hvězdný vítr jako jedno kontinuální prostředí.

Náš algoritmus načítá data z textových souborů pomocí funkce `loadtxt` z modulu `numpy`. Následně tato data interpolujeme rovinami v polárních souřadnicích pomocí triangulační funkce `Delaunay` z modulu `scipy`. Tímto způsobem definujeme obecný průběh  $v_r$ ,  $\rho$ ,  $T$  a obsazení tří nejnižších hladin C, N a Si. Absorpční a emisní profil v libovolném daném místě počítáme jako Gaussovu funkci danou Dopplerovým jevem v důsledku tepelného pohybu částic. Vrchol funkce je na frekvenci, která je posunutá vůči výchozí frekvenci přechodu  $\nu_0$  v důsledku Dopplerova posuvu pro radiální rychlost  $v_r$  v případě absorpce a pro průmět radiální rychlosti do směru k nám  $v_r \cdot \cos(\theta_E)$  v případě emise. Na základě známých hodnot Einsteinových koeficientů pro zkoumané přechody a za předpokladu, že abundance jednotlivých prvků je podobná jako na Slunci, pak počítáme opacitu a emisivitu. Tyto dvě veličiny nakonec dosazujeme do rovnice přenosu záření, kterou počítáme pomocí funkce `odeint` pro sadu paprsků rovnoběžných s osou  $z$ , z nichž každému přiřazujeme čtvercovou plochu v rovině  $xy$ .

Program bohužel dává zcela chybné výsledky, což je pravděpodobně způsobeno tím, že formát `float64` umožňuje pouze omezenou relativní přesnost hodnot. Náš výpočet nebral v potaz toto omezení a pro úspěšné použití tak bude zřejmě nutné upravit hlavní část výpočtu na základě osvědčených metod pro výpočet rovnice přenosu záření.

# Seznam použité literatury

- [1] Hubený, I., Mihalas, D. *Theory of Stellar Atmospheres*
- [2] LAMERS H. J. G. L. M., CASSINELLI J.P. *Introduction to Stellar Winds*. Cambridge University Press 1999  
ISBN 0 521 59565 7
- [3] GAIA COLLABORATION *Gaia DR2 – CDS/ADC Collection of Electronic Catalogues*, 1345, 0 (2018)
- [4] ASPLUND M. et al. *Astronomy and Astrophysics* 47:481-522, 2009
- [5] Watanabe S., Sako M., Ishida M., Ishisaki Y., Kahn S. M., Kohmura T., Nagase F., Paerels F., Takahashi T. *X-ray Spectral Study of the Photoionized Stellar Wind in Vela X-1*. *The Astrophysical Journal* 651:421-437, 2006
- [6] KRTIČKA J., KUBÁT J., SKALICKÝ J. *X-ray Photoionized Bubble in the Wind of Vela X-1 Supergiant Companion*
- [7] Prinja R. K., Barlow R. J. *Terminal Velocities for a Large Sample of O Stars, B Supergiants and Wolf-Rayet Stars*. *The Astrophysical Journal* 361:607-620, 1990
- [8] KRTIČKA J. *Horké hvězdy II*, Brno 2015
- [9] LAMERS H. J. G. L. M., SNOW T. P., LINDHOLM D. M. *Terminal Velocities and the Bistability of Stellar Winds*, *The Astrophysical Journal* 455:269-285, 1995
- [10] BILDSTEN L. et al. *Observations of Accreting Pulsars*, *Astrophysical Journal Supplements* 1997, 113, 2

## Elektronické zdroje

- [E1] NIST Atomic Spectra Database Lines Form  
[https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines\\_form.html](https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html)
- [E2] Mikulski Archive for Space Telescopes  
<http://archive.stsci.edu/>



# Příloha

Zde je kompletní algoritmus, který jsme použili.

```
import numpy as np
import scipy.spatial
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt

c=299792458
h=6.626e-34
kB= 1.38e-23
mH= 1.66e-27

d= 3e11 # rozměr krychle, kterou počítáme (v m)
alfadeg= # SEM ZADEJDE INKLINACI VE STUPNÍCH
alfarad= alfadeg*np.pi/180
Rstar= 2.0865240e10
Tsurf= 27000
distanpc= 2605
distanm= distanpc * 3.26 *c *365.25*24*3600

lam0C1= 1548.202e-10
lam0C2= 1550.774e-10
lam0N1= 1238.821e-10
lam0N2= 1242.804e-10
lam0Si1= 1393.76e-10
lam0Si2= 1402.77e-10
lam01= #lam0C1 / lam0N1 / lam0Si1
lam02= #lam0C2 / lam0N2 / lam0Si2
Matom= # 12.0096 /14.006 / 28.084
lamstart= # rozpětí počítaných vlnových délek
lamend= #
fstart= c/lamend
fend= c/lamstart
gl=2
gu1=2
gu2=4
m= Matom*mH
```

```
AulC1= 2.65e8
AulC2= 2.64e8
AulN1= 3.40e8
AulN2= 3.37e8
AulSi1= 8.80e8
AulSi2= 8.63e8
Aul1= # AulC1 / AulN1 / AulSi1
Aul2= # AulC2 / AulN2 / AulSi2
```

```
Bul1= Aul1*lam01**3 / (2*h*c)
Bul2= Aul2*lam02**3 / (2*h*c)
Blu1= Bul1* gu2/gl
Blu2= Bul2* gu1/gl
```

```
CtoH= 8.43
NtoH= 7.83
SitoH= 7.51
XtoH= # CtoH / NtoH / SitoH
```

```
dic={}
r_grid= np.array([])
theta_grid= np.array([])
vr_grid= np.array([])
rho_grid= np.array([])
T_grid= np.array([])
Cbase_grid= np.array([])
Cexc1_grid= np.array([])
Cexc2_grid= np.array([])
Sibase_grid= np.array([])
Siexc_grid= np.array([])
Nbase_grid= np.array([])
Nexc1_grid= np.array([])
Nexc2_grid= np.array([])
```

```
deg= (20,25,30,35,40,50,60,70,80,90)
```

```
for i in deg:
    dic["r"+str(i)] = np.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,1]*1e-12
    dic["Npoints"+str(i)]= len(np.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,0])
    dic["theta"+str(i)]= i*np.ones(dic["Npoints"+str(i)])
    dic["vr"+str(i)] = np.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,2]
    dic["rho"+str(i)] = np.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,3]*1000
    dic["T"+str(i)] = np.loadtxt("data/theta"+str(i))[:,4]
```

```
dic["CIVbase"+str(i)]= np.loadtxt("data/CIV"+str(i)+ \
    "base.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["CIVexc1"+str(i)]= np.loadtxt("data/CIV"+str(i)+ \
    "exc1.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["CIVexc2"+str(i)]= np.loadtxt("data/CIV"+str(i)+ \
    "exc2.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["SiIVbase"+str(i)]= np.loadtxt("data/SiIV"+str(i)+ \
    "base.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["SiIVexc"+str(i)]= np.loadtxt("data/SiIV"+str(i)+ \
    "exc.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["NVbase"+str(i)]= np.loadtxt("data/NV"+str(i)+ \
    "base.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["NVexc1"+str(i)]= np.loadtxt("data/NV"+str(i)+ \
    "exc1.csv", delimiter=";")[:,3]
dic["NVexc2"+str(i)]= np.loadtxt("data/NV"+str(i)+ \
    "exc2.csv", delimiter=";")[:,3]

r_grid= np.concatenate((r_grid, dic["r"+str(i)]), axis=0)
theta_grid= np.concatenate((theta_grid, dic["theta"+str(i)]), \
    axis=0)
vr_grid= np.concatenate((vr_grid, dic["vr"+str(i)]), axis=0)
rho_grid= np.concatenate((rho_grid, dic["rho"+str(i)]), axis=0)
T_grid= np.concatenate((T_grid, dic["T"+str(i)]), axis=0)
Cbase_grid= np.concatenate((Cbase_grid, dic["CIVbase"+str(i)]), \
    axis=0)
Cexc1_grid= np.concatenate((Cexc1_grid, dic["CIVexc1"+str(i)]), \
    axis=0)
Cexc2_grid= np.concatenate((Cexc2_grid, dic["CIVexc2"+str(i)]), \
    axis=0)
Sibase_grid= np.concatenate((Sibase_grid, \
    dic["SiIVbase"+str(i)]), axis=0)
Siexc_grid= np.concatenate((Siexc_grid, dic["SiIVexc"+str(i)]), \
    axis=0)
Nbase_grid= np.concatenate((Nbase_grid, dic["NVbase"+str(i)]), \
    axis=0)
Nexc1_grid= np.concatenate((Nexc1_grid, dic["NVexc1"+str(i)]), \
    axis=0)
Nexc2_grid= np.concatenate((Nexc2_grid, dic["NVexc2"+str(i)]), \
    axis=0)

triang= scipy.spatial.Delaunay(np.stack((r_grid,theta_grid), axis=1))

def radius(x,y,z): return np.sqrt(x**2+y**2+z**2)
def cosThetaE(x,y,z): return z/radius(x,y,z)
def thetaE(x,y,z): return 180/np.pi*np.arccos(z/radius(x,y,z))
```

```
def theta(x,y,z): return 180/np.pi*np.arccos((x/np.sin(alfarad)\
+ z/np.cos(alfarad)) / (2*radius(x,y,z)))

def vr(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= vr_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
            XB= XC
            XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA))\
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
        return result

def rho(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= rho_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
```

```

        thB= thC
        thC= fn
        fn= rB
        rB= rC
        rC= fn
        fn= XB
        XB= XC
        XC= fn
    K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
    K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
    result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
    return result

def T(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= T_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
            XB= XC
            XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
            / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
        return result

def nlcrel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90

```

```
else:
    th= theta(x,y,z)
simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
if simplex in (-1,2,4,304):
    return 0
else:
    rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
    thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
    XA, XB, XC= Cbase_grid[triang.simplices[simplex]]
    if thA==thB:
        fn= thB
        thB= thC
        thC= fn
        fn= rB
        rB= rC
        rC= fn
        fn= XB
        XB= XC
        XC= fn
    K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
    K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
    result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
    return result

def nuc1rel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= Cexc1_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
```

```

        XB= XC
        XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
        return result

def nuc2rel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= Cexc2_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
            XB= XC
            XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
        return result

def nlnrel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:

```

```

rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
XA, XB, XC= Nbase_grid[triang.simplices[simplex]]
if thA==thB:
    fn= thB
    thB= thC
    thC= fn
    fn= rB
    rB= rC
    rC= fn
    fn= XB
    XB= XC
    XC= fn
K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
/ ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
return result

def nunirel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= Nexc1_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
            XB= XC
            XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
/ ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)

```



```
        return result

def nun2rel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= Nexc2_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
            XB= XC
            XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
            / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
        return result

def nlsirel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= Sibase_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
```

```

        thC= fn
        fn= rB
        rB= rC
        rC= fn
        fn= XB
        XB= XC
        XC= fn
    K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
    / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
    K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
    result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
    return result

def nusirel(x,y,z):
    if theta(x,y,z)> 90:
        th= 90
    else:
        th= theta(x,y,z)
    simplex= triang.find_simplex([radius(x,y,z)*1e-10, th])
    if simplex in (-1,2,4,304):
        return 0
    else:
        rA, rB, rC= r_grid[triang.simplices[simplex]]*1e10
        thA, thB, thC= theta_grid[triang.simplices[simplex]]
        XA, XB, XC= Siexc_grid[triang.simplices[simplex]]
        if thA==thB:
            fn= thB
            thB= thC
            thC= fn
            fn= rB
            rB= rC
            rC= fn
            fn= XB
            XB= XC
            XC= fn
        K1= ((XC-XA) - (XB-XA)*(thC-thA)/(thB-thA)) \
        / ((rC-rA) - (rB-rA)*(thC-thA)/(thB-thA))
        K2= (XB-XA)/(thB-thA) - (rB-rA)/(thB-thA)*K1
        result= XA + K1*(radius(x,y,z)-rA) + K2*(th-thA)
        return result

def nusirel(x,y,z): return nusirel(x,y,z)*(1/3)
def nusirel(x,y,z): return nusirel(x,y,z)*(2/3)

```

```

def profileEm(freq,freq0,x,y,z):
    if T(x,y,z)== 0: return 0
    else: return np.sqrt(m/(2*np.pi*kB*T(x,y,z)))*c/freq0 *\
    np.exp(-m*c**2*(freq-freq0*(1 + vr(x,y,z)/c *\
    cosThetaE(x,y,z))**2 /(2*kB*T(x,y,z)*freq0**2))

def profileAbs(freq,freq0,x,y,z):
    if T(x,y,z)== 0: return 0
    else: return np.sqrt(m/(2*np.pi*kB*T(x,y,z)))*c/freq0 *\
    np.exp(-m*c**2*(freq-freq0*(1 + vr(x,y,z)/c))**2/\
    (2*kB*T(x,y,z)*freq0**2))

def opac(freq,x,y,z): # opacita
    return h*freq/(4*np.pi) *( profileAbs(freq,c/lam01,x,y,z)*\
    (nlcrel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Blu1 -\
    nuc2rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Bul1) + \
    profileAbs(freq,c/lam02,x,y,z)*(nlcrel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*\
    rho(x,y,z)/mH*Blu2 - nuc1rel(x,y,z)*\
    10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Bul2))

def emis(freq,x,y,z): # emisivita
    return h*freq/(4*np.pi) * (profileEm(freq,c/lam01,x,y,z)*\
    nuc2rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*rho(x,y,z)/mH*Aul1 + \
    profileEm(freq,c/lam02,x,y,z)*nuc1rel(x,y,z)*10**(XtoH-12)*\
    rho(x,y,z)/mH*Aul2)

Nlam= #počet spektrální bodů
Nz= #počet bodů na paprsku
N= #počet paprsků vedle sebe v x a y
fPoints= np.linspace(fend, fstart, Nlam+1)
lamPoints= c/fPoints
Flam= np.zeros(len(fPoints))
InuCube= np.zeros((Nz+1,len(fPoints)))
for x in np.linspace(-d/2*(1-1/N), d/2*(1-1/N), N):
    print(x)
    for y in np.linspace(-d/2*(1-1/N), d/2*(1-1/N), N):
        k=0
        if x**2+y**2<=Rstar**2:
            z0= np.sqrt(Rstar**2-x**2-y**2)
            I0= 2*h*c/lam01**3 /(np.exp(h*c/(lam01*kB*Tsurf)) -1)
        else:
            I0= 0
            z0= -d/2

```

```
for freq in fPoints:
    zgrid= np.linspace(z0, d/2, Nz+1)
    def fun(I,z):
        return emis(freq,x,y,z) - opac(freq,x,y,z)*I
    I= scipy.integrate.odeint(fun, I0, zgrid)
    finalIlamA= I[Nz]*freq**2/c *1e-10
    Flam[k]+= finalIlamA *(d/N)**2 /distin**2
    k+=1

plt.xlabel("vlnová délka [Å]")
plt.ylabel("F [J/m^2/s/Å]")
plt.plot(lamPoints*1e10,Flam)
plt.show()
```

